الرياضيات

الصف العاشر

س − ٣ص + ٣ع = ⁻٤

٢س + ٣ص = ع − ١٠

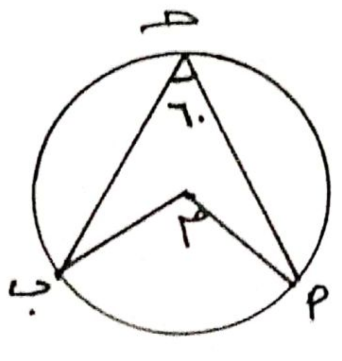
٤س − ٣ص − ع = ١٩

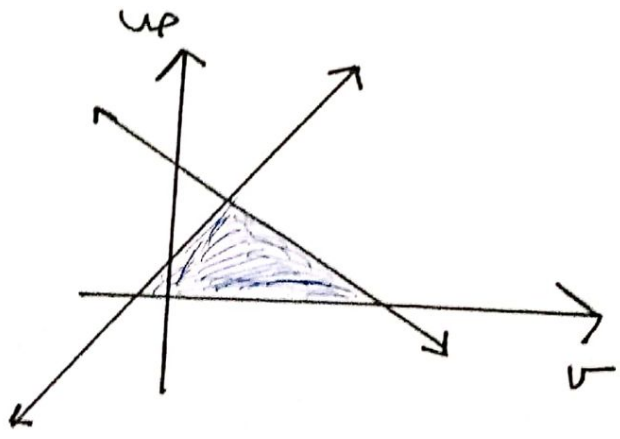
شرح مفصل للمادة

حل أسئلة الكتاب

اوراق عمل

امتحانات شهرية





مراجعة لحل المعادلات

مراجعة حل المعادلات «قبل الصف العاشر»

معادلة من الدرجة الأولى ← أعلى قوة لـ (س) هي (١)

* فك أقواس "إن وجد"
* إذا وجدت (س) في أكثر من حد ، نجمع السينات في طرف والثوابت (الأعداد) في طرف ثم نبسط ونقسم طرفي المعادلة على معامل (س) إذا لم يكن معاملها (١) ، مع تغيير إشارة الحد المنقول.

تكتيك ← إن وجد المتغير في حد واحد ، نحاول جعل (س) لوحدها بحيث نتخلص أولاً من الجمع أو الطرح ثم الضرب أو القسمة.

حالة (١)

① ٢س − ٣ = ٩
+٣   +٣
٢س = ١٢
٢س / ٢ = ١٢ / ٢
$\boxed{\text{س} = ٦}$

② ٢ − ٤ل = −٦
−٢   −٢
−٤ل / −٤ = −٨ / −٤
$\boxed{\text{ل} = ٢}$

③ ٢(س + ١) = ١٢
٢س + ٢ = ١٢
−٢   −٢
٢س / ٢ = ١٠ / ٢
$\boxed{\text{س} = ٥}$

رأفت صافي

حالة (٢)

① ٣س − ٦ = س − ٢
٣س − س = −٢ + ٦   نبسط
٢س / ٢ = ٤ / ٢   نقسم على (٢)
$\boxed{\text{س} = ٢}$

② ٣(س + ٥) = ١١ + س
٣س + ١٥ = ١١ + س
٣س − س = ١١ − ١٥
٢س / ٢ = −٤ / ٢
$\boxed{\text{س} = −٢}$

معادلة من الدرجة الثانية ← أعلى قوة لـ (س) هي (٢)

$أس^{٢} + ب س + جـ$

حالة (١) :

وجود ($س^{٢}$) مع عدد بدون وجود (س) ، نتبع نفس خطوات حالة (١) من المعادلة من الدرجة الأولى ، لكن في نهاية الحل ، نأخذ جذر الطرفين

① $٢س^{٢} - ٣١ = ١$

$+٣١ \quad +٣١$

$\frac{٢س^{٢}}{٢} = \frac{٣٢}{٢}$

$س^{٢} = ١٦$ جذر الطرفين

$س = ٤ ، -٤$

② $٥س^{٢} - ٥ = ٠$

$+٥ \quad +٥$

$\frac{٥س^{٢}}{٥} = \frac{٥}{٥}$

$س^{٢} = ١$ جذر الطرفين

$س = ١ ، -١$

③ $٨ - ٢س^{٢} = ٠$

$-٨ \quad -٨$

$\frac{-٢س^{٢}}{-٢} = \frac{-٨}{-٢}$

$س^{٢} = ٤$

$س = ٢ ، -٢$

رافت صافي

حالة (٢) :

وجود $س^{٢}$ مع س بدون الحد الثابت (جـ) ، نلجأ إلى إخراج عامل مشترك ، ويكون أول نتيجة لـ (س) هي الصفر

① $٢س^{٢} - ٨س = ٠$

الحل :-

$٢س(س - ٤) = ٠$

$س = ٠ \quad س = ٤$

② $س^{٢} = س$

الحل :-

$س^{٢} - س = ٠$

$س(س - ١) = ٠$

$س = ٠ \quad س = ١$

③ $٣س^{٢} - س = ٠$

الحل :-

$س(٣س - ١) = ٠$

$س = ٠ \quad س = \frac{١}{٣}$

حالة (٣): وجود $س^{٢}$ مع $س$ مع عدد، نلجأ الى التحليل، لكن نصفر الطرف الأيسر ثم نبسط (ان وجد) ويمكن استخدام القانون العام.

① $س^{٢} + ٦س = -٨$

الحل:-

$س^{٢} + ٦س + ٨ = ٠$

$(س + ٤)(س + ٢) = ٠$

$س = -٤$ ، $س = -٢$

② $٦س^{٢} - ٦س + ٥ = ٤١$

الحل:-

$٦س^{٢} - ٦س - ٣٦ = ٠$ ÷ ٦

$س^{٢} - س - ٦ = ٠$

$(س - ٣)(س + ٢) = ٠$

$س = ٣$ ، $س = -٢$

طريقة القانون العام — اقتصادي

يفضل استخدامها اذا كان معامل ($س^{٢}$) ليس (١)

* $٣س^{٢} - ٤س = -١$ — نصفر الطرف الأيسر

الحل: $٣س^{٢} - ٤س + ١ = ٠$ — نحدد أ، ب، جـ

$أ = ٣$ معامل ($س^{٢}$)

$ب = -٤$ معامل ($س$)

$جـ = ١$ الحد المطلق — نجد المميز

$\Delta = ب^{٢} - ٤ أ جـ$

$= ١٦ - ٤ \times ٣ \times ١ = ٤$ — نكتب القانون

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{المميز}}{٢ \times أ}$$

$$= \frac{٤ \pm \sqrt{٤}}{٢ \times ٣} = \frac{٤ \pm ٢}{٦}$$

$$س_{١} = \frac{٤ + ٢}{٦} = ١$$

$$س_{٢} = \frac{٤ - ٢}{٦} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$$

المعادلة الكسرية

نتخلص من خط الكسر بالضرب التبادلي.

① $\frac{٣س + ١}{٥} = \frac{٣}{٢}$

الحل :-

$٦س + ٢ = ١٥$

$\quad -٢ \quad -٢$

$\frac{٦س}{٦} = \frac{١٣}{٦}$

$\boxed{س = \frac{١٣}{٦}}$

② $\frac{س^٢ + ٣٠}{٢} = ١٧$

المقام (١)

الحل :-

$س^٢ + ٣٠ = ٣٤$

$\quad -٣٠ \quad -٣٠$

$س^٢ = ٤$ جذر الطرفين

$\boxed{س = ٢ ، -٢}$

رأفت صافي

معادلة تحوي س مرفوع لقوة

نقوم بحل هذا النوع من الاسئلة وذلك بأخذ الجذر التربيعي أو التكعيبي وذلك حسب دليل الجذر

① $(٢س + ١)^٣ = ٨$

الحل :-

$\sqrt[٣]{(٢س + ١)^٣} = \sqrt[٣]{٨}$

$٢س + ١ = ٢$

$\quad -١ \quad -١$

$\frac{٢س}{٢} = \frac{١}{٢}$

$\boxed{س = \frac{١}{٢}}$

② $٣(س - ١)^٣ - ١ = ٢٣$

$\quad +١ \quad +١$

الحل :-

$\frac{٣(س - ١)^٣}{٣} = \frac{٢٤}{٣}$

$(س - ١)^٣ = ٨$ الجذر التكعيبي

$\sqrt[٣]{(س - ١)^٣} = \sqrt[٣]{٨}$

$س - ١ = ٢$

$\quad +١ \quad +١$

$\boxed{س = ٣}$

معادلة تحوي متغيران

وجود متغيران أ ، ب أو س ، ص
مع معادلتان مختلفتان

* نرتب المعادلتان بوضع المتغيرات في طرف والاعداد في طرف آخر
* نجعل احد المتغيران لهما نفس المعامل مع اختلاف الاشارة وذلك بضرب المعادلة بعدد
* نجمع المعادلات
* تنتج معادلة في متغير واحد ، نقوم بحلها فنحصل على قيمة احد المتغيرات
* نعوض قيمة المتغير الناتج باحدى المعادلات

رافت صالح

(١) س = ص + ١ ، ٥ص = ٢س + ١

الحل :-

س − ص = ١ ⟵ ×٢ ⟶ ~~٢س~~ − ٢ص = ٢

−٢س + ٥ص = ١ ⟶ ~~−٢س~~ + ٥ص = ١

نجمع

٣ص / ٣ = ٣ / ٣

$\boxed{\text{ص} = ١}$

نعوض في معادله (١) ⟵ س = ١ + ١ = ٢

(٢) ٣أ + ٢ب = ٧ ، ٢أ − ٣ب = −٤

الحل :-

٣أ + ٢ب = ٧ ⟵ ٣× ⟶ ٩أ + ~~٦ب~~ = ٢١

٢أ − ٣ب = −٤ ⟵ ٢× ⟶ ٤أ − ~~٦ب~~ = −٨

+

~~١٣~~أ / ~~١٣~~ = ١٣ / ١٣

$\boxed{\text{أ} = ١}$

نعوض في معادلة (١) ⟵ ~~٣~~ + ٢ب = ٧
−~~٣~~ −٣

~~٢~~ب / ~~٢~~ = ٤ / ٢

$\boxed{\text{ب} = ٢}$

مقدمة

س + ٣ص = ٧ تسمى معادلة خطية في متغيرين حيث قوة كل من س، ص تساوي (١) وعند وجود أكثر من معادلة، تسمى نظام.

