مركز السبيل الثقافي

الفرع الأول: الزرقاء - وسط البلد - شارع الملك عبدالله - هاتف: ٠٧٨٨٥٣٠٨٠٢ - ٠٧٨٨٢٥٠٥٥٥

3.000

الرياضيات

توجيهي الفرع العلمي و الصناعي - الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الرابعة:

التكامل وتطبيقاته

2019-20

إعداد المعلم :

ناجح الجمزاوي

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١

الصف الثاني عشر

الفرعين العلمي/الوحدة الرابعة

التكامل وتطبيقاتة

١- معكوس المشتقة

٢- التكامل الغير محدود

٣- التكامل المحدود

٤- مشتقة وتكامل اقتران اللوغريتم الطبيعي

٥- مشتقة وتكامل الاقتران الاسي

٦- التكامل بالتعويض

٧- التكامل بالاجزاء

٨- التكامل بالكسور الجزئية

٩- المعادلات التفاضلية

١٠- المساحة

١١- ورقة عمل على كل درس مع الاجابات النموذجية

ناجح الجمزاوي

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١ ٠٧٨٨٦٥٦٠٥٧

الدرس الأول

معكوس المشتقة

تعريف:

اذا كان ق اقتراناً متصلاً على الفترة [أ، ب] فإن م(س) يسمى معكوساً لمشتقة الاقتران ق(س) اذا كان

$$م'(س) = ق(س)$$ لكل س ∈ (أ، ب)

ويسمى معكوس المشتقة بالتكامل غير المحدود ويرمز له بالرمز

$\int ق(س) \cdot دس$ ويقرأ تكامل ق(س) دس

والصورة العامة لقاعدة معكوس المشتقة هي

$م(س) + جـ$ حيث جـ عدد ثابت

وبالرموز فإن

$$م(س) = \int ق(س) \cdot دس$$ أو

$$\int ق(س) \cdot دس = م(س) + جـ$$

مثال للتدريب

ماهو معكوس مشتقة الاقتران $ق(س) = ٢س$

الحل

$س^{٢}$ ، $س^{٢} + ١$ ، $س^{٢} + \dots$

بشكل عام الجواب $س^{٢} + جـ$

مثال ①

بين فيما اذا كان م(س) معكوس المشتقة ق(س) فيما يلي

أ- $م(س) = س^{٣} + ٤س$

$ق(س) = ٣س^{٢} + ٤$

الحل

ق(س) متصل على مجاله كثير حدود

$م'(س) = ٣س^{٢} + ٤ = ق(س)$

وبما ان $م'(س) = ق(س)$ ،

فان م(س) معكوس مشتقة ق(س)

٢- $م(س) = \sqrt{س^{٢} + ٦س}$

$$ق(س) = \frac{س + ٣}{\sqrt{س^{٢} + ٦س}}$$

يتبع ←

الحل

ق(س) متصل على مجاله

$$م'(س) = \frac{٢س + ٦}{٢\sqrt{س^{٢} + ٦س}}$$

$$= \frac{\cancel{٢}(س + ٣)}{\cancel{٢}\sqrt{س^{٢} + ٦س}} = \frac{س + ٣}{\sqrt{س^{٢} + ٦س}}$$

$$= ق(س)$$

وبما أن $م'(س) = ق(س)$

فإن م(س) معكوس مشتقة ق(س)

٣- $م(س) = جا^{٣}٢س + س^{٢} - ١$

$ق(س) = ٣ جا^{٢}٢س \times جتا٢س \times ٢ + ٢س$

الحل

ق(س) متصل على مجاله

$$م'(س) = ٣ جا^{٢}٢س \times جتا٢س \times ٢ + ٢س$$

$$= ٦ جا^{٢}٢س جتا٢س + ٢س$$

$$= ق(س)$$

← م(س) معكوس لمشتقة الأقتران ق(س)

مثال ②

جد معكوس مشتقة الأقتران

$ق(س) = ٣س^{٢} + جاس - ٤س + ٧$

الحل

$$م(س) = س^{٣} - جتاس - ٢س^{٢} + ٧س + جـ$$

ملاحظة هامة

نلاحظ من الأمثلة السابقة

① أن هناك عدد غير نهائي من معكوس المشتقة للأقتران ق(س)

② الفرق بين اي معكوسين لمشتقة نفس الأقتران يساوي دائماً مقداراً ثابتاً

فمثلاً

$ق(س) = ٢س$

$م_{١}(س) = س^{٢} + ٥$

$م_{٢}(س) = س^{٢} + ٩$ فلاحظ أن

$$م_{٢}(س) - م_{١}(س) = \cancel{س^{٢}} + ٩ - \cancel{س^{٢}} - ٥$$

$$= ٤$$

الفرق بينهما ثابت

مثال ③

اذا كان $م_{١}$، $م_{٢}$ معكوسين لمشتقة الأقتران ق(س) المتصل على ح وكان $هـ(س) = م_{١}(س) - م_{٢}(س)$ فاوجد هـ'(س)

← يتبع

الحل

ه(س) = ثابت لأن الفرق بين أي معكوسين يساوي ثابت

ه(س) = جـ ⟸ ه'(س) = صفر

مثال ④

اذا كان م(س) معكوس مشتقة ق(س) المتصل على مجاله حيث م(س) = س^{٣} + أس^{٢} − ١ وكان ق(٢) = ٢٤ فاوجد أ ؟

أ) ٢٤ ب) −٣ جـ) ٣ د) ١

الحل

م'(س) = ق(س)

= ٣س^{٢} + ٢أس

ق(٢) = ١٢ + ٤أ = ٢٤

٤أ = ١٢ ← أ = ٣

الجواب (جـ)

مثال ⑤

اذا كان م(س) معكوس مشتقة ق(س) المتصل على مجاله حيث م(س) = س^{٢} + أس^{٣} − ٧ وكان ق'(٢) = ٥ جد الثابت أ

أ) ٥ ب) ٣ جـ) ٤ د) $\frac{١}{٤}$

الحل م'(س) = ق(س)

ق(س) = ٢س + ٣أس^{٢}

ق'(س) = ٢ + ٦أس

ق'(٢) = ٢ + ١٢أ = ٥

⟸ ١٢أ = ٣ ⟸ أ = $\frac{١}{٤}$

الاجابة (د)

مثال ⑥

اذا كان ∫ ق(س) ءس = س^{٤} + ٥س + ٣ وكان م(١) = ٧ اوجد م'(٢)

أ) ٥ ب) ٣٥ جـ) ٣٧ د) ٢٧

الحل

باشتقاق الطرفين

ق(س) = ٤س^{٣} + ٥

م'(س) = ق(س) = ٤س^{٣} + ٥

م'(٢) = ٤ × ٨ + ٥ = ٣٧ (جـ)

مثال ⑦

اذا كان ∫ ق'(س) ءس = ٣س^{٢} − ٤س + ٥ وكان ق(٢) = ٧ جد قيمة ق(١)

أ) ٢ ب) −٢ جـ) ١٠ د) ٧

الحل

∫ ق'(س) ءس = ٣س^{٢} − ٤س + ٥

ق(س) + جـ = ٣س^{٢} − ٤س + ٥

ق(٢) + جـ = ٣(٢)^{٢} − ٤ × ٢ + ٥

٧ + جـ = ١٢ − ٨ + ٥ = ٩

جـ = ٢

⟸ ق(س) + ٢ = ٣س^{٢} − ٤س + ٥

ق(١) + ٢ = ٣ − ٤ + ٥ ⟸ ق(١) = ٢ (أ)

ملاحظة هامة

① ∫ قَ(س) . ءس = ق(س) + جـ

② $\frac{ء}{ءس}$ ∫ قَ(س) . ءس = قَ(س)

مثال ⑧

اذا كان ∫ ق(س) . ءس = س^{٤} + س + ٤
اوجد ق(١) ، قَ(١) ؟

الحل

نشتق الطرفين
ق(س) = ٤ س^{٣} + ١
ق(١) = ٤(١)^{٣} + ١ = ٥
قَ(س) = ١٢ س^{٢}
قَ(١) = ١٢(١)^{٢} = ١٢

مثال ⑨

اذا كان
∫ (قَ(س) + ٢س) . ءس
= س^{٣} + ب س^{٢} + ١
وكان قَ(١) = ٥ ، ق(٢) = ٧
اوجد ب ، ق(٠) ، قَ(٤)

الحل

ق(س) + س^{٢} = س^{٣} + ب س^{٢} + ١ + جـ
ق(٢) + ٢^{٢} = ٢^{٣} + ب(٢)^{٢} + ١ + جـ
٧ + ٤ = ٨ + ٤ب + ١ + جـ
٤ب + جـ = ١١ - ٩ = ٢
٤ب + جـ = ٢ --- ①
قَ(س) + ٢س = ٣س^{٢} + ٢ب س
قَ(١) + ٢×١ = ٣(١)^{٢} + ٢ب×١
٥ + ٢ = ٣ + ٢ب
٢ب = ٤ ⟵ ب = ٢
بالتعويض ⟵ جـ = -٦
ق(٠) + (٠)^{٢} = (٠)^{٣} + ب(٠)^{٢} + ١ - ٦
ق(٠) = -٥
قَ(٤) + ٢(٤) = ٣(٤)^{٢} + ٢×٢×٤
قَ(٤) = ٥٦

مثال ⑩

اذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثالثه بحيث ان قَ(س) = ٣س^{٢} - ٢ وكانت النقطة (٠ ، ١) تقع على منحناة فجد قاعدة الاقتران ق

الحل

بأخذ تكامل الطرفين
ق(س) = س^{٣} - ٢س + جـ
لكن ق(٠) = ١
⟵ جـ = ١
ق(س) = س^{٣} - ٢س + ١

الدرس الثاني

التكامل غير المحدود

التكامل هو عملية عكسية للتفاضل

$\int ٢س \cdot دس = س^{٢} + جـ$

لأن مشتقة $(س^{٢} + جـ)$ تساوي ٢س

$\int ٣س^{٢} \cdot دس = س^{٣} + جـ$

لأن مشتقة $(س^{٣} + جـ) = ٣س^{٢}$

$\int جاس \cdot دس = -\ جتاس + جـ$

لأن مشتقة $(-جتاس + جـ) = جاس$

الجزء الأول

قواعد التكامل غير المحدود

قاعدة ①

$\int أ \cdot دس = أس + جـ$

حيث أ ثابت

$\int ثابت = ثابت \times متغير + جـ$

أمثلة

١. $\int ٧\ دس = ٧س + جـ$

٢. $\int \frac{١}{٤} \cdot دس = \frac{١}{٤}س + جـ$

٣. $\int \pi^{٢} \cdot دس = \pi^{٢}س + جـ$

٤. $\int دن = ن + جـ$

قاعدة ②

$$\int س^{ن} \cdot دس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + جـ$$

حيث ن ∈ ح ، ن ≠ -١

أمثلة

$\int س^{٣} \cdot دس = \frac{س^{٤}}{٤} + جـ$

$\int س \cdot دس = \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$

$\int س^{-٥}\ دس = \frac{س^{-٤}}{-٤} + جـ$

$\int س^{\frac{٤}{٣}}\ دس = \frac{٣}{٧}\ س^{\frac{٧}{٣}} + جـ$

$\int س^{\frac{-٣}{٢}}\ دس = \frac{-٢}{١}\ س^{\frac{-١}{٢}} + جـ$

ملاحظة

تذكران $\frac{١}{س^{ن}} = س^{-ن}$

$\sqrt[ن]{س^{م}} = س^{\frac{م}{ن}}$

أمثلة

١) $\int \frac{١}{س^{٥}} = \int س^{٥} دس = \frac{س^{٦}}{٦} + ج$

٢) $\int \frac{١}{س^{٧}} دس = \int س^{-٧} دس = \frac{س^{-٦}}{-٦} + ج$

٣) $\int \sqrt[٣]{س^{٤}} دس = \int س^{\frac{٤}{٣}} . دس$

$= \frac{٣}{٧} س^{\frac{٧}{٣}} + ج$

٤) $\int \sqrt{س} دس = \int س^{\frac{١}{٢}} دس = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ج$

٥) $\int \frac{١}{\sqrt{س}} دس = \int س^{-\frac{١}{٢}} دس = ٢ س^{\frac{١}{٢}} + ج$

٦) $\int \frac{١}{\sqrt[٥]{س^{٣}}} دس = \int \frac{١}{س^{\frac{٣}{٥}}}$

$= \int س^{-\frac{٣}{٥}} دس = \frac{٥}{٢} س^{\frac{٢}{٥}} + ج$

٧) $\int س \sqrt{س} دس = \int س \times س^{\frac{١}{٢}} دس$

$= \int س^{\frac{٣}{٢}} دس = \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + ج$

٨) $\int \frac{س^{٣} \sqrt{س}}{س} دس = \int س^{٢} \sqrt{س} دس$

$= \int س^{٢} س^{\frac{١}{٢}} دس = \int س^{\frac{٥}{٢}} دس$

$= \frac{٢}{٧} س^{\frac{٧}{٢}} + ج$

بشكل عام

$$\int س^{\frac{م}{ن}} دس = \frac{ن}{م+ن} س^{\frac{م+ن}{ن}} + ج$$

تذكر أن

في الأمثلة السابقة يمكن ان يكون المطلوب جد معكوس مشتقة الاقتران ق(س) م(س) نجري التكامل

نتائج هامة

١. $\int ق''(س) دس = ق'(س) + ج$

٢. $\int ق'(س) . دس = ق(س) + ج$

٣. $\int ق(س) . دس = م(س) + ج$

قاعدة ③

$$\int أ\,ق(س)\,ءس = أ \int ق(س)\,ءس$$

أي ان تكامل ثابت × اقتران
= يبقى الثابت × تكامل الأقتران

أمثلة

١. $\int ٣س^{٤}\,ءس = \frac{٣}{٥}س^{٥} + جـ$

٢. $\int \frac{٥}{٣}س^{٥}\,ءس = \frac{٥}{٣} \times \frac{س^{٥}}{٥} + جـ$

٣. $\int ٤\sqrt[٥]{س^{٢}}\,ءس = ٤\int س^{\frac{٢}{٥}}\,ءس$

$= ٤ \times \frac{٥}{٧}س^{\frac{٧}{٥}} + جـ = \frac{٢٠}{٧}س^{\frac{٧}{٥}} + جـ$

٤. $\int \frac{٣}{س^{٨}}\,ءس = \int ٣س^{-٨}\,ءس$

$= \frac{-٣}{٧}س^{-٧} + جـ$

قاعدة ④

$$\int (ق(س) \pm هـ(س))\,ءس = \int ق(س)\,ءس \pm \int هـ(س)\,ءس$$

يوزع التكامل على الجمع والطرح ولا يوزع على الضرب والقسمة .

أمثلة

① $\int (٤س^{٢} + ٢س + ٥)\,ءس = \frac{٤}{٣}س^{٣} + \frac{٢س^{٢}}{٢} + ٥س + جـ$

② $\int (\sqrt[٣]{س} + \sqrt{س})\,ءس = \int (س^{\frac{١}{٣}} + س^{\frac{١}{٢}})\,ءس$

$= \frac{٣}{٤}س^{\frac{٤}{٣}} + \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

③ $\int (س^{٦} + \frac{١}{س^{٣}} - \sqrt[٥]{س^{٢}})\,ءس$

$= \int (س^{٦} + س^{-٣} - س^{\frac{٢}{٥}})\,ءس$

$= \frac{س^{٧}}{٧} + \frac{س^{-٢}}{-٢} - \frac{٥}{٧}س^{\frac{٧}{٥}} + جـ$

④ $\int (س^{٢} + ٢س)^{٢}\,ءس$ فك القوس

$= \int (س^{٤} + ٤س^{٣} + ٤س^{٢})\,ءس$

$= \frac{س^{٥}}{٥} + \frac{٤س^{٤}}{٤} + \frac{٤س^{٣}}{٣} + جـ$

⑤ $\int س^{٣}(س+٣)\,ءس = \int (س^{٤} + ٣س^{٣})\,ءس$

$= \frac{س^{٥}}{٥} + \frac{٣س^{٤}}{٤} + جـ$

⑥ $\int \frac{س^{٢} + ٤س + ٣}{س+١}\,ءس = \int \frac{\cancel{(س+١)}(س+٣)}{\cancel{س+١}}\,ءس$

$= \int (س+٣)\,ءس = \frac{س^{٢}}{٢} + ٣س + جـ$

⑦ $\int \frac{س^{٣} + ٥س^{٢} - ٤}{س^{٢}}\,ءس$

$= \int \frac{س^{٣}}{س^{٢}} + \frac{٥س^{٢}}{س^{٢}} - \frac{٤}{س^{٢}}\,ءس = \int (س + ٥ - ٤س^{-٢})\,ءس$

$= \frac{س^{٢}}{٢} + ٥س - \frac{٤س^{-١}}{-١} + جـ$

⑧ $\int \frac{س-١}{\sqrt[٣]{س}}\,ءس = \int \frac{س-١}{س^{\frac{١}{٣}}}\,ءس$

$= \int (\frac{س}{س^{\frac{١}{٣}}} - \frac{١}{س^{\frac{١}{٣}}})\,ءس$

$= \int (س^{\frac{٢}{٣}} - س^{\frac{-١}{٣}})\,ءس = \frac{٣}{٥}س^{\frac{٥}{٣}} - \frac{٣}{٢}س^{\frac{٢}{٣}} + جـ$

⑨ $\int س^{٥}(\frac{٢س+١}{س})^{٥}\,ءس$

$= \int \cancel{س^{٥}}\frac{(٢س+١)^{٥}}{\cancel{س^{٥}}}\,ءس$

$= \int (٢س+١)^{٥}\,ءس = \frac{(٢س+١)^{٦}}{١٢} + جـ$

ملاحظة هامة

$$\int (أس+ب)^{ن}\,دس = \frac{(أس+ب)^{ن+١}}{أ(ن+١)} + جـ$$

مثال $\int (٤س+٧)^{٧}\,دس = \frac{(٤س+٧)^{٨}}{٣٢} + جـ$

مثال $\int (-٣س+٦)^{-٥}\,دس = \frac{(-٣س+٦)^{-٤}}{١٢} + جـ$

---

⑩ $\int س^{٦}\left(١-\frac{٢}{س}\right)^{٦}\,دس$

الحل $= \int س^{٦}\left(\frac{س-٢}{س}\right)^{٦}\,دس$

$= \int \cancel{س^{٦}}\,\frac{(س-٢)^{٦}}{\cancel{س^{٦}}}\,دس = \int (س-٢)^{٦}\,دس$

$= \frac{(س-٢)^{٧}}{٧} + جـ$

---

⑪ $\int \frac{س^{\frac{٣}{٢}}-٢٧}{\sqrt{س}-٣}\,دس$

$= \int \frac{\left(\cancel{س^{\frac{١}{٢}}-٣}\right)\left((س^{\frac{١}{٢}})^{٢}+٣س^{\frac{١}{٢}}+٩\right)}{\cancel{\sqrt{س}-٣}}\,دس$

$= \int (س+٣س^{\frac{١}{٢}}+٩)\,دس = \frac{س^{٢}}{٢} + ٣\times\frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + ٩س + جـ$

---

⑫ $\int \frac{٤}{\sqrt[٣]{٦س+٥}}\,دس$

الحل $= \int ٤(٦س+٥)^{-\frac{١}{٣}}\,دس$

$= \frac{٤(٦س+٥)^{\frac{٢}{٣}}}{٦\times\frac{٢}{٣}} = \frac{\cancel{٤}(٦س+٥)^{\frac{٢}{٣}}}{\cancel{٤}} + جـ$

$= (٦س+٥)^{\frac{٢}{٣}} + جـ$

---

⑬ $\int (٧-س)(س-٧)^{٨}\,دس$

الحل $= \int (٧-س)(٧-س)^{٨}\,دس$

$= \int (٧-س)^{٩}\,دس = \frac{(٧-س)^{١٠}}{-١٠} + جـ$

---

⑭ $\int \frac{٧س}{\sqrt{٨س+١}+\sqrt{٩س+١}}\,دس$

$\int \frac{٧س}{\sqrt{٨س+١}+\sqrt{٩س+١}} \times \frac{\sqrt{٨س+١}-\sqrt{٩س+١}}{\sqrt{٨س+١}-\sqrt{٩س+١}}$

$= \int \frac{٧س\left(\sqrt{٨س+١}-\sqrt{٩س+١}\right)}{٨س\cancel{+١}-٩س\cancel{-١}}\,دس$

$= \int \frac{٧\cancel{س}\left(\sqrt{٨س+١}-\sqrt{٩س+١}\right)}{\cancel{-س}}\,دس$

$= -\int ٧(٨س+١)^{\frac{١}{٢}}-(٩س+١)^{\frac{١}{٢}}\,دس$

$= -٧\left(\frac{(٨س+١)^{\frac{٣}{٢}}}{٨\times\frac{٣}{٢}} - \frac{(٩س+١)^{\frac{٣}{٢}}}{٩\times\frac{٣}{٢}}\right) + جـ$

---

⑮ $\int س\sqrt[٥]{\frac{٢}{س^{٥}}-\frac{٣}{س^{٤}}}\,دس$

الحل $\int س\sqrt[٥]{\frac{٢-٣س}{س^{٥}}} = \int \cancel{س}\,\frac{\sqrt[٥]{٢-٣س}}{\cancel{س}}$

