ورقة عمل ٩ معادلات تفاضلية

اذا كان الاقتران ص = ق(س) اقتران قابل للاشتقاق مرة على الاقل على فترة مفتوحة فكل معادلة تحوي على الاقل احد مشتقات هذا الاقتران هي معادلة تفاضلية

مثال :

$$س ص' + س + ص = ٠$$

$$ص'' - س ص = ص'$$ معادلات تفاضلية

$$ص'^{٢} - ٣ص' س ص' + ص = س$$

حل المعادلة التفاضلية

اذا كان الاقتران ص = ل(س) يحقق المعادلة التفاضلية فهو حل للمعادلة

طبعا المعادلات التفاضلية بحث واسع جدا إلا أننا سندرس معادلات بسيطة (تحل بعزل المشتق ص' ثم المكاملة)

مثال اوجد حل المعادلة التفاضلية التالية

$$س ص' - ٢ص = ص'$$

الحل :

نعزل ص'

$$س ص' - ٢ص = ص'$$

$$س ص' - ص' = ٢ص$$

$$ص'(س - ١) = ٢ص$$

$$\frac{ص'}{ص} = \frac{٢}{س - ١}$$

$$\frac{ءص}{ص} = \frac{٢}{س - ١} ءس$$

$$\int \frac{ءص}{ص} = \int \frac{٢}{س - ١} ءس$$

$$لــو|ص| = ٢لــو|س - ١| + جـ$$

$$لــو|ص| = لــو|س - ١|^{٢} + جـ$$

$$لــو\frac{|ص|}{(س - ١)^{٢}} = جـ$$

$$\frac{|ص|}{(س - ١)^{٢}} = هـ^{جـ}$$

$$|ص| = هـ^{جـ} (س - ١)^{٢}$$

$$|ص| = جـ_{١} (س - ١)^{٢} \qquad ، جـ_{١} = هـ^{جـ}$$

ويمكن حل مسائل الحركة

لان مشتق المسافة بالنسبة للزمن هي السرعة اللحظية ومشتق السرعة اللحظية بالنسبة للزمن هي التسارع اللحظي

$$ع = \frac{ءف}{ءن} ، \quad ت = \frac{ءع}{ءن} ، \quad ت = \frac{ء^{٢}ف}{ءن^{٢}}$$

مثال : تتحرك نقطة مادية على مستقيم وكان تسارعها يعطى بالمعادلة **ت** = ٢ع + ع ^{٢} وأنها كانت في بدء الحركة في نقطة فاصلتها **لـو٢** وسرعتها كانت **٢**م/ث اوجد القانون الزمني للحركة

$$\text{ت} = ٢\text{ع} + \text{ع}^{٢}$$

$$\frac{\text{ءع}}{٢\text{ع} + \text{ع}^{٢}} = \text{ءن}$$

$$\frac{\text{ءع}}{\text{ع}(٢ + \text{ع})} = \text{ءن}$$

$$\frac{١}{٢\text{ع} + \text{ع}^{٢}} = \frac{\text{أ}}{\text{ع}} + \frac{\text{ب}}{٢ + \text{ع}} = \frac{\text{أ}(٢ + \text{ع}) + \text{بع}}{\text{ع}(٢ + \text{ع})}$$

$$١ = \text{أ}(٢ + \text{ع}) + \text{بع}$$

$$\text{ع} = ٠ \Leftarrow \text{أ} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{ع} = -٢ \Leftarrow \text{ب} = -\frac{١}{٢}$$

$$\frac{١}{٢}\left(\frac{١}{\text{ع}} - \frac{١}{\text{ع}+٢}\right)\text{ءع} = \text{ءن}$$

$$\frac{١}{٢}\left(\text{لـو}\left|\frac{\text{ع}}{\text{ع}+٢}\right|\right) = \text{ن} + \text{جـ}$$

$$\text{لـو}\sqrt{\left|\frac{\text{ع}}{\text{ع}+٢}\right|} = \text{ن} + \text{جـ}$$

$$\sqrt{\left|\frac{\text{ع}}{\text{ع}+٢}\right|} = \text{هـ}^{\text{ن}+\text{جـ}}$$

