

رياضيات (العلمي) الوحدة (التفاضل) عصام محمد الشيخ

الفصل (الأول) ماجستير رياضيات

معدل التغير

Esam Shikh

0796300625

(عصام محمد الشيخ

(ماجستير رياضيات

رياضيات (العلمي) الوحدة (التفاضل

الفصل (الأول) العنوان (معدل التغير

* مقدار التغير في س

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

حيث

$$s_2 : \text{دلتا س}$$

$$s_2 : \text{القيمة الجديدة}$$

$$s_1 : \text{القيمة القديمة}$$

مثال

جد Δs إذا تغيرت س من ٢٥ إلى ٢٥

الحل:

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

$$= 25 - 25 = 0$$

مثال

جد Δs إذا تغيرت س من ٤ إلى ٣٧

الحل:

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

$$= 37 - 4 = 33$$

مثال

جد Δs إذا تغيرت س من ١ إلى $s_2 = 1 + n$

الحل:

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

$$= (1+n) - 1$$

$$= n$$

$$= \text{م}(\text{ه}+3) - \text{م}(\text{ه})$$

$$= \text{م}(\text{ه}+3) - (\text{م}(\text{ه}) - (\text{ه} - \text{ه}))$$

$$= \text{ه} + \text{ه} + \text{ه} - \text{ه} - \text{ه} - \text{ه} + \text{ه} = 3$$

$$= 3\text{ه} + \text{ه} = 4\text{ه}$$

* مقدار التغير في الاقتران

إذا كان $\text{ص} = \text{م}(\text{س})$ فإن

$$\Delta \text{ص} = \text{م}(\Delta \text{س}) = \text{م}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{م}(\text{س})$$

مثال

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} - \text{س}$ فجد مقدار التغير في الاقتران ق إذا تغيرت س من 3 إلى 4

الحل:

$$\Delta \text{ق} = \text{ق}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{ق}(\text{س})$$

$$= \text{ق}(4) - \text{ق}(3)$$

$$= (4 - 9) - (3 - 9)$$

$$= 7 - 12 = 7$$

مثال

إذا كان $\text{م}(\text{س}) = \text{س} - \text{س} + 1$ جد مقدار التغير في م إذا تغيرت س من 1 إلى 2

الحل:

$$\Delta \text{م} = \text{م}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{م}(\text{س})$$

$$= \text{م}(2) - \text{م}(1)$$

$$= (\text{م}(1) - \text{م}(1) + 1) - (\text{م}(1) - \text{م}(1) + 1)$$

$$= \text{م}(2) - \text{م}(1) + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = 1$$

$$= 1 + 1 - 1 = 1$$

مثال

إذا كان $\text{ص} = \text{م}(\text{س}) = \text{س} - \text{س} + 1$ جد مقدار التغير في الاقتران ص إذا تغيرت س من 1 إلى 3

الحل:

$$\Delta \text{ص} = \text{ص}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{ص}(\text{س})$$

$$= \text{ص}(3) - \text{ص}(1)$$

$$= (3 - 1) - (1 - 1) = 2 - 0 = 2$$

$$= 2 - 0 = 2$$

$$= 2 = 2$$

مثال

إذا كان $\text{م}(\text{س}) = \text{س} - \text{س}$ فجد مقدار التغير في قيمة الاقتران م إذا تغيرت س من 1 إلى 2

الحل:

$$\Delta \text{م} = \text{م}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{م}(\text{س})$$

$$(3 + 2s)(3 - 2s) = \text{صفر}$$

$$3 - 2s < 3 + 2s$$

$$\text{لكن } 3 < 2s \text{ صفر}$$

$$2 = 2s \leftarrow$$

(5 علامات)

٣.١٤ صيفي

إذا كان $f(s) = (3 + 2s)^{-1}$ فجد مقدار

التغير في قيمة الاقتران $f(s)$ إذا تغيرت s من $s_1 = 1$ إلى $s_2 = 2$

$$s \text{ من } s_1 = 1 \text{ إلى } s_2 = 2$$

الحل:

$$\Delta f = f(2) - f(1)$$

$$= \frac{1}{1+1} - \frac{1}{3+2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$$

مثال

تحرك جسم في المستوى الاحداثي على خط مستقيم من النقطة $P(2, 3)$ إلى النقطة $Q(5, 3)$ إذا كانت $s = 5$ أو $s = 7$. فجد احداثي النقطة P .