$= \int (٢-٣س)^{\frac{١}{٥}}\,دس = \frac{٥}{٦}\times\frac{(٢-٣س)^{\frac{٦}{٥}}}{٢} + جـ$

---

⑯ $\int (س+١)(س^{٢}+٢س+١)^{٨}\,دس$

$= \int (س+١)\left((س+١)^{٢}\right)^{٨}\,دس$

$= \int (س+١)(س+١)^{١٦}\,دس$

$= \int (س+١)^{١٧}\,دس = \frac{(س+١)^{١٨}}{١٨} + جـ$

الجزء الثاني

تكامل الاقترانات المثلثية

متطابقات هامة جداً للتكامل

① حا^{2}س = $\frac{1}{2}$ (١ − جتا ٢س)

② جتا^{2}س = $\frac{1}{2}$ (١ + جتا ٢س)

③ حا^{2}س + جتا^{2}س = ١

④ ظا^{2}س = قا^{2}س − ١

⑤ ظتا^{2}س = قتا^{2}س − ١

⑥ حا ٢س = ٢ حاس جتاس

⑦ جتا ٢س = جتا^{2}س − حا^{2}س
= ١ − ٢حا^{2}س
= ٢جتا^{2}س − ١

⑧ جتام جتان = $\frac{1}{2}$ (جتا(م+ن) + جتا(م−ن))

⑨ حام حان = $\frac{1}{2}$ (جتا(م−ن) − جتا(م+ن))

⑩ حام جتان = $\frac{1}{2}$ (حا(م+ن) + حا(م−ن))

⑪ حاس جتاس = $\frac{1}{2}$ حا ٢س

تكامل الاقترانات المثلثية

① $\int$ حاس ءس = − جتاس + جـ

② $\int$ جتاس ءس = حاس + جـ

③ $\int$ قا^{2}س ءس = ظاس + جـ

④ $\int$ قتا^{2}س ءس = − ظتاس + جـ

⑤ $\int$ قاس ظاس ءس = قاس + جـ

⑥ $\int$ قتاس ظتاس ءس = − قتاس + جـ

ملاحظة هامة

اذا كانت الزاوية خطية فاننا نقسم على معامل س أي أن

$\int$ حا(م س + ن) ءس

= $\frac{-\text{جتا}(\text{م س} + \text{ن})}{\text{م}}$ + جـ

مثال ①

١. ∫ جا $\frac{٣}{٤}$ س د س = $\frac{-\text{جتا}\,\frac{٣}{٤}\,\text{س}}{\frac{٣}{٤}}$ + جـ

٢. ∫ قا^{٢}(٣س - ١) د س = $\frac{١}{٣}$ ظا(٣س - ١) + جـ

٣. ∫ قتا^{٢} $\left(\frac{\text{٤س + ٢}}{٣}\right)$ د س =

= $-\frac{٣}{٤}$ ظتا $\left(\frac{\text{٤س + ٢}}{٣}\right)$ + جـ

٤. ∫ قا ٦س ظا ٦س د س = $\frac{١}{٦}$ قا ٦س + جـ

مثال ②

جد قيمة التكاملات التاليه

① ∫ (٣ جاس + ٢س) د س = -٣ جتاس + س^{٢} + جـ

② ∫ (٣ + قاس ظاس) د س = ٣س + قاس + جـ

③ ∫ (قتا^{٢}س - ٧ قتاس ظتاس) د س

= - ظتاس + ٧ قتاس + جـ

④ ∫ (٢ قا^{٢}س - جاهـ) د س   هـ ثابت

= ٢ ظاس - جاهـ س + جـ

⑤ ∫ ٢ جا٣س د س = $\frac{-٢\,\text{جتا٣س}}{٣}$ + جـ

⑥ ∫ قا^{٢}($\frac{\text{س}}{٣}$ - ١) د س = ٣ ظا($\frac{\text{س}}{٣}$ - ١) + جـ

⑦ ∫ قا(أس + ب) ظا(أس + ب) د س

= $\frac{١}{أ}$ قا(أس + ب) + جـ

⑧ ∫ جا^{٢}س د س = ∫ $\frac{١}{٢}$ (١ - جتا٢س) د س

= $\frac{١}{٢}$ (س - $\frac{١}{٢}$ جا٢س) + جـ

⑨ ∫ جا^{٢}٣س . د س

= ∫ $\frac{١}{٢}$ (١ - جتا٦س) د س = $\frac{١}{٢}$ (س - $\frac{١}{٦}$ جا٦س) +

⑩ ∫ جتا^{٢}س د س = ∫ $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا٢س) د س

= $\frac{١}{٢}$ (س + $\frac{١}{٢}$ جا٢س) + جـ

⑪ ∫ جتا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$ د س = ∫ $\frac{١}{٢}$ (١ + جتاس) د س

= $\frac{١}{٢}$ (س + جاس) + جـ

⑫ ∫ (٣ + ظا^{٢}س) د س

= ∫ (٣ + قا^{٢}س - ١) د س

= ∫ (٢ + قا^{٢}س) د س = ٢س + ظاس + جـ

⑬ ∫ ظا^{٢}٧س د س = ∫ (قا^{٢}٧س - ١) د س

= $\frac{١}{٧}$ ظا٧س - س + جـ

⑭ ∫ ظتا^{٢}س د س = ∫ (قتا^{٢}س - ١) د س

= - ظتاس - س + جـ

⑮ ∫ (٣ + ٣ ظا^{٢} س) ء س = ٣ ∫ (١ + ظا^{٢} س)

= ∫ ٣ قا^{٢} س ء س = ٣ ظا س + جـ

⑯ ∫ (قا^{٢} س − ظا^{٢} س) ء س = ∫ ١ . ء س

= س + جـ

⑰ ∫ (٤ جتا^{٢} س − ٢) ء س

= ∫ (٤ × $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (١ + جتا ٢س) − ٢) ء س

= ∫ ($\cancel{\text{٢}}$ + ٢ جتا ٢س $\cancel{\text{− ٢}}$) ء س

= $\frac{\text{٢ جا ٢س}}{\text{٢}}$ + جـ = جا ٢س + جـ

⑱ ∫ (٣ − ٦ جا^{٢} $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$) ء س

= ∫ (٣ − ٦ ($\frac{\text{١}}{\text{٢}}$) (١ − جتا س)) ء س

= ∫ ($\cancel{\text{٣}}$ − $\cancel{\text{٣}}$ + ٣ جتا س) ء س

= ∫ ٣ جتا س ء س = ٣ جا س + جـ

ملاحظة هامة

قا س = $\frac{\text{١}}{\text{جتا س}}$ ← جتا س = $\frac{\text{١}}{\text{قا س}}$

قتا س = $\frac{\text{١}}{\text{جا س}}$ ← جا س = $\frac{\text{١}}{\text{قتا س}}$

ظتا س = $\frac{\text{١}}{\text{ظا س}}$ ← ظا س = $\frac{\text{١}}{\text{ظتا س}}$

ظا س = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ ، ظتا س = $\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$

مثال ③

جد قيمة التكاملات التالية

① ∫ $\frac{\text{٢}}{\text{قا ٤س}}$ ء س = ∫ ٢ جتا ٤س ء س

= $\frac{\text{٢}}{\text{٤}}$ جا ٤س + جـ

② ∫ $\frac{\text{٥}}{\text{جتا ٣س ظتا ٣س}}$ ء س

أ) $\frac{\text{٣}}{\text{٥}}$ قا ٣س + جـ   ب) $-\frac{\text{٣}}{\text{٥}}$ قا ٣س + جـ

جـ) $\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$ قا ٣س + جـ   د) $-\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$ قا ٣س + جـ

الحل = ∫ ٥ قا ٣س ظا ٣س ء س

= $\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$ قا ٣س + جـ الجواب (جـ)

③ ∫ $\frac{\text{ظا س}}{\text{جتا س}}$ ء س =

أ) قتا س + جـ   ب) قا س + جـ

جـ) − قتا س + جـ   د) قتا س + جـ

الحل = ∫ قا س ظا س = قا س + جـ

(ب)

④ ∫ ظتا س جا س . ء س يساوي

أ) جا س + جـ   ب) جتا س + جـ

جـ) − جتا س + جـ   د) − جا س + جـ

الحل = ∫ $\frac{\text{جتا س}}{\cancel{\text{جا س}}}$ × $\cancel{\text{جا س}}$ ء س

= ∫ جتا س ء س = جا س + جـ (أ)

⑤ $\int \frac{٥}{جا^٢ س} دس$ يساوي

أ) ظتاس + جـ   ب) -٥ ظتاس + جـ

جـ) -ظتاس + جـ   د) ٥ ظتاس + جـ

الحل = $\int ٥ \, قتا^٢ س \, دس$

= -٥ ظتاس + جـ (ب)

⑥ $\int \frac{١ + ٢ جاس + جا^٢ س}{جتا^٢ س} . دس$

بتوزيع البسط على المقام

$= \int \left(\frac{١}{جتا^٢ س} + \frac{٢ جاس}{جتا^٢ س} + \frac{جا^٢ س}{جتا^٢ س}\right) دس$

$= \int (قا^٢ س + ٢ قاس ظاس + ظا^٢ س) دس$

$= \int قا^٢ س + ٢ قاس ظاس + قا^٢ س - ١$

$= \int ٢ قا^٢ س + ٢ قاس ظاس - ١$

= ٢ ظاس + ٢ قاس - س + جـ

⑦ $\int \frac{دس}{جتا^٢ س - ١} = \int \frac{دس}{-جا^٢ س}$

$= -\int قتا^٢ س \, دس$

= ظتاس + جـ

مثال ④

جد قيمة التكاملات التالية

① $\int (٢ جا^٢ س + ٢ جتا^٢ س) دس$ يساوي

أ) جتاس + جـ   ب) جاس + جـ

جـ) ٢س + جـ   د) -٢س + جـ

الحل

$\int ٢ (جا^٢ س + جتا^٢ س) دس$

$٢ \int ١ . دس$ = ٢س + جـ (جـ)

② قيمة التكامل

$\int (٥ - ٥ جتا^٢ ٣س) دس =$

أ) $\frac{٥}{٢} (س + \frac{١}{٦} جا٦س) + جـ$

ب) $\frac{٥}{٢} (س - \frac{١}{٦} جا٦س) + جـ$

جـ) $-\frac{٥}{٢} (س + \frac{١}{٦} جا٦س) + جـ$

د) $-\frac{٥}{٢} (س - \frac{١}{٦} جا٦س) + جـ$

الحل = $\int ٥ (١ - جتا^٢ ٣س) دس$

$= \int ٥ \, جا^٢ ٣س \, دس$

$= ٥ \int \frac{١}{٢} (١ - جتا٦س) دس$

$= \frac{٥}{٢} (س - \frac{جا٦س}{٦}) + جـ$ (ب)

③ $\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظا}^{٢}\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس} =$

أ) $٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$ ب) $٢\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$

جـ) $-٢\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$ د) $-٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

الحل

متطابقه

$= \int \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس} = \int \text{س}^{-\frac{١}{٢}}\,\text{دس}$

$= ٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ} = ٢\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$ (ب)

④ $\int \frac{١ - \text{حا}^{٣}\text{س}}{١ - \text{حاس}}\,\text{دس}$

الحل $\int \frac{\cancel{(١ - \text{حاس})}(١ + \text{حاس} + \text{حا}^{٢}\text{س})}{\cancel{١ - \text{حاس}}}\,\text{دس}$

$= \int (١ + \text{حاس} + \text{حا}^{٢}\text{س})\,\text{دس}$

$= \int ١ + \text{حاس} + \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا}٢\text{س})\,\text{دس}$

$= \text{س} - \text{جتاس} + \frac{١}{٢}(\text{س} - \frac{\text{حا}٢\text{س}}{٢}) + \text{جـ}$

⑤ $\int \text{حا}^{٤}\text{س}\,\text{دس}$

الحل $\int (\text{حا}^{٢}\text{س})^{٢}\,\text{دس} = \int (\frac{١}{٢}(١ - \text{جتا}٢\text{س}))^{٢}$

$= \int \frac{١}{٤}(١ - ٢\text{جتا}٢\text{س} + \text{جتا}^{٢}٢\text{س})\,\text{دس}$

$= \int \frac{١}{٤}(١ - ٢\text{جتا}٢\text{س} + \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا}٤\text{س})\,\text{دس}$

$= \frac{١}{٤}(\text{س} - ٢\frac{\text{حا}٢\text{س}}{٢} + \frac{١}{٢}(\text{س} + \frac{\text{حا}٤\text{س}}{٤}) + \text{جـ}$

⑥ $\int \frac{١ + \text{حا}٢\text{س}}{\text{حاس} + \text{جتاس}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{حا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س} + ٢\text{حاس جتاس}}{\text{حاس} + \text{جتاس}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{(\text{حاس} + \text{جتاس})^{٢}}{\text{حاس} + \text{جتاس}}\,\text{دس}$

$= \int (\text{حاس} + \text{جتاس})\,\text{دس} = -\text{جتاس} + \text{حاس} + \text{جـ}$

⑦ $\int \frac{٥ - \text{حا}^{٣}\text{س}}{١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{٥ - \text{حا}^{٣}\text{س}}{\text{حا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{٥}{\text{حا}^{٢}\text{س}} - \frac{\text{حا}^{٣}\text{س}}{\text{حا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int (٥\,\text{قتا}^{٢}\text{س} - \text{حاس})\,\text{دس}$

$= -٥\,\text{ظتاس} + \text{جتاس} + \text{جـ}$

ملاحظة هامة

التكامل لـ حا²س، جتا²س، ظا²س، ظتا²س غير مباشر حيث نستخدم المتطابقات

$\text{ظا}^{٢}\text{س} = \text{قا}^{٢}\text{س} - ١$

$\text{حا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا}٢\text{س})$

$\text{جتا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا}٢\text{س})$

$\text{ظتا}^{٢}\text{س} = \text{قتا}^{٢}\text{س} - ١$

مثال ⑤

جد التكامل $\int \sqrt{١ + \text{حا}٢\text{س}}\,\text{دس}$ ، $٠ \leq \text{س} \leq \frac{\pi}{٣}$

الحل

$= \int \sqrt{\text{حا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س} + ٢\text{حاس جتاس}}\,\text{دس}$

$= \int \sqrt{(\text{حاس} + \text{جتاس})^{٢}}\,\text{دس}$

$= \int |\text{حاس} + \text{جتاس}|\,\text{دس}$

على الفترة تكون موجبه

$= \int (\text{حاس} + \text{جتاس})\,\text{دس}$

$= -\text{جتاس} + \text{حاس} + \text{جـ}$

مثال ⑥

اوجد $\int \sqrt{١+\text{جاس}}\ \text{ءس}$ ، $٠ \leq \text{س} \leq \frac{\pi}{٢}$

الحل

$= \int \sqrt{١+٢\,\text{جا}\tfrac{١}{٢}\text{س}\ \text{جتا}\tfrac{١}{٢}\text{س}}\ \text{ءس}$

$= \int \sqrt{\text{جا}^{٢}\tfrac{١}{٢}\text{س}+\text{جتا}^{٢}\tfrac{١}{٢}\text{س}+٢\,\text{جا}\tfrac{١}{٢}\text{س}\ \text{جتا}\tfrac{١}{٢}\text{س}}$

$= \int \sqrt{(\text{جا}\tfrac{١}{٢}\text{س}+\text{جتا}\tfrac{١}{٢}\text{س})^{٢}}\ \text{ءس}$

$= \int \left|\text{جا}\tfrac{١}{٢}\text{س}+\text{جتا}\tfrac{١}{٢}\text{س}\right|\ \text{ءس}$

الفترة موجبة

$= -٢\,\text{جتا}\tfrac{١}{٢}\text{س}+٢\,\text{جا}\tfrac{١}{٢}\text{س}+\text{جـ}$

مثال ⑦

أوجد $\int \sqrt{٨-٨\,\text{جتا}٢\text{س}}\ \text{ءس}$ ، $٠ < \text{س} < \frac{\pi}{٢}$

الحل

$= \int \sqrt{٨(١-\text{جتا}٢\text{س})}\ \text{ءس} = \int \sqrt{٨(١-(١-٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}))}$

$= \int \sqrt{١٦\,\text{جا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس} = \int ٤\,|\text{جاس}|\ \text{ءس}$

على الفترة الموجبة

$= \int ٤\,\text{جاس}\ \text{ءس}$

$= -٤\,\text{جتاس}+\text{جـ}$

مثال ⑧

$\int \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}-٥}{١-\text{جا}^{٢}\text{س}}$ يساوي

أ) $\text{جاس}-٥\,\text{ظاس}+\text{جـ}$ ب) $\text{جتاس}-٥\,\text{ظاس}+\text{جـ}$

جـ) $٥\,\text{جاس}-\text{ظاس}+\text{جـ}$ د) $٥\,\text{جتاس}-\text{ظاس}+\text{جـ}$

الحل

$= \int \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}-٥}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}-\frac{٥}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

$= \int (\text{جتاس}-٥\,\text{قا}^{٢}\text{س})\ \text{ءس}$

$= \text{جاس}-٥\,\text{ظاس}+\text{جـ}$ (أ)

مثال ⑨

$\int \text{جا}٥\text{س}\ \text{جتا}٥\text{س}$ يساوي

أ) $\tfrac{١}{٢}\,\text{جتا}٥\text{س}+\text{جـ}$ ب) $\frac{-١}{٢٠}\,\text{جتا}١٠\text{س}+\text{جـ}$

جـ) $\tfrac{١}{٢}\,\text{جتا}٥\text{س}+\text{جـ}$ د) $\frac{-١}{٢٠}\,\text{جا}١٠\text{س}+\text{جـ}$

الحل

$= \int \tfrac{١}{٢}\,\text{جا}١٠\text{س}\ \text{ءس}$ متطابقة

$= \tfrac{١}{٢} \times \frac{-\text{جتا}١٠\text{س}}{١٠} = \frac{-١}{٢٠}\,\text{جتا}١٠\text{س}+\text{جـ}$

(ب)

مثال ⑩

$\int (\text{جاس}+\text{جتاس})^{٢}\ \text{ءس}$

$= \int (\text{جا}^{٢}\text{س}+٢\,\text{جاس}\ \text{جتاس}+\text{جتا}^{٢}\text{س})\ \text{ءس}$

$= \int (١+\text{جا}٢\text{س})\ \text{ءس} = \text{س}-\frac{\text{جتا}٢\text{س}}{٢}+\text{جـ}$

مثال ⑪

جد $\int \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{(\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}\ \text{جتا}\frac{\text{س}}{٢})^{٢}}\ \text{ءس}$

الحل

$= \int \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{(\tfrac{١}{٢}\,\text{جاس})^{٢}}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\tfrac{١}{٤}\,\text{جا}^{٢}\text{س}}$

$= \int ٤\,\text{ظتا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس} = \int ٤(\text{قتا}^{٢}\text{س}-١)\ \text{ءس}$

$= ٤(-\text{ظتاس}-\text{س})+\text{جـ}$

مثال ⑫

اوجد $\int \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{(\text{جاس}\ \text{جتاس})^{٢}}\ \text{ءس}$

الحل

$= \int \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{(\tfrac{١}{٢}\,\text{جا}٢\text{س})^{٢}}\ \text{ءس} = \int ٤\,\frac{\text{جتا}٢\text{س}}{\text{جا}^{٢}٢\text{س}}$

$= ٤\int \text{ظتا}٢\text{س}\ \text{قتا}٢\text{س}\ \text{ءس}$

$= \frac{-٤}{٢}\,\text{قتا}٢\text{س}+\text{جـ}$

مثال ⑬

أوجد $\int (\text{جتا}^{٤}\text{س} - \text{حا}^{٤}\text{س})\,\text{دس}$

الحل

$= \int (\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{حا}^{٢}\text{س})(\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{حا}^{٢}\text{س})\,\text{دس}$

$= \int \text{جتا}\,٢\text{س} \times ١\,\text{دس} = \frac{\text{حا}\,٢\text{س}}{٢} + \text{جـ}$

مثال ⑭

$\int \frac{٢}{١ + \text{جتا}\,٢\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{٢}{١ + ٢\text{جتا}^{٢}\text{س} - ١}\,\text{دس} = \int \frac{\cancel{٢}}{\cancel{٢}\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس} = \int \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{دس}$

$= \text{ظاس} + \text{جـ}$

مثال ⑮

أوجد $\int \frac{١}{\text{جتا}\,٢\text{س} + \text{حا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس}$

الحل

$= \int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س} \cancel{- \text{حا}^{٢}\text{س} + \text{حا}^{٢}\text{س}}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس} = \int \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{دس}$

$= \text{ظاس} + \text{جـ}$

مثال ⑯

أوجد $\int \frac{١ + \text{جتا}^{٣}\text{س}}{١ + \text{جتا}\,٢\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{١ + \text{جتا}^{٣}\text{س}}{\cancel{١} + ٢\text{جتا}^{٢}\text{س} \cancel{- ١}} = \int \frac{١ + \text{جتا}^{٣}\text{س}}{٢\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

$= \frac{١}{٢}\int \left(\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} + \text{جتاس}\right)\text{دس}$