سنتعلم في هذه الوحدة، حل نظام من ٣ معادلات خطية بحيث نتبع الخطوات التالية :-

١) فك الأقواس (ان وجدت) وترتيب المعادلات، حيث نضع المتغيرات في طرف والحد الثابت في الطرف الأيسر.

٢) نختار أحد المتغيرات، حيث نقوم بحذفه بحيث نأخذ معادلة ① مع ② ونشكل معادلة ثم نأخذ ① مع ③ ونشكل معادلة أخرى، وعليه تنتج معادلتان في متغيرين

٣) نقوم بحل المعادلتين من خطوة (٢) بالحذف وعند ايجاد قيمة المتغيرين، نقوم بتعويضهما في معادلة تحوي ٣ متغيرات لايجاد المجهول الثالث

انتبه هام

ملاحظة :- ننظر اولاً للمعادلة الأقل مجاهيل ((ان وجدت)).

تدريب (١) :-

ثلاثة أعداد مختلفة، مجموعها يساوي ١٦، والأكبر يساوي مجموع العددين الآخرين، وثلاثة امثال العدد الأصغر، تزيد عن العدد الأكبر بمقدار واحد. جد الأعداد الثلاثة.

الحل :-

س :- العدد الأكبر، ص : العدد الأصغر، ع : العدد الثالث

س + ص + ع = ١٦ —— ① مجموع الأعداد ١٦

س = ص + ع —— ② العدد الأكبر يساوي مجموع العددين الآخرين

٣ص = س + ١ —— ③ ثلاثة امثال العدد الأصغر يزيد عن العدد الأكبر بمقدار واحد

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠٨٦٢٤٦٦٤

المعادلة الثالثة تحوي أقل مجاهيل ، حيث ناخذ معادلة (1) مع (2) لنتخلص من ع

ترتيب المعادلات :-

س + ص + ع = ١٦ —— (1)

س − ص − ع = ٠ —— (2)

٣ص − س = ١ —— (3)

س + ص + ع = ١٦

س − ص − ع = ٠

بالجمع ← ٢س = ١٦

$\boxed{\text{س} = ٨}$ نعوضها في معادلة (3)

٣ص − ٨ = ١

+٨ +٨

← ٣ص = ٩ ← $\boxed{\text{ص} = ٣}$

نعوضها في معادلة (1) :-

٨ + ٣ + ع = ١٦

$\cancel{١١}$ + ع = ١٦

$\cancel{-١١}$ −١١

← $\boxed{\text{ع} = ٥}$

تدريب (2) :-

حل نظام المعادلات الآتية ، وتحقق من صحة الحل :-

س − ٣ص + ٣ع = −٤

٢س + ٣ص = ع − ١٠

٤س − ٣ص − ع = ١٩

الحل :-

ترتيب المعادلات :-

نتخلص من المتغير ص

س − ٣ص + ٣ع = −٤ —— (1)

٢س + ٣ص − ع = −١٠ —— (2)

٤س − ٣ص − ع = ١٩ —— (3)

ناخذ معادلة (2) مع (3) :-

٢س + ٣ص − ع = −١٠

٤س − ٣ص − ع = ١٩

بالجمع ٦س − ٢ع = ٤ —— (4)

رفعت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠١٨٢٤٤٦٤

ناخذ (١) مع (٣) :-

س − ٣ص + ٣ع = −٤

٢س + ٣ص − ع = −١٥

بالجمع ← ٣س + ٢ع = −١٩ —— (٥)

ناخذ (٤) مع (٥) :-

٦س − ٢ع = ٤

٣س + ٢ع = −١٩

بالجمع ← ٩س = −١٥ ← س = −١٥/٩

$\boxed{\text{س} = -\frac{5}{3}}$

نعوض قيمة س في معادلة (٥) :-

٣ × −٥/٣ + ٢ع = −١٩

−٥ + ٢ع = −١٩ ← ٢ع = −١٤ ← $\boxed{\text{ع} = -7}$

+٥   +٥

نعوض في معادلة (١) :-

−٥/٣ − ٣ص + ٣ × −٧ = −٤

نبسط   −٥/٣ − ٣ص − ٢١ = −٤

−٣ص = −٤ + ٢١ + ٥/٣

−٣ص = ٥٦/٣   نضرب الطرفين في −١/٣

$\boxed{\text{ص} = -\frac{56}{9}}$

تدريب (٣)

مثلث محيطه ١٨ سم ، طول الضلع الأول يساوي مثلي طول الضلع الثالث ، وطول الضلع الثاني يزيد عن طول الضلع الثالث بمقدار ٢ سم . جد أطوال أضلاع المثلث .

الحل :-

س : طول الضلع الأول ، ص : طول الضلع الثاني ، ع : طول الضلع الثالث

س + ص + ع = ١٨ —— (١) " محيط المثلث "

س = ٢ع —— (٢) " الضلع الأول يساوي مثلي طول الضلع الثالث "

ص = ع + ٢ —— (٣) " الضلع الثاني يزيد عن طول الضلع الثالث بمقدار ٢ "

نرتب المعادلات :

س + ص + ع = ١٨ ——— ①

س − ٢ع = ٠ ——— ②

ص − ع = ٢ ——— ③

المعادلة ③ تحوي أقل مجاهيل حيث نتخلص من المتغير (س) من معادلة ① ، ②

س + ص + ع = ١٨

− (س − ٢ع = ٠)

بالطرح ← ص + ٣ع = ١٨ ——— ④

ناخذ ③ مع ④ :

ص − ع = ٢

ص + ٣ع = ١٨

بالطرح ← −٤ع = −١٦ ← $\boxed{\text{ع = ٤}}$

نعوض في ③ ص − ٤ = ٢

ص = ٢ + ٤ ← $\boxed{\text{ص = ٦}}$

استمتاع

نعوض في ② س − ٢ × ٤ = ٠

$\boxed{\text{س = ٨}}$

الأسئلة

١) اكتب نظاماً من ثلاث معادلات خطية بثلاثة متغيرات بحيث يكون حل النظام هو : س = ٢ ، ص = −٣ ، ع = ٤

الحل :

س + ص + ع = ٣

٢س − ص = ٧

٣ع − س = ١٠

٢) حل كلاً من انظمة المعادلات الخطية الآتية ، ثم تحقق من صحة الحل :-

أ) س − ص + ع = ٣ ——— (١)   نتخلص من المتغير ع

٢س + ص + ع = ٨ ——— (٢)

٣س + ص − ع = ١ ——— (٣)

الحل :-

س − ص + ع = ٣

٢س + ص + ع = ٨   بالطرح   −س − ٢ص = −٥ ——— (٤)

ناخذ (١) مع (٣) :-

س − ص + ع = ٣

٣س + ص − ع = ١   بالجمع   ٤س = ٤ ومنه $\boxed{\text{س} = ١}$

نعوض في معادلة (٤) :- −١ − ٢ص = −٥

٢ص = ٤ ومنه $\boxed{\text{ص} = ٢}$

أفشر يا بطل

نعوض في معادلة (١) : ١ − ٢ + ع = ٣ ← −١ + ع = ٣ ومنه $\boxed{\text{ع} = ٤}$

ب) أ + ب + جـ = ١ ——— (١)   نتخلص من المتغير (أ)

−٢أ + ٢ب + ٣جـ = ٢٠ ——— (٢)

٢أ − ٢ب − جـ = −١٦ ——— (٣)

الحل :- ناخذ (٢) مع (٣) :-

−٢أ + ٢ب + ٣جـ = ٢٠

٢أ − ٢ب − جـ = −١٦   بالجمع   ٢جـ = ٤ ← $\boxed{\text{جـ} = ٢}$

نعوض قيمة جـ في معادلة (١) ، (٢) :-

أ + ب + ٢ = ١ ← أ + ب = −١ ——— (٤)

−٢أ + ٢ب + ٦ = ٢٠ ← −٢أ + ٢ب = ١٤   نقسم على ٢

−أ + ب = ٧ ——— (٥)

