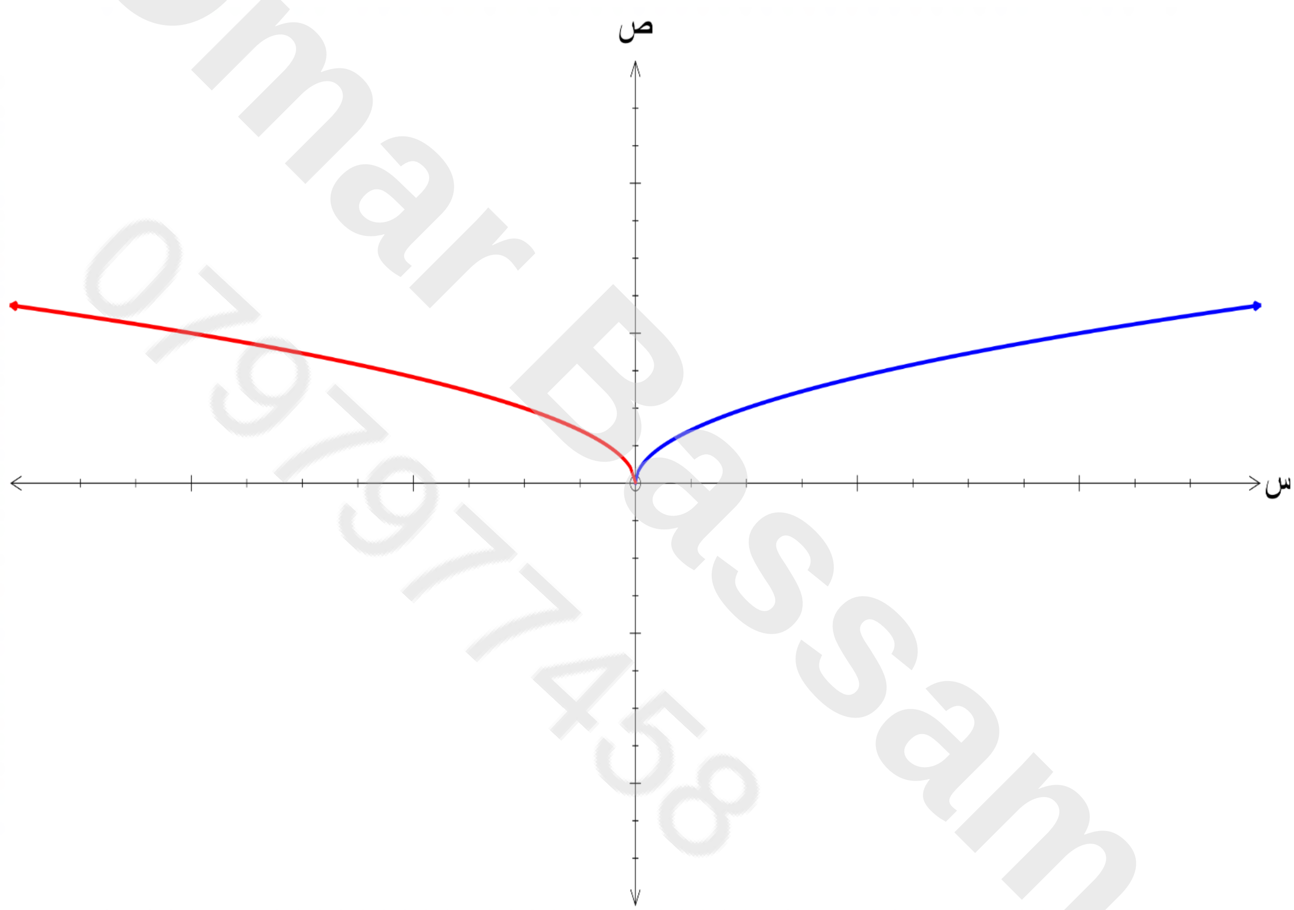
الأساس في الرياضيات

المرجع التأسيسي الأقوى على مستوى المملكة

(مخصص لطلاب التوجيهي الفرعين العلمي و الصناعي)



الأستاذ : عمر بسام

٠٧٩٧٩٧٧٤٥٨

(عمان ، إربد ، جرش)

أضع بين أيديكم طلابنا الأعزاء المرجع التأسيسي الأشمل لكل المواضيع التي يحتاجها طالب التوجيهي في الفرعين العلمي و الصناعي .

لقد تم إعداد هذا المرجع و اختيرت موضوعاته بعناية ليكون كافيا لكل من يريد أن يستوفي الشروط الأساسية لتحصيل علامة كاملة (أو شبه كاملة) في مادة الرياضيات ، تم دعم كل فكرة بمجموعة من الأمثلة التي تشرح جميع خبايا الفكرة ، في كل فكرة ستجد شرح (عن معنى الفكرة و آلية تطبيقها) ، للتحصيل الأفضل يمكنك قراءة عنوان الفكرة و من ثم قراءة الشرح و محاولة حل المثال العددي ، فإن لم تستطع حل المثال عندها يمكنك رؤية الحل المبسط على شكل خطوات.

إنك بإتمامك هذا المرجع تكون قد أنهيت (و بدون مبالغة) ٤٠ ٪ من منهاج الرياضيات ، و عندها لن تحتاج إلا جهدا متوسطا للحصول على العلامة الكاملة (أو شبه الكاملة) .

ختاما نرجو التوفيق لكل طالب يبحث عن التفوق ، و الله تعالى ولي التوفيق.

عمر بسام

أولا : التحليل إلى عوامل (التحليل إلى مضاريب)

التحليل إلى عوامل هو فكرة أساسية هامة في التطبيقات الرياضية ، نستفيد منه ضمن منهاج التوجيهي في أمرين هامين ، هما حل المعادلات و حساب النهايات ، **يوجد خمس أفكار رئيسية يجب معرفتها عند التحليل إلى عوامل :**

الفكرة الأولى : فرق مربعي مقدارين ، شكلها $س^{٢} - ب^{٢} = (س - ب)(س + ب)$

يكون لديك الطرف اليميني و تريد إيجاد الطرف اليساري ، رغم بساطة هذا الشكل إلا أن كثيرا من الطلاب لديهم مشكلة في التعامل معه ، و ذلك لأنه في الغالب لا يكون الطرف اليميني مكتوب بهذا الصورة و لكي تتعامل معه بسهولة عليك اتباع ما يلي :

مهما يكن الطرف اليميني ، اكتبه على الصورة $(س)^{٢} - (ب)^{٢}$ ، بمعنى ضع أقواس فارغة و عليها تربيع ، ثم ضع قيمة س ، ب المناسبتين ثم اكتبهما كما القاعدة في الأعلى ، الأمثلة التالية توضح الفكرة بشكل مبسط .

مثال حل $٩س^{٢} - ٣٦$ إلى عوامل ؟

الخطوة الأولى : $(\quad)^{٢} - (\quad)^{٢}$

الخطوة الثانية : المقدار الذي يجب وضعه بين القوسين ليصبح مربعه $٩س^{٢}$ هو $٣س$ و المقدار القوسين ليصبح مربعه ٣٦ هو ٦ ، و بالتالي تصبح :

$$(٣س)^{٢} - (٦)^{٢} = (٣س - ٦)(٣س + ٦)$$

مثال حل $٨١س^{٤} - ١٦$ إلى عوامل ؟

الخطوة الأولى : $(\quad)^{٢} - (\quad)^{٢}$

الخطوة الثانية : المقدار الذي يجب وضعه بين القوسين ليصبح مربعه $٨١س^{٤}$ هو $٩س^{٢}$ ، و المقدار الثاني الذي يجب وضعه بين قوسين ليصبح مربعه ١٦ هو ٤ ، أي أن :

$$(٩س^٢)^٢ - (٤)^٢ = (٩س^٢ - ٤)\ (٩س^٢ + ٤)$$

نلاحظ أيضا أن $(٩س^٢ - ٤) = (٣س - ٢)\ (٣س + ٢)$

<u>ملاحظة هامة</u>: لا تحاول تحليل $(٩س^٢ + ٤)$ فهذا المقدار لا يحلل إلى عوامل لأن كلا الحدين لهما نفس الإشارة : $٩س^٢$ إشارتها موجبة ، و ٤ إشارتها موجبة .

أيضا لو كانت $(-٩س^٢ - ٤)$ فهي لا تحلل لأن لهما نفس الإشارة .

مثال : حلل $٦٤ - س^٦$ إلى عوامل ؟

الخطوة الأولى : $(\ )^٢ - (\ )^٢$

الخطوة الثانية : المقدار الذي يجب وضعه بين القوسين ليصبح مربعه ٦٤ هو ٨ ، المقدار الثاني الذي يجب وضعه بين قوسين ليصبح مربعه $س^٦$ هو $س^٣$ ، و بالتالي :

$(٨)^٢ - (س^٣)^٢ = (٨ - س^٣)(٨ + س^٣)$ ، و أيضا هذين المقدارين كلاهما يحلل كما سنرى عند عرض فرق و مجموع مكعبي مقدارين .

الفكرة الثانية : فرق مكعبي مقدارين ، شكلها :

$$س^٣ - ب^٣ = (س - ب)(س^٢ + بس + ب^٢)$$

نفس الفكرة السابقة ابدأ أولا بوضع أقواس فارغة عليها تكعيب ، ثم ضع المناسب في هذه الأقواس ، ستحصل بعدها على (س – ب) و هو القوس الأول ، من أجل القوس الثاني تحتاج أن تربع س ، و توجد الناتج ب ضرب س ، ثم ب تربيع .

مثال حلل $١ - ٢٧س^٣$ إلى عوامل ؟

الخطوة الأولى : $(\ )^٣ - (\ )^٣$

الخطوة الثانية : المقدار الذي يجب وضعه بين القوسين ليكون مكعبه ١ هو ١ ، المقدار الثاني الذي يجب وضعه بين قوسين ليكون مكعبه $٢٧س^٣$ هو $٣س$ لأن $٣س \times ٣س \times ٣س = ٢٧س^٣$ ، إذا :

$(١)^{٣} - (٣س)^{٣} = (١ - ٣س)(\quad)$ ، و لإيجاد القوس الثاني نحتاج حساب ثلاثة حدود (الأول تربيع + الأول × الثاني + الثاني تربيع) ، إذا : $١^{٢}$ ، $١×٣س$ ، $(٣س)^{٢}$ ، ثم نضع هذه الحدود الثلاثة وبينها إشارات موجبة في القوس الثاني :

$$(١)^{٣} - (٣س)^{٣} = (١ - ٣س)(١ + ٣س + ٩س^{٢})$$

الفكرة الثالثة : مجموع مكعبي عددين ، شكلها :

$$(س)^{٣} + (ب)^{٣} = (س + ب)(س^{٢} - بس + ب^{٢})$$

نفس الفكرة السابقة : إلا أن القوس الأول تكون جميع إشاراته موجبة و القوس الثاني نضع قبل معامل س إشارة سالبة .

مثال حلل $٨س^{٣} + ٢٧$ إلى عوامل ؟

الخطوة الأولى : $(\quad)^{٣} + (\quad)^{٣}$

الخطوة الثانية : $(٢س)^{٣} + (٣)^{٣} = (٢س + ٣)(\quad)$، لمعرفة القوس الثاني نحسب ثلاثة حدود(الأول تربيع – الأول× الثاني + الثاني تربيع) : $(٢س)^{٢}$ ، $٢س×٣$ ونضع قبله إشارة سالبة ، $(٣)^{٢}$

$$(٢س)^{٣} + (٣)^{٣} = (٢س + ٣)(٤س^{٢} - ٦س + ٩)$$

مثال حلل $-٨ - ٢٧س^{٣}$ إلى عوامل ؟

كلا الحدين من إشارة سالبة و هي حالة لم نمر بها سابقا ، لذلك نخرج إشارة سالب من العبارة فتصبح : $-(٨ + ٢٧س^{٣}) = -(٢ + ٣س)(٤ - ٦س + ٩س^{٢})$.

ملاحظة : إذا قررت إدخال إشارة سالب إلى الأقواس ، فيجب إدخالها إلى أحد القوسين لا كلاهما ، أي أن :

$$-\left(٨+٢٧س^{٣}\right)=\left(-٢-٣س\right)\left(٤-٦س+٩س^{٢}\right)$$

أو :

$$-\left(٨+٢٧س^{٣}\right)=\left(٢+٣س\right)\left(-٤+٦س-٩س^{٢}\right)$$

الفكرة الرابعة : المعادلة من الدرجة الثانية (عبارة تربيعية) :

العبارة التربيعية هي عبارة من الشكل : $أس^{٢}+ب س+ج$ ،

هناك شرط أساسي لتكون العبارة التربيعية قابلة للتحليل ، و هو أن يكون مميز العبارة موجب أو صفر .

المميز = $ب^{٢}-٤\times أ\times ج$ ، إذا كان هذا المميز سالب فإن العبارة التربيعية لا تحلل .

إذا كانت العبارة التربيعية قابلة للتحليل ، فيمكن تحليها كما يلي :

$أس^{٢}+ب س+ج$ = (ن س + و) (ك س + ط)

ونحن نريد معرفة : ن ، و ، ك ، ط ، و نوضح طريقة إيجادهم من خلال الأمثلة التالية .

سنعرض أولا أمثلة عن تحليل العبارة التربيعية إذا كان معامل س تربيع = ١ .

مثال حلل العبارة $س^{٢}+٥س+٦$ إلى عوامل ؟

لأن معامل س تربيع = ١ ، إذا نبحث عن عددين مجموعهما +٥ ، و ضربهما +٦ .

العددين هما س = ٢ ، س =٣ ، و بالتالي نكتب :

$س^{٢}+٥س+٦$ = (س + ٢) (س + ٣)

مثال حلل العبارة $س^{٢}-س-٦$ إلى عوامل ؟

الحل : لأن معامل س تربيع = ١ ، إذا نبحث عن عددين مجموعهما –١ ، و ضربهما – ٦ ، العددين هما س = – ٣ ، س = ٢ ، و بالتالي نكتب :

س^{٢} – س – ٦ = (س – ٣) (س + ٢)

مثال حل العبارة – س^{٢} + ٥س – ٦ إلى عوامل ؟

الحل : لأن معامل س تربيع = –١ ، نقوم أولا بإخراج –١ خارج العبارة ، تصبح العبارة : – (س^{٢} – ٥س + ٦) ، الآن لأن معامل س تربيع = ١، إذا نبحث عن عددين مجموعهما – ٥ ، و ضربهما + ٦ ، العددين هما س = – ٣ ، س = – ٢ ، و بالتالي :

– س^{٢} + ٥س – ٦ = –(س – ٣) (س – ٢)

ملاحظة هامة : في كل مرة يكون بها معامل س تربيع سالب ، قم بإخراج إشارة " – " خارج العبارة التربيعية ، ثم حل العبارة التربيعية و لا تنسى إشارة السالب التي وضعتها خارج القوس.

مثال حل العبارة ١٥س^{٢} + ٢٦س – ٢١ إلى عوامل ؟

الحل : نلاحظ أن معامل س تربيع لا يساوي ١ ، و بالتالي نحتاج الطريقة التالية :

١٥س^{٢} + ٢٦س – ٢١ = (ن س + و) (ك س + ط) ، و لإيجاد ن ، و ، ك ، ط :

١٥ = ن × ك ، يجب هنا إيجاد كل قيم ن ، ك الصحيحة التي يكون ضربهما ١٥ .

ن = ١٥ ، ك = ١ ..... ن = ٥ ، ك =٣ .... إلخ (بالطبع هذه الخيارات في الغالب لا تتجاوز الستة ، و ستتعلم في فصل النهايات أنك لا تحتاج للتجربة حيث يكون لديك أحد العوامل و ما عليك سوى معرفة العامل الآخر بطريقة سهلة ، بمعنى سيكون لديك قيمة ك و قيمة ط ، و عندها ستكون ن = $\frac{١٥}{ك}$ ، و = $\frac{-٢١}{ط}$) ، و عليك هنا أن تتحمل التجربة قليلا إلى أن نصل إلى درس النهايات .

-21 = و × ط ، و كما ذكرنا قبل قليل ، تحتاج إلى كل الأعداد الصحيحة التي ضربها يساوي -٢١ ، خذ مثلا و = -٧ ، ط = +٣ ... و = -٣ ، ط = +٧ .... إلخ .

و نعيد هنا أنك لست بحاجة لأن تجرب (في درس النهايات ستتعلم كيف تصل للجواب بدون اي تجربة) ، فإذا كان هذا السؤال يسبب لك إرباكا تستطيع أن تنتظر درس النهايات .

بعد إيجاد جميع الخيارات للمجاهيل ن ، و ، ك ، ط .. عليك أن تضرب البعيدين و تجمع الجواب مع ناتج ضرب القريبين ثم تتأكد أن النتيجة مساوية للحد الأوسط من العبارة أي :

ن س × ط + ك س × و = +٢٦ س ، و بالتالي ن = ٥ ، و = -٣ ، ك = ٣ ، ط = ٧ .

أي أن : ١٥س^{٢} +٢٦س -٢١ = (٥س -٣)(٣س +٧)

- في فصل النهايات ستعرف أن قيمة ك = ٣ ، ط = ٧ بدون أي تجريب ، و بالتالي ستحصل على ن بشكل مباشر .

الفكرة الخامسة : التحليل بإخراج عامل مشترك .

هذا النوع من التحليل بسيط ولكن قد يواجه بعض الطلاب مشاكل معه ، عند إخراجك لعامل مشترك بين مجموعة حدود ، انتبه أن تخرج الحد المشترك كمتغير بأعلى أس مشترك و بالقاسم المشترك الأكبر بين معاملات المتغيرات .(القاسم المشترك الأكبر لعددين هو أكبر عدد يقسم كل من العددين ، فالقاسم المشترك للعدين ١٢ و ٦ هو ٦ ، لأن أكبر عدد يقسم العددين هو ٦ ، القاسم المشترك ل ٤ و ٥ هو ١ ، لأن أكبر عدد يقسم العددين (بدون باقي) هو ١)

مثال : حلل س^{٢} +٢س إلى عوامل ؟

الحل : لدين حدين هما س^{٢} و ٢س ، معامل س^{٢} هو ١ ، و معامل ٢س هو ٢ .

إن العامل المشترك كمتغير هو س ، و كعدد هو القاسم المشترك بين ١ و ٢ وقيمته= ١ ، لذلك نخرج ١س أو س خارج قوس :

س^{٢} +٢س = س (س + ٢)

مثال حلل $٨س^{٣} + ٢س^{٢}$

الحل : إن العامل المشترك بين الحدين كمتغير هو $س^{٢}$ ، و كعدد هو القاسم المشترك بين ٨ و ٢ و يساوي ٢ ، لذلك نخرج ٢ $س^{٢}$ خارج قوس :

$٨س^{٣} + ٢س^{٢} = ٢س^{٢} (٤س + ١)$

مثال حلل $٩س^{٣} - ٦س$ إلى عوامل ؟

الحل : إن العامل المشترك بين الحدين كمتغير هو س ، و كعدد هو القاسم المشترك بين ٩ و ٦ و يساوي ٣ ، لذلك نخرج ٣س خارج قوس :

$٩س^{٣} - ٦س = ٣س (٣س^{٢} - ٢)$

ملاحظة : يمكنك دوما التأكد من صحة الإجابة بضرب الأقواس ، مثلا في المثال السابق :

$٣س \times ٣س^{٢} = ٩س^{٣}$ (و هو الحد الأول)

$٣س \times -٢ = -٦س$ (و هو الحد الثاني) .