$= \frac{١}{٢}\int (\text{قا}^{٢}\text{س} + \text{جتاس})\,\text{دس} = \frac{١}{٢}(\text{ظاس} + \text{حاس}) + \text{جـ}$

مثال ⑰

أوجد $\int \frac{١ + \text{جتا}^{٣}\text{س}}{١ + \text{جتاس}}\,\text{دس}$ مجموع مكعبين

الحل

$= \int \frac{\cancel{(١ + \text{جتاس})}(١ - \text{جتاس} + \text{جتا}^{٢}\text{س})}{\cancel{١ + \text{جتاس}}}\,\text{دس}$

$= \int ١ + \text{جتاس} + \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا}\,٢\text{س})\,\text{دس}$

$= \text{س} + \text{حاس} + \frac{١}{٢}\left(\text{س} + \frac{\text{حا}\,٢\text{س}}{٢}\right) + \text{جـ}$

ملاحظة هامة

اذا كانت الزوايا في البسط مختلفة عن المقام اولاً نعمل على ان نجعلها متساوية باستخدام المتطابقات

الان عندما نجد الصورة

١ ± حاس ، ١ ± جتاس

نضرب بالمرافق

مثال ⑱

جد $\int \frac{١}{١ + \text{حاس}}\,\text{دس}$

الحل $\int \frac{١}{١ + \text{حاس}} \times \frac{١ - \text{حاس}}{١ - \text{حاس}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{١ - \text{حاس}}{١ - \text{حا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{١ - \text{حاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} - \frac{\text{حاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int (\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظاس قاس})\,\text{دس}$

$= \text{ظاس} - \text{قاس} + \text{جـ}$

مثال (١٩)

جد $\int \frac{1-\text{جتا}س}{1+\text{جتا}س}\, ءس$

الحل

$\int \frac{1-\text{جتا}س}{1+\text{جتا}س} \times \frac{1-\text{جتا}س}{1-\text{جتا}س}\, ءس$

$= \int \frac{(1-\text{جتا}س)^2}{1-\text{جتا}^2س}\, ءس = \int \frac{1-2\text{جتا}س+\text{جتا}^2س}{\text{جا}^2س}\, ءس$

$= \int \left(\frac{1}{\text{جا}^2س} - \frac{2\text{جتا}س}{\text{جا}^2س} + \frac{\text{جتا}^2س}{\text{جا}^2س}\right) ءس$

$= \int \text{قتا}^2س - 2\text{ظتا}س\,\text{قتا}س + \text{ظتا}^2س$

$= \int \text{قتا}^2س - 2\text{ظتا}س\,\text{قتا}س + \text{قتا}^2س - 1$

$= -\text{ظتا}س + 2\text{قتا}س - \text{ظتا}س - س + ج$

$= -2\text{ظتا}س + 2\text{قتا}س - س + ج$

مثال (٢٠)

$\int \frac{ءس}{(\text{جتا}س+\text{جا}س)^2}$

$= \int \frac{ءس}{1+\text{جا}2س} \times \frac{1-\text{جا}2س}{1-\text{جا}2س}$

$= \int \frac{1-\text{جا}2س}{1-\text{جا}^2 2س}\, ءس = \int \frac{1-\text{جا}2س}{\text{جتا}^2 2س}\, ءس$

$= \int \frac{1}{\text{جتا}^2 2س} - \frac{\text{جا}2س}{\text{جتا}^2 2س}$

$= \int (\text{قا}^2 2س - \text{ظا}2س\,\text{قا}2س)\, ءس$

$= \frac{1}{2}\text{ظا}2س - \frac{\text{قا}2س}{2} + ج$

ملاحظة هامة

$(\text{جا}س + \text{جتا}س)^2 = 1 + \text{جا}2س$

$(\text{جا}س - \text{جتا}س)^2 = 1 - \text{جا}2س$

مثال (٢١)

$\int \frac{(\text{جا}س + \text{جتا}س)^6}{\text{جا}^4(س + \frac{\pi}{4})}\, ءس$

الحل

$= \int \frac{(\text{جا}س+\text{جتا}س)^6}{(\text{جا}(س+\frac{\pi}{4}))^4}\, ءس$

$= \int \frac{(\text{جا}س + \text{جتا}س)^6}{(\text{جا}س\,\text{جتا}\frac{\pi}{4} + \text{جتا}س\,\text{جا}\frac{\pi}{4})^4}$ متطابقة

$= \int \frac{(\text{جا}س + \text{جتا}س)^6}{(\frac{1}{\sqrt{2}}\text{جا}س + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{جتا}س)^4}\, ءس$

$= \int \frac{\cancel{(\text{جا}س + \text{جتا}س)}^6}{\frac{1}{4}\cancel{(\text{جا}س + \text{جتا}س)}^4}$

$= \int 4\,(\text{جا}س + \text{جتا}س)^2\, ءس$

$= \int 4\,(1 + \text{جا}2س)\, ءس$

$= 4\left(س - \frac{\text{جتا}2س}{2}\right) + ج$

ملاحظة هامة

اذا كانت الزوايا مختلفة في عملية الضرب نستخدم القوانين التالية

١. $\text{جا}م\,\text{جتا}ن = \frac{1}{2}(\text{جا}(م+ن) + \text{جا}(م-ن))$

٢. $\text{جتا}م\,\text{جتا}ن = \frac{1}{2}(\text{جتا}(م+ن) + \text{جتا}(م-ن))$

٣. $\text{جا}م\,\text{جا}ن = \frac{1}{2}(\text{جتا}(م-ن) - \text{جتا}(م+ن))$

مثال ㉒

∫ حا٣س جتا٥س ءس

الحل متطابقه

$\int \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (حا(٣س + ٥س) + حا(٣س − ٥س))

$= \int \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (حا٨س + حا−٢س) ءس

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \left(-\frac{\text{جتا٨س}}{\text{٨}} + \frac{\text{جتا−٢س}}{\text{٢}}\right) + \text{جـ}$

مثال ㉓

∫ جتا٢س حا٥س ءس

الحل

= ∫ حا٥س جتا٢س ءس

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \int$ (حا٧س + حا٣س) ءس

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \left(-\frac{\text{جتا٧س}}{\text{٧}} - \frac{\text{١}}{\text{٣}}\,\text{جتا٣س}\right) + \text{جـ}$

مثال ㉔

∫ جتا٨س جتا٣س ءس

$= \int \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (جتا١١س + جتا٥س) ءس

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \left(\frac{\text{حا١١س}}{\text{١١}} + \frac{\text{حا٥س}}{\text{٥}}\right) + \text{جـ}$

مثال ㉕

∫ حا٤س حا٥س ءس

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \int$ (جتا−س − جتا٩س) ءس

جتا−س = جتاس

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \left(\text{حاس} - \frac{\text{حا٩س}}{\text{٩}}\right) + \text{جـ}$

مثال ㉖

∫ ٦حا٣س (جتا٢س جتاس − حا٢س حاس) ءس

الحل جتا(أ+ب) = جتاأ جتاب − حاأ حاب

= ∫ ٦حا٣س (جتا(٢س + س)) ءس

= ∫ ٦حا٣س جتا ٣س

$= \int \text{٣} \times \underbrace{\text{٢حا٣س جتا٣س}}_{\text{متطابقه}}\ \text{ءس}$

$= \text{٣} \int \text{حا٦س ءس} = -\text{٣}\,\frac{\text{جتا٦س}}{\text{٦}} + \text{جـ}$

مثال ㉗

$\int \frac{\text{جتا٣س}}{\text{جتاس}}\ \text{ءس}$

الحل $= \int \frac{\text{جتا(س + ٢س)}}{\text{جتاس}}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{\text{جتاس جتا٢س} - \text{حاس حا٢س}}{\text{جتاس}}\ \text{ءس}$

$= \int \frac{\cancel{\text{جتاس}}\ \text{جتا٢س}}{\cancel{\text{جتاس}}} - \frac{\text{حاس حا٢س}}{\text{جتاس}}\ \text{ءس}$

$= \int \text{جتا٢س} - \frac{\text{حاس} \times \text{٢حاس}\ \cancel{\text{جتاس}}}{\cancel{\text{جتاس}}}\ \text{ءس}$

$= \int (\text{جتا٢س} - \text{٢حا}^{\text{٢}}\text{س})\ \text{ءس}$

$= \frac{\text{حا٢س}}{\text{٢}} - \int \text{٢} \frac{\text{١}}{\text{٢}} (\text{١} - \text{جتا٢س})$

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{حا٢س} - \left(\text{س} - \frac{\text{حا٢س}}{\text{٢}}\right) + \text{جـ}$

الجزء الثالث

إيجاد قاعدة ق(س) اذا علمت ق'، ق''، ق'''

ملاحظة هامة

∫ ق'(س)․ دس = ق(س) + جـ

∫ ق''(س)․ دس = ق'(س) + جـ

∫ ق'''(س)․ دس = ق''(س) + جـ

ق ← ق' ← ق'' اشتقاق

ق'' ← ق' ← ق تكامل

مثال ①

اذا كان ق'(س) = ٣س^{٢} − ٢ وكان ق(١) = ١ فاوجد قاعدة ق(س).

الحل ∫ ق'(س) = ∫(٣س^{٢} − ٢) دس

ق(س) = س^{٣} − ٢س + جـ

ق(١) = ١^{٣} − ٢×١ + جـ = ١ ← جـ = ٢

ق(س) = س^{٣} − ٢س + ٢

مثال ②

اذا كان ق'(س) = س^{٣} − س^{٢} + ١ فاوجد ق(٣) − ق(١) ؟

أ) $\frac{٤٠}{٣}$ ب) $-\frac{٤٠}{٣}$ جـ) ٤٠ د) −٤٠

الحل

ق(س) = ∫ (س^{٣} − س^{٢} + ١) دس

= $\frac{س^{٤}}{٤}$ − $\frac{س^{٣}}{٣}$ + س + جـ

ق(١) = $\frac{١}{٤}$ − $\frac{١}{٣}$ + ١ + جـ = $\frac{١١}{١٢}$ + جـ

ق(٢) = $\frac{٨١}{٤}$ − $\frac{٢٧}{٣}$ + ٣ + جـ = $\frac{٥٧}{٤}$ + جـ

ق(٣) − ق(١) = $\frac{٥٧}{٤}$ $\cancel{+ \text{جـ}}$ − $\frac{١١}{١٢}$ $\cancel{- \text{جـ}}$

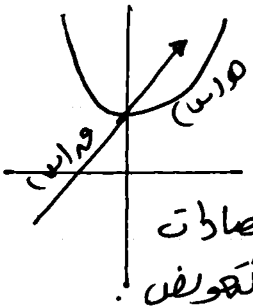
= $\frac{٤٠}{٣}$ Ⓐ

مثال ③

الشكل المجاور يمثل بياني الاقترانين ق، هـ اذا علمت ان ق(س) = ٣س + ٤، هـ'(س) = ٢س − ٣ فما قيمة هـ(٥) ؟

أ) −١٤ ب) ٢٥ جـ) ١٣ د) ١٤

الحل



∫ هـ'(س) دس = ∫(٢س − ٣) دس

هـ(س) = س^{٢} − ٣س + جـ

ق، هـ يتقاطعان في محور الصادات

عند س = ٠ ← ق(٠) = ٤ بالتعويض.

← (٠، ٤) نقطة التقاطع ⇐ هـ(٠) = ٤

هـ(٠) = ٠^{٢} − ٣×٠ + جـ = ٤ ← جـ = ٤

هـ(س) = س^{٢} − ٣س + ٤

هـ(٥) = ٢٥ − ١٥ + ٤ = ١٤ Ⓓ

مثال ④

اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي (٥س^{٤} + ٢س + ٣) فجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن ق(٢) = ٣

الحل

ق'(س) = ٥س^{٤} + ٢س + ٣

ق(س) = ∫ ٥س^{٤} + ٢س + ٣ دس = س^{٥} + س^{٢} + ٣س + جـ

ق(٢) = ٣ ← ٢^{٥} + ٢^{٢} + ٦ + جـ = ٣

← جـ = −٣٩

ق(س) = س^{٥} + س^{٢} + ٣س − ٣٩

مثال ⑤

جد معادلة المنحنى الذي ميل المماس له عند اي نقطة (س ، ص) تعطى بالعلاقة $\frac{دص}{دس} = \frac{س^٣+٨}{س^٢-٢س+٤}$ والذي يقطع محور السينيات عند س = ٣

الحل

$ق'(س) = \frac{س^٣+٨}{س^٢-٢س+٤} دس$

$ق(س) = \int \frac{س^٣+٨}{س^٢-٢س+٤} دس$

$ق(س) = \int \frac{(س+٢)\cancel{(س^٢-٢س+٤)}}{\cancel{(س^٢-٢س+٤)}} دس$

$ق(س) = \int (س+٢) دس = \frac{س^٢}{٢} + ٢س + جـ$

(٣ ، ٠) نقطة التقاطع مع محور السينات

$\Leftarrow ق(٣) = ٠ \Leftarrow ق(٣) = \frac{٩}{٢} + ٦ + جـ = ٠$

$\Leftarrow جـ = ٠ \Leftarrow ق(س) = \frac{س^٢}{٢} + ٢س - \frac{٢١}{٢}$

مثال ⑥

اذا علمت ان $ق''(س) = ٣س + ١$ جد ق(٢)
علماً بان ق(٠) = ١ ، ق′(٠) = صفر

الحل

$\int ق''(س) = \int (٣س+١) دس$

$ق'(س) = \frac{٣}{٢}س^٢ + س + جـ$

$ق'(٠) = ٠ + ٠ + جـ = ٠ \Leftarrow جـ = ٠$

$ق'(س) = \frac{٣}{٢}س^٢ + س$

$ق(س) = \int (\frac{٣}{٢}س^٢ + س) دس = \frac{٣}{٢}س^٣ + \frac{س^٢}{٢} + جـ$

$ق(٠) = ٠ + ٠ + جـ = ١ \leftarrow جـ = ١$

$ق(س) = \frac{١}{٢}س^٣ + \frac{١}{٢}س^٢ + ١$

$ق(٢) = \frac{١}{٢} \times ٨ + \frac{١}{٢} \times ٤ + ١ = ٧$

مثال ⑦

اذا كانت ق″(س) = ٢ عند اي نقطة (س ، ص) ، وكان ميل المنحنى عند النقطة (١ ، ٣) يساوي ١٠ جد قاعدة ق ؟

الحل

$\int ق''(س) دس = \int ٢ دس$

$ق'(س) = ٢س + جـ \quad ق'(١) = ١٠$

$ق'(١) = ٢ \times ١ + جـ = ١٠ \leftarrow جـ = ٨$

$ق'(س) = ٢س + ٨$

$ق'(س) = \int (٢س + ٨) دس = س^٢ + ٨س + جـ$

$ق(١) = ٣$

$ق(١) = ١ + ٨ + جـ = ٣ \quad جـ = -٦$

$ق(س) = س^٢ + ٨س - ٦$

مثال ⑧

اذا كانت المشتقة الأولى للأقتران ق هي (٢س - ٢) وكانت القيمة الصغرى المحلية (٧) جد قاعدة ق

الحل $ق'(س) = ٢س - ٢$

$ق(س) = \int (٢س-٢) دس = س^٢ - ٢س + جـ$

لكن له قيمة صغرى محلية عند س = ؟؟

$ق'(س) = ٠ \Leftarrow ٢س - ٢ = ٠ \leftarrow \boxed{س = ١}$

$ق(١) = ٧$

$ق(١) = ١^٢ - ٢ + جـ = ٧$

$جـ = ٨$

$ق(س) = س^٢ - ٢س + ٨$

مثال ⑨

اذا كانت قَ(س) = ٢س − حاس
وكان ق(π) = ٣ ، جد قاعدة ق

الحل

∫قَ(س) = ∫(٢س − حاس) ءس
ق(س) = س^{٢} + جتاس + جـ
ق(π) = π^{٢} + جتاπ + جـ = ٣
π^{٢} − ١ + جـ = ٣ ← جـ = ٤ − π^{٢}
ق(س) = س^{٢} + جتاس + ٤ − π^{٢}

مثال ⑩

اذا كان ق(س) = $\sqrt{٢ - س}$ ، هـً(٢) = ٢
جد هـ(٢) علماً بان ق ، هـ متعامدان
عند س = ١

الحل ∫ هـً(س) ءس = ∫ ٢ . ءس
هـَ(س) = ٢س + جـ
قَ(س) = $\frac{-١}{٢\sqrt{٢ - س}}$ قَ(١) = $-\frac{١}{٢}$
ق ، هـ متعامدان ⇐ قَ(١) × هـَ(١) = −١
$-\frac{١}{٢}$ × هـَ(١) = −١ ← هـَ(١) = ٢
← هـَ(١) = ٢ + جـ = ٢ ← جـ = ٠
هـَ(س) = ٢س
هـ(س) = ∫٢س ءس = س^{٢} + جـ
هـ(١) = ق(١) = $\sqrt{٢ - ١}$ = ١ نقطه لتعامد مشتركه
هـ(١) = ١^{٢} + جـ = ١ ⇐ جـ = ٠
هـ(س) = س^{٢}
هـ(٢) = ٤

مثال ⑪

اذا كان ميل المماس لمنحنى ص = ق(س)
عند اي نقطة عليه يساوي (أس^{٢} + ٥س − ٢)
حيث أ ثابت وكان ق(٠) = ١٨ ،
ق(٢) = صفر جد قيمة أ ؟

الحل

قَ(س) = أس^{٢} + ٥س − ٢
ق(س) = ∫(أس^{٢} + ٥س − ٢) ءس
ق(س) = $\frac{أس^{٣}}{٣}$ + $\frac{٥س^{٢}}{٢}$ − ٢س + جـ
ق(٠) = ١٨ ⇐ جـ = ١٨
ق(س) = $\frac{أ}{٣}$س^{٣} + $\frac{٥}{٢}$س^{٢} − ٢س + ١٨
ق(٢) = $\frac{أ}{٣}$ × ٨ + $\frac{٥}{٢}$ × ٤ − ٤ + ١٨ = ٠
$\frac{٨أ}{٣}$ + ١٠ + ١٤ = ٠ ← $\frac{٨أ}{٣}$ = −٢٤
⇐ أ = −٩

ورقة عمل

① اذا كان ق(س) = $\int (-س^2 + ٥س + ١)$
فان ق$'$(١) =
أ) ٠ ب) ٣ ج) ٥ د) ٧

② اذا كان منحنى الاقتران ق(س) يمر بالنقطة (١، ٤) وكان ق$'$(س) = ٢س + ٥
فان قاعدة الاقتران ق هي.
أ) ق(س) = $س^2 + ٥س - ٢$ ب) ق(س) = $س^2 - ٥$
ج) ق(س) = $س^2 + ٥س + ٢$ د) ق(س) = $س^2 + ٥$

③ $\int \pi^2 \, ءس$ =
أ) صفر ب) ٢π + جـ ج) π^2س + جـ
د) $\frac{\pi^3}{٣}$ + جـ

④ اذا كان $\int$ ق$'$(س) ءس = $٣س^2 - ٥س$ + جـ
فان ق$'$(٢) =
أ) −٢ ب) صفر ج) ٢ د) ٧

⑤ اذا كان $م_1$(س) ، $م_2$(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) الذي فيه ق$'$(١) = ٥
هـ(س) = $م_1$(س) − $م_2$(س) ، فان هـ$'$(١) =
أ) ٥ ب) صفر ج) −٥ د) ١

⑥ اذا كان م ، ل معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) وكان
م(س) = $س^2 - ٤س + ٦$ وكان
ل(٣) = ٤ ، فان ل(١) =
أ) ٣ ب) ٤ ج) −٢ د) ٢

⑦ اذا كان
$\int$ ق(س) ءس = س · جاπس جد ق$(\frac{1}{2})$
أ) π ب) $-\pi$ ج) ٠ د) ١

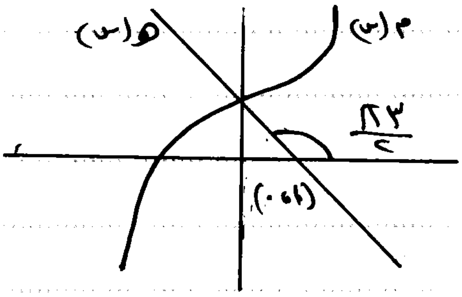
⑧ اذا كان م(س) معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) المتصل على مجاله حيث
م(س) = $٤\sqrt{س} - ٢س$ فان ق(٤) =
أ) −١ ب) ١ ج) ١٢ د) −١٢

⑨ اذا كان م ، هـ اقترانين معكوسين لمشتقة الاقتران ق(س) المتصل على مجاله وكان
ل(س) = م(س) − ٢ ظتا$\frac{س}{٢}$ − هـ(س)
فان ل$'$(π) =
أ) −١ ب) ١ ج) $\frac{1}{2}$ د) $-\frac{1}{2}$

⑩ ق(س) = ظا^{2}س وكان م(س) معكوس مشتقة ق(س) أوجد م(س)
أ) ظا^{2}س + جـ ب) ظاس + جـ
ج) ظاس − س + جـ د) ظاس + س + جـ

⑪ اذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثانية وكان هـ(س) = ∫ ق(س) . دس وكان ق(٠) = ٥ ، هـَ(٢) = ١ ، هـً(٢) = ٦
أوجد ق(س)

⑫ الشكل المجاور يمثل منحنى م(س) ، هـ(س) حيث م(س) اقتران معكوس مشتقة ق(س) = ٣س٢ جد م(-١)؟



⑬ جد قاعدة الأقتران ق(س) علماً بان قً(س) = قَ(س)
قَ(١) = ١ ، ق(٠) = ١

⑭ اذا كان ق(س) = أس + ب وكان م(س) معكوس لمشتقة ق(س) بحيث ان مَ(٢) = ٧ ، مً(٢) = ٢
أوجد أ ، ب ؟

⑮ اذا كانت قً(س) = ٦س - ٤ وكان للأقتران ص = ق(س) قيمة صغرى محلية تساوي ٥ عندما س = ١ جد معادلة المنحنى

⑯ اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند (١ ، ٨) الواقعة عليه يساوي (٤) أوجد معادلة هذا المنحنى علماً بان قً(س) = ١٢س - ١٠

⑰ اذا كان معدل تغير ميل المماس لمنحنى يساوي جتاس ، وكان المستقيم س - ص + ١ = ٠ مماساً لهذا المنحنى عند النقطة (٠ ، ١) فاوجد معادلة هذا المنحنى

⑱ اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) هو ٢ جاس جتاس وكان منحنى ق(س) يمر بالنقطة (١ ، ٢) جد قاعدة الأقتران

⑲ تتحرك نقطة في الربع الأول بحيث ميل المماس للمنحنى هو قا٢س جد قاعدة المنحنى ق(س) المار بالنقطة (π/٤ ، ٣)

⑳ أوجد معادلة المنحنى ص = ق(س) اذا علمت ان قً(س) = أس + ب وان (٠ ، ١) صغرى محلية ، (١ ، ١) نقطة انعطاف

㉑ اذا كان ميل المماس لمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (١، -١) يساوي (١٠) فاوجد معادلة هذا المنحنى علماً بأن $\frac{\text{ء}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{٢}}} = \text{١٨س} - \text{٨}$

㉒ اذا كانت ق″(س) = ٦ جد ق(٢) علماً بأن منحنى ق(س) يمر بالنقطتين (-١، ٥)، (١، ٣)

㉓ اذا كانت ق″(س) = ٦س وكان ٢ص + س = ٥ عمودياً على منحنى ق(س) عند س = -١ جد ق(س)

㉔ اذا كانت $\text{ق}''(\text{س}) = \frac{\text{٦}}{\text{س}^{\text{٣}}}$ وكان لمنحنى ق(س) مماساً عند النقطة (-١، ٥) ميله يساوي (٢) اوجد ق(س) .