$$\left|\frac{\text{ع}}{\text{ع}+٢}\right| = \text{هـ}^{٢\text{ن}+٢\text{جـ}}$$ لنأخذ القيمة الموجبة

$$\frac{\text{ع}}{\text{ع}+٢} = \text{هـ}^{٢\text{جـ}}\,\text{هـ}^{٢\text{ن}} = \text{م}\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}$$ بفرض م = هـ $^{٢\text{جـ}}$ ثابت

$$\text{ع} = \text{م}\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}\,\text{ع} + ٢\text{م}\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}$$

$$\text{ع} - \text{م}\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}\,\text{ع} = ٢\text{م}\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}$$

$$\text{ع}\left(١ - \text{م}\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}\right) = ٢\text{م}\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}$$

$$\text{ع} = \frac{٢\text{م}\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}}{\left(١ - \text{م}\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}\right)}$$

$$\text{ءف} = \frac{٢\text{م}\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}}{\left(١ - \text{م}\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}\right)}\text{ءن}$$

$$\text{ف} = -\text{لـو}\left|١ - \text{م}\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}\right| + \text{جـ}_{١}$$

$$\text{ف} = \text{لـو}\frac{١}{\left|١ - \text{م}\,\text{هـ}^{٢\text{ن}}\right|} + \text{جـ}_{١}$$

الان تعين الثوابت

$$\text{ع} = \frac{\text{٢مه}^{\text{٢ن}}}{\left(\text{١} - \text{مه}^{\text{٢ن}}\right)}$$

$$\text{ن} = \text{٠} \quad \text{٢} = \frac{\text{٢م}}{\left(\text{١} - \text{م}\right)} \Leftarrow \text{م} = \text{١} - \text{م} \Leftarrow \text{م} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \Leftarrow \text{ه}^{\text{٢ج}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \Leftarrow \text{٢ج} = \text{لـو}\frac{\text{١}}{\text{٢}} \Leftarrow \text{ج} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{لـو}\frac{\text{١}}{\text{٢}}$$

$$\text{ف} = \text{لـو٢}$$

$$\text{ن} = \text{٠} \Leftarrow \text{لـو٢} = \text{لـو}\frac{\text{١}}{\left|\text{١} - \text{م}\right|} + \text{ج}_{\text{١}}$$

$$\text{ن} = \text{٠} \Leftarrow \text{لـو٢} = \text{لـو}\frac{\text{١}}{\left|\text{١} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\right|} + \text{ج}_{\text{١}} \Leftarrow \text{لـو٢} = \text{لـو٢} + \text{ج}_{\text{١}} \Leftarrow \text{ج}_{\text{١}} = \text{٠}$$

$$\text{ف} = \text{لـو}\frac{\text{١}}{\left|\text{١} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{ه}^{\text{٢ن}}\right|}$$

وهنالك حالة ثانية للقيمة المطلقة يجب أخذها في الاعتبار ومناقشتها
في هذا المثال حاولت تطوير عملية مناقشة حلول معادلة تفاضلية وقد لا تكون هذه المعادلة لها علاقة بالواقع إلا ان اشهر مسائل الحركة هي مسائل المقذوفات التي تتم تحت تأثير الجاذبية الأرضية

مسألة

تقذف كتلة مادية نحو الأعلى رأسيا من سطح بناء يرتفع عن سطح الارض ٤٠ م بسرعة ابتدائية ٢٠ م /ث فاذا علمت ان تسارع الجاذبية الارضية هو ١٠ م /ث$^{\text{٢}}$
اوجد قانونها الزمني

الحل :

ت = −١٠ قيمة التسارع لان الحركة نحو الاعلى

$$\text{ت} = -\text{١٠}$$

$$\frac{\text{ىع}}{\text{ىن}} = -\text{١٠}$$

$$\text{ىع} = -\text{١٠ىن}$$

$$\text{ع} = -\text{١٠ن} + \text{ج}$$

عندما $\text{ن} = \text{٠}$ فان $\text{ع} = \text{٢٠}$ وبالتالي $\text{٢٠} = \text{٠} + \text{ج} \Leftarrow \text{ج} = \text{٢٠}$