ثانيا : حل المعادلات و المتباينات

المعادلات و المتباينات هما أساس كل شيء في الرياضيات ، إذا بدأت عامك الدراسي و أنت تفهم جيدا كيف تتعامل مع المعادلات و المتباينات تكون و بدون مبالغة قد اختصرت ثلث وقتك المخصص لدراسة الرياضيات ، لا يوجد نظرية في كتاب التوجيهي تخلو من فكرة أو تطبيق فيه حل معادلة أو متباينة ، لذلك يجب التركيز عليها جيدا .

معادلات الدرجة الأولى

أ س + ب =صفر ، حيث أ ، ب أعداد حقيقية . حل المعادلة يعني إيجاد قيمة س التي تجعل المعادلة محققة (إيجاد قيمة س التي تجعل الطرف اليمين مساو للطرف اليسار) .

مثال حل المعادلة : ٥س + ٧ = صفر

الحل : ٥س = − ٧ ، إذا بقسمة الطرفين على ٥ ، نجد س = −٧ / ٥

مثال حل المعادلة ٥س + ٧ = -٢س +١٢

الحل : نقوم بتجميع المجاهيل في طرف و الأعداد في الطرف الآخر(نضيف +٢س و − ٧ لكل من طرفي المعادلة ، بذلك نكون قد ضمنا وجود المجاهيل في الطرف اليميني و وجود الأعداد في الطرف اليساري ، لأن + ٧ − ٧ = صفر و لأن
-٢س + ٢س = صفر .

إذا : ٧س = ٥ ، و بالتالي س = ٥ / ٧

مثال جد قيمة الثابت ب الذي يجعل للمعادلة ٣س + ٢ = -٢س + ب حلا وحيدا س = ٧.

الحل : بما أن س = ٧ هو حل للمعادلة ، إذا نعوض بدل كل س بالعدد ٧.
٢٣ = −١٤ + ب ، إذا ب = ٣٧

المعادلات التربيعية (معادلات الدرجة الثانية)

المعادلة التربيعية هي معادلة من الشكل أس^٢ +ب س+جـ = صفر : **أ** ، **ب** ، **جـ** أعداد حقيقية ، معنى حل المعادلة هو إيجاد قيم س التي تجعل المعادلة مساوية للصفر .

هناك عدة طرق لحل المعادلة التربيعية ولكن هناك طريقتين أساسيتين يجب معرفتهما.

الطريقة الأولى : طريقة التحليل (تحليل العبارة التربيعية)

تعلمنا سابقا كيف نحلل عبارة تربيعية ، لحل معادلة تربيعية علينا أولا أن نجعل الطرف الأيسر مساوي للصفر ، ثم نحلل العبارة التربيعية في الطرف الأيمن ، ثم نجد حلول المعادلة ، الأمثلة التالية توضح الفكرة .

مثال حل المعادلة س^{٢} + ٥س + ٦ = صفر

لأن معامل س تربيع = ١ ، إذا نبحث عن عددين مجموعهما +٥ ، و ضربهما +٦ .

العدديين هما س = ٢ ، س = ٣ ، و بالتالي نكتب :

(س + ٢) (س + ٣) = صفر ، ضرب مقدارين = صفر يعني إما الأول

يساوي الصفر ، أي (س + ٢)= صفر ، و بالتالي س = – ٢ ، أو الثاني

= صفر ، (س + ٣)= صفر ، و بالتالي س = – ٣ ، إذا حلول المعادلة هما

س= {– ٢ ، -٣} ، يمكننا التأكد بتجريب الحلول .

لاحظ أنك تستطيع معرفة الحلول بمجرد معرفة العددين (بدون كتاب الأقواس) ، فبعد أن عرفت أن س = ٢ و س = ٣ ، قم فقط بضرب كل منهما بإشارة سالب ستحصل عندها على حلول المعادلة ، لكننا هنا نكتب الأقواس لنتعود على فكرة التحليل إلى مضاريب أو عوامل (التحليل إلى عوامل هو فكرة أساسية في حل النهايات كما سترى لاحقا) .

مثال حل المعادلة س^{٢} – س – ٦ = صفر

الحل : لأن معامل س تربيع = ١ ، إذا نبحث عن عددين مجموعهما –١ ، و ضربهما – ٦ ، العددين هما س = – ٣ ، س = ٢ ، و بالتالي نكتب :

(س – ٣) (س + ٢) = صفر ، أي أن س =٣ ، س = – ٢ .

مثال حل المعادلة – س^{٢} + ٥س – ٦ = صفر

الحل : لأن معامل س تربيع = –١ ، نقوم أولا بضرب طرفي المعادلة ب –١ ،

تصبح المعادلة : س^{٢} – ٥س + ٦ = صفر ، الآن لأن معامل س تربيع = ١، إذا نبحث عن عددين مجموعهما – ٥ ، و ضربهما + ٦ ، العددين هما س = – ٣ ، س = – ٢ ، و بالتالي :

(س – ٣) (س – ٢) = صفر ، أي أن حلول المعادلة هما س =٣ ، س = + ٢ .

مثال حل المعادلة ١٥س^{٢} + ٢٦س – ٢١ = صفر .

تعلمنا سابقا كيف نحلل عبارة تربيعية من هذا الشكل ، إذا تصبح المعادلة :

(٥س − ٣)(٣س + ٧) = صفر ، ضرب مقدارين = صفر ، إما الأول صفر أو الثاني صفر.

إما (٥س − ٣) =صفر ، إذا س = $\frac{٣}{٥}$.

أو (٣س + ٧) =صفر ، إذا س = $\frac{-٧}{٣}$

مثال حل المعادلة ٩س^{٢} - ٦ =صفر .

الحل : نحلل فرق مربعي عددين في الطرف اليميني كما تعلمنا سابقا :

(٣س)^{٢} − ($\sqrt{٦}$)^{٢} = (٣س − $\sqrt{٦}$)(٣س + $\sqrt{٦}$) = صفر

ضرب مقدارين = صفر ، إما الأول صفر ، أي (٣س − $\sqrt{٦}$) =صفر و بالتالي س = $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$.

أو الثاني = صفر ، أي (٣س + $\sqrt{٦}$) = صفر ، و بالتالي س = - $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$.

مثال حل المعادلة ٩س^{٢} + ٦ = صفر .

الحل : إن المعادلة التي يكون فيها معامل الحد التربيعي و العدد الثابت من نفس الإشارة لا يوجد لها حلول (موجبين كانا أم سالبين) ، لأنها لا تحلل إلى عوامل ، أو يمكنك القول لا تحلل لأنه لا يوجد عدد حقيقي مربعه سالب ، و ستتعلم بعد قليل أن أي معادلة لها مميز سالب لا يوجد لها حلول .

المميز = ب^{٢} − ٤ × أ × جـ ، إذا المميز لهذه المعادلة = صفر − ٤×٩×٦= عدد سالب ، و بالتالي لا يوجد حلول .

مثال حل المعادلة س^{٤} − ٥س^{٢} + ٦ = صفر

الحل : مع أن المعادلة من الدرجة الرابعة ، لكن يمكن اعتبارها من الدرجة الثانية

لمتغير $س^2$ ، يمكن كتابتها على الشكل : $(س^2)^2 - ٥س^2 + ٦ =$ صفر .

نضع $س^2 =$ ص ، فتصبح $ص^2 - ٥ص + ٦ =$ صفر ، أي أن :

$(ص - ٣)(ص - ٢) =$ صفر ، أي ص $= ٣$ ، ص $= ٢$.

عندما ص $= ٣$ ، نجد س $= \sqrt{ص} = \sqrt{٣}$

عندما ص $= ٢$ ، نجد س $= \sqrt{ص} = \sqrt{٢}$.

تمرين : حل المعادلة $س - ٥\sqrt{س} + ٦ =$ صفر .

<u>الطريقة الثانية</u> : طريقة المميز و هي الطريقة العامة ، تستطيع حل أي معادلة تربيعية مهما يكن شكلها بواسطة المميز ، المميز $=$ $ب^2 - ٤ \times أ \times جـ$ ، و يكون هنا لدينا ثلاث حالات :

١) المميز سالب : لا يوجد حلول .

٢) المميز موجب : يوجد حلان هما :

$س_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{-ب - \text{جذر المميز}}{أ}\right)$

$س_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{-ب + \text{جذر المميز}}{أ}\right)$

٣) المميز $=$ صفر ، هناك حل وحيد يسمى حل مضاعف وهو ناتج من حالة المميز موجب و ذلك باستبدال جذر المميز ب صفر .

إذا $س_1 = س_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{-ب}{أ}\right)$

- يجب العلم أن طريقة المميز هي طريقة هامة جدا في التعامل مع الثوابت في جميع فصول الكتاب ، و خصوصا في الوحدة الأولى ، حيث أن أي علاقة تربيعية موجودة في مقام أو تحت جذر وفيها ثوابت مثل أ ، ب ، و المطلوب حساب الثوابت لتكون النهاية موجودة أو غير موجودة ، و الاقتران متصل أو غير متصل .. فعندها من الأفضل استخدام طريقة المميز.

مثال حل المعادلة $\frac{٧}{٤}$ س^{٢} + $\sqrt{٦٠}$ س + ٨ = صفر

نلاحظ أن هذه المعادلة لا يمكن تحليلها بشكل مباشر (بطريقة تحليل العبارة التربيعية) ، إنما يجب هنا استخدام المميز ، المميز = ٦٠ − ٤ × $\frac{٧}{٤}$ × ٨ = ٦٠ − ٥٦ = ٤ ، جذر المميز = ٢ .

نعوض في قوانين $س_{١}$ ، $س_{٢}$ نجد المطلوب .

مثال جد الثابت ن ليكون للمعادلة التربيعية التالية حل وحيد ؟

٥س^{٢} + ٢ن س + ٧ = صفر

الحل : ليكون للمعادلة حل وحيد يجب أن يكون المميز = صفر .

المميز = ٤ن^{٢} − ٤×٥×٧ ، إذا ٤ن^{٢} − ٤×٥×٧ = صفر .

٤ن^{٢} = ١٤٠ ، إذا ن = + $\sqrt{٣٥}$ ، ن = − $\sqrt{٣٥}$.

معادلات الدرجة الثالثة : و هي من الشكل أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د = صفر .

حالة خاصة : إذا كان أ + ب + جـ + د = صفر ، فإن س = ١ هو أحد الحلول ، و عندئذ يمكن إيجاد بقية الحلول (إن كان هناك حلول أخرى) من خلال القسمة التركيبية أو الطويلة .. بشكل عام إذا كان س = ن هو أحد الحلول فإننا نكتب :

أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د = (س − ن) (عبارة تربيعية نجدها بالقسمة الطويلة أو التركيبية)

مثلا إذا كان س = ١ أحد الحلول ، فإننا نكتب :

أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د = (س - ١) (عبارة تربيعية) .

الحالة العامة : لإيجاد حلول المعادلة التكعيبية ، نوجد جميع قواسم د (تعلمت سابقا كيف تجد قواسم عدد ما) ، و أيضا نجد جميع قواسم أ ... عندها أحد الأصفار هو من الشكل $\frac{\text{أحد قواسم أ}}{\text{أحد قواسم د}}$ ، و لمعرفة هذا الصفر علينا بتجربة جميع القواسم (في حالة حساب النهايات لا داعي للتجربة . نحتاج فقط أن تتعلم القسمة التركيبية أو القسمة الطويلة .. و هذا ما سنقدمه عند البدء بشرح المادة) .

مثال جد حلول المعادلة $س^{٣} + ٤س^{٢} - ٦س + ١ =$ صفر

الحل : بما أن مجموع المعاملات = ١ + ٤ + − ٦ + ١ = صفر ، إذا أحد حلول المعادلة هو س = ١ ، و بالتالي تصبح المعادلة :

$س^{٣} + ٤س^{٢} - ٦س + ١ =$ (س - ١) (أ $س^{٢}$ + ب س + **جـ**) ، لإيجاد أ ، ب ، **جـ** سنتعلم هنا طريقة القسمة التركيبية (بشكل مبسط و بدون جداول) .

أ = الصفر الأول (أي س = ١) × معامل $س^{٣}$ ، إذا أ = ١ × ١ = ١ .

ب = الصفر الأول × أ التي تم حسابها في الخطوة السابقة + معامل $س^{٢}$

إذا ب = ١ × ١ + ٤ = ٥ .

جـ = الصفر الأول × ب التي تم حسابها في الخطوة السابقة + معامل س

إذا ، **جـ** = ١ × ٥ + − ٦ = − ١ ، و تصبح المعادلة التكعيبية بالشكل :

$س^{٣} + ٤س^{٢} - ٦س + ١ =$ (س - ١) ($س^{٢}$ + ٥س − ١) ، و يمكن إيجاد حلول المعادلة التربيعية باستخدام طريقة المميز ، و بما أن المميز موجب إذا يوجد حلين .. فيصبح عدد حلول المعادلة التكعيبية = ٣ حلول .

مثال حل المعادلة $س^{٣} + س^{٢} - ٤س - ٤ =$ صفر

الحل : أ = ١ (معامل $س^{٣}$) ، د الحد الثابت = − ٤ ، قواسم أ هي ١ ، − ١ .

قواسم د : ١ ، − ١ ، ٤ ، − ٤ ، ٢ ، − ٢ ، إذا الأصفار المحتملة هي ١ ، − ١ ، $\frac{١}{٤}$ ، − $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، − $\frac{١}{٢}$.

نعلم أن س = ١ ليس حل للمعادلة لأن مجموع المعاملات لا يساوي صفر .

نجرب س = − ١ (نقوم بتعويض − ١ في المعادلة فيكون ناتج تعويضها = صفر ، إذا نستنتج أن س = − ١ هو صفر للمعادلة .) ، إذا تصبح المعادلة :

(س + ١) (عبارة تربيعية) ، ثم بالقسمة التركيبية نجد أن العبارة التربيعية = $س^{٢} - ٤$ ، إذا الأصفار هي س = -١ ، س = − ٢ ، س = + ٢ .

معادلات أكبر عدد صحيح : شكل هذه المعادلة هو $\lfloor \text{س} \rfloor = \text{ب}$.

حلها س ∈ [ب ، ب + ١)

مثال حل المعادلة $\lfloor \text{س} \rfloor = ٧$.

الحل : س ∈ [٧ ، ٨) .

مثال حل المعادلة $\lfloor \text{س} \rfloor = -٧$.

الحل : س ∈ [−٧ ، −٦)

مثال حل المعادلة $\lfloor \frac{١}{٢}\text{س} + ٥ \rfloor = ٧$.

الحل : $\frac{١}{٢}$س + ٥ ∈ [٧ ، ٨) ، نضيف −٥ للطرفين :

$\frac{١}{٢}$س ∈ [٢ ، ٣) ، نضرب الطرفين ب ٢ ، إذا س ∈ [٤ ، ٦) .

المعادلات الكسرية : ليس لهذه المعادلات صيغة رياضية ثابتة ، لكن فكرة حلها سهلة جدا : قم بتوحيد المقامات في الطرف اليميني ، قم بتوحيد مقامات الطرف اليساري ، أصبحت كسر = كسر ، قم بالضرب التبادلي تصبح المعادلة سهلة الحل .

مثال حل المعادلة $\frac{١}{\text{س}} + \frac{٣}{٢} = \frac{١}{٦}$.

الحل : بعد توحيد المقامات في الطرف اليميني ، تصبح المعادلة :

$\frac{٢ + ٣\text{س}}{٢\text{س}} = \frac{١}{٦}$ ، نضرب ضرب تبادلي ، ١٢ + ١٨س = ٢س .

١٢ = ٢س − ١٨س ، إذا س = $-\frac{١٢}{١٦}$.

معادلات القيمة المطلقة : يعتمد شكل المعادلات التي تحتوي قيمة مطلقة على ما داخل القيمة المطلقة ، لكن الصورة الأساسية لمعادلات القيمة المطلقة هي من الشكل :

$|\text{س}| = \text{ب}$ ، لهذه المعادلة حلين هما س = - ب ، س = + ب .

مثال حل المعادلة $|٥\text{س}| = ١٠$.

الحل : $٥\text{س} = -١٠$ ، أي س $= -٢$ ، أو $٥\text{س} = ١٠$ ، أي س $= +٢$.

مثال حل المعادلة $|٣\text{س} + ٤| = ٢\text{س} - ١$

الحل : $٣\text{س} + ٤ = ٢\text{س} - ١$ ، أي أن س $= -٥$.

أو $٣\text{س} + ٤ = -٢\text{س} + ١$ ، أي أن س $= -\frac{٣}{٥}$.

مثال حل المعادلة $|٢\text{س} - ١| = |٤\text{س} - ٣|$.

الحل : $٢\text{س} - ١ = ٤\text{س} - ٣$ ، أي أن س $= ١$

أو $٢\text{س} - ١ = -٤\text{س} + ٣$ ، أي أن س $= \frac{٢}{٣}$.

المعادلات الجذرية : عند وجود متغير تحت جذر في معادلة ما ، عندئذ تسمى المعادلة معادلة جذرية ، فيما يلي أمثلة توضح فكرة حل مثل هذه المعادلات .

مثال حل المعادلة $\sqrt{\text{س} + ٢} = ١$.

الحل : نربع الطرفين ، $\text{س} + ٢ = ١$ ، إذا س $= -١$.

مثال حل المعادلة $\sqrt{\text{س} - ٢٧} = (\text{س} + ٣)$.

الحل : نربع الطرفين ، $\text{س} - ٢٧ = \text{س}^٢ + ٦\text{س} + ٩$

إذا ، $\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٣٦ =$ صفر

و لأن المميز سالب فهي لا تحلل ، أي لا يوجد للمعادلة أي حلول .

مثال حل المعادلة $\sqrt[٣]{س^{٣}-١}=\sqrt[٣]{٧}$

الحل : نكعب الطرفين ، $س^{٣}-١=٧$ ، أي $س^{٣}-٨=$ صفر ، أي أن :

$(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)=$ صفر

إما س- ٢ = صفر ، أي س = ٢ .

أو $س^{٢}+٢س+٤=$ صفر .

و لا يوجد لها حلول (لا تحلل) لأن المميز سالب .

المعادلات الدائرية : هي معادلات تحتوي على جا ، جتا ، قا ، قتا ، ظا ، ظتا .

و مع أننا سندرس القوانين الدائرية في درس لاحق ، إلا أننا هنا سنتكلم عن معادلات دائرية شهيرة ستصادفها كثيرا خلال العام الدراسي .

الشكل الأول : جاس = عدد ، جتاس = عدد ، قاس = عدد ، قتاس = عدد ، ظا س = عدد ، ظتا س = عدد .

بداية يجب أن نعرف أنه في كل دورة كاملة أي من [صفر ، ٢π] ، يوجد لكل معادلة من هذه المعادلات حلين ، فمثلا جا س = $\frac{١}{٢}$ ، لها حلين (حل في الربع الأول حيث جا موجب ، و حل في الربع الثاني أيضا حيث جا موجب) ، عليك فقط أن تحفظ الحلول في الربع الأول ، أما الربع الثاني فتحصل على حله بإنقاص حل الربع الأول من π ، و في الربع الثالث بإضافة حل الربع الأول ل π ، أما حل الربع الرابع فهو بإنقاص حل الربع الأول من ٢π .

لنعود إلى المعادلة جا س = $\frac{١}{٢}$ ، قلنا لها حلين (حل في الربع الأول حيث جا موجب ، حل في الربع الثاني حيث أيضا جا موجب) ... يجب أن تكون تحفظ الحل في الربع الأول ، بمعنى يجب أن تعرف ان الزاوية التي جا لها = $\frac{١}{٢}$ و هي الزاوية $\frac{\pi}{٦}$ (٣٠ درجة) .