㉕ اوجد التكاملات الآتية

① $\int \frac{\text{ءس}}{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٤س}+\text{٤}}$.

② $\int \text{س}\sqrt{\frac{\text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}}}-\frac{\text{١}}{\text{س}}}\;\text{ءس}$

③ $\int \sqrt{\text{س}\sqrt{\text{س}\sqrt{\text{س}}}}\;\text{ءس}$

④ $\int \text{س}^{\text{١٠}}\left(\frac{\text{٣}}{\text{س}}-\text{٥}\right)^{\text{١٠}}\text{ءس}$

⑤ $\int \frac{\text{٢س}^{\text{٣}}+\text{١٦}}{\text{٥س}+\text{١٠}}\;\text{ءس}$

⑥ $\iint \text{س}\sqrt[\text{٣}]{\frac{\text{٢}}{\text{س}^{\text{٣}}}+\frac{\text{٥}}{\text{س}^{\text{٢}}}}\;\text{ءس}$

⑦ $\int \frac{\text{س}-\text{٢}\sqrt{\text{س}}+\text{١}}{\text{١}-\sqrt{\text{س}}}$

⑧ $\int \frac{\text{جتا}^{\text{٤}}\text{س}}{\text{حا}^{\text{٢}}\text{س}}\;\text{ءس}$

⑨ $\int \left(\frac{\text{١}}{\text{قا}^{\text{٢}}\text{س}}+\frac{\text{١}}{\text{قتا}^{\text{٢}}\text{س}}\right)\text{ءس}$

⑩ $\int \frac{\text{حا}^{\text{٢}}\text{س}-\text{حاس}-\text{٢}}{\text{٢}-\text{حاس}}\;\text{ءس}$

⑪ $\int \frac{\text{حا}^{\text{٣}}\text{س}-\text{جتا}^{\text{٣}}\text{س}}{\text{حاس}-\text{جتاس}}\;\text{ءس}$

⑫ $\int \frac{\text{١}-\text{حا٢س}}{\text{حاس}-\text{جتاس}}$

⑬ $\int \text{جتا٣س}(\text{جتا٢س جتاس} - \text{حا٢س حاس}$

⑭ $\int \frac{\text{٢}+\text{٢جتا}^{\text{٣}}\text{س}}{\text{١}+\text{جتا٢س}}\;\text{ءس}$

⑮ $\int \frac{\text{٢ حا٣س حاس} + \text{جتا٤س}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}-\text{حا}^{\text{٢}}\text{س}}$

⑯ $\int \text{حا٤س جتا٨س ءس}$ ⑰ $\int (\text{٦}-\text{ظا}^{\text{٢}}\text{س})\;\text{ءس}$

⑱ $\int \left(\text{حا}^{\text{٢}}\frac{\text{س}}{\text{٢}}-\text{جتا}^{\text{٢}}\frac{\text{س}}{\text{٢}}\right)$

⑲ $\int \text{٤ حا٣س جتا٣س ءس}$

⑳ $\int \text{ظا}(\text{٢س}-\text{١})\;\text{قا}(\text{٢س}-\text{١})\;\text{ءس}$

㉑ $\int \sqrt[\text{٣}]{\text{س}\sqrt{\text{س}}}\;\text{ءس}$

㉒ $\int \text{ظاس}(\text{ظاس}+\text{ظتاس})\;\text{ءس}$.

㉓ $\int \frac{\text{١}}{(\text{جتا٤س}-\text{حا٤س})^{\text{٢}}}\;\text{ءس}$

㉔ $\int \frac{\text{حا}^{\text{٣}}\text{س}-\text{٧}}{\text{١}-\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}\;\text{ءس}$

حلول ورقة عمل التكامل غير المحدود

① ق'(س) = −س^{٢} + ٥س + ١
ق'(١) = −١ + ٥ + ١ = ٥
الجواب (ج)

② ∫ق'(س) = ∫(٢س + ٥) ءس
ق(س) = $\frac{\cancel{٢}\text{س}^{٢}}{\cancel{٢}}$ + ٥س + جـ
ق(١) = ١ + ٥ + جـ = ٤ ⇐
جـ = −٢ ⇐ ق(س) = س^{٢} + ٥س − ٢
الجواب (أ)

③ ∫π^{٢} ءس = π^{٢}س + جـ
الجواب (ج)

④ ق(س) = ٣س^{٢} − ٥س + جـ
ق'(س) = ٦س − ٥
ق'(٢) = ١٢ − ٥ = ٧
الجواب (د)

⑤ هـ'(س) = صفر
الجواب (ب)

⑥ م(س) = س^{٢} − ٤س + ٦
ل(س) = س^{٢} − ٤س + جـ
ل(٣) = ٩ − ١٢ + جـ = ٤
⇐ جـ = ٧
ل(س) = س^{٢} − ٤س + ٧
ل(١) = ١ − ٤ + ٧ = ٤
الجواب (ب)

⑦ ∫ق(س) ءس = س . جاπس
باشتقاق الطرفين
ق(س) = س × π جتاπس + جاπس × ١
ق($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٢}$ × π جتا$\frac{\pi}{٢}$ + جا(π × $\frac{١}{٢}$)
= صفر + جا$\frac{\pi}{٢}$ = ٠ + ١ = ١
الجواب (د)

⑧ م'(س) = ق(س)
$\frac{٤}{٢\sqrt{\text{س}}}$ − ٢ = ق(س)
ق(٤) = $\frac{٤}{٢ × ٢}$ − ٢ = ١ − ٢ = −١
الجواب (أ)

⑨ ل'(س) = م'(س) + $\cancel{٢}$ جا$\frac{\pi}{٢}$ × $\frac{١}{\cancel{٢}}$
− هـ'(س)
لكن م'(س) − هـ'(س) = صفر
ل'(س) = جا$\frac{\pi}{٢}$ = ١
الجواب (ب)

⑩ $م(س) = \int ق(س) دس = \int ظا^{٢}س دس$

$= \int (قا^{٢}س - ١) دس = ظا س - س + جـ$

(جـ)

---

⑪ نفرض $ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ$

$ه'(س) = ق(س)$

$ه'(٢) = ق(٢) = ٤أ + ٢ب + جـ = ١$ - ①

$ه''(س) = ٢أس + ب$

$ه''(٢) = ٤أ + ب = ٦$ - - - ②

$ق(٠) = ٠ + ٠ + جـ = ٥ \leftarrow جـ = ٥$

بتعويضها في ① $\leftarrow ٤أ + ٢ب + ٥ = ١$

$\leftarrow \cancel{٤أ} + ٢ب = -٤$ مع ②

$\cancel{\overset{-}{٤أ}} \overset{-}{+} ب = \overset{-}{٦}$

$ب = -١٠$

$\Leftarrow ٤أ - ١٠ = ٦ \Leftarrow ٤أ = +١٦$

$أ = ٤$

---

⑫ $م(س) = \int ق(س) دس = \int ٣س^{٢} دس$

$= س^{٣} + جـ$

$م(٠) = ه(٠)$ نجد معادلة المستقيم $ه(س)$

$ص - ٠ = ظا \frac{٣\pi}{٢} (س - ١)$

$ص = -س + ١ \Leftarrow ص(٠) = ١ = م(٠)$

$م(٠) = (٠)^{٣} + جـ = ١ \Leftarrow جـ = ١$

$\Leftarrow م(س) = س^{٣} + ١$

$\Leftarrow م(-١) = -١ + ١ =$ صفر

---

⑬ $\int ق''(س) = \int ق'(س)$

$ق'(س) = ق(س) + جـ$

$ق'(٠) = ١$ ، $ق(٠) = ١$

$ق'(٠) = ق(٠) + جـ \Leftarrow ١ = ١ + جـ$

$\Leftarrow جـ = ٠ \Leftarrow ق(س) = ق'(س)$

---

⑭ $ق(س) = أس + ب$

$م'(س) = ق(س) \Leftarrow م'(٢) = ق(٢) = ٧$

$٢أ + ب = ٧$ - - - ①

$م''(س) = ق'(س) = أ$

$م''(٢) = ٢ = أ$ نعوضها في ①

$٤ + ب = ٧ \Leftarrow ب = ٣$

$\therefore ق(س) = ٢س + ٣$

---

⑮ $\int ق''(س) = \int (٦س - ٤) دس$

$ق'(س) = ٣س^{٢} - ٤س + جـ$

(١،٥) قيمة صغرى $\Leftarrow ق'(١) =$ صفر

$ق'(١) = ٣ - ٤ + جـ = ٠ \Leftarrow جـ = ١$

$ق'(س) = ٣س^{٢} - ٤س + ١$

$\int ق'(س) = \int (٣س^{٢} - ٤س + ١) دس$

$ق(س) = س^{٣} - ٢س^{٢} + س + جـ$

$ق(١) = ٥ \Leftarrow ١ + ٢ + ١ + جـ = ٥$

$\Leftarrow جـ = ٥ \Leftarrow ق(س) = س^{٣} - ٢س^{٢} + س + ٥$

---

⑯ $ق''(س) = ١٢س - ١٠$

$ق'(س) = \int (١٢س - ١٠) دس = ٦س^{٢} - ١٠س + جـ$

$ق'(١) = ٤ \longleftarrow ٦ - ١٠ + جـ = ٤ \leftarrow جـ = ٨$

$ق'(س) = ٦س^{٢} - ١٠س + ٨$

$ق(س) = \int (٦س^{٢} - ١٠س + ٨) دس$

$= ٢س^{٣} - ٥س^{٢} + ٨س + جـ$

$ق(١) = ٨ \Leftarrow ٢ - ٥ + ٨ + جـ = ٨$

$د = ٣$

$ق(س) = ٢س^{٣} - ٥س^{٢} + ٨س + ٣$

⑰ معدل تغير المماس = ق″(س)
= جتا٢س
ق′(س) = ∫ جتا٢س ءس = جا٢س/٢ + جـ
ميل المماس ← ١ - ءص/ءس = ٠
← ءص/ءس = ١ ← ءص/ءس |س=٠ = ١
⇐ ق′(٠) = ١ ⇐ ق′(٠) = جا٠/٢ + جـ = ١
← جـ = ١ ⇐ ق′(س) = ١/٢ جا٢س + ١
ق(س) = ∫ (١/٢ جا٢س + ١) ءس
= - ١/٢ جتا٢س/٢ + س + جـ
ق(٠) = ١
- ١/٢ × جتا٠/٢ + ٠ + جـ = ١
- ١/٤ + جـ = ١ ⇐ جـ = ٥/٤
ق(س) = - ١/٤ جتا٢س + س + ٥/٤

---

⑱ ق′(س) = ٢جاس جتاس = جا٢س
ق(س) = ∫ جا٢س ءس = -جتا٢س/٢ + جـ
ق(٠) = - جتا٠/٢ + جـ = ٢
⇐ جـ = ٥/٢ ⇐ ق(س) = -١/٢ جتا٢س + ٥/٢

---

⑲ ق′(س) = قا^{٢}س
ق(س) = ∫ قا^{٢}س ءس = ظاس + جـ
ق(π/٤) = ٣ ← ظا π/٤ + جـ = ٣
⇐ ١ + جـ = ٣ ← جـ = ٢
ق(س) = ظاس + ٢

---

⑳ ق″(س) = أس + ب
ق′(س) = ∫ (أس + ب) ءس
= أس^{٢}/٢ + بس + جـ
ق′(٠) = ٠ ← جـ = ٠
ق′(س) = أ/٢ س^{٢} + ب س
ق(س) = ∫ (أ/٢ س^{٢} + ب س) ءس
= أ/٢ س^{٣}/٣ + ب/٢ س^{٢} + جـ
ق(٠) = ١ ← جـ = ١
ق″(١) = صفر نقطة انعطاف
أ + ب = ٠ ... ① ⇐
ق(١) = ١ ⇐ أ/٦ + ب/٢ + ١ = ٠ ... ②
من ① ⇐ أ = -ب
← -ب/٦ + ب/٢ + ١ = ٠ توحيد مقام
← ٢ب/٦ = -١ ← ب = -٣
⇐ أ = ٣

㉑ ءص/ءس = ∫ (١٨س - ٨) ءس
= ٩س^{٢} - ٨س + جـ
ق′(١) = ١٠ ⇐ ٩ - ٨ + جـ = ١٠
⇐ جـ = ٩
ءص/ءس = ٩س^{٢} - ٨س + ٩
ص = ∫ (٩س^{٢} - ٨س + ٩) ءس
= ٣س^{٣} - ٤س^{٢} + ٩س + جـ
ص(١) = ٣ - ٤ + ٩ + جـ = -١
← جـ = -٩
ص = ٣س^{٣} - ٤س^{٢} + ٩س - ٩

㉒ بما أن المشتقة الثانية تساوي ثابتة
← ق(س) من الدرجة الثانية
ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ
ق′(س) = ٢أس + ب
ق″(س) = ٢أ = ٦ ⇐ أ = ٣ ← يتبع

تابع الحل

$\text{ق}'(\text{س}) = ٦\text{س} + \text{ب}$

$\text{ق}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ق}(-١) = ٣ - \text{ب} + \text{جـ} = ٥ \quad ...①$

$\text{ق}(١) = ٣ + \text{ب} + \text{جـ} = ٣ \quad ...②$

بالجمع $٦ + ٢\text{جـ} = ٨$

$\Leftarrow ٢\text{جـ} = ٢ \longrightarrow \text{جـ} = ١$ بالتعويض في ①

$٣ - \text{ب} + ١ = ٥ \longleftarrow \text{ب} = -١$

$\text{ق}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} - \text{س} + ١$

$\text{ق}(٢) = ١٢ - ٢ + ١ = ١١$

(٢٣) $٢\text{ص} + \text{س} = ٥ \longleftarrow ٢\text{ص}' + ١ = \text{صفر}$

$\Leftarrow \text{ص}' = -\frac{١}{٢}$ ميل العمودي

$\Leftarrow$ ميل المماس $= ٢ \Leftarrow \text{ق}'(-١) = ٢$

$\text{ق}''(\text{س}) = ٦\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \int ٦\text{س}\,\text{د}\text{س} = ٣\text{س}^{٢} + \text{جـ}$

$\text{ق}'(-١) = ٣ + \text{جـ} = ٢ \Leftarrow \text{جـ} = -١$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} - ١$

$\text{ق}(\text{س}) = \int ٣\text{س}^{٢} - ١\,\text{د}\text{س}$

$= \text{س}^{٣} - \text{س} + \text{جـ}$

$\text{ق}(-١) = ٣$

$\text{ق}(-١) = -١ + ١ + \text{جـ} = ٣ \longleftarrow \text{جـ} = ٣$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - \text{س} + ٣$

(٢٤) $\text{ق}''(\text{س}) = \frac{٦}{\text{س}^{٣}}$

$\text{ق}'(-١) = ٢$ ، $\text{ق}(-١) = ٥$

$\text{ق}'(\text{س}) = \int ٦\text{س}^{-٣}\,\text{د}\text{س} = \frac{٦\text{س}^{-٢}}{-٢} + \text{جـ}$

$\text{ق}'(-١) = -٣ + \text{جـ} = ٢$

$\longleftarrow \text{جـ} = ٥$

$\text{ق}'(\text{س}) = -٣\text{س}^{-٢} + ٥$

$\text{ق}(\text{س}) = \int (-٣\text{س}^{-٢} + ٥)\,\text{د}\text{س}$

$= \frac{-٣\text{س}^{-١}}{-١} + ٥\text{س} + \text{جـ}$

$\text{ق}(-١) = -٣ - ٥ + \text{جـ} = ٥ \longleftarrow \text{جـ} = ١٣$

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{٣}{\text{س}} + ٥\text{س} + ١٣$

ش ٢٥

① $\int \frac{\text{د}\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤} = \int \frac{\text{د}\text{س}}{(\text{س}+٢)^{٢}}$

$= \int (\text{س}+٢)^{-٢}\,\text{د}\text{س} = \frac{(\text{س}+٢)^{-١}}{-١} + \text{جـ}$

② $\int \text{س}\sqrt{\frac{٣}{\text{س}^{٢}} - \frac{١}{\text{س}}}\,\text{د}\text{س}$

$= \int \text{س}\sqrt{\frac{٣ - \text{س}}{\text{س}^{٢}}}\,\text{د}\text{س}$

$= \int \frac{\text{س}\sqrt{٣ - \text{س}}}{|\text{س}|}\,\text{د}\text{س}$

$= \begin{cases} \int (٣ - \text{س})^{\frac{١}{٢}} & \text{س} > ٠ \\ -\int (٣ - \text{س})^{\frac{١}{٢}} & \text{س} < ٠ \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{-٢}{٣}(٣ - \text{س})^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} & \text{س} > ٠ \\ \frac{+٢}{٣}(٣ - \text{س})^{\frac{٣}{٢}} & \text{س} < ٠ \end{cases}$

③ $\int \sqrt{\text{س}\sqrt{\text{س}\sqrt{\text{س}}}}\,\text{د}\text{س}$

$= \int \left(\text{س}\left(\text{س}(\text{س})^{\frac{١}{٢}}\right)^{\frac{١}{٢}}\right)^{\frac{١}{٢}}\text{د}\text{س}$

$= \int \left(\text{س}(\text{س}^{\frac{٣}{٢}})^{\frac{١}{٢}}\right)^{\frac{١}{٢}}\text{د}\text{س} = \int \left(\text{س} \times \text{س}^{\frac{٣}{٤}}\right)^{\frac{١}{٢}}$

$= \int \left(\text{س}^{\frac{٧}{٤}}\right)^{\frac{١}{٢}}\text{د}\text{س} = \int \text{س}^{\frac{٧}{٨}}\,\text{د}\text{س}$

$= \frac{٨}{١٥}\text{س}^{\frac{١٥}{٨}} + \text{جـ}$

④ $\int \text{س}^{١٠}\left(\frac{٣}{\text{س}}-٥\right)^{١٠}\,\text{ءس}$

$= \int \text{س}^{١٠}\left(\frac{٣-٥\text{س}}{\text{س}}\right)^{١٠}\text{ءس} = \int \frac{\cancel{\text{س}^{١٠}}\,(٣-٥\text{س})^{١٠}}{\cancel{\text{س}^{١٠}}}\,\text{ءس}$

$= \int (٣-٥\text{س})^{١٠}\,\text{ءس} = \frac{(٣-٥\text{س})^{١١}}{-٥٥} + \text{جـ}$

⑤ $\int \frac{٢\text{س}^{٣}+١٦}{٥\text{س}+١٠}\,\text{ءس} = \int \frac{٢(\text{س}^{٣}+٨)}{٥(\text{س}+٢)}\,\text{ءس}$