الحل:

$$s = 5 \text{ أو } s = 7$$

$$5 - 0 = 5$$

$$7 - 0 = 7 \leftarrow \text{أو } 5 - 0 = 5$$

$$5 - 2 = 3$$

$$\text{أو } 7 - 2 = 5 \leftarrow \text{أو } 5 - 2 = 3$$

$$P(2, 3) = (5, 7) \leftarrow$$

مثال

إذا كان $f(s) = (3 + 2s)^{-1}$ وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران f عندما تتغير s من s_1 إلى s_2 يساوي $\frac{1}{3}$ فجد قيمة s_1 حيث $s_2 < 3$ صفر

الحل:

$$\Delta f = f(s_2) - f(s_1)$$

$$= \frac{1}{1+1} - \frac{1}{3+2s_1} = \frac{1}{3} -$$

$$\frac{1}{3+2s_1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3+2s_1} = \frac{2+2}{3}$$

$$\frac{1}{3+2s_1} = \frac{1}{3}$$

$$3 = 3 + 2s_1 \leftarrow$$

$$0 = 2s_1 + 3 - 3$$

* معدل التغير في الاقتران

إذا كان $v = f(s)$ فإن

$$\frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{f(s_2) - f(s_1)}{s_2 - s_1}$$

مثال

إذا كان $f(s) = s^3 - s$ نجد معدل التغير في الاقتران v عندما تتغير s من 1 إلى 2

الحل:

$$\frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$$

$$= \frac{(2^3 - 2) - (1^3 - 1)}{2 - 1}$$

$$= \frac{6 - 0}{1} = 6$$

مثال

إذا كان $v = f(s) = s^2 - 5s$ نجد معدل التغير في الاقتران v إذا تغيرت s من 2 إلى 4

الحل:

$$\frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2}$$

$$= \frac{(4^2 - 5 \cdot 4) - (2^2 - 5 \cdot 2)}{4 - 2}$$

$$= \frac{16 - 20 - 4 + 10}{2}$$

$$= \frac{-4}{2} = -2$$

مثال

إذا كان $f(s) = s^3 - 3s$ نجد معدل التغير في الاقتران v عندما تتغير s من 1 إلى 2

(عصام محمد الشيخ

(ماجستير رياضيات

رياضيات (العلمي) الوحدة (التفاضل

الفصل (الأول) العنوان (معدل التغي

ملاحظة

إذا كان (n) كثير حدود من الدرجة
الأولى فإن معدل التغي يساوي
معامل x مهما كانت $n=1, 2, 3, \dots$

٣.١. صفي

إذا كان (n) كثير حدود من الدرجة
 n وكان معدل تغي n دائماً
يساوي 3 فإن قيمة n تساوي

(٤) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

الحل:

$$n = 1$$

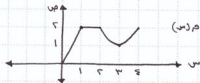
٣.١٥ شتوي

الشكل يمثل منحني (م) حيث $s \in]0, 4[$
جد معدل تغير الاقتران (م) على الفترة $]0, 2[$

الحل:

$$\frac{(م(2) - م(0))}{2 - 0} = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{2 - 1}{2 - 0} = 1$$



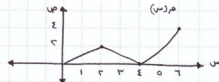
معتدماً = الشكل الذي يمثل منحني الاقتران (م) المتصل على $]4, 0[$ جد معدل تغير الاقتران م في الفترة $]4, 0[$

الحل:

$$\frac{(م(0) - م(4))}{0 - 4} = \frac{3 - 1}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{-1/2} = \frac{2}{-1} = \frac{0 - 4}{4 - 0} = -1$$

٣.١٧ شتوي



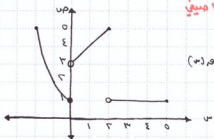
الشكل يمثل (م) حيث $s \in]6, 0[$ جد معدل تغير الاقتران (م) في الفترة $]6, 0[$

الحل:

$$\frac{(م(0) - م(6))}{0 - 6} = \frac{3 - 2}{-6} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{-1/6} = \frac{6}{-1} = \frac{0 - 6}{6 - 0} = -1$$