الحل الثاني موجود في الربع الثاني ، و قد ذكرنا للتو أنه في حال كان الحل في الربع الثاني فيجب أن نطرح حل الربع الأول (س = $\frac{\pi}{٦}$) من π ، فيصبح الحل الثاني : $\pi-\frac{\pi}{٦}=\frac{٥\pi}{٦}$ ، إذا حلول المعادلة جا س = $\frac{١}{٢}$ ، هما س = $\{\frac{\pi}{٦}+٢\pi ن ، \frac{٥\pi}{٦}+٢\pi ن\}$

مثال جد حل المعادلة جتا س = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$.

الحل : نعلم أن ال جتا يكون سالب في الربعين الثاني و الثالث ، إذا يوجد حلين للمعادلة أحدهما في الربع الثاني و الآخر في الربع الثالث ، ولكن يجب أولا أن نجد حل الربع الأول (ثم من هذا الحل نجد الحلين الباقين كما وضحنا في الطريقة السابقة) .

حل الربع الأول دوما نجده بإهمال إشارة السالب ، أي جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، و بالتالي س = $\frac{\pi}{٦}$.

نستخدم هذا الحل للوصول إلى الحلين المطلوبين .

قلنا إن الحلين في الربع الثاني و الثالث ، حل الربع الثاني = $\pi - \frac{\pi}{٦} = \frac{٥\pi}{٦}$.

حل الربع الثالث = $\pi + \frac{\pi}{٦} = \frac{٧\pi}{٦}$ ، و بالتالي حلول المعادلة جتا س = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

هما س = $\left\{\frac{٥\pi}{٦} + ٢\pi ن ، \frac{٧\pi}{٦} + ٢\pi ن\right\}$

مثال حل المعادلة جاس = صفر .

الحل : س = ن π ، ن عدد صحيح .

مثلا عندما ن = صفر ، تكون س = صفر .

عندما ن = -١ ، تكون س = $-\pi$.

عندما ن = +١ ، تكون س = $+\pi$ .. و هكذا ، في العادة يكون لدينا فترة يجب أن لا نخرج خارج حدودها (سنرى ذلك في المنهاج)

مثال حل المعادلة جتا س = صفر .

الحل س = ن $\frac{\pi}{٢}$ ، ن عدد صحيح فردي (ن ليست صفر ولا عدد زوجي) ... ن = ١، -١، ٣، -٣ وهكذا على أن نلتزم بحدود الفترة .

مثال حل المعادلة ظا س = صفر .

الحل : ظا س = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ ، كسر = صفر ، هذا يعني البسط = صفر ، أي جاس = صفر .

إذا س = ن π ، ن عدد صحيح .

مثال حل المعادلة : قا س = صفر .

الحل : قا س = $\frac{١}{\text{جتا س}}$ ، و بالتالي لا يمكن ل قا س أن يكون صفر، إذا لا يوجد لها حلول .

مثال حل المعادلة : قتا س = + ٢ .

الحل : قتا س = $\frac{١}{\text{جا س}}$ ، إذا : + ٢ = $\frac{١}{\text{جا س}}$ ، أي أن جا س = $\frac{١}{٢}$ ، و هذه المعادلة تعاملنا معها في مثال سابق .

مثال حل المعادلة جا ٥ س = $\frac{١}{٢}$.

الحل : إما ٥س = $\frac{\pi}{٦}$ حل الربع الأول حيث جا موجب +$\frac{١}{٢}$)، أو ٥س = ٥ $\frac{\pi}{٦}$ (حل الربع الثاني حيث جا أيضا موجب +$\frac{١}{٢}$) ، و بالتالي س = $\frac{\pi}{٣٠}$+٢πن أو س = $\frac{\pi}{٦}$+٢πن.

الشكل الثاني : مع أن الشكل الأول من المعادلات الدائرية هو الموجود بشكل أكثر في المنهاج ، إلا أن هناك نماذج أخرى ستصادفها أيضا و هي أساسا تعتمد على إلمامك بالقوانين الأساسية للاقترانات الدائرية (سنعرض هذه القوانين لاحقا) ، نورد فيما يلي بعض الأمثلة .

مثال حل المعادلة جا س = جتا س .

الحل : يجب توحيد نوع الاقتران في الطرفين .

جتا س = جا ($\frac{\pi}{٢}$ - س) : ستتعرف على هذا القانون في درس لاحق .

إذا تصبح المعادلة : جا س = جا ($\frac{\pi}{٢}$ - س) ، حلها س = $\frac{\pi}{٢}$−س

أي أن س = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢πن

مثال حل المعادلة جا^{٢} س – ١ = صفر .

الحل : نحلل المعادلة السابقة إلى جداء عوامل ، تصبح (جا س -١) (جاس + ١) = صفر

إذا إما جا س – ١ = صفر ، و بالتالي جا س = ١ ، أي أن س = $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ن : ن عدد صحيح ،
أو جا س = – ١ ، أي أن س = $\frac{٣\pi}{٢} + ٢\pi$ن (نفسها س = – $\frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ن)

مثال حل المعادلة جتا^{٢} ٥ س - جتا ٥س - ٢ = صفر .

الحل : نعتبرها معادلة تربيعية بدلالة جتا ٥ س (بدلا من س)نحلل إلى عوامل تصبح : (جتا ٥س – ٢) (جتا ٥س +١) = صفر .

إما جتا ٥س = ٢ ، مرفوض (لا يمكن ل جتا زواية ما أن يكون أكثر من ١ أو أقل من – ١)
، أو جتا ٥س = –١ ، أي أن ٥س = π ، إذا س = $\frac{\pi}{٥} + ٢\pi$ن : ن عدد صحيح .

معادلات مختلطة : المعادلات المختلطة هي عبارة عن خليط من المعادلات السابقة ، مع أنها من أصعب المعادلات في التطبيقات الرياضية ، إلا أن المطلوب منها في التوجيهي هو شكل بسيط سهل الحل .

مثال حل المعادلة (س-١) (س + ٧) ($\sqrt{س}$ – ٩)($\frac{س^{٢}-٤}{س+١٠}$) = صفر .

الحل : المعادلة عبارة عن مضاريب (مقادير مضروبة ببعضها) = صفر ، و بالتالي :

إما (س – ١) = صفر ، أي س = ١ .

أو (س+ ٧) = صفر ، أي س = – ٧ .

أو $\sqrt{س}$ – ٩ = صفر ، أي س = ٨١ .

أو $\frac{س^{٢}-٤}{س+١٠}$ = صفر ، إذا كان الكسر = صفر ، هذا يعني أن بسطه = صفر .

أي س = – ٢ ، س = + ٢ .

و بالتالي مجموعة الحلول هي س = {–٢، +١، +٢، -٧، ٨١}

حل مجموعة معادلتين خطيتين بمجهولين

لدينا معادلتين كل منهما بمجهولين ، و نريد إيجاد قيم المجهولين ، الأمثلة التالية ستوضح طريقة الحل بشكل مبسط ، و الجدير بالذكر هنا أن المعنى الهندسي للحل هو إيجاد نقطة تقاطع مستقيمين (طالما أن المعادلة الخطية بمتغيرين هي معادلة مستقيم) .

مثال أوجد الحل المشترك للمعادلتين:

٢س – ص = ٣

٢س + ٣ص = ٧

الحل : إذا ضربنا المعادلة الأولى بسالب واحد ثم جمعنا المعادلة الناتجة مع المعادلة الثانية ، عندئذ يصبح لدينا معادلة بمتغير واحد هو ص ، ثم نجد قيمة س من أحد المعادلتين .

– ٢س + ص = –٣ (ضربنا المعادلة الأولى بسالب واحد) .

٢س + ٣ص = ٧

٤ص = ٤ (جمعنا المعادلتين) ، إذا ص = ١ .

نعوض قيمة ص في أحد المعادلتين نجد س= ٢ .

مثال أوجد الحل المشترك للمعادلتين :

٣س + ٥ص = ٤

٧س + ٨ص = ٢

الحل : ذكرنا سابقا أنه يمكن الحصول على معادلة خطية بمتغير واحد إذا جمعنا المعادلتين و كان (معامل أحد المتغيرات في إحدى المعادلتين مساو و معاكس لمعامل نفس المتغير في المعادلة الأخرى) ، سنحل هذا المثال بطريقتين ، الأولى نحذف فيها س ، و الثانية نحذف فيها ص .

الطريقة الأولى : خذ معامل س في المعادلة الأولى و اعكس إشارته و اضربه بالمعادلة الثانية ، و خذ معامل س من المعادلة الثانية و حافظ على إشارته و اضربه بالمعادلة الأولى .

$$(٣س + ٥ص = ٤) \times ٧$$

$$(٧س + ٨ص = ٢) \times - ٣$$

$$٢١س + ٣٥ص = ٢٨$$

(الآن نجمع المعادلتين)

$$-٢١س - ٢٤ص = -٦$$

١١ص = ٢٢ ، إذا ص = ٢ ، نعوض ص في أحد المعادلتين نجد س = – ٢

الطريقة الثانية : خذ معامل ص في المعادلة الأولى و اعكس إشارته و اضربه بالمعادلة الثانية ، و خذ معامل ص في المعادلة الثانية و حافظ على إشارته و اضربه بالمعادلة الأولى ، ثم تابع الخطوات السابقة تجد المطلوب .

حل مجموعة ثلاث معادلات خطية بثلاثة متغيرات

لا تختلف حالة ثلاث معادلات بثلاثة متغيرات ، عن حالة معادلتين بمتغيرين ، عندما يكون لديك ثلاث معادلات بثلاثة متغيرات قم بتحويل هذه المعادلات (بالمتغيرات الثلاث) إلى معادلتين (بمتغيرين) .

مثال حل مجموعة المعادلات التالية حلا مشتركا .

$$س + ٢ص + ع = ٤$$

$$٣س + ٣ص + ع = ٨$$

$$٢س + ٧ص - ع = ١٧$$

الحل : حول المعادلات الثلاث إلى معادلتين كالتالي :

- خذ المعادلتين الأولى و الثانية ، و حولهما إلى معادلة واحدة بمجهولين فقط (اجعل معامل أحد المتحولات الثلاث في المعادلة الأولى مساويا في القيمة و معاكسا بالإشارة لمعامل نفس المتحول في المعادلة الثانية : مثلا معامل المتحول ع يساوي ١ في المعادلة الأولى ، و أيضا معامل ع يساوي ١ في المعادلة الثانية (لذلك نضرب المعادلة الأولى بسالب واحد ثم نجمع المعادلتين فنحصل على معادلة واحدة بمجهولين) :

$$- س - ٢ص - ع = -٤$$

$$٣س + ٣ص + ع = ٨$$ (ضرب المعادلة الأولى بسالب واحد) .

$$٢س + ٧ص - ع = ١٧$$

٢س + ص = ٤ (قمنا بجمع المعادلتين الأولى و الثانية بعد ضرب المعادلة الأولى بسالب واحد) .

- خذ المعادلتين الثانية و الثالثة (يمكن جمعها مباشرة لحذف ع (لاحظ أنه يجب عليك حذف ع وليس متحول آخر ، لأنك في الخطوة الأولى أيضا قمت بحذف ع) :
٥س + ١٠ص = ٢٥ .

الآن أصبح لدينا المعادلتين :

٢س + ص = ٤

٥س + ١٠ص = ٢٥

و هما معادلتين بمجهولين (تعلمنا سابقا كيف نحلهما) ، بعد إيجاد قيم س و ص ، نعوض في أحد المعادلات التي يوجد فيها المتحول ع ، فنجد قيمته .

ثانيا : المتباينات (دراسة إشارة اقتران) .

الفرق بين المعادلة و المتباينة هو أن المعادلة تحتوي مساواة(=)و طرفين (يميني و يساري) .. المتباينة تحتوي أيضا طرفين (يميني و يساري) و لكنها تستخدم (≤ ، ≥ ، ≺ ، ≻) بدلا من المساواة (=) ... هذه الإشارات تعني :

≤ أكبر من أو يساوي .

≥ أصغر من أو يساوي .

≺ أكبر من (أو أحيانا يسمونها أكبر تماما من)

≻ أصغر من (أو أحيانا يسمونها أصغر تماما من) .

الحالة العامة تسمى حل متباينة .. ولكن عندما يكون أحد الطرفين صفر ، عندها نسميها دراسة إشارة مقدار جبري (أو دراسة إشارة اقتران) ، سنورد فيما يلي مجموعة من الأمثلة الكافية لفهم هذا المفهوم الرياضي الهام ، من بين هذه الامثلة سيكون لدينا مثال واحد على حل متباينة (ستصادف مثله في منهاج التوجيهي) .. و بقية الأمثلة ستكون عن دراسة إشارة اقتران ما .. و ذلك لأهميته لكامل المنهاج .

مثال حل المتباينة ٣س + ٩ ≥ ١٢ .

الحل : نجعل أحد الطرفين مساويا للصفر ، مثلا نضيف – ١٢ لكلا الطرفين .

٣س + ٩ – ١٢ ≥ صفر .

٣س – ٣ ≥ صفر ، الآن نضع ق (س) = ٣س – ٣ (من هنا تبدأ خطوات دراسة إشارة اقتران) .

الآن نوجد أصفار المعادلة ق (س) = صفر ، أي ٣س – ٣ = صفر .

صفرها هو س = ١ ، على خط الأعداد نضع س = ١.

ثم نجرب عدد على يمين ١ (نجرب أي عدد أكبر من ١ ، على سبيل المثال ٢ ... نعوض ٢ في قاعدة ق(س) .

ق(٢) = ٣ × ٢ – ٣ = + ٣ (ما يهمنا هنا هو إشارة الجواب و ليس الجواب ، إشارة الجواب موجبة) .. إذا على يمين ١ (الأعداد الأكبر من ١) على خط الأعداد تكون الإشارة موجبة .

ثم نجرب عدد على يسار ١ (نجرب أي عدد أقل من ١ ، على سبيل المثال صفر ... نعوض صفر في قاعدة ق(س) .

ق(صفر) = ٣×صفر – ٣ = – ٣ (ما يهمنا هنا هو إشارة الجواب و ليس الجواب ، إشارة الجواب سالبة .. إذا على يسار ١ (أي عند الأعداد التي هي أقل من ١) تكون الإشارة سالبة .

سؤالنا الأساسي كان بعد التبسيط ٣س – ٣ ≤ صفر ... و هذا يعني أننا نريد قيم س التي تجعل المقدار ٣س – ٣ أقل من أو يساوي الصفر (القيم التي تجعل المقدار صفر ، و القيم التي تجعله سالب) ... إذا س ∋ (– ∞ ، ١] .. لاحظ أن القوس عند اللانهاية دوما مفنوح " (" ، أو ") " .. لاحظ أيضا إغلاق القوس عند ١ (و هذا يعني أن س= ١ هي من ضمن الحلول التي نبحث عنها ، حيث س = ١ تجعل المقدار المطلوب = صفر ، و نحن نريده إما صفر أو

أقل من صفر) ، فلو كان الإشارة المطلوبة ٣س – ٣ ≺ صفر.. عندها يجب فتح القوس عند س =١ ، حيث أننا نريد القيم التي تجعل المقدار سالب فقط و لا نريد تلك التي تجعله يساوي الصفر .. وبالتالي يجب استثناء س = ١ من الفترة ، الاستثناء يكون بفتح القوس عند س = ١..
أي س ∋ (– ∞ ، ١) .

مثال أوجد مجموعة قيم س التي تجعل س^{٢} – ٤ ≻ صفر .

الحل : الخطوة الأولى هي ق(س) = س^{٢} – ٤ .

الخطوة الثانية ق(س) = صفر ، أي س^{٢} – ٤ = صفر ... أي س = {–٢، +٢}

الخطوة الثالثة : نضع س = – ٢ ، س = + ٢ على خط الأعداد .

الخطوة الرابعة : نجرب عدد في الفترة (– ∞ ، - ٢) : مثلا س = – ٣ .

ق(-٣) = + ٥ (إشارة موجبة) ، و بالتالي نضع فوق خط الأعداد في الفترة المذكورة كلمة موجب .

نجرب عدد في الفترة (- ٢ ، + ٢) : مثلا س = صفر .

ق(صفر) = – ٤ (إشارة سالبة) ، لذلك نضع فوق خط الأعداد في الفترة المذكورة كلمة سالب .

نجرب عدد في الفترة (+ ٢ ، + ∞) : مثلا س = +٣ .

ق(+٣) = +٥ (إشارة موجبة) ، و بالتالي نضع فوق خط الأعداد في الفترة المذكورة كلمة موجب ، عندها يصبح خط الأعداد كما يلي :

موجب +٢ سالب – ٢ موجب

+∞ ———————————————— –∞

الخطوة الخامسة: نقرأ المطلوب من السؤال ، المطلوب هو قيم س التي تجعل س^{٢} – ٤ ≻ صفر ... أي التي تجعل الاقتران موجب :

س ∈ (−∞ ، − ٢) ∪ (+٢ ، +∞) ، الإشارة ∪ تعني الاتحاد و تقرأ " **أيضا** " و البعض يقرأها " **أو**" (أي أن الاقتران موجب في الفترة الأولى و **<u>أيضا</u>** في الفترة الثانية) .

مثال ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٧}$ ، أوجد مجموعة قيم س التي تجعل ق(س) ≤ صفر .

الحل : الخطوة الأولى : ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٧}$.

الخطوة الثانية : إيجاد أصفار البسط و المقام (عليك الانتباه هنا : لدراسة إشارة الاقترانات الكسرية ، عليك إيجاد أصفار كل من البسط و المقام)

أصفار البسط : س = − ٢ ، س = + ٢ ، أصفار المقام : س = +٧

الخطوة الثالثة و الرابعة : وضع الأصفار على خط الأعداد و تجربة عدد في كل فترة .

نجرب عدد في الفترة (−∞ ، -٢) : مثلا س = −٣ .

ق(-٣) = $\frac{\text{موجب}}{\text{سالب}}$ = سالب.

نجرب عدد في الفترة (-٢ ، +٢) : مثلا س = صفر .

ق(صفر) = $\frac{\text{سالب}}{\text{سالب}}$ = موجب .

نجرب عدد في الفترة (+٢ ، +٧) : مثلا س = +٣ .

ق(+٣) = $\frac{\text{موجب}}{\text{سالب}}$ = سالب .

نجرب عدد في الفترة (+٧ ، +∞) : مثلا س = +٨ .

ق(+٨) = $\frac{\text{موجب}}{\text{موجب}}$ = موجب .

الآن نعود للمطلوب و هو ق(س)≤ صفر .

ق(س) سالب في الفترات التي وجدناه فيها سالب و هي (−∞ ، -٢)∪ (+٢ ، +٧)

و لكن المطلوب ليس فقط ق(س) سالب ، بل أيضا ق(س) = صفر .

ق(س) = صفر ، عندما البسط = صفر ، أي س = − ٢ ، س = + ٢ .

إذا ق(س) ≤ صفر

عندما س ∋ (−∞ ، -٢) U (+٢ ، +٧) ∪ {−٢} ∪ {+٢}.

أي أن س ∋ (−∞ ، -٢] ∪ [٢ ، ٧) .

إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة

$$|\text{ق(س)}| = \begin{cases} +\text{ق(س) : ق(س)} \geq \text{صفر.} \\ -\text{ق(س) : ق(س)} < \text{صفر.} \end{cases}$$

إن الشكل السابق لكتابة ق (س) ليس إلا دراسة إشارته كما سترى في الأمثلة التالية.

مثال أعد تعريف ق(س)= |س − ٥| .

الحل : ندرس إشارة ما داخل القيمة المطلقة ، تعلمنا سابقا لدراسة إشارة مقدار ما ، علينا بداية أن نجد أصفاره ، نضع ل (س) = س - ٥ ، ل(س) = صفر ، إذا س = +٥ .

