ورقة عمل ٨ التكامل المحدود (اعتقد أن الأصح تكامل محدد)

ليكن ق اقتران متصل على الفترة [أ،ب] وليكن الاقتران م(س) معكوس مشتقة الاقتران ق على هذه الفترة

ندعو $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = [م(س)]_{أ}^{ب} = م(ب) - م(أ)$ بتكامل محدد وكل من أ الحد الأدنى للتكامل ب الحد الأعلى للتكامل

مثل : اوجد قيمة

$$\int_{-١}^{٤} ٢س\,دس = [س^{٢}]_{-١}^{٤} = ١٦ - ١ = ١٥$$

اوجد

$$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} جتاس\,دس = [جاس]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} = جا\frac{\pi}{٢} - جا٠ = ١ - ٠ = ١$$

خصائص التكامل المحدود

١- $\int_{أ}^{أ} ق(س)\,دس = ٠$ ملاحظة هذا اصطلاح وليس اثبات ولا يجوز ان نكتب الاثبات

$م(أ) - م(أ) = ٠$ لان ق ليس متصل على نقطة

٢- $\int_{أ}^{ب} (ق_{١}(س) \mp ق_{٢}(س))\,دس = \int_{أ}^{ب} ق_{١}(س)\,دس \mp \int_{أ}^{ب} ق_{٢}(س)\,دس$

٣- $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = -\int_{ب}^{أ} ق(س)\,دس$ وجدتها في المراجع اصطلاح ايضا

٤- $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\,دس + \int_{جـ}^{ب} ق(س)\,دس$ حيث أ،ب،جـ ثلاثة نقاط من فترة اتصال ق (تدعى علاقة شال)

٥- $\int_{أ}^{ب} جـ ق(س)\,دس = جـ \int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس$ جـ ثابت

مثال : اوجد قيمة $\int_{٠}^{\pi} |جتاس|\,دس$

بما انه يوجد قيمة مطلقة علينا ان نعيد تعريف الاقتران ونستخدم الخاصة ٤
نعلم ان جتاس موجب في الربعين الأول والرابع وسالب في الثاني والثالث

$$\int_{\text{٠}}^{\pi} \left|\text{جتاس}\right| \text{ءس} = \int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \text{جتاس ءس} + \int_{\frac{\pi}{\text{٢}}}^{\pi} -\text{جتاس ءس}$$

$$= \left[\text{جاس}\right]_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} - \left[\text{جاس}\right]_{\frac{\pi}{\text{٢}}}^{\pi} = \left[\text{جا}\frac{\pi}{\text{٢}} - \text{جا٠}\right] - \left[\text{جا}\pi - \text{جا}\frac{\pi}{\text{٢}}\right] = [\text{١}] - [-\text{١}] = \text{٢}$$

تدريبات :

احسب كل من

$$\text{١- } \int_{-\text{٢}}^{\text{٠}} \frac{\text{س}}{\text{س} - \text{١}} \text{ءس} = \int_{-\text{٢}}^{\text{٠}} \frac{\text{س} - \text{١} + \text{١}}{\text{س} - \text{١}} \text{ءس} = \int_{-\text{٢}}^{\text{٠}} \text{١} + \frac{\text{١}}{\text{س} - \text{١}} \text{ءس} = \left[\text{س} + \text{لو}\left|\text{س} - \text{١}\right|\right]_{-\text{٢}}^{\text{٠}}$$

$$= [\text{٠} + \text{٠}] - [-\text{٢} + \text{لو}\left|-\text{٣}\right|] = \text{٢} - \text{لو٣}$$

$$\text{٢ - } \int_{-\text{١}}^{\text{٢}} \frac{\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩}} \text{ءس} = \left[\text{لو}\left|\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩}\right|\right]_{-\text{١}}^{\text{٢}} = \text{لو٥} - \text{لو٨} = \text{لو}\frac{\text{٥}}{\text{٨}}$$