نأخذ معادلة ④ ، ⑤ :-

أ + ب = -١

-أ + ب = ٧ بالجمع ← ٢ب = ٦ ← $\boxed{\text{ب} = ٣}$

نعوض في معادلة ① :-

أ + ٣ + ٢ = ١

أ + ٥ = ١ ومنه $\boxed{\text{أ} = -٤}$

---

٤) س/٢ + ٣ع = ١٢

ص - ع/٢ = ٥/٢

ص/٢ - س/٣ = ١

نتخلص أولاً من المقامات

الحل :-

س/٢ + ٣ع = ١٢ ←(× ٢)— س + ٦ع = ٢٤ —— ①

ص - ع/٢ = ٥/٢ ←(× ٢)— ٢ص - ع = ٥ —— ②

ص/٢ - س/٣ = ١ ←(× ٦)— ٣ص - ٢س = ٦ —— ③

نأخذ معادلة ① ، ③ ونحذف المتغير (س) :-

س + ٦ع = ٢٤ ←(× ٢)— ٢س + ١٢ع = ٤٨

بالجمع

٣ص - ٢س = ٦ ← ٣ص - ٢س = ٦

١٢ع + ٣ص = ٥٤ نقسم على ٣

٤ع + ص = ١٨ —— ④

نأخذ معادلة ② ، ④ :-

٢ص - ع = ٥ ←(× ٤)— ٨ص - ٤ع = ٢٠ بالجمع ٩ص = ٣٨

٤ع + ص = ١٨ ← ٤ع + ص = ١٨ $\boxed{\text{ص} = \frac{٣٨}{٩}}$

نعوض في معادلة ② ← ٢ × ٣٨/٩ - ع = ٥ ← ٧٦/٩ - ع = ٥

ع = ٧٦/٩ - ٥ = $\boxed{\frac{٣١}{٩}}$

نعوض في معادلة ③ :-

٣ × ٣٨/٩ - ٢س = ٦ ← ٣٨/٣ - ٢س = ٦ ← $\boxed{\text{س} = \frac{١٠}{٣}}$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨١٨٢٤٤٢٦٤

٢) ٢ص + ع = ٣(١ − س)
س − ٣ص + ع = ٤
−٢(٣س + ٢ص + ع) = ١

امتحانية

الحل:

نرتب المعادلات:

٢ص + ع = ٣ − ٣س ← ٢ص + ع + ٣س = ٣ —— (١)

س − ٣ص + ع = ٤ —— (٢)

−٦س − ٤ص − ٢ع = ١ —— (٣)

نحذف المتغير ع

نأخذ (١) مع (٢):

٢ص + ع + ٣س = ٣
س − ٣ص + ع = ٤
بالطرح ٥ص + ٢س = −١ —— (٤)

نأخذ (٢) مع (٣):

س − ٣ص + ع = ٤ ←(×٢) ٢س − ٦ص + ٢ع = ٨
−٦س − ٤ص − ٢ع = ١ ← −٦س − ٤ص − ٢ع = ١
بالجمع
−٤س − ١٠ص = ٩ —— (٥)

نأخذ (٤) مع (٥):

٥ص + ٢س = −١ ←(×٢) ١٠ص + ٤س = −٢
−٤س − ١٠ص = ٩ ← −٤س − ١٠ص = ٩
بالجمع
٠ = ٧ (مستحيل)
المستقيمان متوازيان

وعليه لا يوجد حل للنظام

---

٣) عدد مكون من ثلاث منازل، مجموع أرقام منازله ١٢ رقم منزلة العشرات يقل عن رقم منزلة المئات بمقدار ٢ ورقم منزلة الآحاد يقل عن مجموع رقمي المنزلتين الأخريين بمقدار ٤ ما هذا العدد

الحل: س: الآحاد ، ص: العشرات ، ع: المئات

س + ص + ع = ١٢ . مجموع أرقام العدد ١٢

ص = ع − ٢ منزلة العشرات أقل من المئات بمقدار ٢

س = ص + ع − ٤ رقم منزلة الآحاد يقل عن مجموع رقمي المنزلتين الأخريين بمقدار ٤

نرتب المعادلات:

س + ص + ع = ١٢ —— (١) معادلة (٢) تحوي فقط ع ، ص حيث نأخذ

ص − ع = −٢ —— (٢) (١) مع (٣) لحذف س

س − ص − ع = −٤ —— (٣)

س + ص + ع = ١٢

س − ص − ع = −٤ بالجمع ← ٢س = ٨ ← $\boxed{\text{س} = ٤}$

نعوضها في معادلة (١) ← ٤ + ص + ع = ١٢ نرتب

ص + ع = ٨ —— (٤)

نأخذ معادلة (٢) مع (٤):

ص − ع = −٢

ص + ع = ٨ بالجمع ← ٢ص = ٦ ← $\boxed{\text{ص} = ٣}$

نعوضها في معادلة (١) ← ٤ + ٣ + ع = ١٢

٧ + ع = ١٢ ومنه $\boxed{\text{ع} = ٥}$

∴ العدد ٥٣٤

---

٤) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط الثلاث

(٦،٠) ، (−١،−١) ، (−٢،٠)

إرشاد: (معادلة الدائرة س^2 + ص^2 + أس + ب ص + جـ = صفراً)

الحل:

(٦،٠) نعوضها ← ٣٦ + ٠ + ٦أ + ٠ + جـ = ٠ نرتب

٦أ + جـ = −٣٦ —— (١)

(−١،−١) ← ١ + ١ − أ − ب + جـ = ٠ نرتب

−أ − ب + جـ = −٢ —— (٢)

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠١٨٢٤٤٦٤

(−٢، ٦، ١) ⟵ ٠ + ٤ + ٠ − ٢أ + حـ = ٠ نرتب

−٢أ + حـ = −٤ —— (٣)

نأخذ معادلة (١) مع (٣) :-

٦أ + حـ = −٣٦

−٢أ + حـ = −٤

بالطرح ⟵ ٨أ = −٣٢

$\boxed{أ = −٤}$ نعوضها في (٣)

آمنت بالله

٨ + حـ = −٤ ⟵ $\boxed{حـ = −١٢}$

نعوضها في معادلة (٢) :-

٤ − ب − ١٢ = −٢

−٨ − ب = −٢ ⟵ ب = −٨ + ٢ ⟵ $\boxed{ب = −٦}$

معادلة الدائرة :- س² + ص² − ٤س − ٦ص − ١٢ = ٠

٥) بيّن أن نظام المعادلات الآتية ليس له حل :-

٢س − ص + ع = ٢ —— (١)

٣س − ٢ص − ع = ٠ —— (٢)

٥س − ٣ص + ٢ = ٠ —— (٣)

نتخلص من ع لأن المعادلة الثالثة تحوي متغيرين هما س، ص

الحل :-

نأخذ (١) مع (٢) :-

٢س − ص + ع = ٢

٣س − ٢ص − ع = ٠

بالجمع ٥س − ٣ص = ٢ —— (٤)

نأخذ معادلة (٣)، (٤) :-

٥س − ٣ص = −٢

٥س − ٣ص = ٢

بالطرح ٠ = −٤ (مستحيل)

وعليه ليس للنظام حل

Scanned by CamScanner

ورقة عمل

١) حل كلاً من انظمة المعادلات الآتية :-

أ) س − ٣ص + ع = ٨
٣ع − ٤ = ص − ٥س
٥ص = ٢س − ع

ب) ٣س − ص + ٣ع = −٣
س + ٢ص − ٥ع = ١١
س + ٣ص − ٢ع = ٥

جـ) ٢(ص + ٢ع) = ١٣ − ٥س
٢س = −٣ + ع − ص
س + ٢ع = ٩ + ص

د) ص = ٥/٢ + ع/٢
ص/٢ = ١ + س/٣
٣ع − ١٢ = −س/٢

---

٢) مجموع ٣ أعداد صحيحة يساوي ٨ ومجموع مثلي الأول مضاف اليه الثالث يزيد بمقدار ٣ عن العدد الثاني، مجموع مثلي الثاني و ٣ أمثال الثالث يزيد عن مثلي الاول بمقدار ٥ جد الاعداد الثلاثة

$\boxed{٣ ، ٤ ، ١}$

---

٣) غرفة على شكل متوازي مستطيلات، مجموع مثلي طولها ومثلي عرضها يزيد عن ارتفاعها بـ ٥ م ومجموع الطول والعرض ومثلي الارتفاع يساوي ٢٠ م ومجموع الطول والارتفاع يزيد عن العرض بمقدار ٧ م جد ابعاد الغرفة بالامتار

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠٠٨٢٤٤٦٤

مقدمة:

$أس^2 + بص^2 + جـ س ص + د س + هـ ص + و = ٠$. هذه الصيغة العامة للمعادلة التربيعية بمتغيرين

بشرط أ، ب، جـ لا تساوي صفراً في نفس الوقت

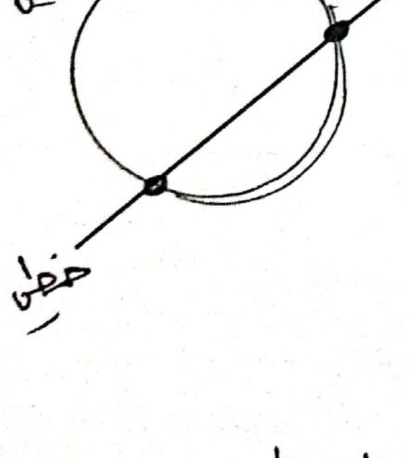
وكذلك $أس + ب ص + جـ = ٠$. الصورة العامة لمعادلة خطية في متغيرين، حيث سنتعلم طريقة حل نظام مكون من معادلة تربيعية وخطية.