نضع س = +٥ على خط الأعداد ... نجرب عدد على يمين س = +٥ (مثلا س = + ٦) .

ل(٦) = +١ (مقدار موجب) : ما يهمنا هنا فقط الإشارة .

نجرب عدد على يسار س = +٥ (مثلا س = +٤) .

ل(٤) = −١ مقدار سالب .

إذا حسب تعريف القيمة المطلقة : في الفترات التي يكون فيها ما داخل القيمة المطلقة موجب : اترك ما داخل القيمة المطلقة بدون تغيير ، و في الفترات التي يكون فيها سالب : قم بضرب ما داخل القيمة المطلق ب –١) ، إذا :

عندما س≤ ٥ : |س – ٥| = س– ٥ (لأن س – ٥ موجبة في هذه الفترة فنتركها دون تغيير)

و عندما س≺ ٥ : |س – ٥| = –س + ٥ (تم ضربها ب –١ لأنها سالبة في هذا الفترة)

مثال أعد تعريف اقتران القيمة المطلقة الآتي عند س ≻ ٣ :

ق(س) = |س^{٢} – ٩|

الحل : جرب عدد أكبر من س = ٣ ، ستجد أن س^{٢} – ٩ موجب ، و حسب تعريف القيمة المطلقة إذا كان ما داخلها موجب سنتركها بدون تغيير ، أي |س^{٢} – ٩| = س^{٢} – ٩ عندما س أكبر من ٣ .

مثال أعد تعريف اقتران القيمة المطلقة الآتي عند س ≺ ٣

ق(س) = |س^{٢} – ٩|

الحل : جرب عدد أصغر من س = ٣ ، ستجد أن س^{٢} – ٩ سالب ، و حسب تعريف القيمة المطلقة إذا كان ما داخلها سالب نقوم بضربه بسالب ، أي |س^{٢} – ٩| = ٩ – س^{٢} عندما س أقل من ٣ .

مثال أعد تعريف اقتران القيمة المطلقة الآتي عند س ≺ ٣

ق(س) = |س^{٢} – ٧س + ١٢| ، الحل : |(س – ٣) × (س – ٤)| ،عندما س ≺ ٣ يكون (س-٣) سالب ، و أيضا (س-٤) سالب ... سالب × سالب يعطي موجب ، إذا عندما س≺ ٣ يكون ما داخل القيمة المطلقة موجب ، و بالتالي يبقى دون تغيير إشارة ، أي |س^{٢} – ٧س + ١٢| = س^{٢} – ٧س + ١٢ .

إعادة تعريف اقتران أكبر عدد صحيح

من المعروف أن اقتران أكبر عدد صحيح يأخذ قيم ثابتة لكل فترة فرعية (م ، ن) ضمن فترة رئيسية (أ ، ب) ، لإعادة تعريف اقتران أكبر عدد صحيح (كتابته بدون استخدام الرمز ⌊ ⌋) عليك أولا إيجاد طول الفترة :

طول الفترة الفرعية = $\frac{١}{\text{القيمة المطلقة لمعامل س}}$ ، ثم نخطو بمقدار طول الفترة الفرعية من أ إلى ب ، (المثال التالي يوضح طريقة الحل) .

مثال بدون استخدام الرمز ⌊ ⌋ أعد كتابة الاقتران ق(س) = ⌊٢س − ١⌋

في الفترة الرئيسية (١ ، ٣) ؟

الحل :

طول الفترة الفرعية = $\frac{١}{٢}$ ، نوجد الفترات الفرعية كالتالي :

الفترة الفرعية الأولى = (بداية الفترة الرئيسية ، بداية الفترة الرئيسية + طول الفترة الفرعية)

و بالتالي الفترة الفرعية الأولى = (١ ، ١ + $\frac{١}{٢}$) = (١ ، $\frac{٣}{٢}$)

الفترة الفرعية الثانية = (نهاية الفترة الفرعية الأولى ، نهاية الفترة الفرعية الأولى + طول الفترة الفرعية) = ($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$) = ($\frac{٣}{٢}$ ، ٢) .

الفترة الفرعية الثالثة = (نهاية الفترة الفرعية الثانية ، نهاية الفترة الفرعية الثانية + طول الفترة الفرعية الثانية) = (٢ ، ٢ + $\frac{١}{٢}$) = (٢ ، $\frac{٥}{٢}$) .

الفترة الفرعية الرابعة = (نهاية الفترة الفرعية الثالثة ، نهاية الفترة الفرعية الثالثة + طول الفترة الفرعية) = ($\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$) = ($\frac{٥}{٢}$ ، ٣) ، و هنا نتوقف لأننا وصلنا إلى نهاية الفترة الرئيسية المطلوبة .

الآن لمعرفة قيم ق(س) في الفترات الفرعية نبدأ بحساب قيمة ق(س) في الفترة الفرعية الأولى ، ثم نضيف ١ لهذه القيمة في كل فترة فرعية (إذا كان معامل س في الاقتران سالب ، عندئذ نطرح ١ في كل مرة) .

و لمعرفة قيمة ق(س) في الفترة الفرعية الأولى (١ ، $\frac{٣}{٢}$) نختار س في منتصف الفترة (قانون منتصف الفترة = (بداية الفترة + نهاية الفترة) ÷ ٢)

أي س = (١ + $\frac{٣}{٢}$) ÷ ٢ = $\frac{٥}{٤}$ ، نعوض س = $\frac{٥}{٤}$ في الاقتران فنجد :

ق($\frac{٥}{٤}$) = $\lfloor ٢ \times \frac{٥}{٤} - ١ \rfloor$ = $\lfloor \frac{٣}{٢} \rfloor$ = ١ (و هذه هي قيمة ق(س) في الفترة الفرعية الأولى ، و لمعرفة قيمة ق(س) في باقي الفترات ، نقوم بإضافة ١) .

أي قيمة ق(س) في الفترة الفرعية الثانية = قيمة ق في الفترة السابقة(السابقة هنا هي الأولى) + ١ = ١ + ١ = ٢ .

قيمة ق(س) في الفترة الفرعية الثالثة = قيمة ق في الفترة السابقة(السابقة هنا هي الثانية) + ١ = ٢ + ١ = ٣ .

قيمة ق(س) في الفترة الفرعية الرابعة = قيمة ق في الفترة السابقة +١ = ٣ + ١ = ٤ .

أي :

ق(س) = ١ ، عندما س ∋ (١ ، $\frac{٣}{٢}$)

ق(س) = ٢ ، عندما س ∋ ($\frac{٣}{٢}$ ، ٢)

ق(س) = ٣ ، عندما س ∋ (٢ ، $\frac{٥}{٢}$)

ق(س) = ٤ ، عندما س ∋ ($\frac{٥}{٢}$ ، ٣)

لاحظ أن الهدف من كل هذه الكتابة هو شرح كيفية التعامل مع اقتران أكبر عدد صحيح مهما يكن شكله و مهما تكن الفترة المعطاة ، عندما تعتاد على هذه الطريقة ستجدها أكثر سهولة على خط الأعداد (بدون كتابة أي كلمة) .

مثال بدون استخدام الرمز ⌊ ⌋ أعد كتابة الاقتران ق(س) = $\lfloor - ٢ س - ١ \rfloor$ في الفترة الرئيسية (١ ،٣) ؟

الحل :

طول الفترة الفرعية = $\frac{١}{٢}$ ، نوجد الفترات الفرعية كالتالي :

الفترة الفرعية الأولى = (بداية الفترة الرئيسية ، بداية الفترة الرئيسية + طول الفترة الفرعية)

و بالتالي الفترة الفرعية الأولى = (١ ، ١ + $\frac{١}{٢}$) = (١ ، $\frac{٣}{٢}$)

الفترة الفرعية الثانية = (نهاية الفترة الفرعية الأولى ، نهاية الفترة الفرعية الأولى + طول الفترة الفرعية) = ($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$) = ($\frac{٣}{٢}$ ، ٢) .

الفترة الفرعية الثالثة = (نهاية الفترة الفرعية الثانية ، نهاية الفترة الفرعية الثانية + طول الفترة الفرعية الثانية) = (٢ ، ٢ + $\frac{١}{٢}$) = (٢ ، $\frac{٥}{٢}$) .

الفترة الفرعية الرابعة = (نهاية الفترة الفرعية الثالثة ، نهاية الفترة الفرعية الثالثة + طول الفترة الفرعية) = ($\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$) = ($\frac{٥}{٢}$ ، ٣) ، و هنا نتوقف لأننا وصلنا إلى نهاية الفترة الرئيسية المطلوبة .

الآن لمعرفة قيم ق(س) في الفترات الفرعية نبدأ بحساب قيمة ق(س) في الفترة الفرعية الأولى ، ثم نضيف ١ لهذه القيمة في كل فترة فرعية (إذا كان معامل س في الاقتران سالب ، عندئذ نطرح ١ في كل مرة) .

و لمعرفة قيمة ق(س) في الفترة الفرعية الأولى (١ ، $\frac{٣}{٢}$) نختار س في منتصف الفترة (قانون منتصف الفترة = (بداية الفترة + نهاية الفترة) ÷ ٢)

أي س = (١ + $\frac{٣}{٢}$) ÷ ٢ = $\frac{٥}{٤}$ ، نعوض س = $\frac{٥}{٤}$ في الاقتران فنجد :

ق($\frac{٥}{٤}$) = $\lfloor -٢ \times \frac{٥}{٤} - ١ \rfloor$ = $\lfloor \frac{-٧}{٢} \rfloor$ = −٤ (و هذه هي قيمة ق(س) في الفترة الفرعية الأولى ، و لمعرفة قيمة ق(س) في باقي الفترات ، نقوم بطرح ١) .

أي قيمة ق(س) في الفترة الفرعية الثانية = قيمة ق في الفترة السابقة(أي الفترة الفرعية الأولى) - ١ = −٤ - ١ = −٥

قيمة ق(س) في الفترة الفرعية الثالثة = قيمة ق في الفترة السابقة(السابقة هنا أصبحت الثانية) - ١ = −٥ - ١ = −٦

قيمة ق(س) في الفترة الفرعية الرابعة = قيمة ق في الفترة السابقة - ١ = −٦ - ١ = −٧

أي :

ق(س) = −٤ ، عندما س ∋ (١ ، $\frac{٣}{٢}$)

ق(س) = – ٥، عندما س ∋ ($\frac{٣}{٢}$ ، ٢)

ق(س) = – ٦ ، عندما س ∋ (٢ ، $\frac{٥}{٢}$)

ق(س) = – ٧، عندما س ∋ ($\frac{٥}{٢}$ ، ٣)

الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم هي من الشكل : أ س + ب ص + جـ = صفر

حيث : أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية .. و هذه تسمى المعادلة العامة للمستقيم .

و المقدار $\frac{-أ}{ب}$ يسمى ميل المستقيم .

يوجد شكل آخر يسمى الشكل القياسي : ص – ص$_{١}$ = م(س – س$_{١}$) .

حيث (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) هي نقطة يمر منها المستقيم ، م ميل المستقيم .. و هذه المعادلة تكتب أيضا بالشكل : ص = م س + ن ، حيث م ، ن أعداد حقيقية .

م هنا يسمى ميل المستقيم = ظا هـ ، حيث هـ هي الزاوية التي يصنعها المستقيم مع محور السينات الموجب بجهة عقارب الساعة ، ن هي نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات .

أولا : إيجاد معادلة مستقيم : لإيجاد معادلة المستقيم تحتاج ميل و نقطة يمر منها المستقيم ، أو نقطتين يمر منهما المستقيم (نجد منهما الميل ونأخذ أحدهما فيصبح لدينا ميل و نقطة) .

مثال جد معادلة المستقيم الذي ميله = +٢ ، و يمر من النقطة (٣ ، ٤) .

الحل : معادلة المستقيم هي ص – ص$_{١}$ = م(س – س$_{١}$) ، نعوض المعطيات فنجد :

ص – ٤ = ٢(س – ٣) ، و بإدخال ٢ إلى القوس و عزل ص نجد :

ص = ٢س – ٢ و هي معادلة المستقيم المطلوب .

مثال جد معادلة المستقيم الذي ميله +١ و يمر بنقطة الأصل .

الحل : نقطة الاصل هي (صفر ، صفر) ، بالتعويض نجد : ص = س .

ملاحظة : يقطع المستقيم محور السينات عند نقطة إحداثياتها (س ، صفر) ، و يقطع محور الصادات عند نقطة إحداثياتها (صفر ، ص) .

مثال جد معادلة المستقيم الذي ميله – ٢ و يقطع محور السينات عند س = ٣ .

الحل : نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي (٣ ، صفر) ، إذا المعادلة :

ص – ٠ = –٢(س – ٣) ، أي ص = – ٢س + ٦ .

ملاحظة : عندما يتوازى مستقيمان فإن ميلهما متساوي ، و عندما يتعامد مستقيمان فإن ضرب ميلهما = –١ .

مثال جد معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم ص = ٢ س +١ ، و يمر من (٢ ، ٣)

الحل : المستقيم المطلوب يوازي مستقيم آخر ميله ٢ ، إذا ميل المستقيم المطلوب ايضا ٢ .

نعوض الميل و النقطة في المعادلة ص – ص$_١$ = م(س – س$_١$) .. فنجد المطلوب .

ملاحظة : عندما يتقاطع مستقيمان ، أو مستقيم و اقتران (جميع المستقيمات هي اقترانات باستثناء المستقيم الموازي لمحور الصادات ، سنرى ذلك لاحقا) ، فإن نقطة التقاطع هي نقطة مشتركة بين المتقاطعين ، و بالتالي يمكن استخدامها لإيجاد معادلة المستقيم .

مثال جد معادلة المستقيم الذي ميله = ٢ ، و يتقاطع مع المستقيم ص = ٢ س +١ عند نقطة سيناتها س = ٢ .

الحل : لدينا م = ٢ ... و كما قلنا قبل قليل : نقطة التقاطع هي نقطة مشتركة بين المستقيمين و بالتالي فإن مستقيمنا المطلوب يمر منها ، اي يمكن استخدامها لإيجاد معادلة المستقيم ، سينات هذه النقطة معلومة س = ٢ ، أما لإيجاد صاداتها فلأن المستقيم ص = ٢ س +١ أيضا يمر من س= ٢ ، إذا ص = ٢ × ٢ +١ = ٥ ... إذا النقطة التي يمر منها مستقيمنا هي (٢،٥)

نعوض الميل و النقطة في المعادلة $ص - ص_1 = م(س - س_1)$ ، فنجد المطلوب .

اقترانات شهيرة

قبل التعرف على أشهر الاقترانات ، يجب معرفة بعض المعلومات الرئيسية :

إذا كان ق(س) اقترانا ما :

- فإنه يقطع محور السينات عند قيم س التي تحل المعادلة ق(س) = صفر ، و بالتالي تكون نقطة التقاطع (قيم س ، صفر) .
- و يمس محور السينات عندما ق(س) = صفر (ستتعلم ذلك في بحث الاشتقاق) .
- و يقطع محور الصادات عندما س = صفر ، و بالتالي نقطة التقاطع تكون:

  (صفر ، قيمة ق(س) عندما س = صفر) .

- و يقطع اقتران آخر ه(س) عندما : ق(س) = ه(س) .
- و يمس اقتران آخر ه(س) عندما : ق(س) = ه(س) ، و (مشتقة ق = مشتقة ه ، ستتعلم ذلك لاحقا)

و فيما يلي نستعرض أشهر الاقترانات التي ستواجهها في منهاج التوجيهي :

أولا : الاقتران الخطي

و هو اقتران من الشكل ق(س) = م س + ن : م ، ن أعداد حقيقية .

المعلومات التي يجب معرفتها عن هذا الاقتران سنوضحها في المثال التالي :

مثال ليكن ق(س) = ٢س + ٦ ، ارسم ق ، و جد المساحة التي يحصرها ق مع محاور السينات و الصادات .

الحل : لرسم ق ، نحتاج نقطتين فقط يمر منهما (ثم نصل بينهما بخط مستقيم) .

دائما خذ النقطتين التي يقطع عندهما ق محوري السينات و الصادات ، أي :

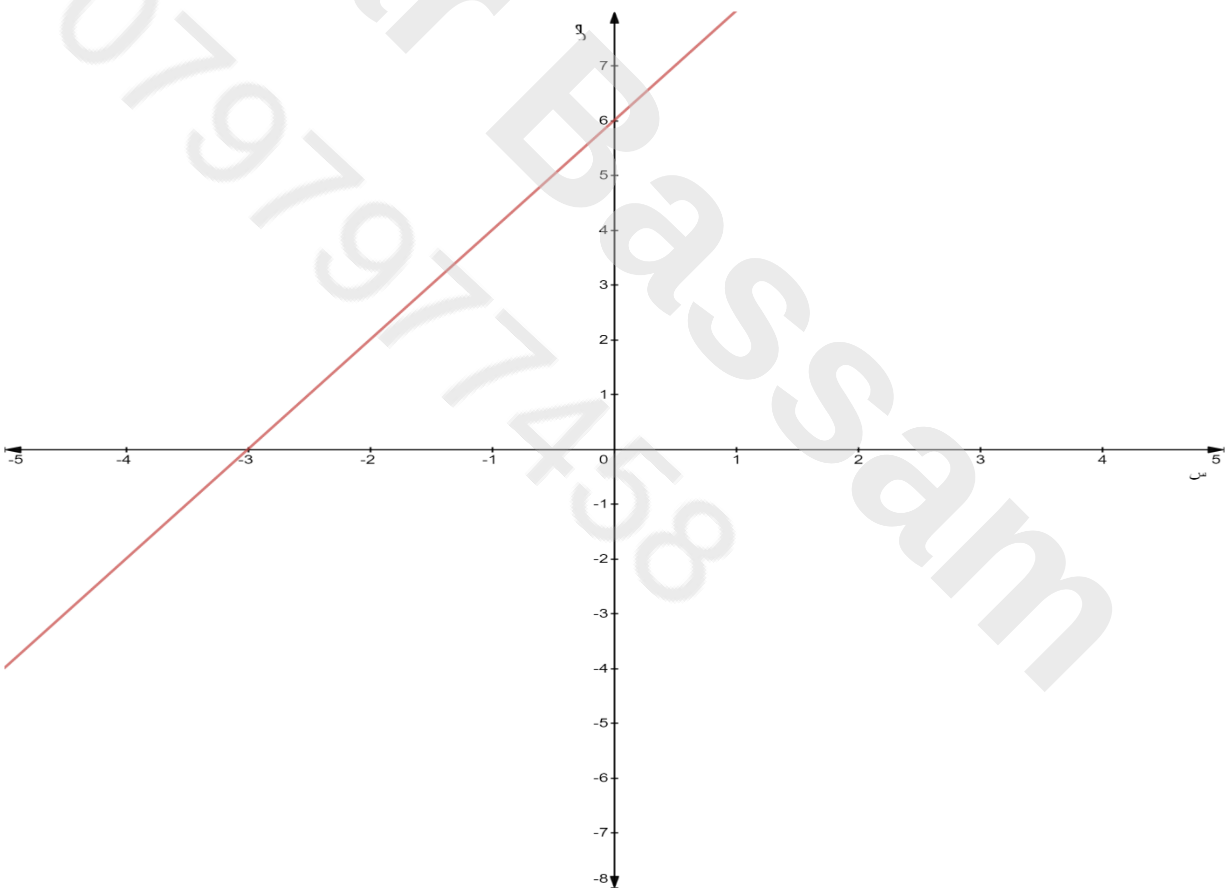
النقطة الأولى : نقطة تقاطع ق مع محور السينات ، نجعل ق (س) = صفر ، و نجد قيم س .