٣- وجدت التمرينين التاليين في احد المراجع وهما في غاية الجمال

$$\text{احسب } \int_{\text{٠}}^{\text{١}} \frac{\text{س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}} \text{ءس} \quad \text{واستنتج قيمة التكامل } \int_{\text{٠}}^{\text{١}} \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}} \text{ءس}$$

$$\text{الحل } \int_{\text{٠}}^{\text{١}} \frac{\text{س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}} \text{ءس} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \int_{\text{٠}}^{\text{١}} \frac{\text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}} \text{ءس} = \left[\frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{لو}\left|\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}\right|\right]_{\text{٠}}^{\text{١}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} (\text{لو٢}) = \text{لو } \sqrt{\text{٢}}$$

لاستنتاج التكامل الاخر نجمع التكاملين

$$\int_{\text{٠}}^{\text{١}} \frac{\text{س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}} \text{ءس} + \int_{\text{٠}}^{\text{١}} \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}} \text{ءس} = \int_{\text{٠}}^{\text{١}} \frac{\text{س} + \text{س}^{\text{٣}}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}} \text{ءس} = \int_{\text{٠}}^{\text{١}} \frac{\text{س}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١})}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}} \text{ءس}$$

$$= \int_{\text{٠}}^{\text{١}} \text{س ءس} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \left[\text{س}^{\text{٢}}\right]_{\text{٠}}^{\text{١}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$$

الان نعوض بدل التكامل الاول نجد

$$\text{لو } \sqrt{\text{٢}} + \int_{\text{٠}}^{\text{١}} \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}} \text{ءس} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$$

$$\int_{\text{٠}}^{\text{١}} \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}} \text{ءس} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} - \text{لو } \sqrt{\text{٢}}$$

$$\text{ب- احسب } \int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \frac{\text{جتاس}}{\text{١} + \text{٢جاس}} \text{ءس} \quad \text{واستنتج قيمة التكامل } \int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \frac{\text{جا٢س}}{\text{١} + \text{٢جاس}} \text{ءس}$$

الحل

$$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتاس}}{١+٢\text{جاس}}\,\text{ءس} = \frac{١}{٢}\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\left(١+٢\text{جاس}\right)'}{١+٢\text{جاس}}\,\text{ءس} = \left[\frac{١}{٢}\text{لــو}\left|١+٢\text{جاس}\right|\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$$= \frac{١}{٢}\left[\text{لــو}٢\right]$$

نجمع الان

$$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتاس}}{١+٢\text{جاس}}\,\text{ءس} + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}٢\text{س}}{١+٢\text{جاس}}\,\text{ءس} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتاس}+\text{جا}٢\text{س}}{١+٢\text{جاس}}\,\text{ءس} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتاس}+٢\text{جاس}\text{جتاس}}{١+٢\text{جاس}}\,\text{ءس}$$

$$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتاس}\left(١+٢\text{جاس}\right)}{١+٢\text{جاس}}\,\text{ءس} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتاس}\,\text{ءس} = \left[\text{جاس}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} = ١$$

نعوض

$$\frac{١}{٢}\text{لــو}٢ + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}٢\text{س}}{١+٢\text{جاس}}\,\text{ءس} = ١$$

$$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}٢\text{س}}{١+٢\text{جاس}}\,\text{ءس} = ١ - \frac{١}{٢}\text{لــو}٢$$

خصائص اخرى للتكامل المحدد

اذا كان ق اقتران متصل على الفترة [أ،ب] عنئذ

١- اذا كان $\text{ق}(\text{س}) \leq ٠$ فان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} \leq ٠$

٢- اذا كان $\text{ق}(\text{س}) \geq ٠$ فان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} \geq ٠$

٣- واذا كان $\text{ق}(\text{س})$،$\text{هـ}(\text{س})$ قابلين للتكامل على [أ،ب] وكان $\text{ق}(\text{س}) \leq \text{هـ}(\text{س})$ من اجل كل س∈[أ،ب]

فان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} \leq \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس}$

٤- وإذا كان $\text{ل} \geq \text{ق}(\text{س}) \geq \text{ك}$ كان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ل}\,\text{ءس} \geq \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} \geq \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك}\,\text{ءس}$

هذه الخواص تجعلنا نقدم فكرة كيف نحصر مقدار جبري بين عددين او متى يكون موجب او سالب بمعنى فكرة(الحصر)