$$\text{ع} = -\text{١٠ن} + \text{٢٠}$$

$\frac{دف}{دن}$ = −١٠ن + ٢٠

دف = (−١٠ن + ٢٠)دن

ف = −٥ن^{٢} + ٢٠ن + جـ$_{٢}$

عندما ن = ٠ فان ف = ٤٠ نعوض في المعادلة لحساب الثابت

٤٠ = ٠ + ٠ + جـ$_{٢}$ ⟸ جـ$_{٢}$ = ٤٠

ف = −٥ن^{٢} + ٢٠ن + ٤٠

وهي المعادلة الزمنية للحركة

في المسألة السابقة تخيل ان القذف مائل بزاوية تميل على الافق ٦٠ = $\frac{\pi}{٣}$ ستون درجة

هنا تدرس الحركة على محورين الافقي والشاقولي (الرأسي)

ما اريد قوله عند دراسة حركة جسم لا بد من تعين جملة مقارنه (جملة احداثيات ديكارتيه)

وهنا سنتخذ مبدأ الجملة (نقطة الاصل) على الارض ومحور السينات افقي والمحور الرأسي مار بنقطة القذف) طبعا لك الخيار ان تختار الجملة ونقطة الاصل كما تريد

مرتسم متجهة التسارع على المحور الراسي

ت = −١٠

$\frac{دع}{دن}$ = −١٠

دع = −١٠دن

ع = −١٠ن + ع$_{٠}$

ع$_{٠}$ مرتسم السرعة الابتدائية (سرعة القذف) على المحور الرأسي)وهي ع$_{٠}$ = ٢٠جا٦٠ = ١٠$\sqrt{٣}$

وبالتالي ع = −١٠ن + ١٠$\sqrt{٣}$

$\frac{دص}{دن}$ = −١٠ن + ١٠$\sqrt{٣}$

دص = (−١٠ن + ١٠$\sqrt{٣}$)دن

ص = −٥ن^{٢} + ١٠$\sqrt{٣}$ن + ص$_{٠}$

لكن ص$_{٠}$ = ٤٠ ارتفاع البناية

اذا ص = −٥ن^{٢} + ١٠$\sqrt{٣}$ن + ٤٠

أما مرتسم متجهة التسارع على المحور الأفقي فهو صفر

وبالتالي

ت$_{س}$ = ٠

$\frac{دع_{س}}{دن}$ = ٠

ع$_{س}$ = ع$_{٠}$جتا٦٠ = ٢٠ × $\frac{١}{٢}$ = ١٠

$\frac{دس}{دن}$ = ١٠

س = ١٠ن + س$_{٠}$

وهنا س$_{٠}$ = ٠ الفاصلة الابتدائية لان القذف حصل من نقطة تقع على محور الصادات

$\text{س} = ١٠\text{ن}$

واذا طلب منك تحديد مسار المتحرك علينا ان نحذف الوسيط ن من المعادلتين

$\text{ص} = -٥\text{ن}^{٢} + ١٠\sqrt{٣}\,\text{ن} + ٤٠$ (١)