٢س + ٦ = صفر ، و بالتالي س = – ٣ ، فتصبح النقطة الأولى (– ٣ ، صفر) .

النقطة الثانية : نقطة تقاطع ق مع محور الصادات ، نجعل س = صفر ، و نجد ق(صفر) .

ق(صفر) = ٢ × صفر + ٦ = ٦ ، فتكون النقطة الثانية (صفر ، ٦) .

الآن نعين النقطتين على المحاور ، ونصل بينهما بخط (نمرر خط) .



و لحساب المساحة المطلوبة ، فإن مساحة المثلث القائم = $\frac{1}{٢}$ × القائم الأول × القائم الثاني.

إذا المساحة المطلوبة = $\frac{1}{٢}$ × ٦ × ٣ = ٩ وحدة مساحة .

مثال إذا كان ق(س) = أ س + ٢ ، جد الثابت أ بحيث تكون المساحة المحصورة بين الاقتران و محوري السينات و الصادات = ٤ .

الحل : نحدد المساحة المطلوبة بإيجاد نقاط تقاطع الاقتران (المستقيم) مع محوري السينات و الصادات ، من أجل نقطة التقاطع مع محور السينات نضع ق(س) = صفر ، نجد س = $\frac{-٢}{أ}$ ، و من أجل التقاطع مع محور الصادات نضع س = صفر ، نجد ق(س) = ٢ .

نعين نقاط التقاطع على المحاور (كما في المثال السابق) ، فنجد :

المساحة = ٤ = $\frac{1}{٢}$ × $\frac{-٢}{أ}$ × ٢ ، إذا : أ = − $\frac{1}{٢}$.

حالات خاصة في الاقتران الخطي :

إذا كان الميل = صفر ، تصبح معادلة الاقتران الخطي : ق(س) = ن ، و هي معادلة مستقيم يوازي محور السينات و يقطع محور الصادات عند ص= ن (و يسمى الاقتران الثابت)

إذا كان الاقتران الخطي من الشكل : ق(س) = م س ، فإن الاقتران (المستقيم) يمر من نقطة الأصل ، فإذا كان الميل = ١ ، تصبح معادلة الاقتران الخطي : ق(س)= س (و تسمى معادلة المستقيم المنصف للربعين الأول و الثالث : منصف للزوايا أي يقسم كل منها إلى قسمين كل منهما = ٤٥ درجة ، و إذا كان الميل = − ١ ، تصبح معادلة الاقتران : ق(س) = − س (و تسمى معادلة المستقيم المنصف للربعين الثاني و الرابع) .

ثانيا : الاقتران التربيعي

و هو اقتران من الشكل ق(س) = أ $س^{٢}$ + ب س + جـ .

يسمى هذا الاقتران : اقتران القطع المكافئ (ستسمع هذا الاسم في الفصل الثاني من الكتاب) .

مميزات الاقتران التربيعي :

- إذا كانت أ موجبة يكون مقعر نحو الأعلى (مفتوح للأعلى) و إذا كانت سالبة يكون مفتوح للأسفل (سترى ذلك خلال الأمثلة) .
- عندما يكون الاقتران مفتوح للأعلى فإن قيمة س التي توافق أدنى نقطة هي س = $\frac{-ب}{٢ \times أ}$

و صاداتها هي ق ($\frac{-ب}{٢ \times أ}$) ، و سيكون اسمها كما سترى لاحقا قيمة صغرى محلية .

- عندما يكون الاقتران مفتوح للأسفل فإن قيمة س التي توافق أعلى نقطة هي كما في السابق ، و تسمى قيمة عظمى محلية .
- نقطة تقاطع الاقتران التربيعي مع محور السينات هي حلول المعادلة :

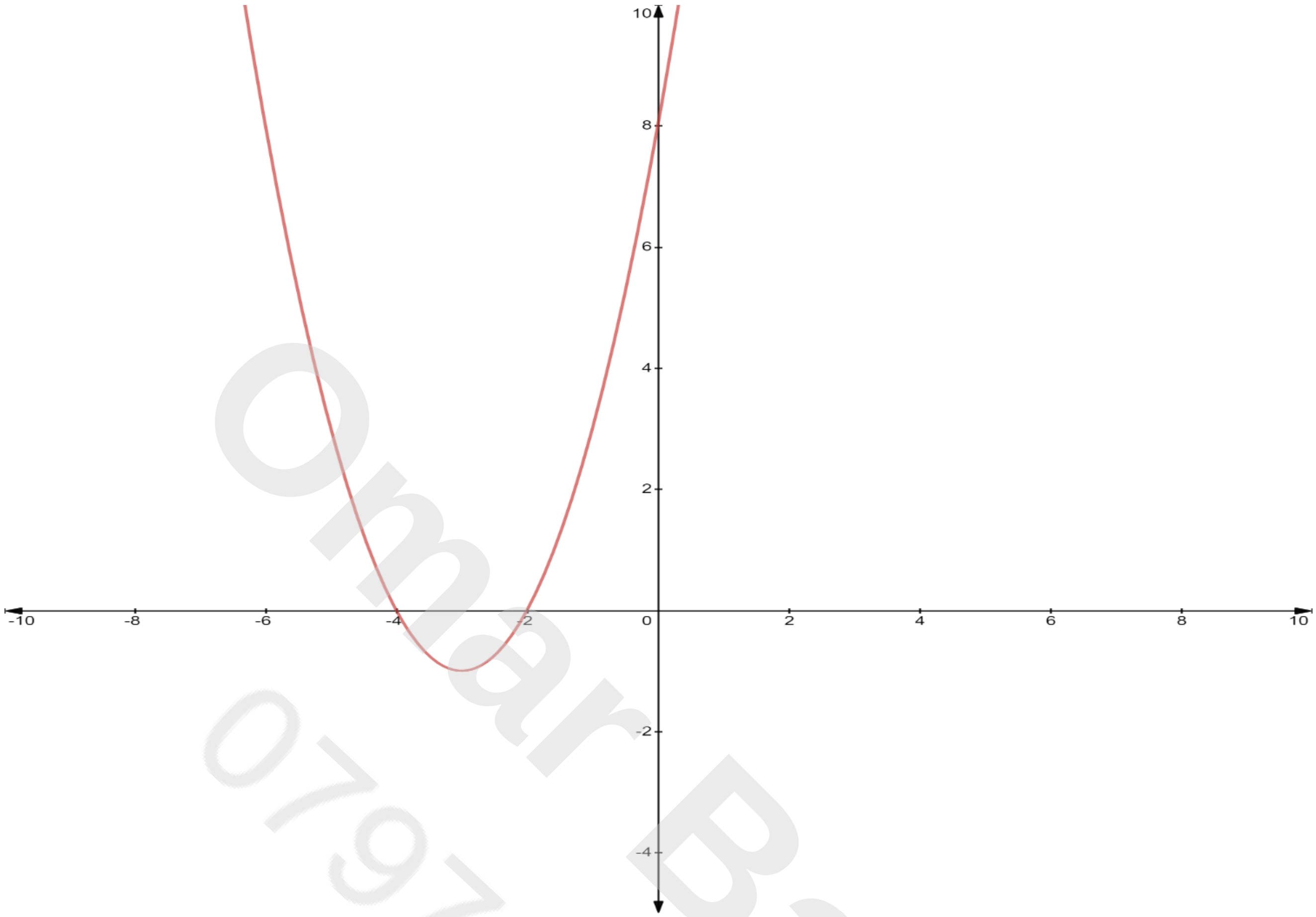
ق(س) = صفر ، أي أ $س^{٢}$ + ب س + جـ = صفر (تعلمنا سابقا كيف نحل المعادلات التربيعية) ، و نقطة تقاطع الاقتران مع محور الصادات يتم إيجادها بوضع س = صفر ، و هي (صفر ، جـ) .

مثال ارسم الاقتران ق(س) = $س^{٢}$ + ٦س + ٨

الحل : الاقتران مفتوح للأعلى لأن معامل $س^{٢}$ موجب ، قيمة س الموافقة لأدنى نقطة هي س = −٣ ، و صاداتها ص = ق(−٣) = −١

يقطع محور السينات عندما ق(س) = صفر ، أي س = −٤ ، س = −٢ .

يقطع محور الصادات عندما س = صفر ، أي ص = ٨ .

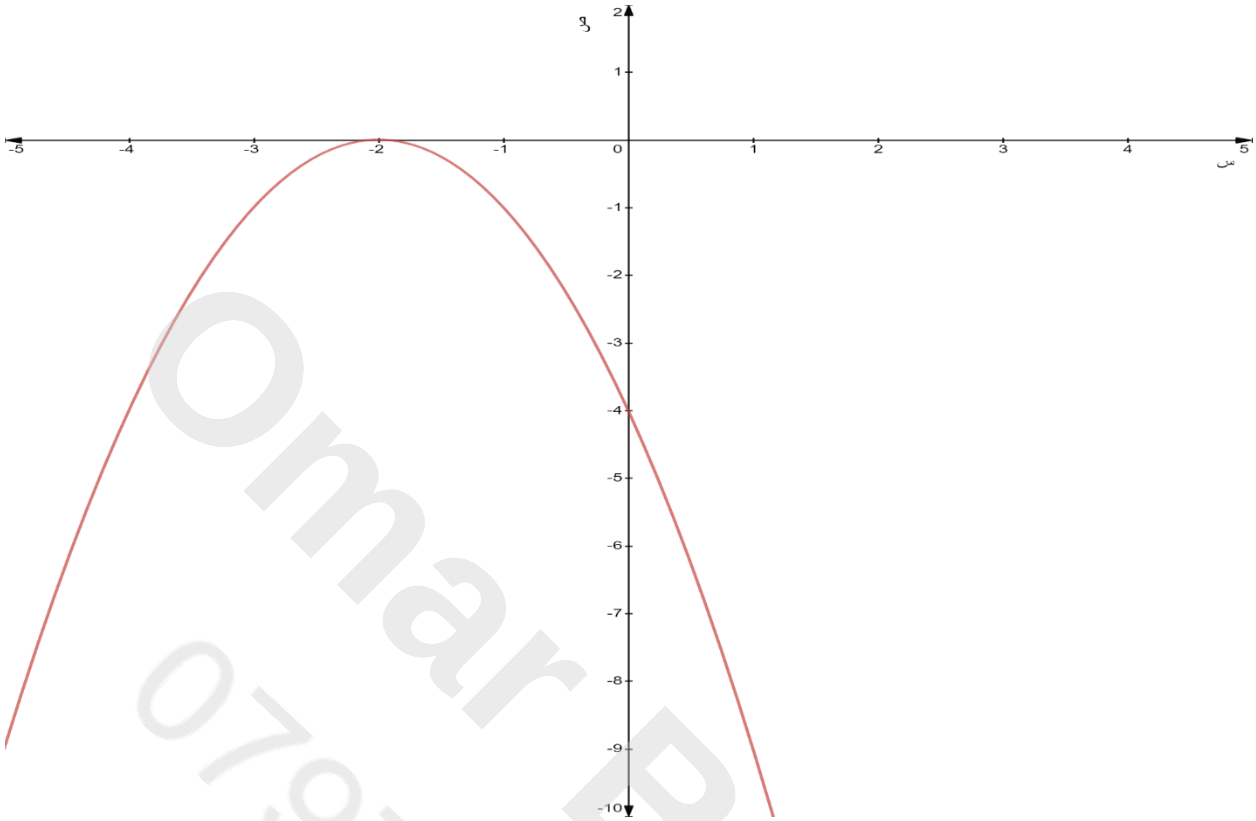


مثال ليكن ق(س) = − $س^{٢}$ − ٤س − ٤ ، ارسم ق .

الحل : ق مفتوح للأسفل لأن معامل $س^{٢}$ سالب ، قيمة س الموافقة لأعلى نقطة هي س = − ٢ ، و صاداتها ق (− ٢) = صفر .

يقطع محور السينات عندما ق(س) = صفر ، و بالتالي س = − ٢ و هو حل وحيد (المميز = صفر ، أي يتطابق الحلين و كل منهما س = − ٢ ، و عندما يكون هناك حل وحيد لمعادلة تربيعية فهذا يعني أنها تمس (و لا تقطع) محور السينات عند هذا الحل .

يقطع محور الصادات عندما س = صفر ، و بالتالي ص = − ٤ .



ثالثا : الاقترانات التكعيبية

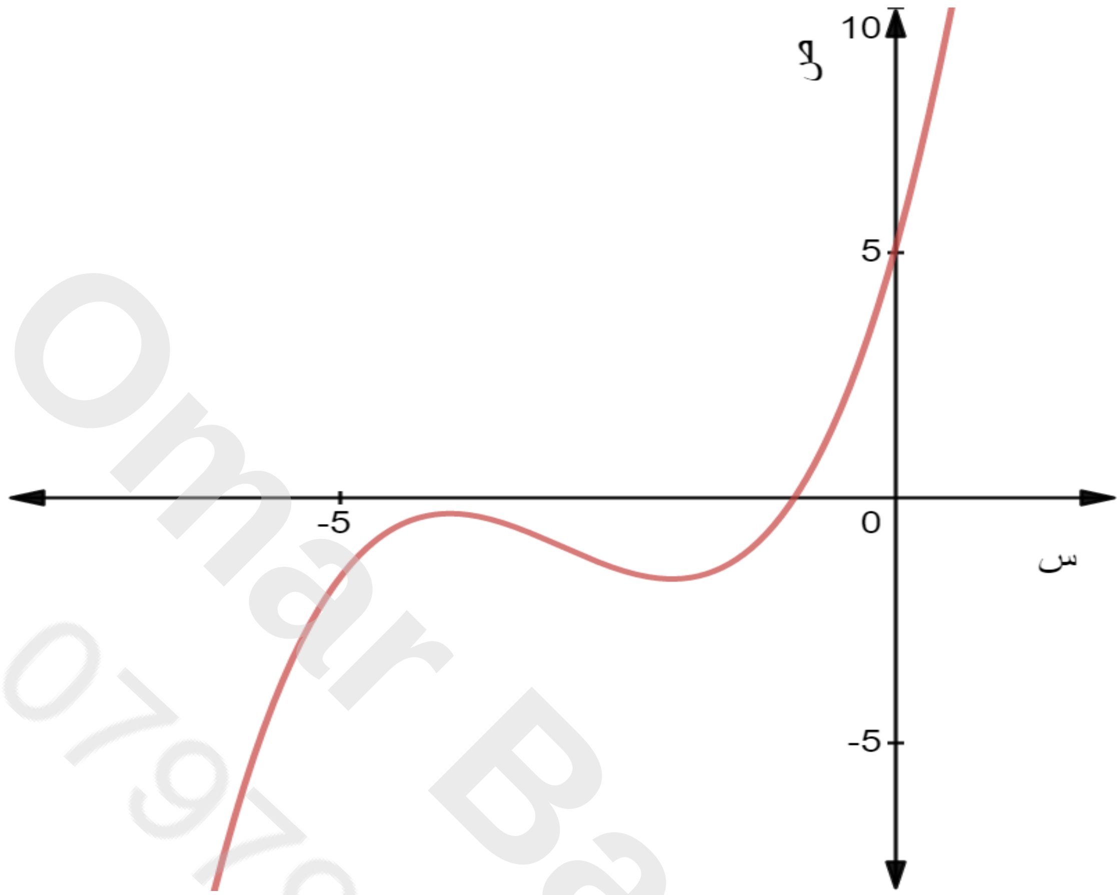
و هي اقترانات من الشكل ق(س) = أس^{٣} +بس^{٢}+جـس+د .

يقطع محور السينات عندما ق(س) = صفر (تعلمنا سابقا كيف نحل معادلة تكعيبية بالتجريب) ، و يقطع محور الصادات عندما س = صفر .

لهذا الاقتران أشكال معينة (يمكن رسمها بسهولة) لكن هذه الأشكال تعتمد على بحث الاشتقاق ، لذلك لن يتم التطرق إليها الآن ، كما يمكن رسمها بتعويض بعض النقاط ل س و إيجاد القيم الموافقة ل ص (و لكن هذه الطريقة لن تكون صالحة إذا لم يكن لديك معرفة مسبقة بشكل هذا الاقتران ، لذلك سنؤجل الحديث عنها إلى درس الاشتقاق) .

مثال ارسم الاقتران ق(س) = ٣س^{٣} + ٩س^{٢} + ٢٤س + ١٥ .

الحل :



رابعا : رسم الاقترانات بشكل عام

بإمكانك رسم أي اقتران بأحد طريقتين :

الطريقة البدائية : و هي بأخذ عدة قيم للمتغير س ثم إيجاد ما يوافقها من ص ، و من ثم الوصل بين هذه النقاط ، المشكلة الأساسية لهذه الطريقة أنه يجب أن يكون لديك معرفة مسبقة عن شكل الاقتران (لأنه كما قلنا جميع الاقترانات الواردة في كتاب التوجيهي لها أشكال معروفة ، لكن قد يكون من الصعب عليك حفظ أو تذكر الأشكال .. لذلك يجب أن تعتاد على الطريقة المتقدمة).

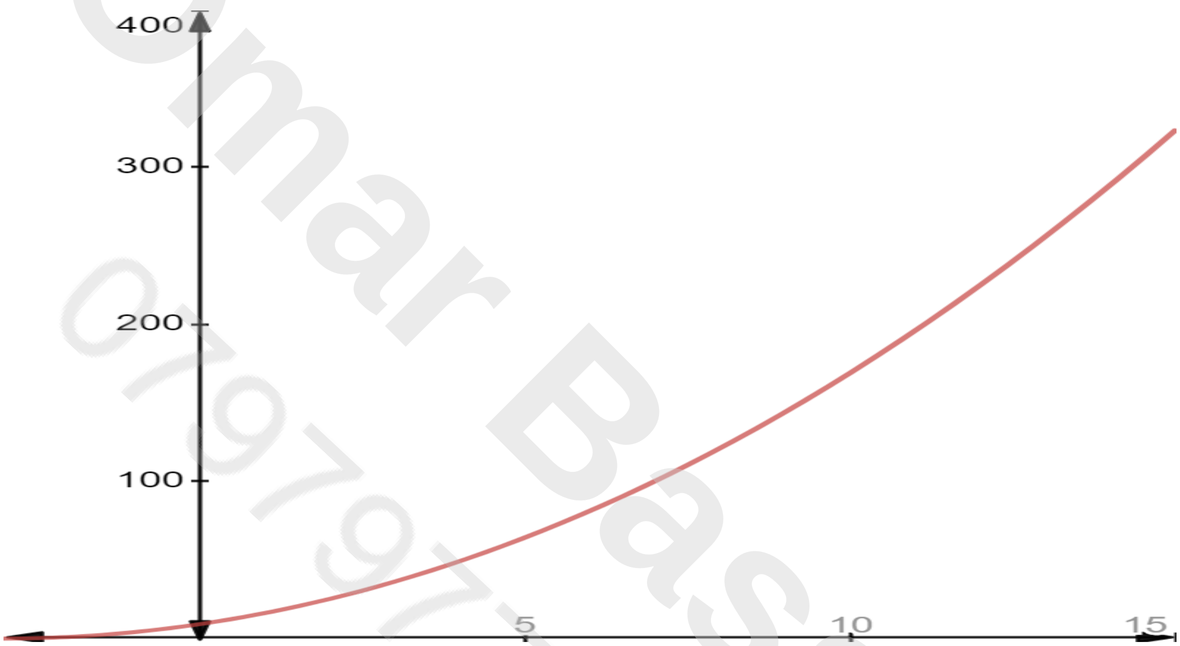
الطريقة المتقدمة : سميت متقدمة لأنها تعطي نتائج صحيحة و دقيقة دوما ، لكن للأسف لا يمكننا الحديث عنها الآن ، بل نحتاج أن نعرف بحث الاشتقاق أولا .