٣.١٧ صيفي



$$\left. \begin{array}{l} 2 > 3 \geq 2 \\ 4 > 5 \geq 3 \\ 0 > 4 \geq 4 \\ 7 > 5 \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 7 \end{array}$$

$$\frac{\text{م(1)} - \text{م(4)}}{1 - 4} = \frac{3 - 4}{3 - 4}$$

$$\frac{3}{3} = \frac{1 - 0}{3} =$$

مثال

إذا كان $\text{م(س)} = |7 - 3س|$ فجد معدل تغير الاختزان في الفترة $[4, 1]$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} 3 < 5 \\ 3 > 5 \end{array} \right\} \text{م(س)} = \left. \begin{array}{l} 7 - 3س \\ 3س - 7 \end{array} \right\}$$

$$\frac{\text{م(1)} - \text{م(4)}}{1 - 4} = \frac{3 - 4}{3 - 4}$$

$$\frac{(3-7) - (7-12)}{3} =$$

$$\frac{3-7}{3} = \frac{4-7}{3} =$$

مثال

إذا كان $\text{م(س)} = [1 - 3س]$ فجد معدل التغير في الاختزان في الفترة $[0, 3]$

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} 4 > 3 \geq 2 \\ 7 > 5 \geq 4 \end{array} \right\} \text{م(س)} = \left. \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right\}$$

$$\frac{\text{م(3)} - \text{م(0)}}{3 - 0} = \frac{1 - 1}{3 - 0}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1 - 1}{3} =$$

مثال

$$\left. \begin{array}{l} 2 > 3 \geq 0 \\ 7 > 5 \geq 2 \end{array} \right\} \text{م(س)} = \left. \begin{array}{l} |3 - 5س| \\ 1 + 3س \end{array} \right\}$$

فجد معدل تغير الاختزان مع عندما تتغير س من 1 إلى 4

الحل:

$$\left. \begin{array}{l} 10 \geq 3 > 0 \\ 2 > 5 > 10 \end{array} \right\} \text{م(س)} = \left. \begin{array}{l} 3س - 3 \\ 3 - 5س \end{array} \right\}$$

$$\frac{9}{4} - \frac{95}{55} =$$

$$3 - 7 = 3 - 7 =$$

مثال

إذا كان معدل التغير في حد في الفترة [6, 1] يساوي 13 وكان $g(3) = 3 - 5 = 2$ فجد معدل التغير في الاقتران g في الفترة [6, 1]

الحل:

$$13 = \frac{95}{55}$$

$$\frac{g(1) - g(6)}{1 - 6} = \frac{95}{55}$$

$$\frac{((1)g(1) - 2) - ((6)g(6) - 13)}{1 - 6} =$$

$$\frac{2 - 13 - 3 + 6g(6)}{1 - 6} =$$

$$\frac{3 - 13 - 6g(6)}{1 - 6} = \frac{9 - 13}{1 - 6} =$$

$$\frac{95}{55} \times 3 - \frac{1}{0} =$$

$$3 \times 95 - 36 - 2 = 13 \times 2 - 2 =$$

مثال

إذا كان معدل التغير في الاقتران g على الفترة [2, 1] يساوي 5 فجد معدل التغير في الاقتران $g(3) = 3 - 5 = 2$ على الفترة نفسها .

الحل:

$$5 = \frac{95}{55}$$

$$\frac{g(1) - g(2)}{1 - 2} = \frac{95}{55}$$

$$\frac{((1)g(1) - 2) - ((2)g(2) - 17)}{1 - 2} =$$

$$\frac{3 - 17 - 2g(2)}{1 - 2} = \frac{9 - 17}{1 - 2} =$$

$$\frac{95}{55} \times 3 - \frac{13}{4} =$$

$$11 - 10 - 4 = 0 \times 3 - 4 =$$

مثال

إذا كان معدل التغير في الاقتران g في الفترة [4, 1] يساوي 6 وكان $g(3) = 3 - 5 = 2$ فجد معدل التغير في الاقتران g في الفترة [4, 1]

الحل:

$$6 = \frac{95}{55}$$

$$\frac{g(1) - g(4)}{1 - 4} = \frac{95}{55}$$

$$\frac{((1)g(1) - 3) - ((4)g(4) - 12)}{1 - 4} =$$

$$\frac{3 - 12 - 4g(4)}{1 - 4} =$$

3.11 صيفي

إذا كان معدل التغير في الاقتران g على الفترة [7, 2] يساوي 8 فإن معدل التغير للاقتران g هو $g(3) = 3 - 5 = 2$ على الفترة نفسها يساوي

- (P) 0 (ب) 30 (ج) 8 (د) 4

الحل:

$$\frac{g(1) - g(7)}{1 - 7} = \frac{95}{55}$$

$$\frac{((1)g(1) - 1) - ((7)g(7) - 1)}{1 - 7} =$$

$$\frac{8}{3} = 8 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3} = \frac{8}{3} =$$