$= ٢\int \frac{(\text{س}+٢)(\text{س}^{٢}-٢\text{س}+٤)}{٥(\text{س}+٢)}\,\text{ءس}$

$= \frac{٢}{٥}\int (\text{س}^{٢}-٢\text{س}+٤)\,\text{ءس}$

$= \frac{٢}{٥}\left(\frac{\text{س}^{٣}}{٣}-\text{س}^{٢}+٤\text{س}\right) + \text{جـ}$

⑥ $\int \text{س}\sqrt[٣]{\frac{٢}{\text{س}^{٣}}+\frac{٥}{\text{س}^{٢}}} = \int \text{س}\sqrt[٣]{\frac{٢+٥\text{س}}{\text{س}^{٣}}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\cancel{\text{س}}\sqrt[٣]{٢+٥\text{س}}}{\cancel{\text{س}}}\,\text{ءس} = \int (٢+٥\text{س})^{\frac{١}{٣}}\,\text{ءس}$

$= \frac{٣}{٤} \times \frac{(٢+٥\text{س})^{\frac{٤}{٣}}}{٥} + \text{جـ}$

⑦ $\int \frac{\text{س}-٢\sqrt{\text{س}}+١}{١-\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{(\sqrt{\text{س}}-١)\overset{(-١)}{\cancel{(\sqrt{\text{س}}-١)}}}{\cancel{١-\sqrt{\text{س}}}}\,\text{ءس}$

$= \int (-\sqrt{\text{س}}+١)\,\text{ءس}$

$= -\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{س} + \text{جـ}$

⑧ $\int \frac{\text{جتا}^{٤}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس} = \int \frac{(١-\text{جا}^{٢}\text{س})^{٢}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$

$= \int \frac{١-٢\text{جا}^{٢}\text{س}+\text{جا}^{٤}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}} - \frac{٢\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}} + \frac{\text{جا}^{٤}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$

$= \int \text{قتا}^{٢}\text{س} - ٢ + \text{جا}^{٢}\text{س}$

$= \int \text{قتا}^{٢}\text{س} - ٢ + \frac{١}{٢}(١-\text{جتا}٢\text{س})$

$= -\text{ظتا}\,\text{س} - ٢\text{س} + \frac{١}{٢}\left(\text{س} - \frac{\text{جا}٢\text{س}}{٢}\right)$

⑨ $\int \left(\frac{١}{\text{قا}^{٢}\text{س}} + \frac{١}{\text{قتا}^{٢}\text{س}}\right)\text{ءس}$

$= \int (\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس} = \int ١\,\text{ءس} = \text{س} + \text{جـ}$

⑩ $\int \frac{\text{جا}^{٢}\text{س} - \text{جاس} - ٢}{٢ - \text{جاس}}$

$= \int \frac{\overset{-}{\cancel{(\text{جاس}-٢)}}(\text{جاس}+١)}{\cancel{٢-\text{جاس}}} = \int (-\text{جاس}-١)\,\text{ءس}$

$= \text{جتاس} - \text{س} + \text{جـ}$

⑪ $\int \frac{\text{جا}^{٣}\text{س} - \text{جتا}^{٣}\text{س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{\cancel{(\text{جاس} - \text{جتاس})}(\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جاس}\,\text{جتاس} + \text{جتا}^{٢}\text{س})}{\cancel{\text{جاس} - \text{جتاس}}}$

$= \int \left(١ + \frac{\text{جا}٢\text{س}}{٢}\right)\text{ءس} = \text{س} - \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{٤} + \text{جـ}$

⑫ $\int \frac{١ - \text{جا}٢\text{س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}\,\text{ءس} = \int \frac{(\text{جاس} - \text{جتاس})^{٢}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$

$= \int \text{جاس} - \text{جتاس} = -\text{جتاس} + \text{جاس} + \text{جـ}$

⑬ ∫ جتا٣س (جتا٢س جتاس − جا٢س جاس)

= ∫ جتا٣س × جتا(٢س + س)

= ∫ جتا٣س جتا٣س ءس

= ∫ جتا^{٢}٣س ءس = ∫ $\frac{١}{٢}$(١ + جتا٦س)

= $\frac{١}{٢}$(س + $\frac{\text{جا٦س}}{٦}$) + جـ

---

⑭ ∫ $\frac{\text{٢ + ٢جتا}^{٣}\text{س}}{\text{١ + جتا٢س}}$ = ∫ $\frac{\text{٢ + ٢جتا}^{٣}\text{س}}{\cancel{\text{١}}\text{ + ٢جتا}^{٢}\text{س} - \cancel{\text{١}}}$

= ∫ $\frac{٢}{\text{٢جتا}^{٢}\text{س}}$ + $\frac{\text{٢جتا}^{٣}\text{س}}{\text{٢جتا}^{٢}\text{س}}$

= ∫ قا^{٢}س + جتاس

= ظاس + جاس + جـ

---

⑮ ∫ ٢جا٣س جاس + جتا٤س

= ∫ $\frac{\cancel{\text{٢}} \times \frac{١}{\cancel{٢}}\text{(جتا٢س} - \cancel{\text{جتا٤س}}\text{)} + \cancel{\text{جتا٤س}}}{\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}}$

= ∫ $\frac{\text{جتا٢س}}{\text{جتا٢س}}$ ءس = ∫ ١ ءس = س + جـ

---

⑯ ∫ جا٤س جتا٨س ءس = $\frac{١}{٢}$ ∫ جا١٢س + جا−٤س

= $\frac{١}{٢}$ ($\frac{\text{−جتا١٢س}}{١٢}$ + $\frac{\text{جتا٤س}}{٤}$) + جـ

---

⑰ ∫ (٦ − ظا^{٢}س) ءس = ∫ ٦ − (قا^{٢}س − ١) ءس

= ∫ (٧ − قا^{٢}س) ءس = ٧س − ظاس + جـ

---

⑱ ∫ جا^{٢} $\frac{س}{٢}$ − جتا^{٢} $\frac{س}{٢}$ متطابقة

= − ∫ جتاس ءس = − جاس + جـ

---

⑲ ∫ ٤ جا٣س جتا٣س ءس

= ٢ ∫ ٢جا٣س جتا٣س ءس = ٢ ∫ جا٦س ءس

= −٢ $\frac{\text{جتا٦س}}{٦}$ + جـ

---

⑳ ∫ ظا(٢س−١) قا(٢س−١) ءس

= $\frac{\text{قا(٢س−١)}}{٢}$ + جـ

㉑ ∫ $\sqrt[٣]{\text{س}\sqrt{\text{س}}}$ ءس = ∫ (س(س)$^{\frac{١}{٢}}$)$^{\frac{١}{٣}}$

= ∫ (س$^{\frac{٣}{٢}}$)$^{\frac{١}{٣}}$ = ∫ س$^{\frac{١}{٢}}$ ءس = $\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ + جـ

㉒ ∫ ظاس (ظاس + ظتاس) ءس

= ∫ ظا^{٢}س + ظاس ظتاس

= ∫ (قا^{٢}س ~~− ١ + ١~~) = ∫ قا^{٢}س ءس

= ظاس + جـ

㉓ ∫ $\frac{١}{\text{(جتا٤س − جا٤س)}^{٢}}$

= ∫ $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{٤س − ٢جا٤س جتا٤س + جا}^{٢}\text{٤س}}$

= ∫ $\frac{١}{\text{١ − جا٨س}}$ × $\frac{\text{١ + جا٨س}}{\text{١ + جا٨س}}$

= ∫ $\frac{\text{١ + جا٨س}}{\text{١ − جا}^{٢}\text{٨س}}$ = ∫ $\frac{\text{١ + جا٨س}}{\text{جتا}^{٢}\text{٨س}}$ ءس

= ∫ قا^{٢}٨س + قا٨س ظا٨س

= $\frac{\text{ظا٨س}}{٨}$ + $\frac{\text{قا٨س}}{٨}$ + جـ

㉔ ∫ $\frac{\text{جا}^{٣}\text{س − ٧}}{\text{١ − جتا}^{٢}\text{س}}$ = ∫ $\frac{\text{جا}^{٣}\text{س − ٧}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$

= ∫ جاس − ٧قتا^{٢}س

= − جتاس + ٧ ظتاس + جـ

الدرس الثالث

التكامل المحدود

تعريف

اذا كان م(س) معكوساً لمشتقة الاقتران ق، يسمى $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{دس}$ بالتكامل المحدود

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,.\,\text{دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{م}'\text{(س)}\,.\,\text{دس}$$

$$= \text{م(س)}\Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}}$$

$$= \text{م(ب)} - \text{م(أ)}$$

ب: الحد العلوي   أ: الحد السفلي

وهنا نقوم باجراء التكامل تماماً كما في التكامل غير المحدود ولكن بدون ان نكتب ثابت التكامل (جـ) بل نقوم هنا بالتعويض .

التكامل المحدود للاقتران ق'(س) في الفترة [أ، ب] هو

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}'\text{(س)}\,.\,\text{دس} = \text{ق(س)}\Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}}$$

$$= \text{ق(ب)} - \text{ق(أ)}$$

ملاحظة هامة

① في التكامل المحدود لا نكتب جـ لأنه يتم حذفها دائماً

② دائماً تعويض الحد الأعلى − تعويض الحد الأدنى

③ قواعد التكامل المحدود هي نفس قواعد التكامل غير المحدود

مثال ①

اذا كان ق(٣) = ٥ ، ق(٤) = ١٠

اوجد $\int_{٣}^{٤} \text{ق}'\text{(س)}\,.\,\text{دس}$

أ) −٥   ب) ٥   جـ) ١٠   د) ٤

الحل

$$= \text{ق(س)}\Big]_{٣}^{٤} = \text{ق(٤)} - \text{ق(٣)}$$

$$= ١٠ - ٥ = ٥$$

الجواب (ب)

مثال ② $\int_{-٣}^{٦} (\text{٢س} - ٦)\,\text{دس} = \text{س}^{٢} - \text{٦س}\Big]_{-٣}^{٦}$

$= (٣٦ - ٣٦) - (٩ + ١٨) = -٢٧$

مثال ③ $\int_{٣}^{١} \text{٢س}\,\text{دس} = \text{س}^{٢}\Big]_{٣}^{١} = ١ - ٩ = -٨$

مثال ④

$\int_{١}^{٣٢} \frac{٤}{\sqrt[٥]{\text{س}^{٣}}}\,\text{دس} = \int_{١}^{٣٢} ٤ \times \text{س}^{\frac{-٣}{٥}}\,\text{دس}$

$= ٤ \times \frac{٥}{٢}\,\text{س}^{\frac{٢}{٥}}\Big]_{١}^{٣٢} = ١٠\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}}\Big]_{١}^{٣٢}$

$= ١٠\left((\sqrt[٥]{٣٢})^{٢} - (\sqrt[٥]{١})^{٢}\right) = ١٠(٤ - ١) = ٣٠$

مثال ⑤

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً على مجاله

$\int \text{ق(س)}\,\text{دس} = \text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظا}^{٢}\text{س} + \text{س}^{٢}$

فإن $\int_{-١}^{٢} \text{ق}'\text{(س)}\,\text{دس}$

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٧ د) ٦

الحل

$\int_{-١}^{٢} \text{ق}'\text{(س)}\,\text{دس} = \text{ق(س)}\Big]_{-١}^{٢}$

لكن $\int \text{ق(س)}\,\text{دس} = ١ + \text{س}^{٢}$ متطابقة

باشتقاق الطرفين

$\text{ق(س)} = \text{٢س} \Leftarrow \text{ق(٢)} - \text{ق(-١)} = ٤ + ٢ = ٦$

ⓓ

مثال ⑥

قاعدة كثير الحدود ق(س) من الدرجة الأولى حيث أن $\text{ق}'(١) = ٢$

$\int_{٠}^{١} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \frac{١}{٢}$ هي

أ) $\text{٢س} + \frac{١}{٢}$ ب) $\text{٢س} + \frac{٣}{٢}$

ج) $\text{٢س} - \frac{١}{٢}$ د) $\text{٢س} - \frac{٣}{٢}$

الحل $\text{ق(س)} = \text{أس} + \text{ب}$

$\text{ق}'\text{(س)} = \text{أ} \Leftarrow \text{ق}'(١) = ٢$

$\Leftarrow \text{أ} = ٢$

$\Leftarrow \int_{٠}^{١} \text{٢س} + \text{ب}\,\text{دس} = \frac{١}{٢}$

$\text{س}^{٢} + \text{ب س}\Big]_{٠}^{١} = \frac{١}{٢} \Leftarrow ١ + \text{ب} = \frac{١}{٢}$

$\Leftarrow \text{ب} = -\frac{١}{٢} \quad \text{ق(س)} = \text{٢س} - \frac{١}{٢}$ ⓙ

مثال ⑦

$\int_{١}^{١٦} \frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٣}}}\,\text{دس} = \int_{١}^{١٦} \text{س}^{\frac{-٣}{٢}}\,\text{دس} = -٢\,\text{س}^{\frac{-١}{٢}}\Big]_{١}^{١٦}$

$= \frac{-٢}{\sqrt{\text{س}}}\Big]_{١}^{١٦} = \frac{-٢}{٤} - (-٢) = \frac{-١}{٢} + ٢ = \frac{٣}{٢}$

مثال ⑧ $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٦}} \text{قتاس ظتاس}\,\text{دس} =$

أ) $٢ - \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ب) $-٢ - \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

ج) $-٢ + \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ د) $٢ + \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

الحل

$= -\text{قتاس}\Big]_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٦}} = \left(-\text{قتا}\frac{\pi}{٦} - \text{قتا}\frac{\pi}{٣}\right)$

$= -\left(٢ - \frac{٢}{\sqrt{٣}}\right) = -٢ + \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ⓙ

مثال ⑨ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا٢س}}{٢}\,\text{دس} =$

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) -٢ ج) ٢ د) $-\frac{١}{٢}$

الحل $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا٢س}}{٢}\,\text{دس} = -\frac{\text{جتا٢س}}{٤}\Big]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= -\frac{١}{٤}(\text{جتا}\,\pi - \text{جتا}\,٠) = -\frac{١}{٤}(-١ - ١)$

$= \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ Ⓐ

مثال ⑩

جد $\int_{١}^{٣} \left(\text{س}^{٢} + ٢\int_{١}^{٢} \text{ص}\,\text{دص}\right) \text{دس}$

الحل

$\int_{١}^{٣} \left(\text{س}^{٢} + \cancel{٢}\left[\frac{\text{ص}^{٢}}{\cancel{٢}}\right]_{١}^{٢}\right) \text{دس}$

$= \int_{١}^{٣} \left(\text{س}^{٢} + ٣\right) \text{دس}$

$= \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + ٣\text{س}\right]_{١}^{٣} = ١٨ - \left(\frac{١}{٣} + ٣\right)$

$= \frac{٤٤}{٣}$

مثال ⑪

اذا كان $\int_{-١}^{٢} \left(٣\text{س}^{٢} - ٢\int_{٠}^{\text{جـ}} ٣\text{م}\,.\,\text{دم}\right) = -٢٠$

جد قيمة جـ

الحل

نجد $\int_{٠}^{\text{جـ}} ٣\text{م}\,\text{دم} = \left[\frac{٣\text{م}^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{\text{جـ}} = \frac{٣\text{جـ}^{٢}}{٢}$

$= \int_{-١}^{٣} ٣\text{س}^{٢} - \frac{\cancel{٢}\times ٣\text{جـ}^{٢}}{\cancel{٢}} = -٢٠$

$= \left[\text{س}^{٣} - ٣\text{جـ}^{٢}\text{س}\right]_{-١}^{٣} = -٢٠$

$(٢٧ - ٩\text{جـ}^{٢}) - (-١ + ٣\text{جـ}^{٢}) = -٢٠$

$٢٨ - ١٢\text{جـ}^{٢} = -٢٠ \Rightarrow \text{جـ}^{٢} = ٤$

$\Rightarrow \text{جـ} = \pm ٢$

مثال ⑫

اذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً فما هي مجموعة قيم ن ، بحيث أن

$\int_{-١}^{١} \text{س}^{\text{ن}}\,\text{دس} = ٢\int_{٠}^{١} \text{س}^{\text{ن}}\,\text{دس}$

الحل

$\left[\frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}\right]_{-١}^{١} = ٢\left(\left[\frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}\right]_{٠}^{١}\right)$

$\frac{١}{\text{ن}+١} - \frac{(-١)^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} = ٢\left(\frac{١}{\text{ن}+١} - \text{صفر}\right)$

$\frac{١ - (-١)^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} = \frac{٢}{\text{ن}+١} \Rightarrow$

$١ - (-١)^{\text{ن}+١} = ٢ \Rightarrow (-١)^{\text{ن}+١} = -١$

$\Rightarrow$ ن + ١ = عدد فردي $\Rightarrow$ ن عدد زوجي

ن = {٢، ٤، ٦، ٨، ...}

مثال ⑬

اذا كان ق(٢) = ٧ ، ق(٦) = ١٠

فاوجد $\int_{٢}^{٦} \left(\text{ق}'(\text{س}) + ٢\right) \text{دس}$

أ) ١١ ب) -١١ جـ) ٢٢ د) -٢٢

الحل

$\int_{٢}^{٦} \left(\text{ق}'(\text{س}) + ٢\right) \text{دس} = \left[\text{ق}(\text{س}) + ٢\text{س}\right]_{٢}^{٦}$

$= \left(\text{ق}(٦) + ١٢\right) - \left(\text{ق}(٢) + ٤\right)$

$= ٢٢ - ١١ = ١١$ (أ)

قاعدة

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جـ}\,\text{دس} = \text{جـ}(\text{ب} - \text{أ})$

= ثابت (الأعلى - الأدنى)

مثال

$\int_{٢}^{٥} ٣\,\text{دس} = ٣(٥ - ٢) = ٣ \times ٣ = ٩$

$\int_{-٢}^{٣} -٤\,\text{دس} = -٤(٣ - -٢) = -٤ \times ٥ = -٢٠$

مثال ⑭

اوجد قيمة أ فيما يلي

① $\int_{١}^{٣} أ\,دس = ٨$

$أ(٣-١) = ٨ \rightarrow ٢أ = ٨$

$أ = ٤$

② $\int_{أ}^{٢أ} ٣\,.\,دس = ٦ \Rightarrow ٣(٢أ-أ) = ٦$

$\Rightarrow ٣أ = ٦ \rightarrow أ = ٢$

③ $\int_{أ+١}^{٢+٣أ} ٥\,.\,دس = ٤٠$

$٥(٢+٣أ-١-أ) = ٤٠ \rightarrow$

$٥(٢أ+١) = ٤٠ \rightarrow ٢أ+١ = ٨$

$٢أ = ٧ \Rightarrow أ = \frac{٧}{٢}$

مثال ⑮

اذا كان $م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٨}} حا^٢س\,.\,دس$

$ن = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٨}} جتا^٢س\,.\,دس$ جد قيمة

① $م+ن$ ب) $ن-م$

الحل

$م+ن = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٨}} حا^٢س + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٨}} جتا^٢س\,دس$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٨}} حا^٢س + جتا^٢س = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٨}} دس$

$= \frac{\pi}{٨}$

② $م-ن = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٨}} (جتا^٢س - حا^٢س)\,دس$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٨}} جتا٤س$

$= \frac{١}{٤} حا٤س \Big]_{٠}^{\frac{\pi}{٨}} = \frac{١}{٤}(حا\frac{\pi}{٤} - ٠)$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{١}{٤\sqrt{٢}}$

مثال ⑯

اذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين مكوسين لمشتقة ق(س) المتصل على [٣ ، ٥]

وكان $\int_{٣}^{٥} (م(س) - هـ(س))\,دس = ٨$ فاوجد

$\int_{١}^{٤} (س م(س) - س هـ(س))\,دس$

الحل الفرق بين اي مكلوسين = ثابت = جـ

$\int_{٣}^{٥} جـ\,دس = ٨ \rightarrow جـ(٥-٣) = ٨$

$\rightarrow جـ = ٤$

$م(س) - هـ(س) = ٤$

$\int_{١}^{٤} س(م(س) - هـ(س))\,دس$

$= \int_{١}^{٤} س \times ٤\,دس = \int_{١}^{٤} ٤س\,دس$

$= ٢س^٢\Big]_{١}^{٤} = ٣٢ - ٢ = ٣٠$

مثال ⑰

اذا كان $ق(س) = \int_{١}^{٥} \sqrt{س^٢+١}\,دس$

فان $ق'(س)$

أ) ٢   ب) $\sqrt{٥}$ جـ) صفر   د) ١

الحل ق'(س) = صفر مشتقة التكامل المحدود = صفر (جـ)

ملاحظة هامة

مشتقة التكامل المحدود = صفر

$\frac{د}{دس}\left(\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس\right) = صفر$

مثال ⑱

اذا كان $ق(س) = س^{3} + \int \frac{3س}{س+2} دس - \int_{-1}^{4} \frac{س^{2}}{س+7}$

جد $ق'(1)$

أ) ١   ب) −٤   جـ) ٤   د) ٣

الحل $ق'(س) = 3س^{2} + \frac{3س}{س+2} - 0$

$ق'(1) = 3 + 1 = 4$ (جـ)