خطوات حل النظام:

① نبدأ من المعادلة الخطية وذلك بجعل أحد المتغيران موضوع قانون ويفضل ان نأخذ المتغير الذي معامله (١)

② نقوم بتعويض المتغير الذي وضع موضوع قانون في المعادلة التربيعية لتصبح بمتغير واحد ثم نقوم بحلها

③ لايجاد قيمة المتغير الآخر، نعوض قيمة المتغير الناتج من خطوة (٢) في المعادلة الخطية



ملاحظات

١) نقاط تقاطع منحنى الدائرة مع المعادلة الخطية يمثل حل النظام

٢) $(س - د)^2 + (ص - هـ)^2 = ر^2$ معادلة دائرة مركزها (د، هـ) وطول نصف قطرها ر

٣) موضوع القانون: جعل أحد المتغيران في طرف لوحده ومعامله يساوي (١).

④ مفكوك $(أ \pm ب)^2 = أ^2 \pm 2 \times أ \times ب + ب^2$

الأول في نفسه ، 2 × الأول × الثاني ، الثاني في نفسه

تدريب (1)

حل نظام المعادلات الآتي ثم تحقق من صحة الحل:

$س^2 + ص^2 = 17$

$س = 5ص - 1$

الحل: نلاحظ ان س من المعادلة الخطية موضوع قانون

نعوض عن قيمة س بالمعادلة التربيعية:

$(5ص - 1)^2 + ص^2 = 17$ فك الأقواس

$25ص^2 - 10ص + 1 + ص^2 = 17$ "نبسط" مع تصفير الطرف الأيسر

$26ص^2 - 10ص - 16 = 0$ نقسم على (2)

$13ص^2 - 5ص - 8 = 0$ نحلل:

$(13ص + 8)(ص - 1) = 0$

رأفت صافي

$13ص + 8 = 0$ ومنه $ص = \frac{-8}{13}$ ، $ص - 1 = 0 \leftarrow ص = 1$

عند $ص = \frac{-8}{13}$ نعوض في المعادلة الخطية $س = 5 \times \frac{-8}{13} - 1 = \frac{-53}{13}$

عند $ص = 1 \longleftarrow س = 5 \times 1 - 1 = 4$

حل النظام $(4 ، 1)$ ، $\left(\frac{-53}{13} ، \frac{-8}{13}\right)$

التحقق: نعوض في المعادلتين لكل نقطة

فمثلاً: لنأخذ $(4 ، 1)$:

$س^2 + ص^2 = 17$ نعوضها

$16 + 1 \stackrel{?}{=} 17$

$17 = 17$ تحقق

$س = 5ص - 1$ نعوضها

$4 = 5 \times 1 - 1$

$4 = 4$ تحقق

تدريب (٢) :-

حل نظام المعادلات الآتية ، ثم تحقق من صحة الحل :-

٣س − ص = ٠

س ص = ٤٨

الحل :- اجعل ص موضوع قانون

٣س − ص = ٠

ص = ٣س نعوضها في المعادلة التربيعية :-

س × ٣س = ٤٨

٣س^2 = ٤٨ نقسم على ٣

س^2 = ١٦ جذر الطرفين

س = ٤ ، −٤

امتحان

عند س = ٤ ← ص = ٣س = ٣ × ٤ = ١٢

س = −٤ ← ص = ٣س = ٣ × −٤ = −١٢

مجموعة الحل (٤ ، ١٢) ، (−٤ ، −١٢)

تدريب (٣) :-

حل نظام المعادلات الآتية ، ثم تحقق من صحة الحل (جبريًا وبيانيًا)

ص = س^2 − ٣س − ٨

ص = س − ٣

الحل :-

ص موضوع قانون نعوضها في التربيعية :-

س^2 − ٣س − ٨ = س − ٣ نرتب

س^2 − ٣س − ٨ − س + ٣ = ٠ نبسط

س^2 − ٤س − ٥ = ٠

(س − ٥)(س + ١) = ٠

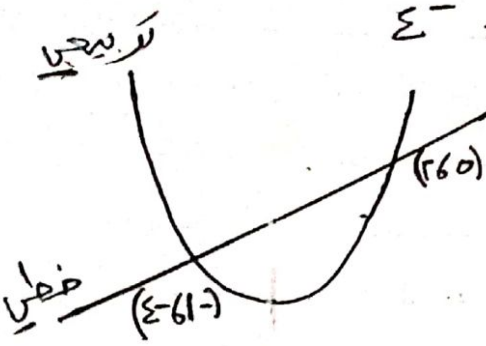
س − ٥ = ٠ ← س = ٥

س + ١ = ٠ ← س = −١

عند س = ٥ ← ص = س − ٣ = ٥ − ٣ = ٢

س = −١ ← ص = س − ٣ = −١ − ٣ = −٤

مجموعة حل النظام {(٥، ٢)، (−١، −٤)}



التحقق الحل بيانياً الرسم :-

الأسئلة

١) جد حل كل من انظمة المعادلات الآتية، ثم تحقق

٤) س + ص = ٩

٢/س + ٢/ص = ١ حيث س ≠ ٠ ، ص ≠ ٠

الحل :- اجعل ص موضوع قانون :- (امتحانات)

س + ص = ٩ ← ص = ٩ − س

المعادلة الأخرى نضرب كل حد بـ س × ص

س ص × ٢/س + س ص × ٢/ص = س × ص × ١

٢ص + ٢س = س ص نعوض بدل ص بـ ٩ − س

٢(٩ − س) + ٢س = س(٩ − س) فك الأقواس

١٨ − ~~٢س~~ + ~~٢س~~ = ٩س − س² نرتب

س² − ٩س + ١٨ = ٠

(س − ٣)(س − ٦) = ٠

س − ٣ = ٠ ← س = ٣ ، س − ٦ = ٠ ← س = ٦

عند س = ٣ ← ص = ٩ − س = ٩ − ٣ = ٦

عند س = ٦ ← ص = ٩ − س = ٩ − ٦ = ٣

حل النظام {(٣، ٦)، (٦، ٣)}

ب) $ص = س - ٢$

$ص = س^{٢} - ٦س + ١٠$

الحل :- ص موضوع قانون حيث نعوضها في المعادلة التربيعية :-

$س - ٢ = س^{٢} - ٦س + ١٠$ نرتب

$س^{٢} - ٦س + ١٠ - س + ٢ = ٠$ نبسط

$س^{٢} - ٧س + ١٢ = ٠$

$(س - ٣)(س - ٤) = ٠$

$س - ٣ = ٠ \leftarrow س = ٣$ ، $س - ٤ = ٠ \leftarrow س = ٤$

عند $س = ٣ \leftarrow ص = س - ٢ = ٣ - ٢ = ١$

$س = ٤ \leftarrow ص = س - ٢ = ٤ - ٢ = ٢$

حل النظام (٣ ، ١) ، (٤ ، ٢)

رافت صافي

جـ) $٣س^{٢} - ٥ص^{٢} = ٣٠$

$ص - س = ٢$

الحل :- نجعل ص موضوع قانون :-

$ص - س = ٢ \leftarrow ص = س + ٢$ نعوضها في التربيعية :-

$٣س^{٢} - ٥(س + ٢)^{٢} = ٣٠$ فك القوس

$٣س^{٢} - ٥(س^{٢} + ٤س + ٤) = ٣٠$

$٣س^{٢} - ٥س^{٢} - ٢٠س - ٢٠ = ٣٠$ نبسط

$-٢س^{٢} - ٢٠س - ٥٠ = ٠$ نقسم على -٢

$س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = ٠$

$(س + ٥)(س + ٥) = ٠$

$س + ٥ = ٠ \leftarrow س = -٥$

$س = -٥ \leftarrow ص = س + ٢ = -٥ + ٢ = -٣$

حل النظام (−٥ ، −٣)

٢) مثل حل نظام المعادلات الآتي بيانياً:-

$(س+1)^2+(ص-2)^2=9$

$س = ص$

الحل:-

ص = س موضوع قانون نعوضها في التربيعية:-

$(س+1)^2+(س-2)^2=9$ فك الأقواس

$س^2+2س+1+س^2-4س+4=9$ تبسيط

$2س^2-2س-4=0$ نقسم على ٢

$س^2-س-2=0$

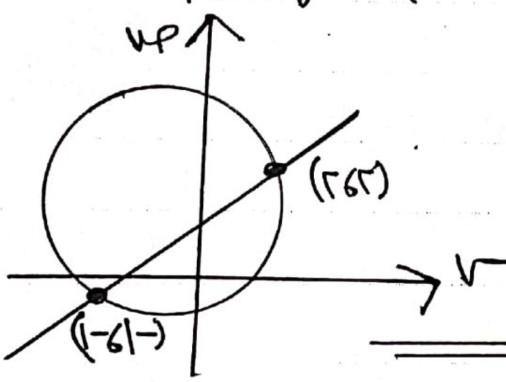
$(س-2)(س+1)=0$

$س-2=0 \leftarrow س=2$ ، $س+1=0 \leftarrow س=-1$

عند $س=2 \leftarrow ص=س=2$

$س=-1 \leftarrow ص=س=-1$

رافت ابراهيم

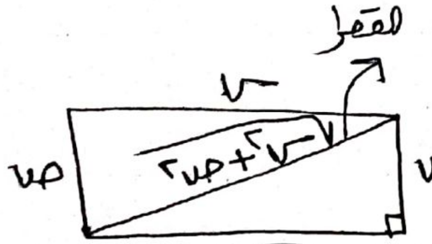


نقاط تقاطع الدائرة والمستقيم

(٢،٢) ، (-١،-١)