الحل:

$$\frac{(3) - (9)}{2 - 9} = \frac{5}{-7}$$

$$\frac{(3) - (9) + (5) - (9)}{2 - 9} =$$

$$\frac{(3) - (9)}{2} + \frac{(5) - (9)}{2} =$$

لكن

$$\frac{(3) - (9)}{2} = 3$$

$$\frac{(5) - (9)}{2} = 2$$

$$21 = (3) - (9)$$

$$07 = (5) - (9)$$

$$\frac{21}{2} + \frac{07}{2}$$

$$14 = 7 + 7 =$$

٣.١٣ صيفي

إذا كان معدل تغير $f(x)$ في الفترة $[a, b]$ يساوي ٥ وكان $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$ فإن معدل تغير $f(x)$ في الفترة $[3, 1]$ يساوي

٩ (أ) ٥ (ب) ٥ (ج) ٧ (د) ٩

الحل:

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{f(3) - f(1)}{2}$$

$$\frac{f(3) - f(1)}{2} + \frac{5}{2} =$$

$$7 = 5 + 2 =$$

مثال ٣.١٣ شتوي

إذا كان معدل تغير $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ يساوي ٣ وكان $f(x) = 4x^2 + 3x + 2$ فجد معدل تغير $f(x)$ على الفترة $[4, 1]$

الحل:

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{f(4) - f(1)}{3} =$$

$$\frac{f(4) - f(1)}{3} \times (4 - 1) =$$

$$7 = 3 \times 3 =$$

مثال ٣.١٦ شتوي

إذا كان معدل تغير $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ يساوي ٧ وكان معدل تغيره على الفترة $[9, 5]$ يساوي ١٤ فجد معدل تغير $f(x)$ على الفترة $[9, 3]$

(عصام محمد الشيخ

رياضيات (العلمي) الوحدة (التفاضل)

(ماجستير رياضيات

الفصل (الأول) العنوان) معدل التغير

٣.١٨ شتوي قديم

إذا كان h (س) = $2(3)h^2 + 4h + 1$ وكان

معدل التغير للاختلاف h في الفترة $[1, 3]$

يساوي ٥ فإن معدل تغير h (س) في الفترة

نفسها يساوي

١٠ (أ) ١٤ (ب) ١٨ (ج) ١٣ (د)

الحل:

$$\frac{h(3) - h(1)}{3 - 1} = \frac{\Delta h}{\Delta t}$$

$$\frac{(1 + 4 + (3)2) - (1 + 4 + (1)2)}{3 - 1} =$$

$$\frac{0 - 13}{2} + \frac{(3)2 - (1)2}{2} =$$

$$\frac{-13}{2} + \frac{8 - 1}{2} \times 2 =$$

$$-6.5 + 7 =$$

$$0.5 = 10 =$$

* إيجاد الثابت

٣١٣ شتوي

إذا كان معدل تغير $f(x) = 1 - 3x$ في الفترة $[1, 3]$ يساوي ٤ فإن قيمة الثابت P تساوي

$$P < 8 \quad (ب) \quad 2 < (ج) \quad 8 - 6$$

الحل:

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{8 - 6}{2}$$

$$\frac{(1 - P \cdot 3) - (1 - P)}{2} = 4$$

$$1 + P \cdot 9 - 1 - P = 16$$

$$P = \frac{17}{8} = P \leftarrow P \cdot 8 = 16$$

(عصام محمد الشيخ

رياضيات (العلمي) الوحدة (التفاضل

(ماجستير رياضيات

الفصل (الأول) العنوان (معدل التغير

مثال

صفيحة معينة مربعة الشكل تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها إذا زاد طول ضلعها من 6 سم إلى 7 سم فجد معدل تغير مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول ضلعها .

الحل:

مساحة المربع = (طول الضلع)²

$$\frac{7^2 - 6^2}{7 - 6} = \frac{49 - 36}{1} = 13$$

$$13 \text{ د.س} = \frac{49 - 36}{1} = 13$$

مثال + ٢.١٤ شتوي (٣ علامات)

إذا كان القاطع المار بالنقطتين (١،١) و (٤،٢) الواقعتين على منحنى الاقتران $y = \sqrt{x}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فجد (١)

الحل:

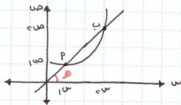
$$\text{ميل القاطع} = \frac{2 - 1}{4 - 1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2 - 1}{4 - 1} = 1 -$$

$$1 - 1 = 0$$

$$0 = 1 + 1 = 2$$

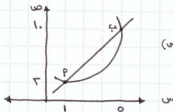
* التفسير الهندسي لمعدل التغير :
« ميل القاطع »



$$\text{ميل القاطع} = \frac{2 - 1}{4 - 1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{(2) - (1)}{(4) - (1)} =$$

مثال



(٣)