مثلا

اذا كانت $\text{س} \in \text{ح}$ فان

$-١ \leq \text{جاس} \leq ١$

$-١ \leq \text{جتاس} \leq ١$

وإذا كانت $\text{س} \in \text{ح} - \left\{ \frac{\pi}{٢} + \text{ن}\pi \right\}$ $\text{ن} \in$ مجموعة الاعداد الصحيحة $-\infty \leq \text{ظاس} \leq \infty$

وكل من $\text{هـ}^{\text{س}} \succ ٠$ و

$\text{س} \succ ١ \Rightarrow \text{لــوس} \succ ٠$

$٠ \prec \text{س} \prec ١ \Rightarrow \text{لــوس} \prec ٠$

وإذا كانت $\text{س} \in \text{ح} - \{\text{ن}\pi\}$ $\text{ن} \in$ مجموعة الاعداد الصحيحة $-\infty \leq \text{ظتاس} \leq \infty$

مثال احصر الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = ١ - \text{جتاس}$

$\text{س} \in \text{ح} \Rightarrow \text{جتاس} \in [-١،١]$

$١ - \text{جتاس} \in [٠،٢]$

$٠ \leq \text{ق}(\text{س}) \leq ٢$

مثال احصر $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}^{٢} + ١}$

$\text{س} \in \text{ح} \Rightarrow \text{س}^{٢} \in [٠،\infty) \Rightarrow ١ + \text{س}^{٢} \in [١،\infty)$

$\frac{١}{١ + \text{س}^{٢}} \in (٠،١]$

مثال احصر $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}$

الحل لا نستطيع استخدام الطريقة السابقة لكي نجد مدى الاقتران لاننا لا نستطيع ان نقسم فترة على فترة وطبعا لا نستطيع ان نضرب فترة بعدد او نجمع لها عدد فهي غير موجودة في الرياضيات لذلك لناخذ

$\frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١} = \text{ص} \Rightarrow \text{ص}\text{س}^{٢} + \text{ص} = ٢\text{س} \Leftrightarrow \text{ص}\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + \text{ص} = ٠$ ونعلم ان ثلاثي الحدود هذا قابل للحل اذا كانت

$\Delta \geq ٠ \Rightarrow \Delta = ٤ - ٤\text{ص}\text{ص} \geq ٠$

$\Delta = ٤\left(١ - \text{ص}^{٢}\right) \geq ٠ \Leftrightarrow ١ - \text{ص}^{٢} \geq ٠ \Leftrightarrow \text{ص} \in [-١،١]$

اذا $-١ \leq \text{ق}(\text{س}) \leq ١$

كذلك تستطيع استخدام الفكرة ذاتها في حال اقتران تربيعي

مثال جد مدى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ١$

$ص = س^{٢} - ٦س + ١$

$س^{٢} - ٦س + ١ - ص = ٠$

$\Delta = ٣٦ - ٤(١)(١ - ص) \geq ٠$

$٣٦ - ٤ + ٤ص \geq ٠$

$٤ص \geq -٣٢$

$ص \geq -٨$

$ن(س) \geq -٨$

احصر التركيب $\frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ١}$

الحل

$هـ^{س} \succ ٠ \Leftarrow هـ^{س} + ١ \succ ١ \Leftarrow \frac{١}{هـ^{س} + ١} \prec ١ \Leftarrow -\frac{١}{هـ^{س} + ١} \succ -١$

$\frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ١} = \frac{هـ^{س} + ١ - ١}{هـ^{س} + ١} = ١ - \frac{١}{هـ^{س} + ١}$

$١ - \frac{١}{هـ^{س} + ١} \succ ٠$

تدريب اوجد العددين م،ك الأكبر والاصغر اذا كان $م \leq \int_{٠}^{\frac{٣\pi}{٤}} (٢ - جتا٢س) ءس \leq ك$

الحل : $٢ - جتا٢س = ١ + (١ - جتا٢س) = ١ + ٢جا^{٢}س$

$س \in \left[٠، \frac{٣\pi}{٤}\right] \Leftarrow جاس \in [٠،١]$

$جا^{٢}س \in [٠،١] \Leftrightarrow ٢جا^{٢}س \in [٠،٢]$

$١ + ٢جا^{٢}س \in [١،٣]$

$١ \leq ١ + ٢جا^{٢}س \leq ٣$

$\int_{٠}^{\frac{٣\pi}{٤}} ١ءس \leq \int_{٠}^{\frac{٣\pi}{٤}} (١ + ٢جا^{٢}س) ءس \leq \int_{٠}^{\frac{٣\pi}{٤}} ٣ءس$