مثال ⑲

اذا كان $م(س) = 2س^{2} - 4س + جـ$ معكوس لمشتقة ق(س) المتصل على [١، ٣] اوجد $\int_{1}^{3} ق(س)\, دس$

أ) ٨   ب) −٨   جـ) ١٢   د) ٦

الحل $\int_{1}^{3} ق(س) دس = م(3) - م(1)$

$= 18 - 12 + \cancel{جـ} - 2 + 4 - \cancel{جـ}$

$= 6 + 2 = 8$ (أ)

مثال ⑳

اذا كان $\int ق(س) دس = س^{2} + \int \left(5س - \int_{0}^{1} 2ص\, دص\right)$

اوجد ق(س)

أ) $ق(س) = س - 7$ ب) $ق(س) = 7 - س$

جـ) $ق(س) = 7س - 1$ د) $ق(س) = 1 - 7س$

الحل اشتقاق الطرفين

$ق(س) = 2س + 5س - \int_{0}^{1} 2ص\, دص$

$= 7س - ص^{2}\Big]_{0}^{1}$

$= 7س - 1$ (جـ)

مثال ㉑

اذا كان $\int ق(س) دس = س^{2} - 4س + 9$

وكان $\int_{-1}^{ب} ق(س) دس = 7$ اوجد قيمة ب

الحل $\int_{-1}^{ب} ق(س) دس = س^{2} - 4س + 9\Big]_{-1}^{ب}$

$ب^{2} - 4ب + 9 - (1+4+9) = 7$

$ب^{2} - 4ب - 12 = 0$

$(ب-6)(ب+2) = 0$ $ب = 6$ ، $ب = -2$

مثال ㉒ اذا كان

$\int_{0}^{1} \left(س^{أ} - س^{\frac{1}{أ}}\right) دس = 2$ جد قيمة أ

الحل

$\left[\frac{س^{أ+1}}{أ+1} - \frac{س^{\frac{أ+1}{أ}}}{\frac{أ+1}{أ}}\right]_{0}^{1} = 2$

$\frac{(1)^{أ+1}}{أ+1} - \frac{أ(1)^{\frac{أ+1}{أ}}}{أ+1} = 2 \Leftarrow \frac{1}{أ+1} - \frac{أ}{أ+1} = 2$

$\Leftarrow \frac{1-أ}{1+أ} = 2 \Leftarrow 1 - أ = 2أ + 2$

$\Leftarrow أ = \frac{-1}{3}$

مثال ㉓ جد $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 + جتا2س}{2}}\, دس$

الحل

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 + 2جتا^{2}س - 1}{2}} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{جتا^{2}س}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |جتاس| دس$

−جتاس   جتاس
$\frac{\pi}{2}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جتاس\, دس$

$= جاس\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$

خواص التكامل المحدود

خاصية ①

① $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جـ ق(س) دس} = \text{جـ} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس}$

② $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ق(س)} \mp \text{هـ(س)})\,\text{دس}$

$= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} \mp \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ(س) دس}$

يتوزع التكامل على الجمع والطرح

مثال ①

اذا كان $\int_{١}^{٥} \text{ق(س) دس} = ١٤$

$\int_{١}^{٥} \text{هـ(س) دس} = ٩$ اوجد مايلي

① $\int_{١}^{٥} ٣\text{ق(س) دس} + \int_{١}^{٥} ٢\text{هـ(س) دس}$

الحل $٣ \times ١٤ + ٢ \times ٩ = ٦٠$

② $\int_{١}^{٥} (٢\text{ق(س)} + \text{هـ(س)} + ٣\text{س}^{٢})\,\text{دس}$

$= ٢ \times ١٤ + ٩ + \text{س}^{٣} \Big]_{١}^{٥}$

$= ٣٧ + ١٢٥ - ١ = ١٦١$

مثال ②

اذا كان $\int_{٥}^{٧} \text{ق(س) دس} = ٧$ ، $\int_{٥}^{٧} ٣\text{هـ(س) دس} = ٩$

اوجد مايلي

① $\int_{٥}^{٧} (\text{ق(س)} + \text{هـ(س)})\,\text{دس} = ٧ + ٣ = ١٠$

② $\int_{٥}^{٧} (\text{هـ(س)} + ٢\text{س} + ٤)\,\text{دس}$

$= ٣ + (\text{س}^{٢} + ٤\text{س}) \Big]_{٥}^{٧} = ٨٠ - ٤٥ = ٣٥$

مثال ③

اذا كان $\int_{١}^{٣} (٢\text{ق(س)} + \frac{١}{\text{س}^{٢}} - ٦)\,\text{دس} = ١٢$

فاوجد $\int_{١}^{٣} (\frac{\text{ق(س)}}{٢} - ٣\text{س}^{٢})\,\text{دس}$

الحل

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق(س) دس} + \int_{١}^{٣} \frac{١}{\text{س}^{٢}} - \int_{١}^{٣} ٦\,\text{دس} = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق(س) دس} + \int_{١}^{٣} \text{س}^{-٢} - ٦(٣-١) = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق(س) دس} + \frac{\text{س}^{-١}}{-١} \Big]_{١}^{٣} - ١٢ = ١٢$

$= ٢\int_{١}^{٣} \text{ق(س) دس} \quad \frac{-١}{٣} + ١ = ٢٤$

$\Leftarrow ٢\int_{١}^{٣} \text{ق(س) دس} = ٢٤ - \frac{٢}{٣} = \frac{٧٠}{٣}$

$\Leftarrow \int_{١}^{٣} \text{ق(س) دس} = \frac{٧٠}{٦} = \frac{٣٥}{٣}$

مثال ④

اذا كان $\int_{-٢}^{٥} (\text{ق(س)} + ٢\text{هـ(س)})\,\text{دس} = ١٧$

وكان $\int_{-٢}^{٥} \text{هـ(س) دس} = ٦$ أوجد $\int_{-٢}^{٥} (٣ - \text{ق(س)})\,\text{دس}$

الحل

$\int_{-٢}^{٥} \text{ق(س) دس} + ٢\int_{-٢}^{٥} \text{هـ(س) دس} = ١٧$

$\int_{-٢}^{٥} \text{ق(س) دس} + ٢ \times ٦ = ١٧$

$\int_{-٢}^{٥} \text{ق(س) دس} = ٥ \Leftarrow$

$\int_{-٢}^{٥} (٣ - \text{ق(س)})\,\text{دس} = \int_{-٢}^{٥} ٣\,\text{دس} - \int_{-٢}^{٥} \text{ق(س) دس}$

$= ٣ \times ٧ - ٥ = ٢١ - ٥ = ١٦$

مثال ⑤

اذا كان $\int_{٠}^{٣} \text{ن}(\text{س}+١)^{\text{ن}-١}\,\text{ءس} = ١٥$

ن ≠ ٠، فان قيمة ن تساوي

أ) ٨ ب) ٦ جـ) ٤ د) ٢

الحل

$\left[\frac{\text{ن}(\text{س}+١)^{\text{ن}}}{\text{ن}}\right]_{٠}^{٣} = (٣+١)^{\text{ن}} - ١^{\text{ن}} = ١٥$

$\Rightarrow ٤^{\text{ن}} - ١ = ١٥ \longrightarrow ٤^{\text{ن}} = ١٦$

$٤^{\text{ن}} = ٤^{٢} \longrightarrow \text{ن} = ٢$

خاصية ②

① $\int_{أ}^{أ} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{صفر}$

② $\int_{أ}^{ب} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = -\int_{ب}^{أ} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

ملاحظة هامة

① اذا تساوى حدا التكامل فان التكامل = صفر، والعكس غير صحيح اي أنه اذا كان جواب التكامل يساوي صفر فليس شرطاً ان الحدين (الأعلى والادنى) متساويان

② عند قلب حدود التكامل فان اشارة التكامل تتغير

مثال $\int_{٢}^{٣} ٥\,\text{ءس} = ٥(٣-٢) = ٥$

لكن $\int_{٣}^{٢} ٥\,\text{ءس} = ٥(٢-٣) = -٥$

مثال ①

جد قيمة التكاملات التالية

① $\int_{٣}^{٣} (\text{س}^{٣} - ٥\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ١)\,\text{ءس} = \text{صفر}$

② $\int_{٦}^{٦} \frac{٣\text{س}-١}{\text{س}^{٢}+٥}\,\text{ءس} = \text{صفر}$

③ اذا كان $\int_{أ}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{صفر}$ فاوجد قيمة أ (احد القيم المتوقعة)

الحل: أ = ٢ لأن $\int_{٢}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{صفر}$

④ اذا كان $\int_{-١}^{\text{جـ}} \text{س}\,\text{ءس} = \text{صفر}$ جد قيمة جـ

الحل: $\int_{-١}^{\text{جـ}} \text{س}\,\text{ءس} = \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢}\right]_{-١}^{\text{جـ}} = \text{صفر}$

$\frac{\text{جـ}^{٢}}{٢} - \frac{١}{٢} = \text{صفر} \Rightarrow \text{جـ}^{٢} = ١ \Rightarrow \text{جـ} = \pm ١$

⑤ اذا كان $\int_{٣}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = ٥$

جد $\int_{٤}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$ الجواب = −٥

مثال ②

اذا كان $\int_{١}^{\text{جـ}} (٣\text{س}^{٢} + ٦\text{س})\,\text{ءس} = \text{صفر}$

فاوجد قيم الثابت جـ ؟

الحل

$\int_{١}^{\text{جـ}} (٣\text{س}^{٢} + ٦\text{س})\,\text{ءس} = \left[\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢}\right]_{١}^{\text{جـ}} = \text{صفر}$

$\text{جـ}^{٣} + ٣\text{جـ}^{٢} - (١+٣) = \text{صفر}$

$\text{جـ}^{٣} + ٣\text{جـ}^{٢} - ٤ = ٠$ نستخدم القسمة التركيبية

	جـ³	جـ²	جـ	حد
$\boxed{١}$	١	٣	٠	−٤
		١	٤	٤
	١	٤	٤	٠

$(\text{جـ}-١)(\text{جـ}^{٢} + ٤\text{جـ} + ٤) = ٠$

$(\text{جـ}-١)(\text{جـ}+٢)(\text{جـ}+٢) = ٠$

$\text{جـ} = ١ \quad \text{جـ} = -٢$

مثال ③

جد قيمة أ حيث $\int_{أ}^{أ} ق(س)\,دس = صفر$

$\int_{٢}^{س} ق(س)\,دس = أس^{٢} + ٢س - ٥$

الحل

نضع المساواه بين حدود التكامل س = ٢

$\int_{٢}^{٢} ق(س)\,دس = أ(٢)^{٢} + ٢×٢ - ٥ = ٠$

$٤أ + ٤ - ٥ = صفر \quad أ = \frac{١}{٤}$

مثال ④

اذا كان $\int_{٢}^{٥} ٢ق(س)\,دس = ٦$ فان

$\int_{٥}^{٢} (ق(س) - ٢)\,دس =$

أ) −٣ ب) ٣ ج) ٩ د) −٩

الحل

$\int_{٢}^{٥} ق(س)\,دس = \frac{٦}{٢} = ٣$

$\int_{٥}^{٢} ق(س) - \int_{٥}^{٢} ٢\,دس = -٣ - ٢(٢-٥)$

$= -٣ - ٢×-٣ = -٣ + ٦ = ٣$ (ب)

مثال ⑤

اذا كان $\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس = ٦$ ، $\int_{١}^{٣} ٢هـ(س)\,دس = ١٠$

فاوجد $\int_{٣}^{١} [هـ(س) - ٢ق(س) + ٢س - ٤]\,دس$

أ) ٧ ب) −٧ ج) ٨ د) −٨

الحل

$\int_{١}^{٣} هـ(س)\,دس = \frac{١٠}{٢} = ٥$

$\int_{٣}^{١} هـ(س) - ٢\int_{٣}^{١} ق(س)\,دس + \int_{٣}^{١} (٢س-٤)\,دس$

$- ٥ - ٢× -٦ + [(س^{٢} - ٤س)]_{٣}^{١}$

$= - ٥ + ١٢ + (١ - ٤) - (٩ - ١٢)$

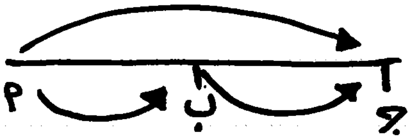
$= - ٥ + ١٢ - ٣ + ٣$

$= ٧$ (أ)

خاصية ③

خاصية الاضافة

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = \int_{أ}^{ج} ق(س)\,دس + \int_{ج}^{ب} ق(س)\,دس$$



أمثلة

① $\int_{٢}^{٤} ق(س)\,دس + \int_{٤}^{٩} ق(س)\,دس = \int_{٢}^{٩} ق(س)\,دس$

② $\int_{-١}^{٥} ق(س)\,دس + \int_{٧}^{-١} ق(س)\,دس$

$= \int_{٧}^{-١} ق(س)\,دس + \int_{-١}^{٥} ق(س)\,دس = \int_{٧}^{٥} ق(س)\,دس$

③ $\int_{٢}^{٥} ق(س)\,دس - \int_{٨}^{٥} ق(س)\,دس$

$= \int_{٢}^{٥} ق(س)\,دس + \int_{٥}^{٨} ق(س)\,دس = \int_{٢}^{٨} ق(س)\,دس$

مثال ①

اذا كان $\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس = ٥$ وكان $\int_{٣}^{٥} ق(س)\,دس = ٦$

فاوجد $\int_{١}^{٥} ق(س)\,دس$.

الحل

$\int_{١}^{٥} ق(س)\,دس = \int_{١}^{٣} ق(س)\,دس + \int_{٣}^{٥} ق(س)\,دس$

$= ٥ + ٦ = ١١$

مثال ②

اذا كان $\int_{\text{٦}}^{\text{١}} \text{٣}\text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} = \text{٩}$ ، $\int_{\text{١}}^{\text{٤}} \text{٢}\text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} = \text{٤}$

فاوجد $\int_{\text{٤}}^{\text{٦}} (\text{٣}\text{هـ}(\text{س}) - \text{٢})\, \text{دس}$

الحل

$\int_{\text{٦}}^{\text{١}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} = \frac{\text{٩}}{\text{٣}} = \text{٣}$ ، $\int_{\text{١}}^{\text{٤}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} = \frac{\text{٤}}{\text{٢}} = \text{٢}$

$\text{٣}\int_{\text{٤}}^{\text{٦}} \text{هـ}(\text{س}) - \int_{\text{٤}}^{\text{٦}} \text{٢}\, \text{دس}$

$= \text{٣}\left(\int_{\text{٤}}^{\text{١}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} + \int_{\text{١}}^{\text{٦}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس}\right) - \text{٢}(\text{٦}-\text{٤})$

$= \text{٣}(-\text{٢}+-\text{٣}) - \text{٤} = \text{٣} \times -\text{٥} - \text{٤} = -\text{١٩}$

مثال ③

اذا كان $\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{٢}\text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} = \text{٦}$

$\int_{\text{٥}}^{\text{٢}} (\text{٣}\text{هـ}(\text{س}) + \text{٢س})\, \text{دس} = \text{١٥}$ أوجد $\int_{\text{٠}}^{\text{٥}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس}$

الحل

$\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} = \frac{\text{٦}}{\text{٢}} = \text{٣}$

$\text{٣}\int_{\text{٥}}^{\text{٢}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} + \int_{\text{٥}}^{\text{٢}} \text{٢س}\, \text{دس} = \text{١٥}$

$\text{٣}\int_{\text{٥}}^{\text{٢}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} + \text{س}^{\text{٢}}\Big]_{\text{٥}}^{\text{٢}} = \text{١٥}$

$\text{٣}\int_{\text{٥}}^{\text{٣}} \text{هـ}(\text{س}) + (\text{٤} - \text{٢٥}) = \text{٥}$

$\Leftarrow \int_{\text{٥}}^{\text{٣}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} = \frac{\text{٣٦}}{\text{٣}} = \text{١٢}$

$\Leftarrow \int_{\text{٠}}^{\text{٥}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} = \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} + \int_{\text{٢}}^{\text{٥}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس}$

$= \text{٣} + -\text{١٢} = -\text{٩}$

مثال ④

اذا كان هـ اقتراناً قابلاً للتكامل على الفترة التي تنتمي اليها الاعداد أ ، ب ، جـ

فاوجد $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس}$

أ) $\int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس}$ ب) $-\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس}$

جـ) $\int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس}$ د) $-\int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس}$

الحل

$\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} + \int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس}$

$= \int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} + \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس}$ (جـ)

مثال ⑤

اذا كان هـ(س) اقتراناً متصلاً على ح وكان

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} - \int_{\text{٥}}^{\text{٣}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} = \int_{\text{٣}}^{\text{١}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس}$

فاوجد قيمة أ ، ب

الحل

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} = \int_{\text{٣}}^{\text{١}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} + \int_{\text{٥}}^{\text{٣}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس}$

$= \int_{\text{٥}}^{\text{١}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس}$

$\Leftarrow$ أ = ٥ ، ب = ١

ملاحظة

يشترط في خاصية الأضافه ان يكون ما داخل التكامل نفس المقدار

مثال ⑥

اذا كان $\int_{\text{١}}^{\text{٨}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} = \text{١٠}$ فاوجد

$\int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} - \int_{\text{٨}}^{\text{٥}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس}$

الحل

$\int_{\text{١}}^{\text{٥}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} + \int_{\text{٥}}^{\text{٨}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس} = \int_{\text{١}}^{\text{٨}} \text{هـ}(\text{س})\, \text{دس}$

$= \text{١٠}$

مثال ⑦

اذا كان $\int_{٣}^{٥} \left(\frac{ق(س)}{٢} - ٣\right) دس = ٤$ ، $\int_{٨}^{٥} ق(س) دس = ٦$ جد $\int_{٣}^{٨} (ق(س) + ٤س) دس$

الحل

$\frac{١}{٢} \int_{٣}^{٥} ق(س) - \int_{٣}^{٥} ٣ دس = ٤$

$= \frac{١}{٢} \int_{٣}^{٥} ق(س) دس - ٦ = ٤$

$\Leftarrow \int_{٣}^{٥} ق(س) دس = ٢٠$

$\int_{٣}^{٨} ق(س) + \int_{٣}^{٨} ٤س دس = \int_{٣}^{٨} ق(س) + ٢س^{٢} \Big]_{٣}^{٨}$

$= \int_{٣}^{٥} ق(س) + \int_{٥}^{٨} ق(س) دس + ١١٠$

$= ٢٠ - ٦ + ١١٠ = ١٢٤$

مثال ⑧

اوجد قيمة $\int_{٢}^{٣} (٣س^{٢} + ٥) دس + \int_{٣}^{٤} (٣س^{٢} + ٥) دس$

الحل

$= \int_{٢}^{٤} (٣س^{٢} + ٥) دس = س^{٣} + ٥س \Big]_{٢}^{٤}$

$= (٦٤ + ٢٠) - (٨ + ١٠) = ٨٤ - ١٨ = ٦٦$

تكامل الاقترانات المتشعبة

ملاحظه هامة

في الاقترانات المتشعبه نستخدم خاصية الاضافه اذا لزم الأمر ويجب اعادة تعريف القيمه المطلقه واكبر عدد صحيح .