خامسا : رسم الاقترانات ضمن فترة معينة

لرسم اقتران ضمن فترة معينة ، ارسم الاقتران على كامل مجال تعريفه ، ثم اقتطع الجزء المقابل لفترتك .

مثال ارسم الاقتران ق(س) = = س^{٢} + ٦س + ٨ في الفترة [− ٣،١٥]

الحل : ارسم ق كما تعرفه ، ثم خذ الجزء المقابل للفترة المطلوبة .



خامسا : التعامل مع اقترانات القيمة المطلقة

لرسم اقتران القيمة المطلقة عليك أولا كتابة الاقتران بدون استخدام رمز القيمة المطلقة (إعادة تعريف الاقتران) ، ثم رسم كل جزء من جزأي القيمة المطلقة في مجاله .

مثال ارسم ق(س) = |س^{٢} − ٤|

الحل : تعلمنا سابقا كيفية إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة ، إذا :

|س^{٢} − ٤| = س^{٢} − ٤ ، عندما س ∈ (− ∞، −٢) ∪ (٢، +∞)

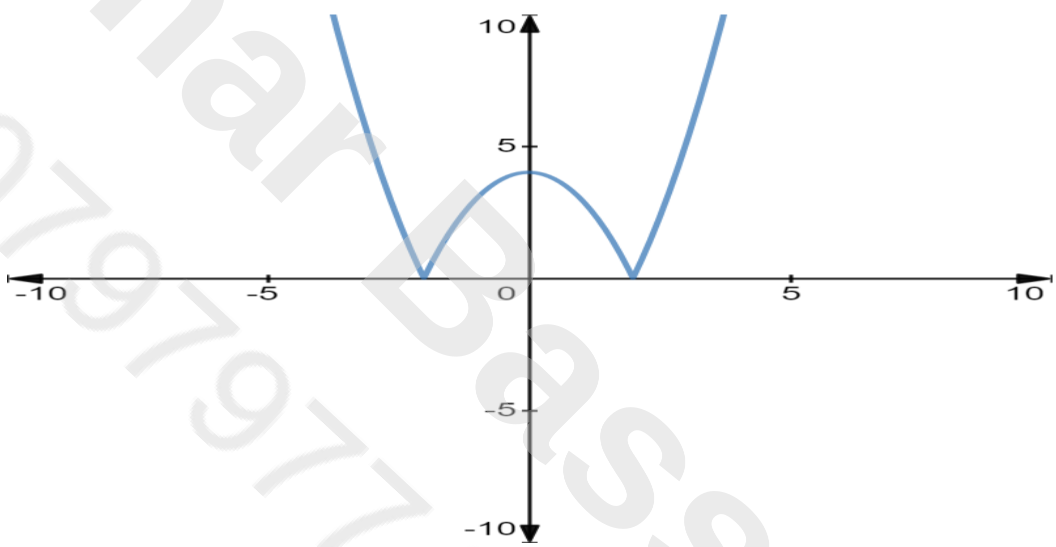
|س ^٢^ − ٤| = ٤ − س ^٢^ ، عندما س [− ٢،+٢] .

إذا أصبح لدينا اقترانين لنرسمها ، الأول هو س ^٢^ − ٤ على فترته المذكورة .

و الثاني هو ٤ − س ^٢^ ، أيضا على فترته المذكورة .

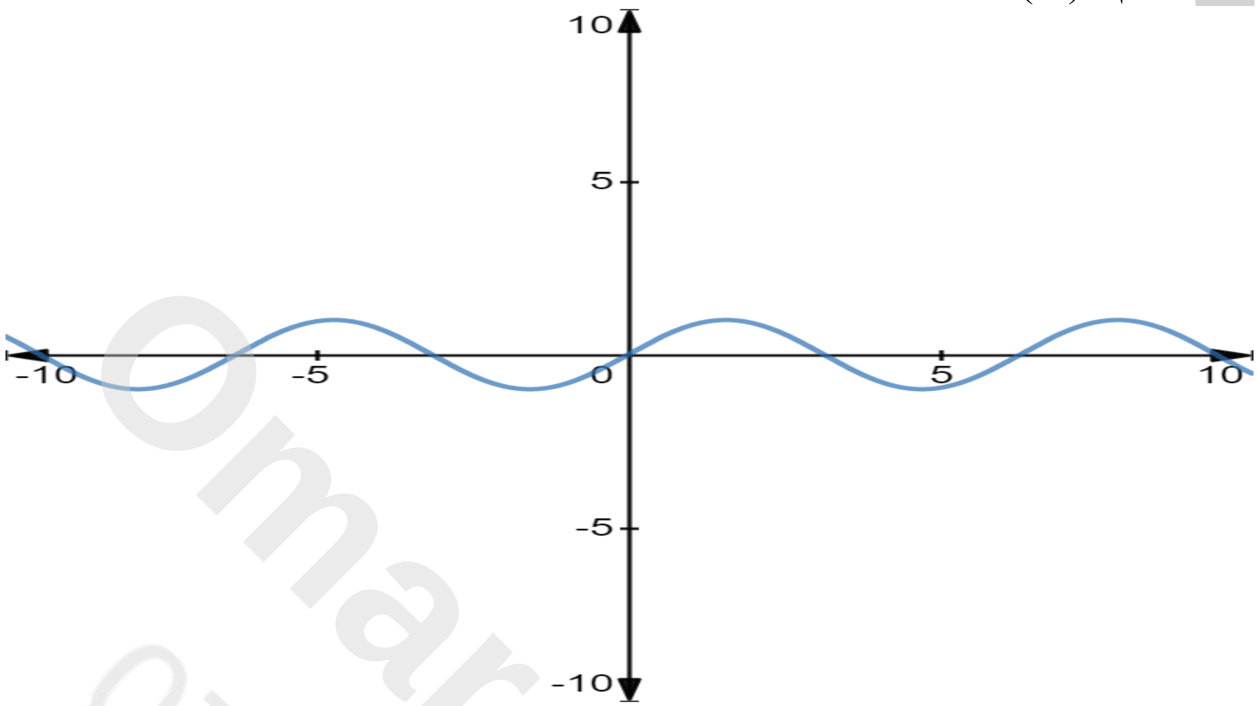
و بالتالي لرسم هذا الاقتران ، ارسم أولا س ^٢^ − ٤ على ح (مجموعة الأعداد الحقيقية ، ثم امسح جزأه بين [− ٢،+٢] .و ضع مكان هذا الجزء رسمة الاقتران ٤ − س ^٢^).

و لاحظ أيضا أنه يمكنك الاستفادة من خواص التناظر من أجل رسم أسرع.

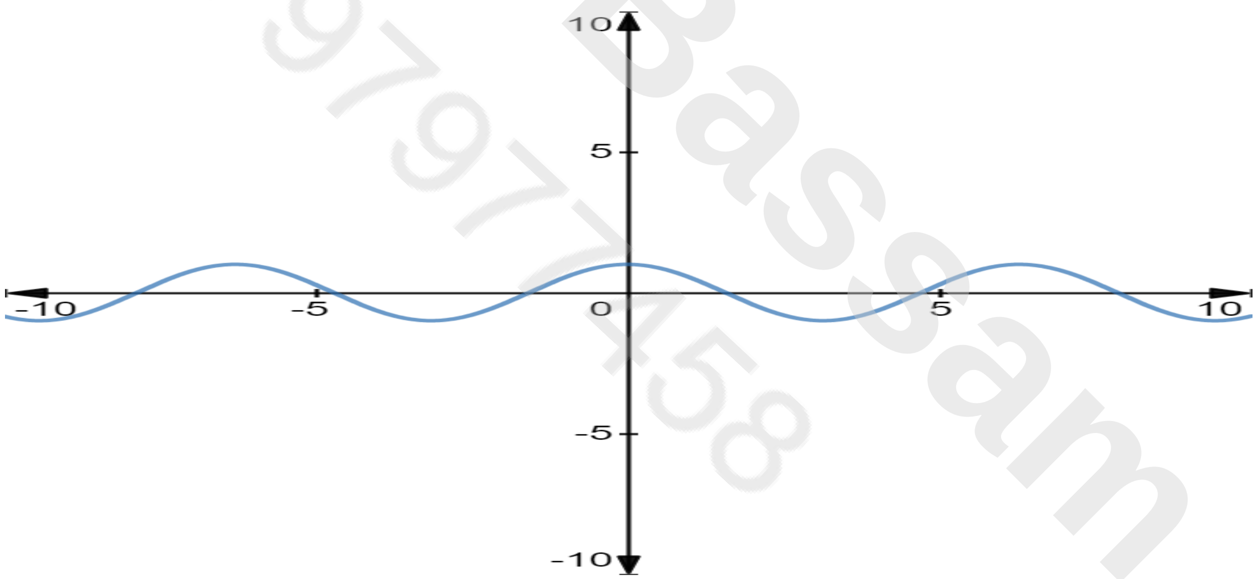


سادسا : الاقترانات الدائرية

مثال ارسم ق(س) = جا س



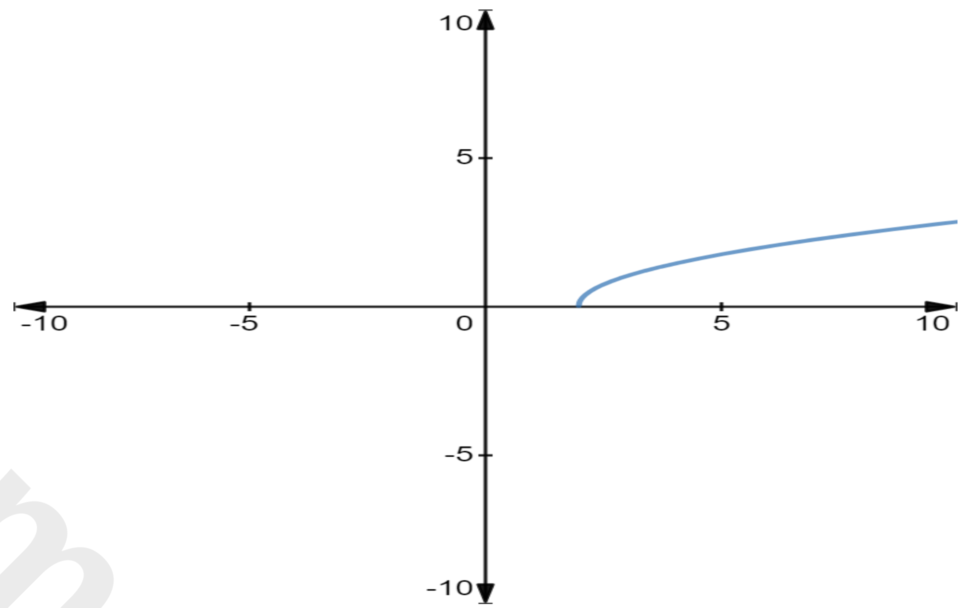
مثال ارسم ق(س) = جتاس



سابعا : الاقترانات الجذرية

مثال ارسم ق(س) = $\sqrt{\text{س} - ٢}$.

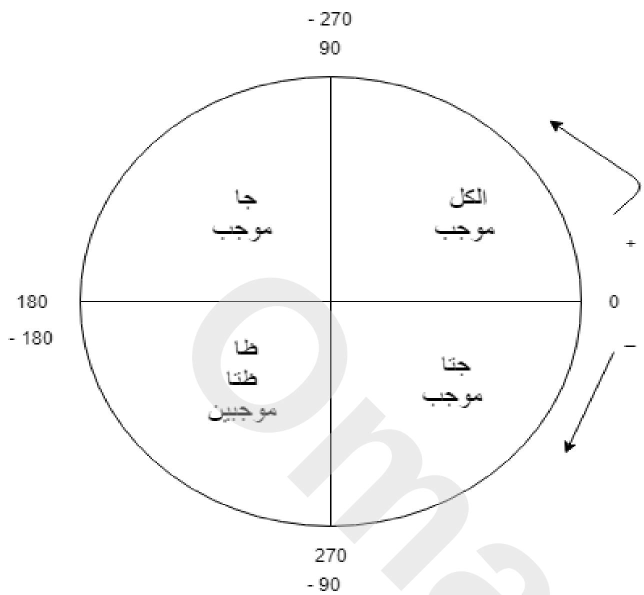
الحل :



ملاحظة هامة جدا

كما ذكرنا سابقا يوجد طريقة سهلة جدا لرسم أي اقتران مهما يكن نوعه و لكن هذه الطريقة مرتبطة بمعرفتك لبحث الاشتقاق (لذلك عرضنا بعض الأفكار و الأمثلة لك حتى تكون أشكال الاقترانات مألوفة فقط ، فلا داعي لأن تحفظ رسمة أي اقتران ، ستتعلم كيف ترسم أي اقتران بإتقان خلال دقيقتين فقط بعد معرفتك ببحث الاشتقاق) .

قوانين و ملاحظات حول الاقترانات الدائرية



ملاحظات حول الدائرة (دائرة الاقترانات الدائرية)

١) الزاوية π تكافئ ١٨٠° .

٢) كما هو موضح في الرسم ، في الربع الأول (أي عندما تكون الزاوية بين : صفر و $\frac{\pi}{٢}$ ، تكون كل النسب الدائرية موجبة : جا ، جتا ، ظا ، ظتا ..... كلها موجبة) .

و في الربع الثاني (عندما تكون الزاوية بين : $\frac{\pi}{٢}$ و π ، يكون فقط جا موجب)

و في الربع الثالث (عندما تكون الزاوية بين : π و ٣$\frac{\pi}{٢}$ ، يكون ظا ، ظتا موجبين)

و في الربع الرابع (عندما تكون الزاوية بين : ٣$\frac{\pi}{٢}$ و ٢π ، يكون فقط جتا موجب) .

٣) عندما تتحرك من أي مكان في الدائرة بعكس جهة عقارب الساعة (فأنت تتحرك بالاتجاه الموجب) ، و عندما تتحرك مع جهة عقارب الساعة فأنت تتحرك بالاتجاه السالب .

مثال في أي ربع تقع الزاوية ($\frac{\pi}{٢}$– س) ؟

الجواب :

الخطوة الأولى : انتقل بدءا من الصفر بمقدار $\frac{\pi}{٢}$ بعكس اتجاه عقارب الساعة (اخترنا هذا الاتجاه لأن إشارة $\frac{\pi}{٢}$ موجبة (الآن أنت تقف عند الزاوية ٩٠) .

الخطوة الثانية : انتقل من مكانك الأخير (بمقدار س : س دوما أقل من $\frac{\pi}{٢}$) مع جهة عقارب الساعة (لأن إشارة س سالبة) ، إذا أصبحت الآن في منطقة ما في الربع الأول .

مثال في أي ربع تقع الزاوية (– $\frac{\pi}{٢}$+س) ؟

الجواب :

الخطوة الأولى : انتقل بدءا من الصفر بمقدار $\frac{\pi}{٢}$ باتجاه عقارب الساعة (اخترنا هذا الاتجاه لأن إشارة $\frac{\pi}{٢}$ سالبة (الآن أنت تقف عند الزاوية − ٩٠) .

الخطوة الثانية : انتقل من مكانك الأخير (بمقدار س : س دوما أقل من $\frac{\pi}{٢}$) بعكس جهة عقارب الساعة (لأن إشارة س موجبة) ، إذا أصبحت الآن في منطقة ما في الربع الرابع .

مثال في أي ربع تقع الزاوية (− π − ١٠ س) ؟

الجواب :

الخطوة الأولى : : انتقل بدءا من الصفر بمقدار π باتجاه عقارب الساعة (اخترنا هذا الاتجاه لأن إشارة π سالبة (الآن أنت تقف عند الزاوية − ١٨٠) .

الخطوة الثانية : : انتقل من مكانك الأخير (بمقدار ١٠ س : ١٠ س أقل من $\frac{\pi}{٢}$) مع جهة عقارب الساعة (لأن إشارة ١٠ س سالبة) ، إذا أصبحت الآن في منطقة ما في الربع الثاني .

٤) يجب أن تعرف أن الزاوية π و مضاعفاتها $\pm$ ٢π، $\pm$ ٣π .. إلخ ..... تحافظ على نوع الاقتران الدائري وقد تغير إشارته ...أما الزاوية $\frac{\pi}{٢}$ و مضاعفاتها − $\frac{\pi}{٢}$، $\pm$ ٣ $\frac{\pi}{٢}$، $\pm$ ٥ $\frac{\pi}{٢}$ ... إلخ .. جميعها تقلب النسبة من جا إلى جتا و بالعكس ، و من ظا إلى ظتا و بالعكس . ستتضح الفكرة في الأمثلة التالية .

مثال جد جا (π − س) ؟

الحل : جا تحافظ على نوع النسبة ، إذا الجواب هو جا س ، ونحتاج فقط أن نعرف إشارة الجواب ، تعلمنا سابقا كيف أن الزاوية (π − س) هي في الربع الثاني ، جا في الربع الثاني موجب ، إذا الجواب الصحيح : جا (π − س) = + جا س .

مثال جد جا (٥π + س) ؟

الحل : ٥π تكافئ π (لأن ٥π = ٤π + π) و طالما أن ٤π تعيدنا إلى نفس المكان ، إذا يمكن حذفها ، لتصبح ٥π تكافئ π ، في الحقيقة إذا كان لدينا ن π و كان ن فردي فإنها تكافئ π ، فإن كان ن زوجي فإنها تكافئ ٢π .

إذا جا(٥π + س) = جا (π + س) ، الآن الزاوية π تحافظ على النوع و بالتالي الجواب هو جا س ، يتوجب علينا فقط معرفة إشارة الجواب ، (π + س) هي في الربع الثالث ، و جا في الربع الثالث سالب ، إذا سيكون الجواب :

جا(٥π + س) = جا (π + س)= − جا س .

مثال جد جتا (١٠٠π− ٥ س) ؟

الحل : ١٠٠π تكافئ ٢π (ذكرنا لماذا قبل قليل) ، إذا :

جتا (١٠٠π− ٥ س) = جتا (٢π− ٥ س) = + جتا ٥ س .

مثال جد جتا ($\frac{\pi}{2}$ - س) ؟

الحل : الزاوية $\frac{\pi}{2}$ و مضاعفاتها تقلب من جا إلى جتا و بالعكس .

إذا : جتا ($\frac{\pi}{2}$ - س) = (+ أو -)جا س .

الآن لمعرفة الإشارة الصحيحة ، فإن الزاوية $\frac{\pi}{2}$ - س تقع في الربع الأول ، و لأن جتا في الربع الأول موجب ، لذلك سيكون الجواب جتا ($\frac{\pi}{2}$ - س) =+جاس .

مثال جد جا (−٢٥$\frac{\pi}{2}$+٦ س) ؟

الحل : بشكل عام ن$\frac{\pi}{2}$ تكافئ (تساوي) $\pm\frac{\pi}{2}$ (بشرط ن عدد فردي) ، و لمعرفة الجواب + $\frac{\pi}{2}$ أو − $\frac{\pi}{2}$ ، نقوم بما يلي : −٢٥$\frac{\pi}{2}$ = (−٢٤$\frac{\pi}{2}$− $\frac{\pi}{2}$) = (−١٢π− $\frac{\pi}{2}$) و طالما أن −١٢π تعيدنا لنفس المكان لذلك يمكن حذفها (ملاحظة يمكنك دوما حذف ن π بشرط ن عدد زوجي) .

إذا −٢٥$\frac{\pi}{2}$ = − $\frac{\pi}{2}$ ، و بالتالي : جا (−٢٥$\frac{\pi}{2}$+٦ س)=جا (− $\frac{\pi}{2}$ + ٦ س) .