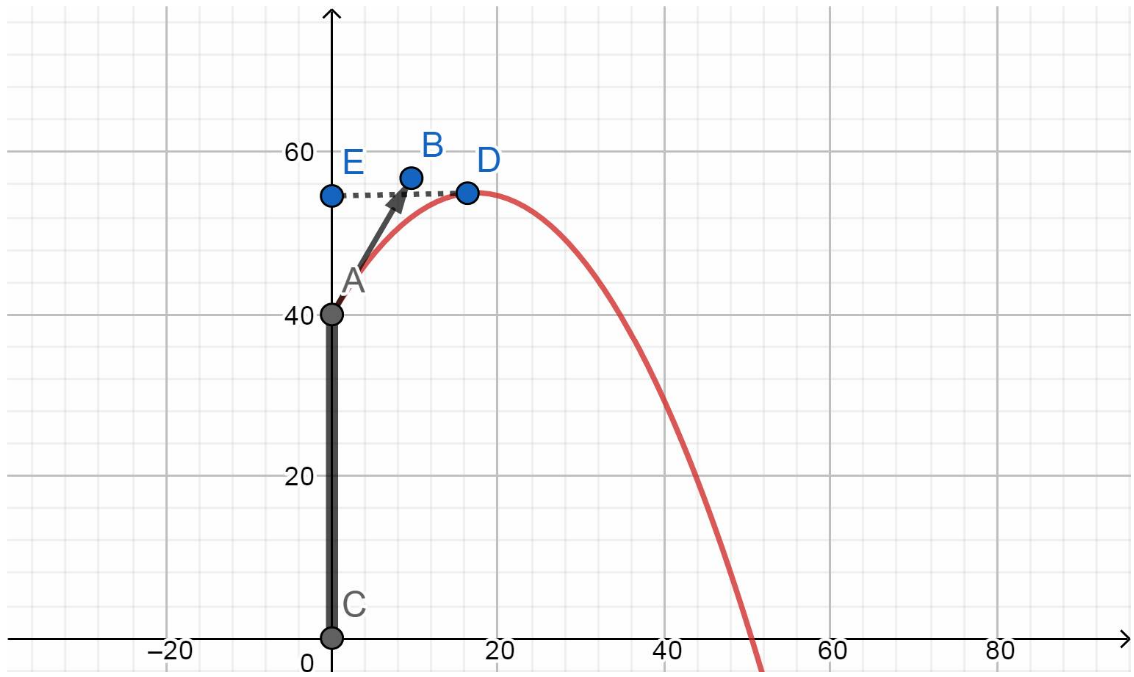
$\text{س} = -١٠\text{ن}$ (٢)

من المعادلة الاخيرة نجد $\text{ن} = \frac{\text{س}}{١٠}$ نعوض في الاولى نجد

$$\text{ص} = -٥\frac{\text{س}^{٢}}{١٠٠} + ١٠\sqrt{٣}\frac{\text{س}}{١٠} + ٤٠$$

$$\text{ص} = -\frac{\text{س}^{٢}}{٢٠} + \sqrt{٣}\,\text{س} + ٤٠$$

مسار المقذوف هو معادلة قطع مكافئ



تدريب : اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة ص عند النقطة(س،ص) يساوي $\frac{\text{هـ}^{\text{س}-\text{ص}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+١}$

جد قاعدة الربط علما ان المنحني يمر بالنقطة (٠،١)

الحل : نعلم ان

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}-\text{ص}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+١}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{هـ}^{-\text{ص}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+١}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{هـ}^{-\text{ص}}} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+١}\,\text{ءس}$$

$$\text{هـ}^{+\text{ص}}\,\text{ءص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+١}\,\text{ءس}$$

$$\text{هـ}^{+\text{ص}} = \text{لـو}\left(\text{هـ}^{\text{س}}+١\right)+\text{جـ}$$

$$\text{هـ}^{٠} = \text{لـو}\left(\text{هـ}^{١}+١\right)+\text{جـ}$$

$$١ = \text{لـو}\left(\text{هـ}^{١}+١\right)+\text{جـ}$$

$$\text{لـوهـ} - \text{لـو}\left(\text{هـ}^{١}+١\right) = \text{جـ}$$

$$\text{لـو}\frac{\text{هـ}}{\text{هـ}+١} = \text{جـ}$$

$$\text{هـ}^{+\text{ص}} = \text{لـو}\left(\text{هـ}^{\text{س}}+١\right)+\text{لـو}\frac{\text{هـ}}{\text{هـ}+١}$$

$$\text{هـ}^{+\text{ص}} = \text{لـو}\left(\text{هـ}^{\text{س}}+١\right)\left(\frac{\text{هـ}}{\text{هـ}+١}\right)$$

$$\text{ص} = \text{لـو}\left(\text{لـو}\frac{\left(\text{هـ}^{\text{س}+١}+\text{هـ}\right)}{\text{هـ}+١}\right)$$

مسألة ابتدأ جسيم الحركة من نقطة الأصل على محور السينات وفقا للعلاقة السرعة موجبة اذا كانت السرعة عند بدء الحركة ٤سم/ث اثبت ان $\text{ف} = ٢\text{ن}\sqrt{\text{ع}}$

الحل : رسمت لكم مخطط السرعة ومخطط المسافة بعد ان استنتجتهما وأريد منكم تبرير أيهما مخطط السرعة وأيهما مخطط المسافة (هنالك لونين لكل مخطط لون)