مثال ①

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & ١ \leq س \leq ٣ \\ ٤س & ٣ < س \leq ٥ \end{cases}$

اوجد ① $\int_{١}^{٥} ق(س) دس$ ② $\int_{٢}^{٤} ق(س) دس$

الحل

① $\int ق(س) دس = \int_{١}^{٣} ٣س^{٢} دس + \int_{٣}^{٥} ٤س دس$

$= س^{٣} \Big]_{١}^{٣} + ٢س^{٢} \Big]_{٣}^{٥} = ٢٦ + ٣٢ = ٥٨$

② $\int_{٢}^{٤} ق(س) دس = \int_{٢}^{٣} ق(س) دس + \int_{٣}^{٤} ق(س) دس$

$= \int_{٢}^{٣} ٣س^{٢} دس + \int_{٣}^{٤} ٤س دس$

$= س^{٣} \Big]_{٢}^{٣} + ٢س^{٢} \Big]_{٣}^{٤} = ١٩ + ١٤ = ٣٣$

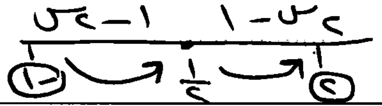
مثال ②

جد قيمة $\int_{-١}^{٢} |١ - ٢س| دس$

الحل

نعيد تعريف القيمة المطلقة

$١ - ٢س = ٠ \longleftarrow س = \frac{١}{٢}$



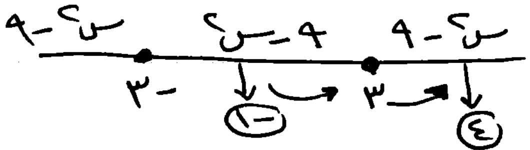
$$\int_{-١}^{٢} |١-٢س| = \int_{-١}^{\frac{١}{٢}} (١-٢س)\,ءس + \int_{\frac{١}{٢}}^{٢} (٢س-١)\,ءس$$

$$= \left[س - س^{٢}\right]_{-١}^{\frac{١}{٢}} + \left[س^{٢} - س\right]_{\frac{١}{٢}}^{٢} = \frac{٩}{٢}$$

مثال ③

جد $\int_{١}^{٤} |س^{٢}-٩|\,ءس$

الحل

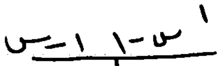


$$= \int_{١}^{٣} (٩-س^{٢})\,ءس + \int_{٣}^{٤} (س^{٢}-٩)\,ءس$$

$$= \left[٩س - \frac{س^{٣}}{٣}\right]_{١}^{٣} + \left[\left(\frac{س^{٣}}{٣} - ٩س\right)\right]_{٣}^{٤} = \frac{٣٨}{٣}$$

مثال ④ جد $\int_{١}^{٢} \sqrt{س^{٢}-٢س+١}\,ءس$

$$= \int_{١}^{٢} \sqrt{(س-١)^{٢}}\,ءس = \int_{١}^{٢} |س-١|\,ءس$$



$$= \int_{١}^{٢} (س-١)\,ءس = \left[\frac{س^{٢}}{٢} - س\right]_{١}^{٢}$$

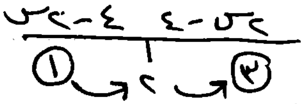
$$= (٢-٢) - (\frac{١}{٢} - ١) = \frac{١}{٢}$$

مثال ⑤

قيمة التكامل $\int_{٣}^{١} |٢س-٤|\,ءس$

أ) ٢- ب) ٢ ج) ١٤ د) ٧

الحل



$$\int_{٣}^{١} |٢س-٤|\,ءس = -\int_{١}^{٣} |٢س-٤|\,ءس$$

$$= -\left(\int_{١}^{٢} (٤-٢س)\,ءس + \int_{٢}^{٣} (٢س-٤)\,ءس\right)$$

$$= -\left(\left[٤س - س^{٢}\right]_{١}^{٢} + \left[س^{٢} - ٤س\right]_{٢}^{٣}\right)$$

$$= -(٤-٣) + (-١-٣)+٤)$$

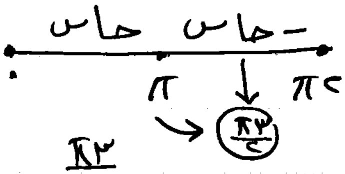
$$= -(١-٣+٤) = -٢ \quad \text{(أ)}$$

مثال ⑥

جد $\int_{\pi}^{\frac{٣\pi}{٢}} |جاس|\,ءس$

الحل

جاس = ٠ ← س = ٠ ، π ، ٢π

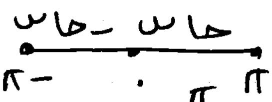


$$= \int_{\pi}^{\frac{٣\pi}{٢}} -جاس\,ءس = \left[جتاس\right]_{\pi}^{\frac{٣\pi}{٢}} = ٠ - -١ = ١$$

مثال ⑦ اوجد $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{١-جتا^{٢}س}\,ءس$

الحل

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{١-جتا^{٢}س}\,ءس = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{جا^{٢}س} = \int_{-\pi}^{\pi} |جاس|\,ءس$$



$$= \int_{-\pi}^{٠} -جاس\,ءس + \int_{٠}^{\pi} جاس\,ءس$$

$$= \left[جتاس\right]_{-\pi}^{٠} - \left[جتاس\right]_{٠}^{\pi}$$

$$١ - -١ - (-١ - ١)$$

$$= ٢ + ٢ = ٤$$

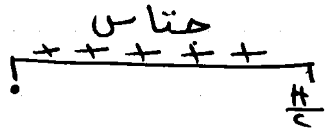
مثال ⑧ اوجد $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\text{جتا}2س}$

الحل

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\text{جتا}2س} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cancel{1}+2\text{جتا}^2س-\cancel{1}}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\text{جتا}^2س}\ دس = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\ |\text{جتا}س|\ دس$

$\text{جتا}س = 0 \longrightarrow س = \frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{2}$



$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\ \text{جتا}س\ دس = \sqrt{2}\ \text{جا}س\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \sqrt{2}\ (\text{جا}\frac{\pi}{2} - \text{جا}0) = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$

مثال ⑨

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\text{جا}2س}\ دس = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\text{جا}^2س+\text{جتا}^2س+2\text{جا}س\text{جتا}س}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\text{جا}س+\text{جتا}س)^2} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\text{جا}س+\text{جتا}س|$

$\Leftarrow \text{جا}س + \text{جتا}س = 0 \longrightarrow \text{جا}س = -\text{جتا}س$

$\longrightarrow س = \frac{3\pi}{4}$ ، $س = \frac{7\pi}{4}$

الربع الأول جا ، جتا موجب

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}س + \text{جتا}س = -\text{جتا}س + \text{جا}س\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

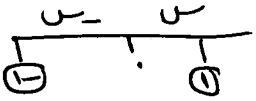
$= (-\text{جتا}\frac{\pi}{2} + \text{جا}\frac{\pi}{2}) - (-\text{جتا}0 + \text{جا}0)$

$= 0 + 1 - (-1 + 0) = 1 + 1 = 2$

مثال ⑩

جد $\int_{-1}^{1} س|س|\ دس$

الحل



$= \int_{-1}^{0} -س^2 + \int_{0}^{1} س^2\ دس$

$= \frac{-س^3}{3}\Big]_{-1}^{0} + \frac{س^3}{3}\Big]_{0}^{1} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$

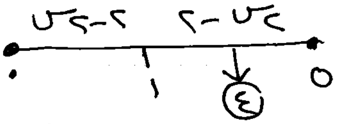
مثال ⑪

اذا كان $ق(س) = \begin{cases} |2س-2| & 0 \le س \le 4 \\ 2أ & 4 < س \le 5 \end{cases}$

وكان $\int_{0}^{5} ق(س)\ دس = 2$ جد قيمة أ ؟

الحل

$2س - 2 = 0$
$س = 1$



$= \int_{0}^{1} (2-2س)\ دس + \int_{1}^{4} (2س-2) + \int_{4}^{5} 2أ\ دس$

$= 2س - س^2\Big]_{0}^{1} + س^2 - 2س\Big]_{1}^{4} + 2أ(5-4) = 2$

$= (2-1) + (16-8) - (1-2) + 2أ = 2$

$1 + 8 + 1 + 2أ = 2$

$2أ = -8 \longrightarrow أ = -4$

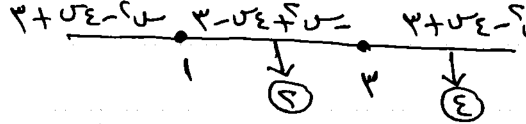
مثال ⑫

اوجد $\int_{2}^{4} \frac{|س^2-4س+3|}{س-1}\ دس$

الحل

$س^2 - 4س + 3 = 0$ $(س-3)(س-1) = 0$

$\Leftarrow$



$= \int_{2}^{3} -\frac{(س-3)\cancel{(س-1)}}{\cancel{س-1}} + \int_{3}^{4} \frac{(س-3)\cancel{(س-1)}}{\cancel{س-1}}$

$= -\int_{2}^{3} (س-3)\ دس + \int_{3}^{4} (س-3)\ دس$

$= \frac{-س^2}{2} + 3س\Big]_{2}^{3} + \frac{س^2}{2} - 3س\Big]_{3}^{4}$

$= (\frac{-9}{2} + 9) - (\frac{-4}{2} + 6) + (\frac{16}{2} - 12) - (\frac{9}{2} - 9)$

$= -\frac{9}{2} + 9 + 2 - 6 + 8 - 12 - \frac{9}{2} + 9$

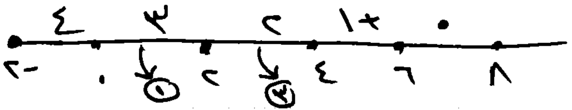
$-\frac{18}{2} + 18 - 8 = +9 - 8 = 1$

مثال ⑬

اوجد $\int_{١}^{٣} [٤ - \frac{١}{٢}س]\,دس$

طول الدرجة = ٢ ، $٤ - \frac{١}{٢}س = ٠$

$س = ٨$

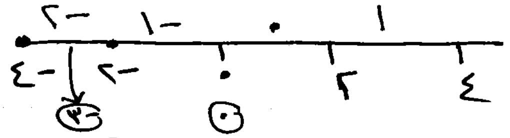


$= \int_{١}^{٢} ٣\,دس + \int_{٢}^{٣} ٢\,دس = ٣ + ٢ = ٥$

مثال ⑭

اوجد $\int_{-٣}^{٠} س [\frac{س}{٢}]\,دس$

$\frac{س}{٢} = ٠ \leftarrow س = ٠$ ، طول الدرجة = ٢

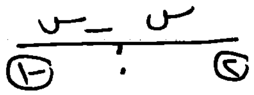


$= \int_{-٣}^{-٢} -٢س\,دس + \int_{-٢}^{٠} -س\,دس = [-س^٢]_{-٣}^{-٢} + [\frac{-س^٢}{٢}]_{-٢}^{٠} = ٧$

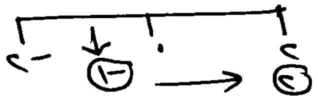
مثال ⑮

اوجد $\int_{-١}^{٢} (|س| + [\frac{س}{٢}])\,دس$

$|س| \leftarrow$



$[\frac{س}{٢}]$



$\int_{-١}^{٠} (-س - ١)\,دس + \int_{٠}^{٢} (س + ٠)\,دس$

$= ٠ - (-\frac{١}{٢} + ١) + ٢$

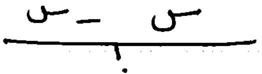
$= \frac{١}{٢} - ١ + ٢ = ١ + \frac{١}{٢}$

$= \frac{٣}{٢}$

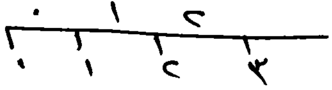
مثال ⑯

جد $\int_{١}^{٣} |س| \times [س]\,دس$

الحل



$[س]$



$= \int_{١}^{٢} ١ \times س\,دس + \int_{٢}^{٣} ٢ \times س\,دس$

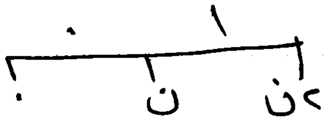
$= [\frac{س^٢}{٢}]_{١}^{٢} + [س^٢]_{٢}^{٣}$

$= (٢ - \frac{١}{٢}) + (٩ - ٤) = \frac{١٣}{٢}$

مثال ⑰

اوجد $\int_{٠}^{٢ن} [\frac{س}{ن}]\,دس$

الحل $س = ٠$ ، طول الدرجة = ن



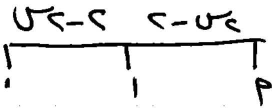
$\int_{٠}^{ن} ٠\,دس + \int_{ن}^{٢ن} ١\,دس = ٠ + ن = ن$

مثال ⑱

$\int_{٠}^{أ} |٢س - ٢|\,دس = ٥$ جد قيمة أ ؟

حيث $أ > ١$

الحل $٢س - ٢ = ٠ \leftarrow س = ١$



$\int_{٠}^{١} (٢ - ٢س)\,دس + \int_{١}^{أ} (٢س - ٢)\,دس = ٥$

$[٢س - س^٢]_{٠}^{١} + [س^٢ - ٢س]_{١}^{أ} = ٥$

$(٢ - ١) + أ^٢ - ٢أ - (-١) = ٥$

$أ^٢ - ٢أ - ٣ = ٠ \quad (أ - ٣)(أ + ١) = ٠$

$\leftarrow أ = ٣$ ، $أ = -١$

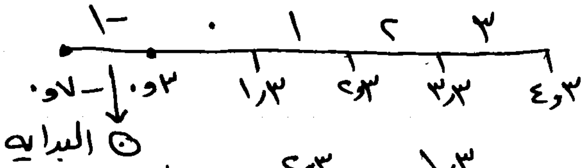
مثال ⑲

اذا كان $\int_{٠}^{م} [\text{س} - ٠٫٣]\, \text{ءس} = ٢٫٧$

اوجد قيمة الثابت م حيث م > ٠

الحل

س = ٠٫٣ .   طول الدرجه = ١



$$\int_{٠}^{٠٫٣} -١\, \text{ءس} + \int_{٠٫٣}^{١٫٣} \text{صفر} + \int_{١٫٣}^{٢٫٣} ١\, \text{ءس} + \int_{٢٫٣}^{٣٫٣} ٢\, \text{ءس}$$

$$= -٠٫٣ + \text{صفر} + ١ + ٢ = ٢٫٧$$

$$م = ٣٫٣$$

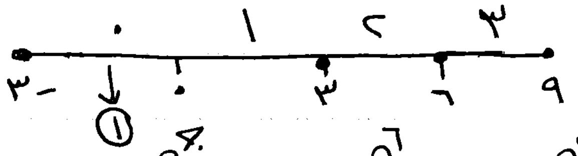
مثال ⑳

اذا كان $\int_{١}^{ج} [\tfrac{١}{٣}\text{س} + ١]\, \text{ءس} = ١٢$

اوجد قيمة ج ، ج > ١

الحل

طول الدرجه = ٣ ، س = -٣ جذر الاقتران



$$\int_{١}^{٣} ١\, \text{ءس} + \int_{٣}^{٦} ٢\, \text{ءس} + \int_{٦}^{ج} ٣\, \text{ءس}$$

$$٢ + ٦ + ٣(\text{ج} - ٦) = ١٢$$

$$٨ + ٣\text{ج} - ١٨ = ١٢$$

$$٣\text{ج} = ١٢$$

$$\Leftarrow \text{ج} = \frac{٢٢}{٣}$$

مثال ㉑

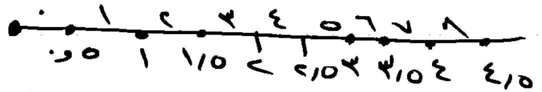
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} |\text{س} - ٢| & ٠ \le \text{س} \le ٤ \\ [٢\text{س}] & ٤ < \text{س} \le ٤٫٥ \end{cases}$$

اوجد $\int_{٠}^{٤٫٥} \text{ق(س)}\, \text{ءس}$

الحل

$|\text{س} - ٢|$ ٢ - س | س - ٢ (عند ٢)

$[٢\text{س}]$ طول الدرجه = ½ ، س = ٠



$$= \int_{٠}^{٢} (٢ - \text{س})\, \text{ءس} + \int_{٢}^{٤} (\text{س} - ٢)\, \text{ءس} + \int_{٤}^{٤٫٥} ٨\, \text{ءس}$$

$$= \left[٢\text{س} - \frac{\text{س}^٢}{٢}\right]_{٠}^{٢} + \left[\frac{\text{س}^٢}{٢} - ٢\text{س}\right]_{٢}^{٤} + ٨(٤٫٥ - ٤)$$

$$= ٢ + ٠ = (-٢) + ٨ \times \tfrac{١}{٢}$$

$$= ٢ + ٢ + ٤ = ٨$$

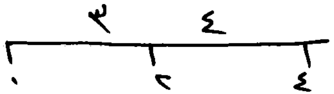
مثال ㉒

اوجد $\int_{٠}^{٤} \frac{|٢\text{س} - ٤|}{[\tfrac{١}{٢}\text{س} + ٣]}$

الحل

٤ - ٢س | ٢س - ٤ (عند ٢)

س = -٦   طول الدرجه = ٢



$$= \int_{٠}^{٢} \frac{٤ - ٢\text{س}}{٣} + \int_{٢}^{٤} \frac{٢\text{س} - ٤}{٤}\, \text{ءس}$$

$$= \tfrac{١}{٣}(٤\text{س} - \text{س}^٢)\Big]_{٠}^{٢} + \tfrac{١}{٤}(\text{س}^٢ - ٤\text{س})\Big]_{٢}^{٤}$$

$$= \frac{٤}{٣} + ١ = \frac{٧}{٣}$$

خاصية ④

خاصية المقارنة

① اذا كان ق ، هـ قابلين للتكامل على [م ، ن] وكان ق(س) ≥ هـ(س) لكل س ∈ [م ، ن] فان

$$\int_{م}^{ن} ق(س)\,.دس \geq \int_{م}^{ن} هـ(س)\,.دس$$

② اذا كان ق(س) ≥ ٠ لكل س ∈ [م ، ن] فان $\int_{م}^{ن} ق(س)\,.دس \geq ٠$

③ اذا كان ق(س) ≤ صفر لكل س ∈ [م ، ن] فان $\int_{م}^{ن} ق(س)\,.دس \leq ٠$

④ اذا كان ل ≤ ق(س) ≤ ك لكل س ∈ [م ، ن] فان

$$\int_{م}^{ن} ل\,دس \leq \int_{م}^{ن} ق(س)\,دس \leq \int_{م}^{ن} ك(س)$$

ملاحظة

اذا كانت اشارة الأقتران موجب أو صفر فان $\int ق(س)\,دس$ موجب أو صفر

اذا كانت اشارة الأقتران سالب أو صفر فان $\int ق(س)\,دس$ سالب أو صفر

لذلك يجب معرفة اشارة ق(س)

مثال ① ما اشارة $\int_{١}^{٢} \frac{٥س+٢}{س^{٢}+٤}\,دس$

الحل

البسط موجب على [١ ، ٢]

المقام موجب على [١ ، ٢]

∴ $\frac{٥س+٢}{س^{٢}+٤}$ موجب على [١ ، ٢]

$\leftarrow \int_{١}^{٢} \frac{٥س+٢}{س^{٢}+٤}\,دس$ موجب على [١ ، ٢]

مثال ② ما اشارة $\int_{-٣}^{-١} \frac{-س}{س^{٤}+٢}\,دس$

الحل

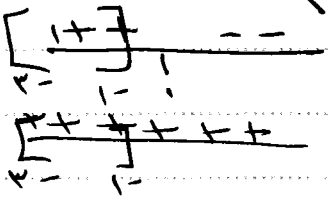
$ق(س) = \frac{-س}{س^{٢}+٤}$

المقام موجب في الفترة [-٣ ، -١]

البسط موجب في الفترة [-٣ ، -١]

$\leftarrow ق(س) > ٠$

$\leftarrow \int_{-٣}^{-١} \frac{-س}{س^{٤}+٢} > ٠$



مثال ③

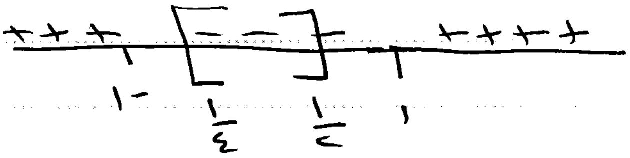
ابحث في اشارة التكاملات التالية دون اجراء عملية التكامل

① $\int_{\frac{١}{٤}}^{\frac{١}{٢}} (س^{٢} - ١)\, ءس$

الحل

$ق(س) = س^{٢} - ١ \quad س \in [\frac{١}{٤} ، \frac{١}{٢}]$

نبحث في اشارة ق(س)



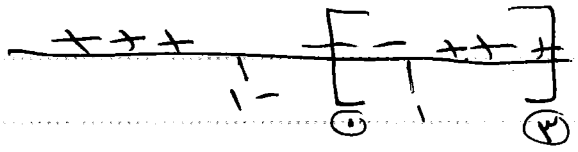
ق(س) < صفر لكل $س \in [\frac{١}{٤} ، \frac{١}{٢}]$

$\leftarrow \int_{\frac{١}{٤}}^{\frac{١}{٢}} (س^{٢} - ١)\, ءس < ٠$

② $\int_{٠}^{٣} (س^{٢} - ١)\, ءس$

الحل

$ق(س) = س^{٢} - ١ \quad س \in [٠ ، ٣]$



$ق(س) \leq ٠$ لكل $س \in [٠ ، ١]$

$\leftarrow \int_{٠}^{١} ق(س)\, ءس \leq ٠$

$ق(س) \geq ٠$ لكل $س \in [١ ، ٣]$

$\Leftarrow \int_{١}^{٣} ق(س)\, ءس \geq ٠$

ملاحظة

عند استخدام خواص المقارنة يجب ترتيب حدود التكامل من الأصغر الى الاكبر

③ $\int_{٣}^{١} (س^{٢} - ٤س)\, ءس$

الحل

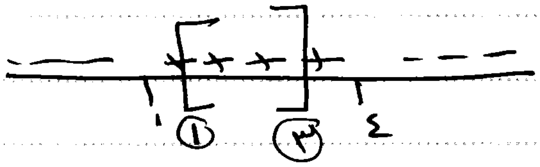
نرتب الحدود $= -\int_{١}^{٣} (س^{٢} - ٤س)\, ءس$

$= \int_{١}^{٣} (٤س - س^{٢})\, ءس$

$ق(س) = ٤س - س^{٢} ، س \in [١ ، ٣]$

$٤س - س^{٢} = ٠ \quad س(٤ - س) = ٠$

$س = ٠ ، س = ٤$



$ق(س) \geq ٠$

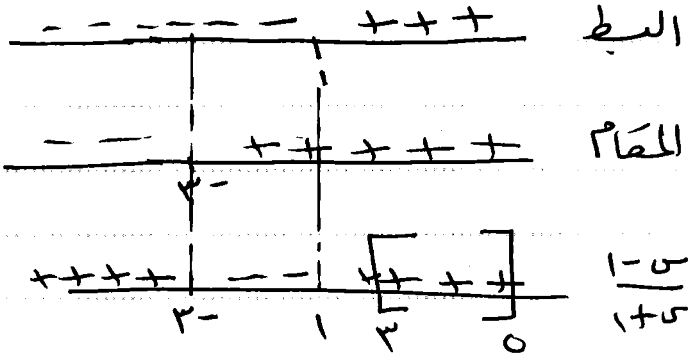
$\Leftarrow \int_{١}^{٣} (٤س - س^{٢}) \geq ٠$

④ $\int_{٣}^{٥} \frac{س - ١}{س + ٣}\, ءس$

الحل

$ق(س) = \frac{س - ١}{س + ٣} \quad س \in [٣ ، ٥]$

نحدد اشارة ق(س) $\Leftarrow$ يتبع



ق(س) ≥ ٠ لكل س ∈ [٣، ٥]

$← \int_{٣}^{٥} \frac{س-١}{س+٣} ءس ≥ ٠$

مثال ④

دون حساب التكامل اثبت ان $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} (جاس + س^{٢}) ءس > ٠$.