$[س]_{٠}^{\frac{٣\pi}{٤}} \leq \int_{٠}^{\frac{٣\pi}{٤}} (١ + ٢جا^{٢}س) ءس \leq [٣س]_{٠}^{\frac{٣\pi}{٤}}$

$\frac{٣\pi}{٤} \leq \int_{٠}^{\frac{٣\pi}{٤}} (١ + ٢جا^{٢}س) ءس \leq \frac{٩\pi}{٤}$

إما إذا أردنا المكاملة نجد

$$\int_{0}^{\frac{3\pi}{4}} \left(2-\text{جتا}2\text{س}\right)\text{ءس} = \left[2\text{س} - \frac{1}{2}\text{جا}2\text{س}\right]_{0}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{6\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{2}$$

تدريب : اوجد العدد ك بحيث $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left|\text{جتاس}-\text{جاس}\right|\right)\text{ءس} \leq \text{ك}$

الحل

$$\text{جتاس}-\text{جاس} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\text{جتاس} - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{جاس}\right) = \sqrt{2}\left(\text{جتا}\frac{\pi}{4}\text{جتاس} - \text{جا}\frac{\pi}{4}\text{جاس}\right)$$

$$= \sqrt{2}\,\text{جتا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{س} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Leftarrow \sqrt{2}\,\text{جتا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right) \in [-1, 1] \Leftarrow \left|\sqrt{2}\,\text{جتا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leq 1$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sqrt{2}\,\text{جتا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\text{ءس} \leq \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\,\text{ءس}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sqrt{2}\,\text{جتا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\text{ءس} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ك} = \frac{\pi}{2}$$

أما التكامل

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left|\text{جتاس}-\text{جاس}\right|\right)\text{ءس} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sqrt{2}\,\text{جتا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\text{ءس}$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\,\text{جتا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)\text{ءس} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\,\text{جتا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)\text{ءس}$$

$$= \sqrt{2}\left[\text{جا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{2}\left[\text{جا}\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\sqrt{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = 2\sqrt{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

تدريب ؛

اوجد كل من م و ك اذا كان $م \le \int_{0}^{2\pi} جتا(س - جاس)ءس \le ك$

الحل : لنجد صورة الفترة $[0، 2\pi]$ وفق الاقتران المكامل

لنأخذ الاقتران $ل(س) = س - جاس$ هذا الاقتران متزايد على الفترة $[0، 2\pi]$ لان

$ل'(س) = 1 - جتاس = 2جتا^{2}\frac{س}{2} \ge 0$ لاجل جميع قيم الفترة وهذا يعني ان صورة الفترة

$[0، 2\pi]$وفق الاقتران $ل(س) = س - جاس$ هي

$ل([0، 2\pi]) = [ل(0)، ل(2\pi)] = [0، 2\pi]$

اما صورة الفترة الاخيرة $[0، 2\pi]$ وفق اقتران جتا هي $[-1، 1]$ وبالتالي

لأجل كل $س \in [0، 2\pi]$ فان

$-1 \le جتا(س - جاس) \le 1$

وبالتالي

$$\int_{0}^{2\pi} -1 ءس \le \int_{0}^{2\pi} جتا(س - جاس)ءس \le \int_{0}^{2\pi} 1 ءس$$

$$[-س]_{0}^{2\pi} \le \int_{0}^{2\pi} جتا(س - جاس)ءس \le [س]_{0}^{2\pi}$$

$$-2\pi \le \int_{0}^{2\pi} جتا(س - جاس)ءس \le 2\pi$$

اذا $م = -2\pi، ك = 2\pi$ وهما على الترتيب اكبر واصغر عدد

تدريب من اجل اكتساب مهارات الحصر

بين ان عندما $س \in [0، 1]$ $\Leftarrow \frac{س^{2}}{هـ^{س}+1} \le \frac{س}{هـ^{س}+1} \le \frac{1}{هـ^{س}+1}$ ثم حدد كل من التكاملين