---

٣) مستطيل، مجموع بعديه ١٧ سم وطول قطره يساوي ١٣ سم، جد بعديه



الحل:- الطول = س

العرض = ص

$س+ص=17$ ——— (١)

$س^2+ص^2=169$ ——— (٢)

طول القطر = $\sqrt{س^2+ص^2}$

$\sqrt{س^2+ص^2}=13$ نربع

$س^2+ص^2=169$

الحل:- $ص=17-س$ نعوض في (٢):-

$س^2+(17-س)^2=169$

$س^2+289-34س+س^2=169$ نرتب

$2س^2-34س+120=0$ نقسم على ٢

$س^2 - ١٧س + ٦٠ = ٠$

$(س - ٥)(س - ١٢) = ٠$

$س - ٥ = ٠ \leftarrow س = ٥$ ، $س - ١٢ = ٠ \leftarrow س = ١٢$

عند $س = ٥ \leftarrow ص = ١٧ - س = ١٧ - ٥ = ١٢$

عند $س = ١٢ \leftarrow ص = ١٧ - س = ١٧ - ١٢ = ٥$

ابعاد المستطيل ١٢ سم ، ٥ سم

---

٤) جد نقاط تقاطع الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ، ونصف قطرها يساوي ٣ وحدات ، مع المستقيم الذي معادلته $ص = ٣ - س$

الحل :-

معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها (ر) هي $س^2 + ص^2 = ر^2 \leftarrow س^2 + ص^2 = ٩$

نحل النظام :- $س^2 + ص^2 = ٩$

$ص = ٣ - س$

$ص = ٣ - س$ نعوضها في المعادلة التربيعية :-

$س^2 + (٣ - س)^2 = ٩$

رافت صافي

$س^2 + ٩ - ٦س + س^2 = ٩$ نرتب

$٢س^2 - ٦س = ٠$

$٢س(س - ٣) = ٠$

$٢س = ٠ \leftarrow س = ٠$ ، $س - ٣ = ٠ \leftarrow س = ٣$

عند $س = ٠ \leftarrow ص = ٣ - س = ٣ - ٠ = ٣$

عند $س = ٣ \leftarrow ص = ٣ - س = ٣ - ٣ = ٠$

نقاط التقاطع (٠ ، ٣) ، (٣ ، ٠)

٥) عددان موجبان مجموعهما ١٠ ومجموع مربعيهما ٥٨ ما العددان.

الحل: العدد الأول = س ، العدد الثاني = ص

$س + ص = ١٠$ ——— (١) مجموع العددان

$س^{2} + ص^{2} = ٥٨$ ——— (٢) مجموع مربعيهما

$ص = ١٠ - س$ نعوضها في (٢) :

$س^{2} + (١٠ - س)^{2} = ٥٨$ نفك الأقواس

$س^{2} + ١٠٠ - ٢٠س + س^{2} = ٥٨$ نرتب

$٢س^{2} - ٢٠س + ٤٢ = ٠$ نقسم على ٢

$س^{2} - ١٠س + ٢١ = ٠$

$(س - ٣)(س - ٧) = ٠$

$س - ٣ = ٠ \leftarrow س = ٣$ ، $س - ٧ = ٠ \leftarrow س = ٧$

عندما $س = ٣ \leftarrow ص = ١٠ - ٣ = ٧$

$س = ٧ \leftarrow ص = ١٠ - ٧ = ٣$

∴ العددان ٧ ، ٣

ورقة عمل

١) حل كل من انظمة المعادلات الآتية :

أ) $ص^2 + س^2 = ٢٠$ ، $س = ٢ + ص$

ب) $ص - ٢س = ٠$ ، $س ص = ٣٢$

جـ) $(س - ٤)^2 + (ص - ٦)^2 = ١٠٠$ ، $ص - س = ٠$

د) $س = ٣ص + ٢$ ، $ص^2 = ٦٨ - س^2$

هـ) $ص = س - ٦$ ، $\frac{١}{ص} + \frac{١}{س} = \frac{٥}{٨}$

و) $\frac{٢}{س} + \frac{٢}{ص} = ١$ ، $ص - ٢س = ٠$

---

٢) عددان يزيد احدهما عن ثلاثة امثال الآخر بمقدار ٢ ومجموع مربعيهما ٦٨ ، جد العددان

---

٣) مستطيل مساحته ٤٨ سم² ومحيطه ٢٨ سم جد بعديه

---

٤) مربعان ، مجموع مساحتيهما ٨٩ سم² ، الفرق بين بعديهما ٣ سم جد بعد كل مربع

---

٥) عددان مجموع مقلوبيهما $\frac{٩}{١٤}$ والفرق بينهما ٥ جد العددان

تذكير :-

$أ س^{٢} + ب ص^{٢} + جـ س ص + د س + هـ ص + و = ٠$ الصورة العامة للمعادلة التربيعية في متغيرين .

يعتمد حل نظام مكون من معادلتين تربيعيتين بالحذف لـ $س^{٢}$ أو $ص^{٢}$ ، لكن اذا لم نستطع حذف احد المتغيرين في هذه الحالة نلجأ الى حذف الحد الثابت وخاصة عند وجود الحد س ص حيث نشكل معادلتين خطيتين .

رافت صافي

توضيح :

١) عند وجود $س^{٢}$ ، $ص^{٢}$ فقط في كلا المعادلتين نلجأ الى طريقة الحذف لأحد المتغيرين .

٢) عند وجود س ص نلجأ في هذه الحالة لحذف الحد الثابت أو نكتب ص بدلالة س ونعوضها في المعادلة الأخرى أو التعويض بدل س ص ـــ وذلك حسب معطيات السؤال .

٣) عند وجود $س^{٢}$ مع س أو $ص^{٢}$ مع ص نلجأ الى الطريقة التعويض وخاصة ان كانا في نفس المعادلة

٤) عدد الحلول لهذا النظام هو اربعة حلول على الأكثر .

وبشكل عام

نختار الطريقة التي تجعل لنا أحد المعادلات في متغير واحد ..

تدريب (١):

عددان موجبان ، الفرق بين مربعيهما يساوي ٤٠ ، واذا كان مربع العدد الأكبر مضافاً اليه اربعة امثال الأصغر يساوي ٨٥ فما العددان.

الحل:

س : العدد الأكبر ، ص : العدد الأصغر

س² − ص² = ٤٠ ——— (١)

س² + ٤ص = ٨٥ ——— (٢)

لوجود الحد (ص) يفضل استخدام التعويض

من معادلة (١) اجعل س² موضوع قانون:

س² = ص² + ٤٠ نعوضها في معادلة (٢):

ص² + ٤٠ + ٤ص = ٨٥ نرتب

ص² + ٤ص − ٤٥ = ٠

(ص + ٩)(ص − ٥) = ٠

ص + ٩ = ٠ ← ص = −٩ مرفوض لان العدد موجب

ص − ٥ = ٠ ← ص = ٥

نعوض ص = ٥ في معادلة (١):

س² − ٢٥ = ٤٠

س² = ٦٥ ومنه س = √٦٥ ، −√٦٥ مرفوض

∴ العددان هما √٦٥ ، ٥

رافت صافي

تدريب (٢): حل مثال (٣−٨) عن طريق كتابة ص بدلالة س من المعادلة (٢) وتعويضها في المعادلة (١).

س² + ص² = ٤ ——— (١)

س² − ٢ص = ٤ ——— (٢)

٢ص = س² − ٤ تقسم على ٢

ص = س²/٢ − ٢ نعوضها في معادلة (١)

$س^2 + (\frac{س^2}{2} - 2)^2 = 4$ فك الأقواس

$س^2 + \frac{س^4}{4} - 2س^2 + \cancel{4} = \cancel{4}$ نبسط

$\frac{س^4}{4} - س^2 = 0$ نضرب في (4):

$س^4 - 4س^2 = 0$ نحلل

$س^2(س^2 - 4) = 0$

$س^2 = 0 \leftarrow س = 0$ ، $س^2 - 4 = 0 \leftarrow س^2 = 4$ وعليه $س = 2 ، -2$

عند $س = 0 \leftarrow ص = \frac{س^2}{2} - 2 = \frac{0}{2} - 2 = -2$

$س = 2 \leftarrow ص = \frac{س^2}{2} - 2 = \frac{4}{2} - 2 = 0$

$س = -2 \leftarrow ص = \frac{س^2}{2} - 2 = \frac{4}{2} - 2 = 0$

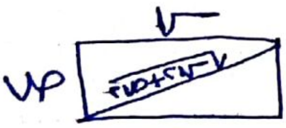
مجموعة الحل: { (2 ، 0) ، (-2 ، 0) ، (0 ، -2) }

رافت صافي

تدريب (3)

حديقة مستطيلة الشكل، مساحتها تساوي 120 م²
فإذا كان طول قطرها 17 م نجد بعدي الحديقة

الحل:



$س ص = 120$ "مساحة" ——— (1)

$س^2 + ص^2 = 289$ "القطر" ——— (2)

من معادلة (1) ← $س ص = 120$ نقسم على س

$ص = \frac{120}{س}$ نعوض في معادلة (2):