الآن لحساب جا (− $\frac{\pi}{2}$ + ٦ س) ، فإن الزاوية (− $\frac{\pi}{2}$ + ٦ س) تقع في الربع الرابع (شرحنا

ذلك سابقا) و لأن جا في الربع الرابع سالب ، إذا : جا (− $\frac{\pi}{2}$ + ٦ س)= − جتا ٦ س .

جدول الاقترانات الدائرية للزوايا الشهيرة

الزاوية	صفر	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
جا	صفر	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	١	صفر	صفر
جتا	١	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	صفر	-1	١
ظا	صفر	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	١	$\sqrt{3}$	غير موجود	صفر	صفر

ملاحظات حول الجدول السابق :

- لست بحاجة إلا لحفظ قيم جا الموجودة في الربع الأول فقط ، تستطيع الحصول على كل القيم المتبقية بسهولة كالتالي :
- جتا أي زاوية أقل أو تساوي ٩٠ = جا المتممة ل ٩٠ (معنى المتممة هي الزاوية التي إن أضفناها للزاوية المطلوبة كان الجواب ٩٠ ، مثلا جتا ٣٠ = جا ٦٠ : مجموعهما = ٩٠).
- ظا أي زاوية = (جا الزاوية)÷ (جتا الزاوية) .
- جا أي زاوية في الربع الثاني = جا المكملة ل ١٨٠ (مثلا جا ١٢٠) = جا ٦٠ .
- جتا أي زاوية في الربع الثاني = − جتا المكملة ل ١٨٠ (إشارة السالب لأن ال جتا في الربع الثاني سالب) ، مثلا جتا ١٢٠ = − جتا ٦٠ .
- جا أي زاوية في الربع الثالث = − جا (الزاوية المطلوبة −١٨٠) ،

  مثلا جا ٢١٠ = − جا (٢١٠- ١٨٠) =− جا ٣٠ .

  و نفس الكلام بالنسبة ل جتا أي زاوية في الربع الثالث .
- جا أي زاوية في الربع الرابع = − جا (٣٦٠ - الزاوية المطلوبة) .

  مثلا جا ٣٠٠ = − جا (٣٦٠-٣٠٠) = − جا ٦٠ .

(ملاحظة الزاوية الموجودة في الربع الرابع يمكن التعبير عنها من خلال الدوران بعكس اتجاه عقارب الساعة أو من خلال الدوران مع جهة عقارب الساعة ، مثلا الزاوية ٣٠٠ هي نفسها −٦٠ ، حيث في حالة ٣٠٠ قمنا بالدوران بمقدار ٣٠٠ درجة عكس عقارب الساعة ، و عندما ندور ٦٠ درجة مع عقارب الساعة سنكون في نفس المكان ، هذا الكلام ينطبق على جميع الزوايا ، أي بإمكانك التعبير عن أي زاوية إما بالدوران مع عقارب الساعة أو بجهة عقارب الساعة) .

- جتا أي زاوية في الربع الرابع = + جتا (٣٦٠ - الزاوية المطلوبة) (لأن جتا في الربع الرابع موجب ، لذلك سبق الجواب إشارة موجب) .
- يمكنك الحصول على قيمة (ظا ، ظتا ، قا ، قتا) من قيم (جا ، جتا) باستخدام القوانين التي سيرد ذكرها الآن .

قوانين و علاقات هامة

١) جا^{٢}س+جتا^{٢}س = ١ ، تقرأ جا تربيع أي زاوية + جتا تربيع نفس الزاوية = ١ .

مثال ١) جا^{٢}١٠س+جتا^{٢}١٠س = ١

مثال ٢) جا^{٢}س^{٣}+جتا^{٢}س^{٣} = ١

٢) ظا س = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ ، ظتا س = $\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$ ، ظا س = $\frac{١}{\text{ظتا س}}$

٣) قا س = $\frac{١}{\text{جتا س}}$ ، قتا س = $\frac{١}{\text{جا س}}$.

٤) قا^{٢} س = ١+ظا^{٢} س ، قتا^{٢} س = ١+ظتا^{٢} س .

٥) جا ٢ س = ٢ جاس جتاس

٦) جتا ٢ س = جتا^{٢} س - جا^{٢} س = ١ – ٢جا^{٢} س = ٢جتا^{٢} س – ١ .

٧) ظا ٢ س = $\frac{\text{٢ظاس}}{\text{١–ظا}^{٢}\text{س}}$

٨) جا (س + ص) = جاس جتا ص + جتا س جا ص

٩) جتا (س + ص) = جتا س جتا ص – جا س جا ص

١٠) جا (س – ص) = جا س جتا ص – جتا س جا ص

١١) جتا (س -ص) = جتا س جتا ص + جا س جا ص

١٢) جا س جا ص = $\frac{١}{٢}$ (جتا (س – ص) – جتا (س + ص))

١٣) جتا س جتا ص = $\frac{١}{٢}$ (جتا (س + ص) + جتا (س- ص))

١٤) جا س جتا ص = $\frac{1}{2}$ (جا (س + ص) + جا (س – ص))

١٥) جا س + جا ص = ٢ جا ($\frac{\text{س+ص}}{٢}$) جتا($\frac{\text{س−ص}}{٢}$)

١٦) جا س – جا ص = ٢ جا ($\frac{\text{س−ص}}{٢}$) جتا ($\frac{\text{س+ص}}{٢}$)

١٧) جتا س + جتا ص = ٢ جتا ($\frac{\text{س−ص}}{٢}$) جتا ($\frac{\text{س+ص}}{٢}$)

١٨) جتا س – جتا ص = − ٢ جا ($\frac{\text{س+ص}}{٢}$) جا($\frac{\text{س−ص}}{٢}$)

١٩) جا (- س) = - جا س (لأن -س في الربع الرابع ، و جا في الربع الرابع سالبة)

جتا (-س) = جتا س (لأن -س في الربع الرابع ، و جتا في الربع الرابع موجبة)

ظا (-س) = - ظا س (لأن -س في الربع الرابع ، و ظا في الربع الرابع سالبة)

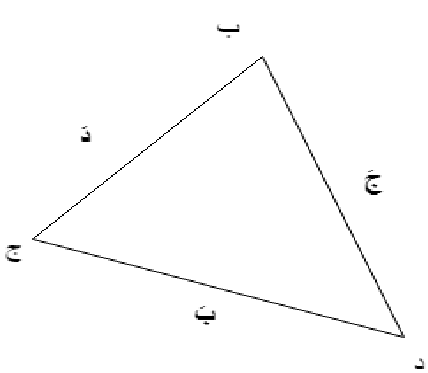
ظتا (-س) = - ظتا س (لأن -س في الربع الرابع ، و ظتا في الربع الرابع سالبة) .

أفكار هامة للمعدلات المرتبطة و التطبيقات

- المثلث : مجموع زوايا المثلث تساوي ١٨٠ درجة ، في أي مثلث مهما كان نوعه يوجد عدة علاقات هامة (يجب معرفتها) :

قانون جا

$\frac{\text{ب}}{\text{جاب}} = \frac{\text{ج}}{\text{جاج}} = \frac{\text{د}}{\text{جاد}}$ ، ب هي الضلع المقابلة للزاوية ب ، ج هي الضلع المقابلة للزاوية ج ، د هي الضلع المقابلة للزاوية د .



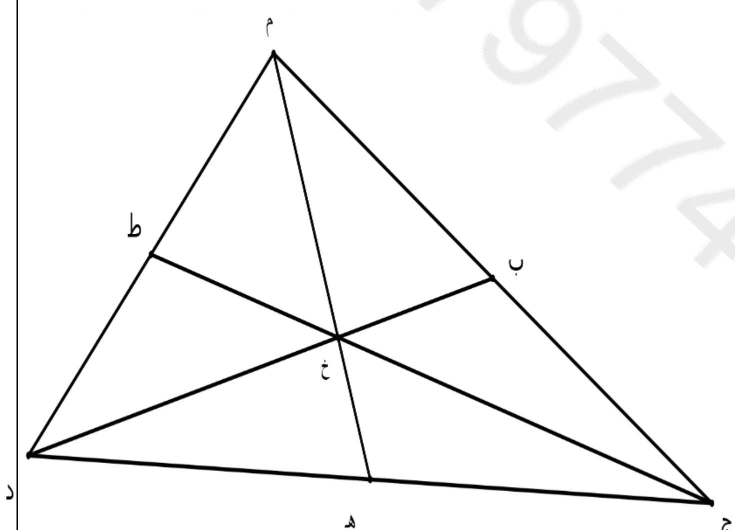
قانون جتا

جتا ب =(د^{٢} + ج^{٢} – ب^{٢})÷ (٢ × د× ج)
ب^{٢} = د^{٢} + ج^{٢} – ٢ × د× ج×جتاب .

بنفس الطريقة يمكن الحصول على قوانين ج ، جتا ج ، د ، جتا د .

الارتفاع هو القطعة المستقيمة النازلة من أحد رؤوس المثلث بشكل عمودي على الضلع المقابلة أو امتدادها (يطلق على الضلع المقابلة اسم قاعدة) ، إذا في أي مثلث يوجد ثلاث ارتفاعات و ثلاث قواعد ، يمكنك أخذ أي ارتفاع و القاعدة المرتبطة به لحساب مساحة المثلث ، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × طول الارتفاع .
مساحة أي مثلث = $\frac{١}{٢}$ جداء أي ضلعين × جا الزاوية بينهما .

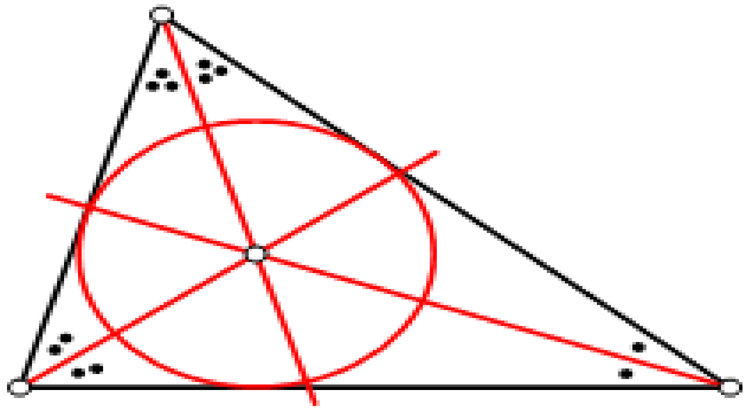
القطعة المتوسطة (المنصفة للضلع) : منصف الضلع هو القطعة المستقيمة التي تقسم الضلع إلى قسمين متساويين ، في المثلث ثلاث منصفات للأضلاع .
نقطة تلاقي منصفات الأضلاع في مثلث تقسم كل منصف إلى قسمين ، أحدهما يمتد من الرأس إلى نقطة الالتقاء ويكون طوله $\frac{٢}{٣}$ من طول المنصف ، و القسم الآخر يساوي $\frac{١}{٣}$ طول المنصف .
مثال (عن فكرة تلاقي منصفات الأضلاع)، في الشكل المجاور :
احسب طول كل من (ه خ) ، (م خ)
إذا علمت أن طول (م ه) = ١٢ سم .



الحل : نقطة تلاقي منصفات الأضلاع و هي النقطة خ تقسم كل منصف من منصفات الأضلاع إلى قسمين أحدهما ثلثي طول المنصف ، و الآخر ثلث طول المنصف .
أي أن (م خ) = ٨ ، (ه خ) = ٤

منصف الزاوية : هو القطعة المستقيمة التي تقسم زاوية ما إلى قسمين متساويين ، في المثلث يوجد ثلاث منصفات للزوايا .

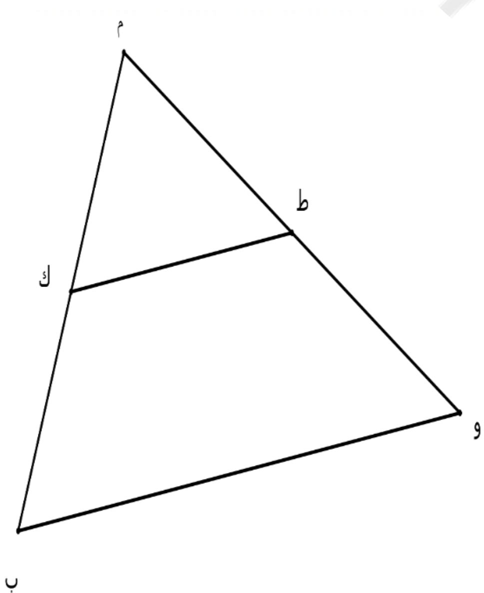
مركز الدائرة التي تمس أضلاع مثلث (مرسومة داخل المثلث و تمس أضلاعه) هي نقطة تلاقي منصفات الزوايا كما في الشكل التالي .



محور ضلع في مثلث : محور الضلع هو القطعة المستقيمة التي تكون عمودية على ضلع ما و تقسمه إلى قسمين متساويين .

مركز الدائرة التي تمر برؤوس مثلث هي نقطة تلاقي محاور الأضلاع .

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث و تساوي نفس طوله ، و تحدد على المثلث الأصلي مثلث آخر صغير يشابه المثلث الأصلي (ستتعرف على معنى التشابه بعد قليل) .



مثال في الشكل المجاور ، إذا علمت أن طول (و ب) = ١٢ سم ، و أن ط ، ك هما في متصف (م و) ، (م ب) على الترتيب .
احسب طول (ط ك) ، هل المثلثين م و ب ، م ط ك متشابهين ؟ و لماذا ؟

الحل : (ط ك) = $\frac{1}{2}$ (و ب) ، لأن (ط ك) قطعة مستقيمة و اصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث .
المثلثين (م و ب) ، (م ط ك) متشابهين بسبب تساوي زاويتين من الأول مع زاويتين من الثاني :
الزاوية ط = الزاوية و ، الزاوية ك = الزاوية ب)

لأن (ط ك)يوازي (و ب) ، و بالتالي هذه الزوايا متساوية بالتناظر) .

محيط أي مثلث = مجموع أطوال أضلاعه (محيط أي شكل مثلث أو غيره = مجموع أطوال أضلاعه) .

ما معنى تطابق مثلثين وماذا أستفيد منه

تطابق مثلثين هو تساوي الأضلاع من المثلث الأول مع ما يقابلها من المثلث الثاني ، عندما تكتشف تتطابق مثلثين سيكون بإمكانك معرفة القيمة العددية لمقدار مجهول من أحد المثلثين (سواء كان المجهول زاوية أو ضلع) ، أو علاقة بين مقدارين مجهولين (سواء كان المقداران ضلعين أو زاويتين) يمكنك استخدامها لحل مشكلة تواجهها ، يمكنك إثبات تطابق مثلثين من أحد القواعد التالية :

١) يتطابق مثلثان إذا تساوى ضلعان و زاوية محصورة بينهما من الأول ، مع ضلعين و زاوية محصورة بينهما من الثاني .

٢) يتطابق مثلثان إذا تساوت ضلع و الزاويتان الموجودتان على هذه الضلع من الأول ، مع ضلع و الزاويتان الموجودتان على هذه الضلع من الثاني .

٣) يتطابق مثلثان إذا تساوت أضلاع الأول مع ما يقابلها من أضلاع الثاني .

عندما نثبت التطابق بين مثلثين ، نستطيع القول بأن كل ضلع من الأول له مساو من الثاني ، و كل زاوية من الأول لها مساوية من الثاني .

ما معنى تشابه مثلثين و ماذا أستفيد من التشابه

تشابه مثلثين هو أن أحدهما ينتج عن الآخر بتكبيره أو تصغيره (بينما التطابق هو أن المثلث الأول مطابق تماما للمثلث الثاني) ، إن أي مثلثين متطابقين هما متشابهين و لكن العكس غير صحيح .

حالات تشابه المثلثات :

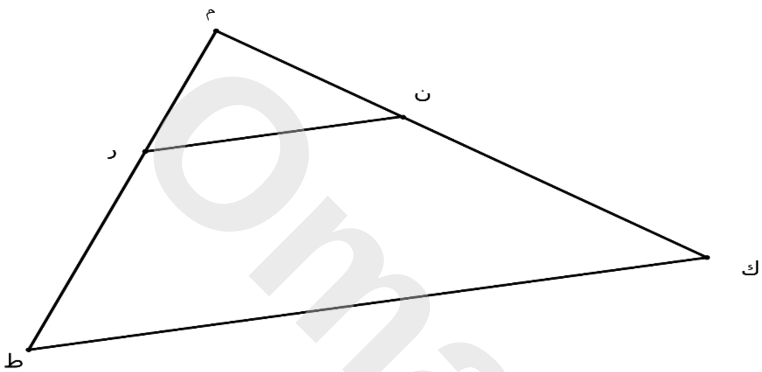
١) يتشابه مثلثان إذا تساوت زاويتان من المثلث الأول مع زاويتين من المثلث الثاني .

٢) يتشابه مثلثان إذا تناسبت أطوال المثلث الأول مع أطوال المثلث الثاني .

٣) يتشابه مثلثان إذا تساوت زاوية من الأول مع زاوية من الثاني ، و تناسبت أطوال الضلعين اللذين يحتويان هذه الزاوية في الأول مع مثيلاتها من الثاني .

ماذا نستنتج من تشابه مثلثين

نستنتج أن قسمة طول أي ضلع من المثلث الأول على ما يقابلها من المثلث الثاني تساوي دوما نسبة ثابتة (يمكن بذلك حساب أي مجهول طالما مقابله معلوم) ، كما نستنتج تساوي الزوايا من الأول مع ما يقابلها من الثاني .



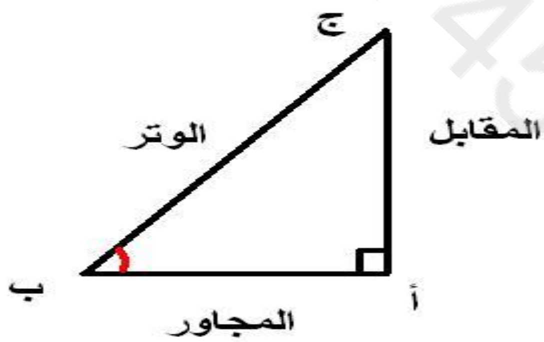
مثال في الشكل المجاور، (ن ر) توازي (ك ط)
إذا علمت أن طول (م ن) =٤ ، (ن ر) = ٥ ، ط ك = ١٥ ، جد طول (م ك) .

الحل : (ن ر) توازي (ك ط) ، إذا المثلثين م ن ر ، م ك ط متشابهين ، إذا الأضلاع متناسبة :

$\frac{\text{م ن}}{\text{م ك}} = \frac{\text{م ر}}{\text{م ط}} = \frac{\text{ن ر}}{\text{ك ط}}$ ، إذا : $\frac{٤}{\text{م ك}} = \frac{٥}{١٥}$ ، إذا (م ك) = ١٢ .

أنواع المثلثات

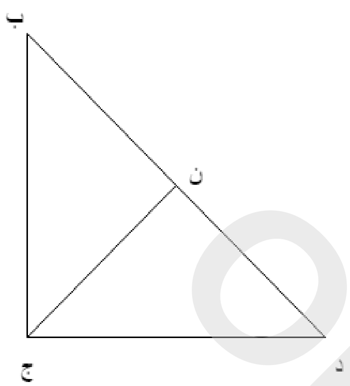
المثلث القائم



- الوتر هو الضلع المقابل للزاوية القائمة دوما .
- في المثلث القائم يوجد قائمين (ضلعين قائمين) .
- (طول الوتر)^{٢} = (القائم الأول)^{٢} + (القائم الثاني)^{٢}
- جا ب = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، جتا ب = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ، ظا ب = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

- إذا مرت دائرة برؤوس مثلث قائم ، فإن وتر المثلث القائم هو قطر الدائرة .
- في المثلث القائم القطعة المستقيمة المنصفة للوتر تساوي نصف طول الوتر .