$\int_{0}^{1} \frac{س^{2}}{هـ^{س}+1}ءس$ و $\int_{0}^{1} \frac{س^{2}}{هـ^{س}+1}ءس$ بعددين حيقيقين

الحل :

$$س \in [0، 1] \Leftarrow س^{2} \in [0، 1] \Leftarrow 0 \le س^{2} \le 1 \Leftarrow \frac{0}{هـ^{س}+1} \le \frac{س^{2}}{هـ^{س}+1} \le \frac{1}{هـ^{س}+1}$$

$$0 \le \frac{س^{2}}{هـ^{س}+1} \le \frac{1}{هـ^{س}+1}$$

$$\text{س}^{٢} - \text{س} = \text{س}^{٢} - \text{س} + \frac{١}{٤} - \frac{١}{٤} = \left(\text{س} - \frac{١}{٢}\right)^{٢} - \frac{١}{٤}$$

$$\text{س} \in [٠،١] \Rightarrow \text{س} - \frac{١}{٢} \in \left[-\frac{١}{٢}،\frac{١}{٢}\right] \Rightarrow \left(\text{س} - \frac{١}{٢}\right)^{٢} \in \left[٠،\frac{١}{٤}\right] \Rightarrow \left(\text{س} - \frac{١}{٢}\right)^{٢} - \frac{١}{٤} \in \left[-\frac{١}{٤}،٠\right]$$

$$-\frac{١}{٤} \le \text{س}^{٢} - \text{س} \le ٠ \Rightarrow \text{س}^{٢} \le \text{س}$$

وبالتالي $\text{س} \in [٠،١] \Rightarrow \text{س}^{٢} \le \text{س} \Rightarrow \frac{\text{س}^{٢}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١} \le \frac{\text{س}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١}$

$\text{س} \in [٠،١] \Rightarrow \frac{\text{س}^{٢}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١} \le \frac{\text{س}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١} \le \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١}$ المتباينة الخيرة محققة لان $٠ \le \text{س} \le ١$

$$٠ \le \int_{٠}^{١} \frac{\text{س}^{٢}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١} \text{ءس} \le \int_{٠}^{١} \frac{\text{س}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١} \text{ءس} \le \int_{٠}^{١} \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١} \text{ءس}$$

$$٠ \le \int_{٠}^{١} \frac{\text{س}^{٢}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١} \text{ءس} \le \int_{٠}^{١} \frac{\text{س}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١} \text{ءس} \le \int_{٠}^{١} \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١} \text{ءس}$$

$$\int_{٠}^{١} \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١} \text{ءس} = \int_{٠}^{١} \frac{١ + \text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١} \text{ءس} = \int_{٠}^{١} ١ - \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١} \text{ءس} = \left[\text{س} - \text{لو}(\text{هـ}^{\text{س}} + ١)\right]_{٠}^{١}$$

$$= [١ - \text{لو}(\text{هـ} + ١)] - [٠ - \text{لو}٢] = ١ + \text{لو}٢ - \text{لو}(\text{هـ} + ١) = \text{لو} \frac{٢\text{هـ}}{\text{هـ} + ١}$$

تدريب

اوجد كل من ك ، م اذا كان

$$\text{م} \le \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٢٥ - ٤\text{س}^{٢}}\, \text{ءس} \le \text{ك}$$

الحل :

$$\text{س} \in [-٢،٢] \Rightarrow \text{س}^{٢} \in [٠،٤] \Rightarrow ٤\text{س}^{٢} \in [٠،١٦] \Rightarrow ٢٥ - ٤\text{س}^{٢} \in [٩،٢٥] \Rightarrow \sqrt{٢٥ - ٤\text{س}^{٢}} \in [٣،٥]$$

$$\int_{-٢}^{٢} ٣\, \text{ءس} \le \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٢٥ - ٤\text{س}^{٢}}\, \text{ءس} \le \int_{-٢}^{٢} ٥\, \text{ءس}$$

$$[٣\text{س}]_{-٢}^{٢} \le \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٢٥ - ٤\text{س}^{٢}}\, \text{ءس} \le [٥\text{س}]_{-٢}^{٢}$$

$$١٢ \le \int_{-٢}^{٢} \sqrt{٢٥ - ٤\text{س}^{٢}}\, \text{ءس} \le ٢٠$$