$س^2 + \frac{14400}{س^2} = 289$ نضرب في $س^2$

$س^4 + 14400 = 289س^2$ نرتب

$س^4 - 289س^2 + 14400 = 0$

$(س^2 - 64)(س^2 - 225) = 0$

مرفوض لأنه لا يوجد بعد سالب

$س^2 - 64 = 0 \leftarrow س^2 = 64$ وعليه $س = 8 ، -8$

$س^2 - 225 = 0 \leftarrow س^2 = 225$ وعليه $س = 15 ، -15 \leftarrow$ مرفوض

عند $س = 8 \leftarrow ص = \frac{120}{س} = \frac{120}{8} = 15$

$س = 15 \leftarrow ص = \frac{120}{س} = \frac{120}{15} = 8$

أبعاد الحديقة ١٥م ، ٨م

الأسئلة

١) حل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية ، ثم تحقق

أ) $5س^2 - 2ص^2 = 18$ —— ① نستخدم الحذف لوجود

$3س^2 + 5ص^2 = 17$ —— ② فقط $س^2$ ، $ص^2$ في كلا المعادلتين

الحل:

$5س^2 - 2ص^2 = 18 \xrightarrow{\times 5} 25س^2 - 10ص^2 = 90$

$3س^2 + 5ص^2 = 17 \xrightarrow{\times 2} 6س^2 + 10ص^2 = 34$ بالجمع

$31س^2 = 124$

$س^2 = 4$ ومنه $س = 2 ، -2$

عند $س = 2$ نعوض في ①: $5 \times 4 - 2ص^2 = 18$

$20 - 2ص^2 = 18$

$2ص^2 = 2$

$ص^2 = 1$ ومنه $ص = 1 ، -1$

عند $س = -2$ نعوض في ①: $5 \times 4 - 2ص^2 = 18$ ...... $ص = 1 ، -1$

حل النظام $\{(2،1)، (2،-1)، (-2،1)، (-2،-1)\}$

ب) $س ص = 18$ —— ①   أفكر

$\frac{1}{س} - \frac{1}{ص} = \frac{1}{6}$ —— ②

الحل: نضرب المعادلة ② في $6 \times س \times ص$

$6ص - 6س = س ص$ لكن $س ص = 18$

$6ص - 6س = 18$ نقسم على ٦

$ص - س = 3$ —— ③

من معادلة (٣) اجعل س موضوع قانون ثم عوضها في معادلة (١) :-

ص − س = ٣ ← س = ص − ٣

ص (ص − ٣) = ١٨ فك الأقواس

ص² − ٣ص = ١٨ نرتب

ص² − ٣ص − ١٨ = ٠

(ص − ٦)(ص + ٣) = ٠

ص − ٦ = ٠ ومنه ص = ٦

ص + ٣ = ٠ ومنه ص = −٣

عند ص = ٦ ← س = ص − ٣ = ٦ − ٣ = ٣

عند ص = −٣ ← س = ص − ٣ = −٣ − ٣ = −٦

حل النظام {(٣ ، ٦) ، (−٦ ، −٣)}

رافت صافي

حل س² + ص² = ٩ —— (١) لاحظ المعادلة (٢) جاهزة للحل

س² − س = ٦ —— (٢)

الحل :-

س² − س − ٦ = ٠

(س − ٣)(س + ٢) = ٠

س − ٣ = ٠ ← س = ٣ ، س + ٢ = ٠ ← س = −٢

عند س = ٣ نعوض في معادلة (١) :-

٩ + ص² = ٩

ص² = ٠ ومنه ص = ٠

عند س = −٢ نعوض في معادلة (١) :-

٤ + ص² = ٩

ص² = ٥ ومنه ص = √٥ ، −√٥

حل النظام {(٣ ، ٠) ، (−٢ ، √٥) ، (−٢ ، −√٥)}

١) س² + س ص = ٤ ——— ①

٢ س ص − ص² = −٣ ——— ②

نحذف الثابت في هذه الحالة

الحل :-

س² + س ص = ٤ ←(×③) ٣ س² + ٣ س ص = ١٢

٢ س ص − ص² = −٣ ←(×④) ٨ س ص − ٤ ص² = −١٢

بالجمع

٣ س² + ١١ س ص − ٤ ص² = ٠ نحلل

(٣ س − ص)(س + ٤ ص) = ٠

٣ س − ص = ٠   س + ٤ ص = ٠

س = ص/٣ —— ③   س = −٤ ص —— ④

نحل معادلة ③ مع ① :- حيث نعوض بدل س ب ص/٣

ص²/٩ + ص/٣ × ص = ٤   نضرب ب ٩

ص² + ٣ ص² = ٣٦

٤ ص² = ٣٦

ص² = ٩

ص = ± ٣

رافت صافي

عند ص = ٣ ← س = ص/٣ = ٣/٣ = ١

عند ص = −٣ ← س = ص/٣ = −٣/٣ = −١

نحل معادلة ④ مع ① :- حيث نعوض بدل س ب −٤ ص

١٦ ص² + −٤ ص² = ٤

١٢ ص² = ٤

ص² = ١/٣

ص = ١/√٣ ، −١/√٣

عند ص = ١/√٣ ← س = −٤ ص = −٤/√٣

عند ص = −١/√٣ ← س = −٤ ص = ٤/√٣

مجموعة الحل = {(١ ، ٣)، (−١ ، −٣)، (−٤/√٣ ، ١/√٣)، (٤/√٣ ، −١/√٣)}

رافت ابراهيم صافي   بكالوريوس رياضيات   ٠٧٨٠٨٨٢٤٤٦٤

هـ) $س^2 + ص^2 = 9$ ——— (1)

$س^2 + ص^2 + 12س + 27 = 0$ ——— (2)

الحل :- من معادلة (1) : $س^2 + ص^2 = 9$ نعوض بدل $س^2 + ص^2$ بـ 9 في معادلة (2) :-

$9 + 12س + 27 = 0$

$12س = -36$

$س = -3$ نعوض في معادلة (1) :-

$9 + ص^2 = 9$

$ص^2 = 0$ ومنه $ص = 0$

حل النظام $(-3 ، 0)$

و) $س^2 - ص^2 = 24$ ——— (1)

$س^2 = (ص + 4)^2$ ——— (2)

الحل :- من معادلة (1) ← $س^2 = 24 + ص^2$ نعوض في معادلة (2) :-

$24 + ص^2 = (ص + 4)^2$ فك أقواس

$24 + \cancel{ص^2} = \cancel{ص^2} + 8ص + 16$ نرتب

$8ص = 8$ ← $ص = 1$ نعوض في معادلة (1) :-

$س^2 - 1 = 24$

$س^2 = 25$ ومنه $س = 5 ، -5$

مجموعة حل النظام $\{(5 ، 1) ، (-5 ، 1)\}$

12) إذا كان $س + \frac{1}{س} = 2$ حيث $س \neq 0$. جد قيمة $س^2 + \frac{1}{س^2}$

الحل :- $س + \frac{1}{س} = 2$ نربع الطرفين :-

$س^2 + 2 + \frac{1}{س^2} = 4$ ← $س^2 + \frac{1}{س^2} = 4 - 2 = 2$

رافت ابراهيم صافي بكالوريوس رياضيات ٠٧٨٠٨٢٤٤٦٤

٣) جد نقاط التقاطع بين الدائرتين $س^2 + ص^2 = ٤$
$(س-٢)^2 + ص^2 = ٨$

الحل :-

نقوم بحل نظام المعادلات :-

$س^2 + ص^2 = ٤$ —— ①

$(س-٢)^2 + ص^2 = ٨$ —— ②

بالطرح ② − ①

$(س-٢)^2 - س^2 = ٤$ فك أقواس

$\cancel{س^2} - ٤س + ٤ - \cancel{س^2} = ٤$

$-٤س = ٠$

$س = ٠$ نعوضها في معادلة ① :-

$ص^2 = ٤$ ومنه $ص = ٢ ، -٢$

حل النظام $\{(٠، ٢)، (٠، -٢)\}$

رأفت صافي

---

٤) عددان ، مجموع مربعيهما يساوي ٥٨ والفرق بين مربعيهما يساوي ٤٠ فما العددان

الحل :-

س : العدد الأول ، ص : العدد الثاني

$س^2 + ص^2 = ٥٨$ —— ①

$س^2 - ص^2 = ٤٠$ —— ② بالجمع

$٢س^2 = ٩٨$

$س^2 = ٤٩$ وعليه $س = ٧ ، -٧$

عند $س = ٧$ نعوضها في معادلة ① :-

$٤٩ + ص^2 = ٥٨$

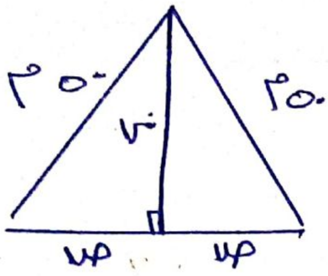
$ص^2 = ٩$ وعليه $ص = ٣ ، -٣$

وبالمثل عند $س = -٧$ فان $ص = ٣ ، -٣$

العددان ٧ ، ٣

١٥) قطعة ارض على شكل مثلث متطابق الضلعين ، طول ضلعه المتطابق ٥٠ م ، ومساحته ١٢٠٠ م٢
جد طول قاعدته وارتفاعه

الحل :-



مساحة المثلث = ١/٢ × القاعدة × الارتفاع

١٢٠٠ = ١/٢ × ٢ س × ر

ر س = ١٢٠٠ ـــــ (١)

فيثاغورس ر ← ر٢ + س٢ = ٢٥٠٠ ـــــ (٢)