معتداً الشكل المزي يمثل منحنى (٣) في الفترة [١،٤] جد ميل العمودي على القاطع \vec{PP} .

$$\text{ميل القاطع} = \frac{2 - 1}{4 - 1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ميل العمودي} = \frac{-1}{\frac{1}{3}} = -3$$

مثال

جد ميل القاطع الواصل بين النقطتين (٢،٣) و (٥،٦) حيث $(٥،٦) \in (٣،٥)$

الحل:

$$\text{ميل القاطع} = \frac{6 - 3}{5 - 2} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\frac{(6 - 3) - (3 - 0)}{3} =$$

$$1 = \frac{3 - 1}{3} = \frac{2}{3}$$

مثال

إذا كان القاطع المار بالنقطتين (١،١) و (٤،٢) يصنع زاوية قياسها 45° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فجد معدل تغير الاقتران في الفترة [١،٤]

الحل:

$$\text{معدل التغير} = \text{ميل القاطع} = \tan 45^\circ = 1$$

* التفسير الفيزيائي لمعدل التغير :

السرعة المتوسطة = $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$$= \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

مثال

قذف جسم رأسياً لأعلى بحيث يكون بعده x بالامتار عن سطح الأرض بعد t ثانية معطى بالعلاقة $x(t) = 5t - 6t^2$ جد السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية $[0, 2]$

(ب) السرعة المتوسطة بدلالة Δx إذا تغيرت t من صفر إلى Δt

الحل :

$$\bar{v} = \frac{f(\Delta t) - f(0)}{\Delta t - 0}$$

$$= \frac{(20 - 120) - (0 - 0)}{2 - 0} =$$

$$= 20 = \frac{20}{2} = \frac{10 - 10}{2} =$$

(ب)
$$\bar{v} = \frac{f(\Delta t) - f(0)}{\Delta t - 0} =$$

$$= \frac{5(\Delta t) - 6(\Delta t)^2 - 0}{\Delta t - 0} =$$

$$= \frac{5(\Delta t) - 6(\Delta t)^2}{\Delta t} =$$

$$= 5 - 6(\Delta t)$$

3.11 شتوي

إذا تحرك جسم في المستوى البياني على منحني الاقتران (x, y) من النقطة $A(3, 4)$ إلى النقطة $B(10, 17)$ وكانت سرعته المتوسطة بين النقطتين A, B هي 5 سم/د فإن $dy/dx =$

(أ) $\sqrt{13}$ (ب) $-\sqrt{13}$ (ج) $-\frac{13}{5}$ (د) $\frac{13}{5}$

مثال

يتحرك جسم وفق العلاقة $x(t) = 3t^2 - 4t$ حيث t الزمن بالتوازي x المسافة بالامتار احسب السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية $[0, 2]$

الحل :

$$\bar{v} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} =$$

$$= \frac{(12 - 8) - (0 - 0)}{2} =$$

$$= 2 = \frac{2}{1} = \frac{2 - 0}{1 - 0} =$$

مثال

يتحرك جسم على خط مستقيم حسب العلاقة $x(t) = 3t^2 - 4t + 6$ حيث x البعد بالامتار t : الزمن بالتوازي احسب السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية $[1, 4]$

الحل :

$$\bar{v} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} =$$

$$= \frac{(48 - 16 + 17 - 3) - (3 + 4 - 3)}{4 - 1} =$$

$$= \frac{19 - 0}{3} =$$

$$= \frac{19}{3} =$$

(عصام محمد الشيخ

رياضيات (العلمي) الوحدة (المتفاضل

(ماجستير رياضيات

الفصل (الأول) العنوان (معدل التغير

الحل:

$$\frac{3 - (0) = 3}{2 - 0} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3 + (0) = 3}{2 - 0} = \frac{3}{2}$$

$$3 + (0) = 3$$

$$13 - (0) = 13$$

٣١٣ صيفي

يتحرك جسم على خط مستقيم حسب
العلاقة $v(t) = 4t^2 - 3t - 1$
ما السرعة المتوسطة للجسم في الفترة
الزمنية $[3, 1]$ ؟

(ب) $8 - 3$ أ

(ب) $8 - 3$ أ

(د) $14 - 3$ أ

(ج) $14 - 3$ أ

الحل:

$$\frac{v(3) - v(1)}{3 - 1} = \frac{v(3) - v(1)}{2}$$

$$\frac{(12 - 9 - 3) - (1 - 3 - 1)}{2} =$$

$$14 = \frac{12 - 9}{2} = \frac{1 - 3}{2} =$$