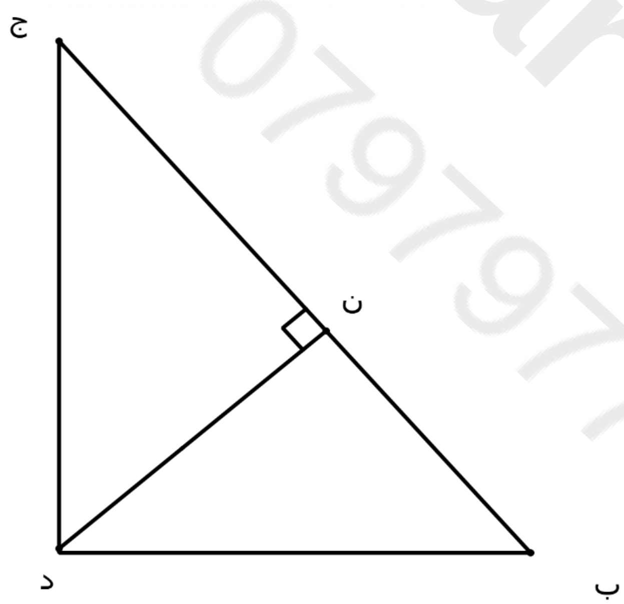
مثال المثلث (ب ج د) في الشكل المجاور قائم في ج ، ن ج
قطعة مستقيمة منصفة للوتر (نستنتج أن : (ن ج)= $\frac{1}{2}$ (ب د) ،
أي أن : ن ج = ن د = ن ب .



- في المثلث القائم : الارتفاع المتعلق بالوتر يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين و كل منهما يشابه المثلث الأصلي (كما في الشكل في الأسفل) .

المثلث (ب ج د) قائم في د ، د ن ارتفاع مقام
على الوتر(منشأ على الوتر) ، إذا المثلثات (
ب ج د) ، (ب ن د) ، (ج ن د)
كلها متشابهة فيما بينها .

- يتشابه مثلثان قائمان إذا تساوت زاوية حادة من
الأول مع زاوية حادة من الثاني .



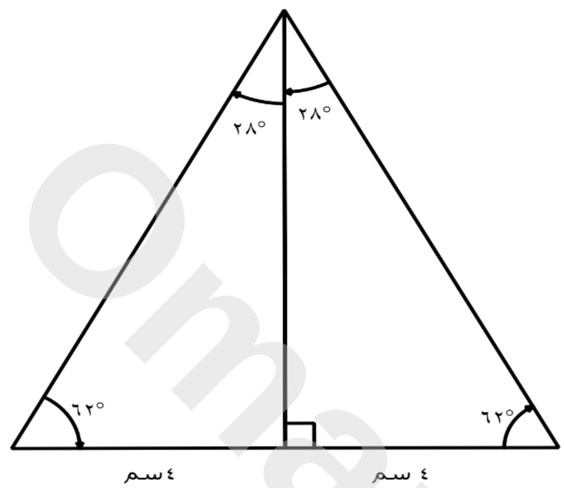
المثلث متساوي الضلعين

١) فيه ضلعين متساويين ، و فيه ضلع آخر اسمه قاعدة لا يساويهما في الطول .

٢) الزاويتان الموجودتان على القاعدة متساويتان .

٣) الارتفاع المتعلق بالقاعدة يقسمها إلى قسمين متساويين (فهو منصف ضلع) و يقسم الزاوية التي جاء منها هذا الارتفاع ، يقسمها أيضا إلى قسمين متساويين (فهو منصف زاوية) ، إذا الخلاصة أن الارتفاع المرتبط بالقاعدة في مثلث متساوي الضلعين هو منصف للضلع و منصف للزاوية .

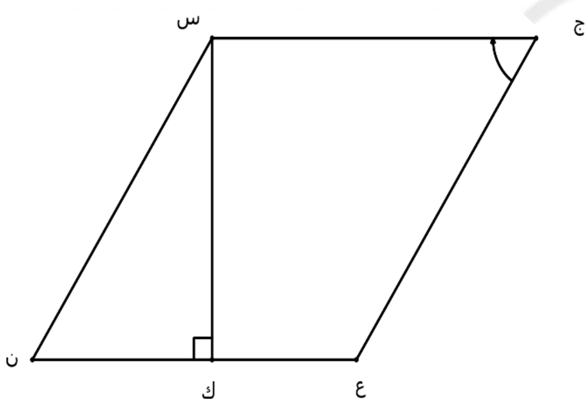
الشكل المجاور يوضح ذلك :



المثلث المتساوي الأضلاع

١) جميع الأضلاع متساوية ، و الزوايا متساوية و كل منها ٦٠ درجة .

٢) الارتفاع المرتبط بأي ضلع هو منصف للضلع و منصف للزاوية التي انطلق منها الارتفاع .



متوازي الأضلاع

مساحة متوازي الأضلاع = (ك س) × (ع ن) .

مساحة متوازي الأضلاع = ناتج ضرب أي ضلعين فيه × جا الزاوية بينهما ، مثلا من الشكل نجد :

المساحة = (ع ج) × (ج س) × جا ج .

المحيط = ٢ (الطول + العرض) .

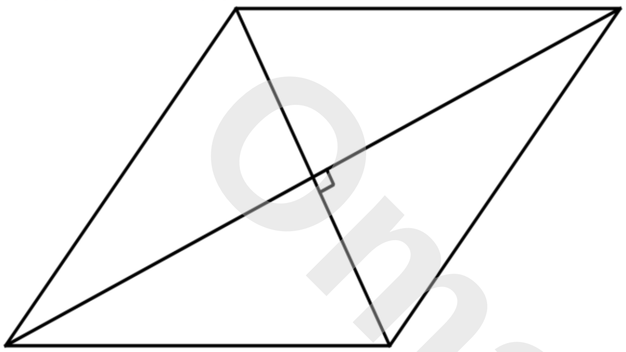
المستطيل

المساحة = الطول × العرض .

المحيط = ٢ (الطول + العرض) .

المعين هو حالة خاصة من متوازي أضلاع (متوازي أضلاع تساوت أضلاعه).

مساحة المعين = طول القاعدة × الارتفاع (نفس قانون مساحة متوازي الأضلاع) .



مساحة المعين (قانون آخر) = $\frac{١}{٢}$ × القطر الأول × القطر الثاني .

محيط المعين = ٤ × طول الضلع .

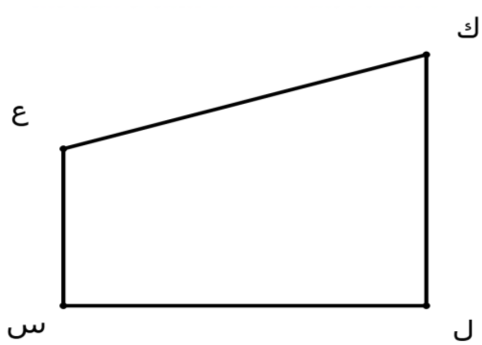
المربع

مساحة المربع = طول الضلع تربيع .

محيط المربع = ٤ × طول الضلع .

شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعين متوازيين .

الضلعان المتوازيان نسميهما قاعدتين (و المستقيم الواصل بينهما بشكل عمودي نسميه ارتفاع) .



مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ مجموع القاعدتين × الارتفاع .

إذا مساحة شبه المنحرف المجاور =

$\frac{١}{٢}$ { ع س + ك ل } × (ل س) .

الدائرة

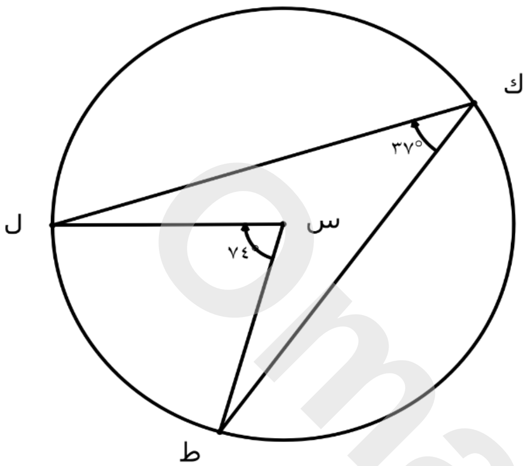
مساحة الدائرة = π نق^{٢} ، محيطها = ٢πنق .

الزاوية المحيطية في دائرة = $\frac{١}{٢}$ قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بنفس القوس .

(انظر الشكل المجاور) .

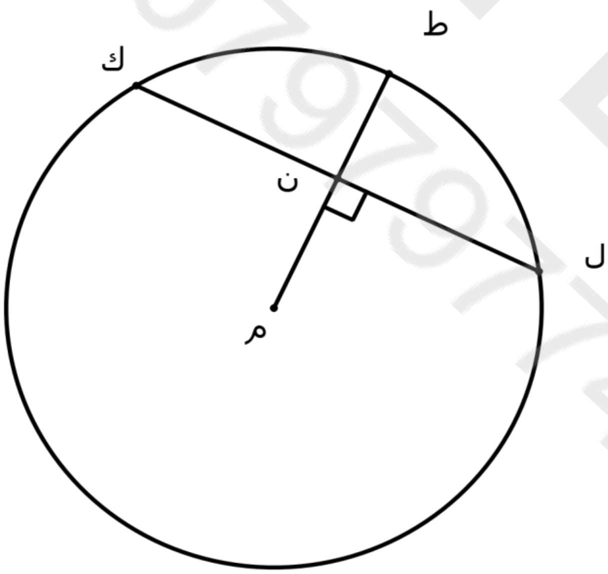
كلا الزاويتين س ، ك تحصران نفس القوس ل ط .

إذا قياس ك = نصف قياس س .



- العمود المرسوم من مركز دائرة على أي وتر فيها ينصفه (يقسمه لقسمين متساويين) .

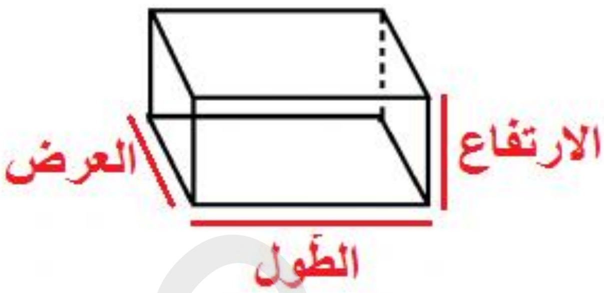
ل ك وتر في الدائرة المجاورة ، م ن عمود على هذا الوتر ، النتيجة :
طول ل ن = طول ك ن .



- مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ × قياس زاوية القطاع بالراديان × نق^{٢} .

مثلا مساحة قطاع دائري مقابل لزاوية $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\pi}{٣}$ × نق^{٢} .

متوازي المستطيلات



١) الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع = الطول × العرض × الارتفاع .

٢) المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين (العلوية و السفلية) .

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع .

مساحة القاعدتين = ٢ × (الطول × العرض) .

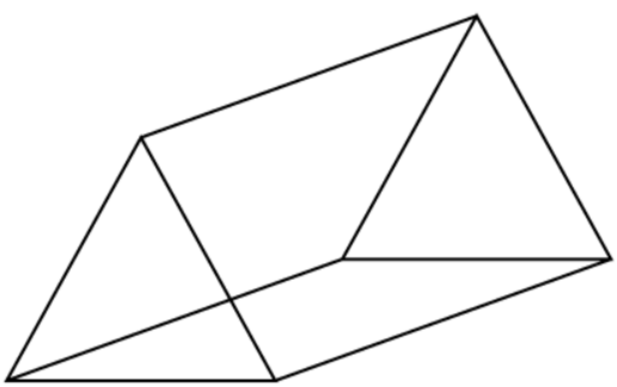
المكعب

حالة خاصة من متوازي المستطيلات عندما يكون الطول = العرض = الارتفاع .

حجمه = س^{٣} : أي طول الضلع (البعد) تكعيب .

مساحة كلية = ٤ س^{٢} + ٢ س^{٢} = ٦ س^{٢} .

المنشور القائم هو الحالة العامة من متوازي المستطيلات عندما تكون القاعدتين(أي شكل عدا مربع و مستطيل) . (أي أن متوازي المستطيلات و المكعب هما حالة خاصة من المنشور عندما تكون قاعدة المنشور مستطيل و مربع على الترتيب) .



مثلا يكون المنشور ثلاثي عندما تكون قاعدته مثلث (لاحظ في الشكل المجاور المنشور يستند على جانبه و ليس على أحد قاعدتيه)، في جميع حالات المنشور و مهما يكن نوع قاعدته فإن جوانب المنشور هي دوما مستطيلات .

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع .

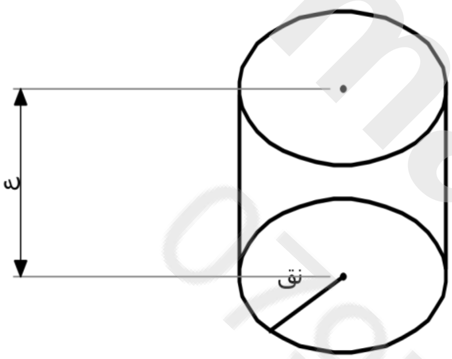
الارتفاع : هو البعد العمودي بين القاعدتين .

مساحة المنشور = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين .

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع .

(لاحظ أنها نفس قوانين متوازي المستطيلات و المكعب مع اختلاف شكل القاعدة فقط)

الأسطوانة حالة خاصة من متوازي المستطيلات عندما تكون قاعدته دائرة (أي لها نفس قوانين متوازي المستطيلات)



الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع .

= π نق^{٢} × ع .

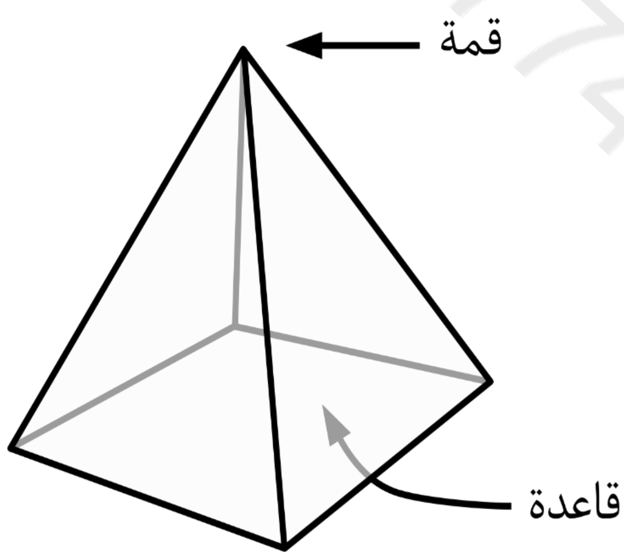
المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

= ٢ π نق × ع .

مساحة القاعدتين = ٢ π نق^{٢} (مساحة القاعدة الواحدة = π نق^{٢})

الهرم مجسم له قاعدة ما ، تنطلق من رؤوس القاعدة مستقيمات تلتقي في نقطة واحدة تسمى قمة الهرم .



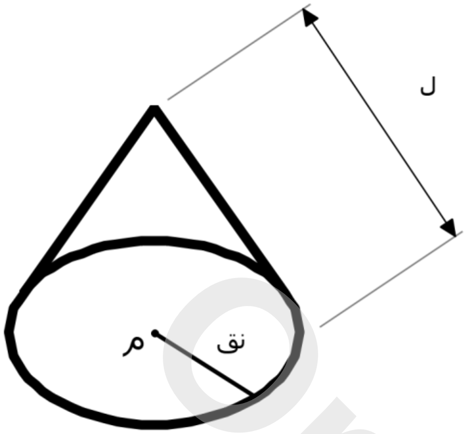
ارتفاع الهرم هو البعد العمودي بين القمة و القاعدة .

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع .

المساحة الجانبية للهرم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع (لأن الأوجه الجانبية مثلثات) .

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة .

المخروط هو حالة خاصة من الهرم عندما تكون القاعدة دائرة .



حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع .

مساحة المخروط = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة.

المساحة الجانبية = = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{2} \times 2\pi$ نق × ل = π نق ل .

مساحة القاعدة = π نق^2 .

قوانين مهمة

١) قانون البعد بين نقطتين :

إذا كانت ن١ (س١ ،ص١) ، ن٢ (س٢،ص٢) ، فإن المسافة بين النقطتين ف :

ف = $\sqrt{(س_1 - س_2)^2 + (ص_1 - ص_2)^2}$.

٢) إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة (النقطة الواقعة في المنتصف بين نقطتين) :

إذا كانت ن١ (س١ ،ص١) ، ن٢ (س٢،ص٢) ، فإن النقطة الواقعة بين النقطتين في المنتصف تحسب بالقانون :

ن (س ، ص) = ($\frac{س_1 + س_2}{2}$ ، $\frac{ص_1 + ص_2}{2}$)

٣) قانون بعد نقطة عن مستقيم :

إذا كان لدينا مستقيم معادلته : أس + ب ص + جـ =صفر .

و نقطة ن١ (س١ ،ص١) ، فإن بعد النقطة عن المستقيم (المسافة العمودية) و رمزها ل :

$$\text{ل} = \frac{\left| \text{أس}_1 + \text{بص}_1 + \text{جـ} \right|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$$

٤) قانون الزاوية بين مستقيمين : إذا كان لدينا مستقيمين الأول ميله م١ ، و الثاني ميله م٢ ، فإن ظا الزاوية بينهما يعطى بالعلاقة :

$\text{ظا هـ} = \frac{\text{ميل الأول} - \text{ميل الثاني}}{1 + (\text{ميل الأول}) \times (\text{ميل الثاني})}$ ، بشرط المستقيمين غير متعامدين .

تم بحمد الله

المحتويات

- التحليل إلى عوامل بكافة أشكاله (مع عدد كافي من الأمثلة)
- حل المعادلات بكافة أشكالها (معادلات خطية ، تربيعية ، تكعيبية ، كسرية ، جذرية ، دائرية ، معادلات قيمة مطلقة ، معادلات أكبر عدد صحيح) ، مع عدد كافي من الأمثلة .
- حل مجموعة معادلتين بمجهولين و مجموعة ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل (مع عدد كافي من الأمثلة)
- دراسة إشارة اقتران (مع عدد كافي من الأمثلة)
- إعادة تعريف اقتراني القيمة المطلقة و أكبر عدد صحيح (مع عدد كافي من الأمثلة).
- شرح واضح للتعامل مع المستقيمات و معادلاتها (مع عدد كافي من الأمثلة).
- جميع قوانين الدائري التي ستحتاجها مع علاقات تركز على الفهم (مع عدد كافي من الأمثلة)
- تعلم رسم الاقترانات الشهيرة و أهم ما يميزها من نقاط تقاطع مع السينات و الصادات و مع بعضها البعض (خطي ، تربيعي ، تكعيبي ، جذري ، قيمة مطلقة ، دائري .. إلخ)، مع عدد كافي من الأمثلة .
- جميع الخواص و القوانين مع أمثلة عددية للأشكال الهندسية التي ستتعامل معها في المنهاج (لحل مسائل التطبيقات الهندسية وتطبيقات المعدلات المرتبطة بالزمن و تطبيقات القيم القصوى) ، مع عدد كافي من الأمثلة .
- جميع القوانين (بعد بين نقطتين ، بعد نقطة عن مستقيم ، الزاوية بين مستقيمين).