من معادلة (١) ← س = ١٢٠٠ / ر نعوضها في معادلة (٢) :-

ر٢ + ١٤٤٠٠٠٠ / ر٢ = ٢٥٠٠ نضرب في ر٢

ر٤ + ١٤٤٠٠٠٠ = ٢٥٠٠ ر٢ نرتب

ر٤ − ٢٥٠٠ ر٢ + ١٤٤٠٠٠٠ = ٠

(ر٢ − ١٦٠٠)(ر٢ − ٩٠٠) = ٠

رافت ابراهيم

ر٢ − ١٦٠٠ = ٠

ر٢ = ١٦٠٠ ← ر = ٤٠ ، −٤٠ ← مرفوض ، لا يوجد بعد سالب

ر٢ − ٩٠٠ = ٠

ر٢ = ٩٠٠ ← ر = ٣٠ ، −٣٠

عند ر = ٤٠ نعوضها في (١) :- ٤٠ س = ١٢٠٠

س = ١٢٠٠ / ٤٠ = ٣٠

عند ر = ٣٠ نعوضها في (١) ٣٠ س = ١٢٠٠

س = ١٢٠٠ / ٣٠ = ٤٠

الارتفاع ٣٠ ، ٤٠

القاعدة ٨٠ ، ٦٠

توجد حالتان

ورقة عمل

١) حل أنظمة المعادلات الآتية :-

١) س^2 + ص^2 = ٢٥
٢س^2 − ص^2 = ٢

٢) س ص = ٨
ص^2 = ٤٥ − س^2

٣) س^2 + ٣ص^2 = ٧
٢س^2 − ٣س ص + ٤ص^2 = ٦

٤) س ص + س^2 = ٣
٢س^2 = ص^2 + ٧

---

٢) عددان حاصل ضربهما ٨ ومجموع مربعيهما ١٦
ما هما العددان

---

٣) عددان مجموع مربعيهما ٢٥ والفرق بين
مربعيهما ٧ ما هما العددان

---

٤) مثلث متطابق الضلعين، طول ضلعه المتطابق ٥ سم
مساحته ١٢ سم^2 جد طول قاعدته وارتفاعه

أسئلة الوحدة

١) حل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية :

أ) س + ٢ص − ع = ٦ ——— ①

٢س + ص + ع = ٣ ——— ②

س + ٢ص + ع = ٤ ——— ③

نتخلص من المتغير ع

الحل :- نأخذ ① مع ②

س + ٢ص − ع = ٦ بالجمع

٢س + ص + ع = ٣

٣س + ٣ص = ٩ نقسم على ٣

س + ص = ٣ ——— ④

أنت ماهر

نأخذ ① مع ③

س + ٢ص − ع = ٦ بالجمع

س + ٢ص + ع = ٤

٢س + ٤ص = ١٠ نقسم على ٢

س + ٢ص = ٥ ——— ⑤

حل معادلة ④ ، ⑤

س + ص = ٣ بالطرح

س + ٢ص = ٥

−ص = −٢ ← $\boxed{\text{ص} = ٢}$ نعوض في معادلة ④

س + ٢ = ٣ ← $\boxed{\text{س} = ١}$

نعوض في معادلة ① :-

١ + ٤ − ع = ٦ ← ٥ − ع = ٦ ← $\boxed{\text{ع} = -١}$

ب) ص = س^2 − ١ ——— ①

ص = ٥ − س ——— ②

الحل :- من معادلة ② ص = ٥ − س نعوض بدل ص في معادلة ① :-

٥ − س = س^2 − ١ نرتب

س^2 + س − ٦ = ٠

$س^2 + س - ٦ = ٠$

$(س + ٣)(س - ٢) = ٠$

$س + ٣ = ٠ \leftarrow س = -٣$ ، $س - ٢ = ٠ \leftarrow س = ٢$

عند $س = -٣ \leftarrow ص = ٥ - س = ٥ + ٣ = ٨$

$س = ٢ \leftarrow ص = ٥ - س = ٥ - ٢ = ٣$

حل النظام $\{ (٢ ، ٣) ، (-٣ ، ٨) \}$

هـ) $س^2 - ص^2 = ٩$ —— ①

$ص^2 - ٢س = ٦$ —— ②

رافت صافي

الحل :-

بالجمع $\leftarrow س^2 - ٢س = ١٥$ نرتب

$س^2 - ٢س - ١٥ = ٠$

$(س - ٥)(س + ٣) = ٠$

$س - ٥ = ٠ \leftarrow س = ٥$ ، $س + ٣ = ٠ \leftarrow س = -٣$

عند $س = ٥$ نعوضها في ① :-

$٢٥ - ص^2 = ٩ \leftarrow ص^2 = ١٦ \leftarrow ص = ٤ ، -٤$

عند $س = -٣$ نعوضها في ① :-

$٩ - ص^2 = ٩$

$ص^2 = ٠ \leftarrow ص = ٠$

حل النظام $\{ (٥ ، ٤) ، (٥ ، -٤) ، (-٣ ، ٠) \}$

د) $٢أ + ٥ب + ٤جـ = ٤٤$ —— ①

$٣أ + ٤ب = ٣٣$ —— ②

$٥أ = ١٥$ —— ③

نبدأ من معادلة ③

الحل :- $٥أ = ١٥$ ومنه $\boxed{أ = ٣}$ نعوضها في معادلة ② :-

$٩ + ٤ب = ٣٣$

$٤ب = ٢٤$

$\boxed{ب = ٦}$

نعوض في معادلة (١) :-

$٦ + ٣٠ + ٤هـ = ٤٤$

$٣٦ + ٤هـ = ٤٤$

$٤هـ = ٨$

$\boxed{هـ = ٢}$

ص) $٢س + ص = ٩$ ——— (١)

$س - ٢ع = -٣$ ——— (٢)

$٢ص + ٣ع = ١٠$ ——— (٣)

ناخذ معادلة (١) مع (٢) لحذف المتغير س

الحل :-

$٢س + ص = ٩ \longrightarrow ٢س + ص = ٩$

$س - ٢ع = -٣ \xrightarrow[(٢)\times]{} ٢س - ٤ع = -٦$

بالطرح

$ص + ٤ع = ١٠$ ——— (٤)

ناخذ معادلة (٣) ، (٤)

$٢ص + ٣ع = ١٠ \longrightarrow ٢ص + ٣ع = ١٠$

$ص + ٤ع = ١٠ \xrightarrow[(٢)\times]{} ٢ص + ٨ع = ٣٠$

بالطرح

$-٥ع = -١٠$

$\boxed{ع = ٣}$

نعوض في معادلة (٤) :-

$ص + ١٢ = ١٠$

$\boxed{ص = ٣}$

نعوض في معادلة (١) :-

$٢س + ٣ = ٩$

$٢س = ٦$

$\boxed{س = ٣}$

٢) $س^2 + ص^2 - س ص - ٢١ = ٠$ ——— ①

$س^2 - ٨ص^2 + ٢س ص = ٠$ ——— ②

هنا لا نستطيع حذف الحد الثابت

الحل :-

نبدأ من المعادلة ② :-

$س^2 + ٢س ص - ٨ص^2 = ٠$

$(س + ٤ص)(س - ٢ص) = ٠$

$س - ٢ص = ٠$ ، $س = ٢ص$

$س + ٤ص = ٠ \leftarrow س = -٤ص$

$س = -٤ص$ نعوضها في معادلة ① :-

$١٦ص^2 + ص^2 + ٤ص^2 - ٢١ = ٠$ نرتب

$٢١ص^2 = ٢١$

$ص^2 = ١$ وعليه $ص = ١ ، -١$

عند $ص = ١ \leftarrow س = -٤ص = -٤$

$ص = -١ \leftarrow س = -٤ص = ٤$

رأفت صافي

وأيضاً :- $س = ٢ص$ نعوضها في ① :-

$٤ص^2 + ص^2 - ٢ص^2 - ٢١ = ٠$ نرتب

$٣ص^2 = ٢١$

$ص^2 = ٧$ وعليه $ص = \sqrt{٧} ، -\sqrt{٧}$

عند $ص = \sqrt{٧} \leftarrow س = ٢ص = ٢\sqrt{٧}$

$ص = -\sqrt{٧} \leftarrow س = ٢ص = -٢\sqrt{٧}$

حل النظام $\{(-٤ ، ١) ، (٤ ، -١) ، (٢\sqrt{٧} ، \sqrt{٧}) ، (-٢\sqrt{٧} ، -\sqrt{٧})\}$

---

٣) $س^2 + ص^2 = ١٣$ ——— ①

$س - ص = ٥$ ——— ②

الحل :- من معادلة ① $\leftarrow س = ص + ٥$ نعوضها في ①

$(ص + ٥)^2 + ص^2 = ١٣$ فك الأقواس

$ص^2 + ١٠ص + ٢٥ + ص^2 = ١٣$ نرتب

$٢ص^2 + ١٠ص + ١٢ = ٠$ نقسم على ② :-

$ص^2 + 5ص + 6 = 0$

$(ص+3)(ص+2) = 0$

$ص+3 = 0 \leftarrow ص = -3$ ، $ص+2 = 0 \leftarrow ص = -2$

عند $ص = -3 \leftarrow س = ص+5 = -3+5 = 2$

$ص = -2 \leftarrow س = ص+5 = -2+5 = 3$

حل النظام $\{(2 ، -3) ، (3 ، -2)\}$

---

٣) ثلاثة أعداد موجبة مجموعها ٣٠ ، اذا كان العدد الأول يزيد بمقدار ٦ على العدد الثاني ، والعدد الثاني يقل بمقدار ٥ عن العدد الثالث ، جد الأعداد الثلاثة

الحل :

س : العدد الأول ، ص : العدد الثاني ، ع : العدد الثالث

$س + ص + ع = 30$ —— (1)

$س - ص = 6$ —— (2)

$ص - ع = -5$ —— (3)

نأخذ (1) مع (2) لحذف (س)

أفتصلح

$س + ص + ع = 30$ بالطرح $2ص + ع = 14$ —— (4)

$س - ص = 6$

نأخذ (4) مع (3)

$ص - ع = -5$ بالجمع

$2ص + ع = 14$

$3ص = 9 \leftarrow \boxed{ص = 3}$ نعوضها في (4)

$6 + ع = 14 \leftarrow \boxed{ع = 8}$

نعوض في معادلة (1) : $س + 3 + 8 = 30 \leftarrow \boxed{س = 19}$

---

٣) تتحرك نقطة على المستقيم الذي معادلته $2ص = 5س - 1$ في لحظة ما كان احداثيها الصادي يساوي مثلي مربع احداثيها السيني ، جد احداثيي هذه النقطة في تلك اللحظة

الحل: النقطة (س ، ص)
س ← احداثي السيني ، ص ← احداثي الصادي

$ص = ٢س^{٢}$ الاحداثي الصادي مثلي مربع احداثيها السيني

نحل المعادلتين:

$٢ص = ٥س - ١$ —— (١)

$ص = ٢س^{٢}$ —— (٢)

من معادلة (٢) نعوض $ص = ٢س^{٢}$ في معادلة (١)

$٢ \times ٢س^{٢} = ٥س - ١$ نرتب

$٤س^{٢} - ٥س + ١ = ٠$

امتحان وزاري

$(٤س - ١)(س - ١) = ٠$

$٤س - ١ = ٠ \leftarrow س = \frac{١}{٤}$ ، $س - ١ = ٠ \leftarrow س = ١$

عند $س = \frac{١}{٤} \leftarrow ص = ٢س^{٢} = ٢ \times \frac{١}{١٦} = \frac{١}{٨}$

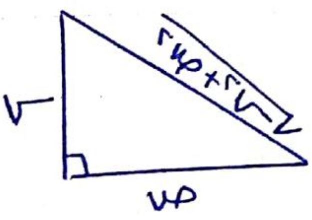
$س = ١ \leftarrow ص = ٢س^{٢} = ٢ \times ١ = ٢$

احداثي النقطة $(\frac{١}{٤} ، \frac{١}{٨})$ ، $(١ ، ٢)$

---

٤) مثلث قائم الزاوية ، مساحته ٣٠ سم² وطول وتره ١٣ سم جد طولي ضلعي القائمة

الحل:



المساحة $= \frac{١}{٢} \times س \times ص = ٣٠$ نضرب في (٢):

$س ص = ٦٠$ —— (١)

$\sqrt{س^{٢}+ص^{٢}} = ١٣$ طول الوتر نربع

$س^{٢} + ص^{٢} = ١٦٩$ —— (٢)

من معادلة (١) $ص = \frac{٦٠}{س}$ نعوضها في معادلة (٢):

$س^{٢} + \frac{٣٦٠٠}{س^{٢}} = ١٦٩$ نضرب في $س^{٢}$

$س^{٤} + ٣٦٠٠ = ١٦٩س^{٢}$ نرتب

مرفوض

$س^4 - ١٦٩س^2 + ٣٦٠٠ = ٠$

$(س^2 - ١٤٤)(س^2 - ٢٥) = ٠$

$س^2 - ١٤٤ = ٠ \leftarrow س^2 = ١٤٤$ وعليه $س = ١٢ ، -١٢$

$س^2 - ٢٥ = ٠ \leftarrow س^2 = ٢٥$ وعليه $س = ٥ ، -٥$

عند $س = ١٢ \leftarrow ص = \frac{٦٠}{١٢} = ٥$

$س = ٥ \leftarrow ص = \frac{٦٠}{٥} = ١٢$

طول ضلعي القائمة ١٢ ، ٥سم

---

٥) لديك القيم الآتية التي تمثل (س، ص، ع) على الترتيب (١، ٢، ٣) ، (-٢، ٢، ٦) ، (٣، ٢، ١) أي منها تمثل حلاً للنظام:-

$س + ص + ع = ٦$

$٢س - ص + ع = ٣$

$٣س = ٢ص - ١$

الحل:- نقوم بالتعويض في المعادلات الثلاثة والتي تحقق المعادلات جميعها معاً تمثل حل للنظام ← (١، ٢، ٣) تحقق النظام

---

٦) لدى رغد ٢٠ قطعة نقدية من الفئات: ٥ قروش ، ١٠ قروش ، ٢٥ قرشاً ، إذا كانت القيمة النقدية لهذه القطع جميعها تساوي ٣٫٨ ديناراً ، وكان عدد القطع النقدية من فئة العشر قروش أقل من مثلي عدد القطع النقدية في فئة الخمس قروش بمقدار ٣ فما عدد القطع النقدية في كل فئة

الحل:-

س : عدد قطع فئة ٥ قروش

ص :- عدد قطع فئة ١٠ قروش

ع :- عدد قطع فئة ٢٥ قرش

س + ص + ع = ٢٠ ——— (١) عدد القطع

٥س + ١٠ص + ٢٥ع = ٣٨٠ ——— (٢) القيمة النقدية للقطع

ص − ٢س = ⁻٢ ——— (٣)

نحذف ع من معادلة (١) ، (٢) :-

بالطرح

س + ص + ع = ٢٠ $\xrightarrow{\times ٢٥}$ ٢٥س + ٢٥ص + ٢٥ع = ٥٠٠

٥س + ١٠ص + ٢٥ع = ٣٨٠ ←——— ٥س + ١٠ص + ٢٥ع = ٣٨٠

٢٠س + ١٥ص = ١٢٠ نقسم على (٥) :-

٤س + ٣ص = ٢٤ ——— (٤)

نأخذ (٣) مع (٤) :-

بالجمع

ص − ٢س = ⁻٢ $\xrightarrow{\times (٢)}$ ٢ص − ٤س = ⁻٤

٤س + ٣ص = ٢٤ ←——— ٤س + ٣ص = ٢٤

٥ص = ٢٠

$\boxed{ص = ٤}$ نعوض في (٣) :

٤ − ٢س = ⁻٢

٢س = ٦ ومنه $\boxed{س = ٣}$

نعوض في معادلة (١) :-

٣ + ٤ + ع = ٢٠ ← ٧ + ع = ٢٠ ومنه $\boxed{ع = ١٣}$

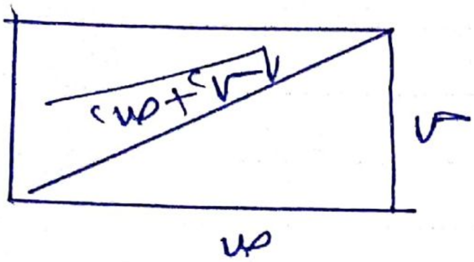
---

٧) اكتب نظاماً مكوناً من معادلتين في متغيرين بحيث تكون النقطة (-٣، ٥) احدى حلول ذلك النظام.

الحل :- س² + ص² = ٣٤

ص² − س² = ١٦

٨) اطار صورة على شكل مستطيل ، محيطه ٤٦ سم وطول قطره ١٧ سم ، فما ابعاده .



الحل :-

٢س + ٢ص = ٤٦ المحيط

س + ص = ٢٣ ——— (١)

√س² + ص² = ١٧ طول القطر "نربع"

س² + ص² = ٢٨٩ ——— (٢)

من معادلة (١) ← ص = ٢٣ − س نعوض في (٢)

(٢٣ − س)² + س² = ٢٨٩

٥٢٩ − ٤٦س + س² + س² = ٢٨٩ نرتب

٢س² − ٤٦س + ٢٤٠ = ٠ نقسم على ٢

س² − ٢٣س + ١٢٠ = ٠

(س − ١٥)(س − ٨) = ٠

س − ١٥ = ٠ ← س = ١٥ ، س − ٨ = ٠ ← س = ٨

لكن س = ١٥ ← ص = ٢٣ − ١٥ = ٨

س = ٨ ← ص = ٢٣ − ٨ = ١٥

ابعاد المستطيل ١٥ ، ٨

---

٩) عدد مكون من ثلاث منازل ، مجموع الارقام للمنازل الثلاث يساوي ٩ ، رقم منزلة العشرات يساوي ثلاثة امثال رقم منزلة المئات ، ورقم منزلة الآحاد يقل عن رقم منزلة المئات بمقدار ١ ما هو العدد

الحل :- س : منزلة الاحاد
ص : منزلة العشرات
ع : منزلة المئات

س + ص + ع = ٩ ——— ①

ص = ٣ع ——— ② ترتيب ص − ٣ع = ٠

س = ع − ١ ——— ③ ترتيب س − ع = −١

ناخذ معادلة ① مع ② لشطب ص :-

س + ص + ع = ٩
ص − ٣ع = ٠ بالطرح س + ٤ع = ٩ ——— ④

ناخذ ④ مع ③ :-

س + ٤ع = ٩
س − ع = −١ بالطرح ٥ع = ١٠ ← $\boxed{ع = ٢}$

نعوضها في ④ :-

س + ٨ = ٩ ومنه $\boxed{س = ١}$

نعوضها في ① :-

١ + ص + ٢ = ٩

٣ + ص = ٩ ومنه ص = ٩ − ٣

$\boxed{ص = ٦}$

العدد ٢٦١