الحل

ق(س) = س² + جاس ، س ∈ $[\frac{\pi}{٦}، \frac{\pi}{٣}]$

س² > ٠ لكل س ∈ $[\frac{\pi}{٦}، \frac{\pi}{٣}]$

جاس > ٠ لكل س ∈ $[\frac{\pi}{٦}، \frac{\pi}{٣}]$

الربع الأول

← س² + جاس > ٠ $[\frac{\pi}{٦}، \frac{\pi}{٣}]$

$← \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٣}} (س^{٢} + جاس) ءس > ٠$

مثال ⑤

دون حساب التكامل اثبت أن $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} جتا\sqrt{س}\, ءس ≥ ٠$

الحل

ق(س) = جتا$\sqrt{س}$ ، س ∈ $[٠، \frac{\pi}{٤}]$

بما أن س تقع في الربع الأول

فان $\sqrt{س}$ تقع في الربع الأول

← جتا$\sqrt{س}$ ≥ ٠

$← \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} جتا\sqrt{س}\, ءس ≥ ٠$

ملاحظه هامة

لأثبات أن $\int_{م}^{ن} ق(س) ءس ≤ \int_{م}^{ن} هـ(س) ءس$

يجب اثبات أن ق(س) ≤ هـ(س) في الفترة [م، ن]

مثال ⑥

دون اجراء التكامل اثبت أن

① $\int_{١}^{٢} س ءس ≤ \int_{١}^{٢} س^{٢} ءس$

الحل

نريد اثبات ان

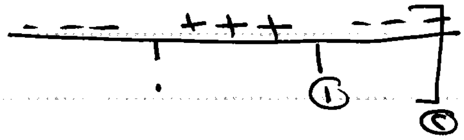
س ≤ س² ، س ∈ [١، ٢]

أي ان س - س² ≤ ٠ في [١، ٢]

س - س² = ٠ ⟸ س(١ - س) = ٠

⟸ يتبع

⇐ $\text{س} = ٠ \text{ ، } \text{س} = ١$



$\text{س} - \text{س}^2 \le ٠$ لكل س ∈ [١ ، ٢]

⇐ $\text{س} \le \text{س}^2$ لكل س ∈ [١ ، ٢]

$$\int_{١}^{٢} \text{س}\,\text{دس} \le \int_{١}^{٢} \text{س}^2\,\text{دس}$$

② $$\int_{٣,٥}^{٦} \frac{\text{س}^2}{\text{س}+٢}\,\text{دس} > \int_{٣,٥}^{٦} \frac{٩}{\text{س}+٢}\,\text{دس}$$

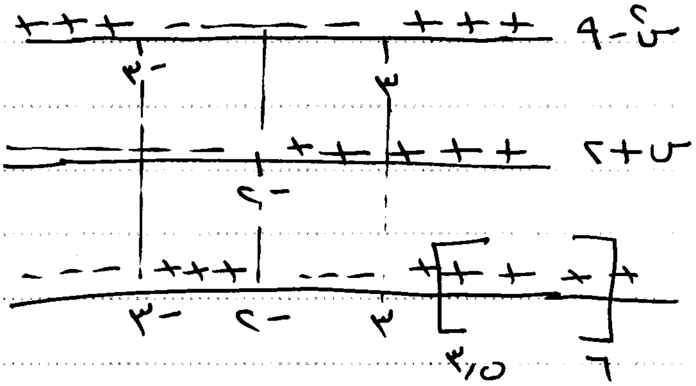
الحل

نريد اثبات ان $\frac{\text{س}^2}{\text{س}+٢} > \frac{٩}{\text{س}+٢}$

في الفترة [٣,٥ ، ٦]

← $\frac{\text{س}^2}{\text{س}+٢} - \frac{٩}{\text{س}+٢} > ٠$

$\frac{\text{س}^2 - ٩}{\text{س}+٢} > ٠$



← $\frac{\text{س}^2 - ٩}{\text{س}+٢} > ٠$ لكل س ∈ [٣,٥ ، ٦]

← $\frac{\text{س}^2}{\text{س}+٢} - \frac{٩}{\text{س}+٢} > ٠$

← $\frac{\text{س}^2}{\text{س}+٢} > \frac{٩}{\text{س}+٢}$

$$\int_{٣,٥}^{٦} \frac{\text{س}^2}{\text{س}+٢}\,\text{دس} > \int_{٣,٥}^{٦} \frac{٩}{\text{س}+٢}\,\text{دس}$$

مثال ⑦

اذا كان ه اقتراناً محدداً على الفترة [١ ، ٥] وكان

$-٢ \le \text{ه(س)} \le ٤$ جد (م ، ن)

بحيث ان $\text{م} \le \int_{١}^{٥} \text{ه(س)}\,\text{دس} \le \text{ن}$

الحل

$-٢ \le \text{ه(س)} \le ٤$

$\int_{١}^{٥} -٢\,\text{دس} \le \int_{١}^{٥} \text{ه(س)}\,\text{دس} \le \int_{١}^{٥} ٤\,\text{دس}$

$-٢(٥-١) \le \int_{١}^{٥} \text{ه(س)}\,\text{دس} \le ٤(٥-١)$

$-٨ \le \int_{١}^{٥} \text{ه(س)}\,\text{دس} \le ١٦$

⇐ $\text{م} = -٨ \text{ ، } \text{ن} = ١٦$

ملاحظة هامة

ع ≤ ق(س) ≤ ل
تعني ان اقل قيمة للاقتران هي ع
وأكبر قيمة للاقتران ق هي ل

ق(س) ≥ م تعني أقل قيمة لـ ق هي م
ق(س) ≤ ن تعني أكبر قيمة لـ ق هي ن

ولإيجاد أقل قيمة وأكبر قيمة للاقتران هناك طريقتان

① الرسم
② طريقة ق'(س) لإيجاد القيم القصوى

مثال ①

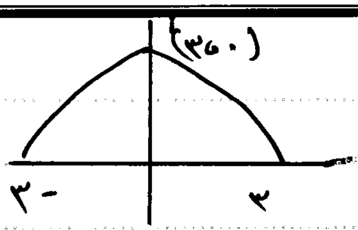
اذا كان ق(س) = $\sqrt{٩ - س^2}$ قابلاً للتكامل في الفترة [-٣، ٣] فبين دون اجراء عملية التكامل أن $\int_{-٣}^{٣}$ ق(س). دس ينحصر بين صفر و١٨

الحل

طريقة ①

باستخدام الرسم
نريد حصر ق(س) بين عددين وذلك بإيجاد أقل وأكبر قيمة للاقتران ق(س) وذلك بالرسم

س	-٣	٠	٣
ص	٠	٣	٠



أقل قيمة للاقتران ق(س) هي صفر
أكبر قيمة للاقتران ق(س) هي ٣

⇐ ٠ ≤ ق(س) ≤ ٣

⇐ $\int_{-٣}^{٣}$ ٠. دس ≤ $\int_{-٣}^{٣}$ ق(س) دس ≤ $\int_{-٣}^{٣}$ ٣. دس

صفر ≤ $\int_{-٣}^{٣}$ ق(س) دس ≤ ١٨

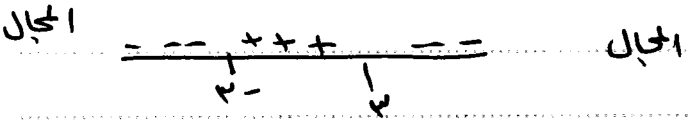
أقل قيمة للتكامل = صفر
أكبر قيمة للتكامل = ١٨

طريقة ②

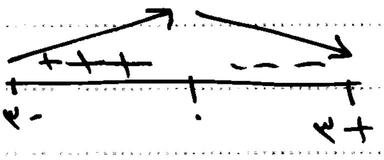
نجد أقل قيمة وأعلى قيمة للاقتران باستخدام المشتقة

$$ق'(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{٩ - س^2}}$$

البسط = صفر ⇐ -س = ٠ ⇐ س = ٠ ∈ المجال



٩ - س² = ٠ ⇐ س = ±٣ ∈ المجال



أكبر قيمة هي ق(١) = ٣

ق(-٣) = صفر ، ق(٣) = صفر

أقل قيمة هي صفر

$٠ \leq \text{ق(س)} \leq ٣$

$\int_{-٣}^{٣} ٠ \text{ دس} \leq \int_{-٣}^{٣} \text{ق(س) دس} \leq \int_{-٣}^{٣} ٣ \text{ دس}$

$\text{صفر} \leq \int_{-٣}^{٣} \text{ق(س) دس} \leq ١٨$

مثال ②

اثبت ان $٠ \leq \int_{-٥}^{٥} \sqrt{٢٥ - \text{س}^٢} \leq ٥٠$

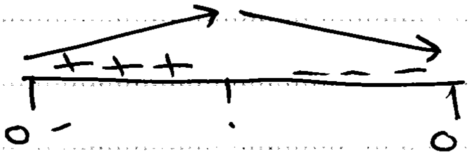
الحل

نبحث عن أقل وأكبر قيمة للاقتران

$\text{ق(س)} = \sqrt{٢٥ - \text{س}^٢}$ في $[-٥ ، ٥]$

$\text{ق}'\text{(س)} = \dfrac{-٢\text{س}}{٢\sqrt{٢٥ - \text{س}^٢}}$

البسط = ٠ ⟸ س = ٠ ∈ المجال



أكبر قيمة هي ق(٠) = ٥

ق(٥) = صفر ، ق(-٥) = صفر

أقل قيمة هي صفر

$\text{صفر} \leq \text{ق(س)} \leq ٥$

$\int_{-٥}^{٥} \text{صفر} \leq \int_{-٥}^{٥} \text{ق(س) دس} \leq \int_{-٥}^{٥} ٥ \text{ دس}$

$\text{صفر} \leq \int_{-٥}^{٥} \text{ق(س) دس} \leq ٥٠$

مثال ③

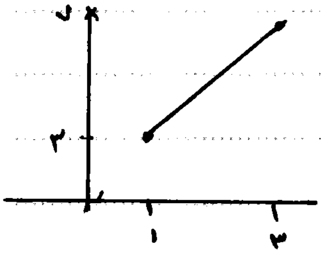
أثبت دون اجراء عملية التكامل أن

$٦ \leq \int_{١}^{٣} (٢\text{س}+١) \text{ دس} \leq ١٤$

الحل

ق(س) = ٢س + ١   س ∈ [١ ، ٣]

س	١	٣
ص	٣	٧



$٣ \leq \text{ق(س)} \leq ٧$

$\int_{١}^{٣} ٣ \text{ دس} \leq \int_{١}^{٣} \text{ق(س) دس} \leq \int_{١}^{٣} ٧ \text{ دس}$

$٦ \leq \int_{١}^{٣} (٢\text{س}+١) \text{ دس} \leq ١٤$

مثال ④

اذا كان $\text{ق(س)} = \dfrac{٣}{\text{س}^٢+١}$ قابلاً للاشتقاق على الفترة $[٠ ، ٣]$

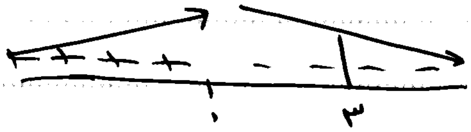
أوجد أكبر وأقل قيمة للتكامل

$\int_{٠}^{٣} \dfrac{٣}{\text{س}^٢+١} \text{ دس}$

⟸ يتبع

الحل

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-٦\text{س}}{(\text{س}^٢+١)^٢}$$



أقل قيمة $\text{ق}(٣) = \frac{٣}{١٠} = ٠٫٣$

أكبر قيمة $\text{ق}(١) = ٣$

$$٠٫٣ \leq \text{ق}(\text{س}) \leq ٣$$

$$\int_{٠}^{٣} ٠٫٣ \leq \int_{٠}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \leq \int_{٠}^{٣} ٣\,\text{دس}$$

$$٠٫٩ \leq \int_{٠}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \leq ٩$$

طريقة أخرى

$٠ \leq \text{س} \leq ٣$ بالتربيع

$٠ \leq \text{س}^٢ \leq ٩$ بإضافة(١)

$١ \leq \text{س}^٢+١ \leq ١٠$ مقلوب المتباينة

$\frac{١}{١٠} \leq \frac{١}{\text{س}^٢+١} \leq ١$ ضرب(٣)

$$\frac{٣}{١٠} \leq \frac{١}{\text{س}^٢+١} \leq ٣$$

$$\int_{٠}^{٣} \frac{٣}{١٠} \leq \int_{٠}^{٣} \frac{١}{\text{س}^٢+١} \leq \int_{٠}^{٣} ٣\,\text{دس}$$

$$٠٫٩ \leq \int_{٠}^{٣} \frac{١}{\text{س}^٢+١} \leq ٩$$

مثال ⑤

اذا كان $٢ \leq ٢\text{ق}(\text{س}) - ٤ \leq ٨$
بين أن $\int_{٠}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$ ينحصر بين
$[٦، ١٢]$

الحل

$$٢ \leq ٢\text{ق}(\text{س}) - ٤ \leq ٨$$
$$+٤ \qquad +٤ \qquad +٤$$

$$\Leftarrow \frac{٦}{٢} \leq \frac{٢\text{ق}(\text{س})}{٢} \leq \frac{١٢}{٢}$$

$$\Leftarrow ٣ \leq \text{ق}(\text{س}) \leq ٦$$

$$\int_{٠}^{٢} ٣\,\text{دس} \leq \int_{٠}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \leq \int_{٠}^{٢} ٦\,\text{دس}$$

$$٦ \leq \int_{٠}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \leq ١٢$$

مثال ⑥

اذا كان $٢ \leq \text{ق}(\text{س}) \leq ٥$ لكل $\text{س} \in [١، ٣]$ جد أكبر قيمة
للتكامل $\int_{١}^{٣} (٢\text{ق}(\text{س}) + ٣)\,.\text{دس}$

الحل

$$٢ \leq \text{ق}(\text{س}) \leq ٥ \quad \times ٢$$

$$٤ \leq ٢\text{ق}(\text{س}) \leq ١٠$$
$$+٣ \qquad +٣ \qquad +٣$$

$$٧ \leq ٢\text{ق}(\text{س}) + ٣ \leq ١٣$$

$$\int_{١}^{٣} ٧ \leq \int_{١}^{٣} (٢\text{ق}(\text{س}) + ٣)\,\text{دس} \leq \int_{١}^{٣} ١٣\,\text{دس}$$

$$١٤ \leq \int_{١}^{٣} (٢\text{ق}(\text{س}) + ٣)\,\text{دس} \leq ٢٦$$

أكبر قيمة $= ٢٦$

مثال ⑦

إذا علمت أن $ق(س) = ٣ + ٢\text{جا}^{٥}\frac{\pi}{س}$

بين أن $\int_{١}^{٢} ق(س)\,دس$ ينحصر

٢ ، ١٠ ؟

الحل

$-١ \le \text{جا}\frac{\pi}{س} \le ١$ (القوة ٥)

$(-١)^{٥} \le \text{جا}^{٥}\frac{\pi}{س} \le (١)^{٥}$

$-١ \le \text{جا}^{٥}\frac{\pi}{س} \le ١$ × ٢

$-٢ \le ٢\text{جا}^{٥}\frac{\pi}{س} \le ٢$

+٢ +٣ +٣

⇐ $١ \le ٣ + ٢\text{جا}^{٥}\frac{\pi}{س} \le ٥$

$\int_{١}^{٣} ١ \le \int_{١}^{٣} (٣ + ٢\text{جا}^{٥}\frac{\pi}{س}) \le \int_{١}^{٣} ٥\,دس$

$٢ \le \int_{١}^{٣} (٣ + ٢\text{جا}^{٥}\frac{\pi}{س}) \le ١٠$

مثال ⑧

إذا كان ق اقتران محدداً على الفترة $[-١ ، ٣]$ وكان $٢ \le ق(س) \le ٣$ فاوجد م ، ن حيث أن

$م \le \int_{-١}^{٣} ق(س)\,دس \le ن$

أ) ١٢ ، ٨   ب) ٨ ، ١٢

جـ) -٨ ، ١٢   د) -١٢ ، -٨

الحل

$\int_{-١}^{٣} ٢ \le \int_{-١}^{٣} ق(س) \le \int_{-١}^{٣} ٣\,دس$

$٨ \le \int_{-١}^{٣} ق(س)\,دس \le ١٢$

الجواب ⓑ

مثال ⑨

إذا كان $٣ \le ق(س) \le ٥ \quad \forall\, س \in [١ ، ٣]$

أوجد أكبر قيمة وأصغر قيمة

$$\int_{١}^{٣} \frac{١ - ق(س) + ٢س}{١ - ق(س)}\,دس$$

الحل $\frac{١ - ق(س) + ٢س}{١ - ق(س)} = \frac{١ - ق(س)}{١ - ق(س)} + \frac{٢س}{١ - ق(س)}$

$= ١ + \frac{٢س}{١ - ق(س)}$

لكن $٣ \le ق(س) \le ٥$ الضرب بسالب

$-٣ \ge -ق(س) \ge -٥$

+١ +١ +١

$-٤ \le ١ - ق(س) \le -١$ (المطلوب)

$\frac{١}{-٤} \ge \frac{١}{١ - ق(س)} \ge -١$ × ٢س

$\frac{٢س}{-٤} \ge \frac{٢س}{١ - ق(س)} \ge -٢س$

+١ +١ +١

$١ - \frac{١}{٢}س \ge ١ + \frac{٢س}{١ - ق(س)} \ge ١ - ٢س$

$\int_{١}^{٣} (١ - \frac{١}{٢}س)\,دس \ge \int_{١}^{٣} ١ + \frac{٢س}{١ - ق(س)} \ge \int_{١}^{٣} (١ - ٢س)$

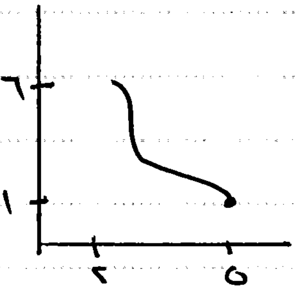
$٠ \ge \int_{١}^{٣} ١ + \frac{٢س}{١ - ق(س)} \ge -٦$

مثال ⑩

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س)

اثبت ان

$$٣ \le \int_{٢}^{٥} ق(س)\,ءس \le ١٨$$



الحل

$$١ \le ق(س) \le ٦$$

$$\int_{٢}^{٥} ١ \le \int_{٢}^{٥} ق(س)\,ءس \le \int_{٢}^{٥} ٦\,ءس$$

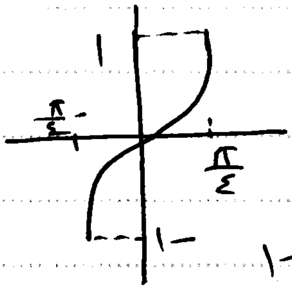
$$٣ \le \int_{٢}^{٥} ق(س)\,ءس \le ١٨$$

مثال ⑪

بين دون اجراء التكامل ان

$$\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} ظاس\,ءس$$ تنحصر بين $-\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$

الحل



نرسم ق(س)

قيمة عظمى $ق(\frac{\pi}{٤}) = ١$

صغرى $ق(-\frac{\pi}{٤}) = -١$

$$-١ \le ق(س) \le ١$$

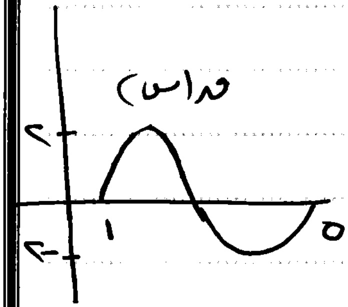
$$\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} -١\,ءس \le \int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} ق(س)\,ءس \le \int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} ١\,ءس$$

$$-١\left(\frac{\pi}{٤}+\frac{\pi}{٤}\right) \le \int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} ق(س)\,ءس \le ١\left(\frac{\pi}{٤}+\frac{\pi}{٤}\right)$$

$$-\frac{\pi}{٢} \le \int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} ق(س)\,ءس \le \frac{\pi}{٢}$$

مثال ⑫

في الشكل المجاور اوجد اكبر قيمة واصغر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٥} ق(س)\,ءس$



الحل

من الرسم اصغر قيمة = -٢

اكبر قيمة = ٢

$$-٢ \le ق(س) \le ٢$$

$$\int_{١}^{٥} -٢ \le \int_{١}^{٥} ق(س)\,ءس \le \int_{١}^{٥} ٢\,ءس$$

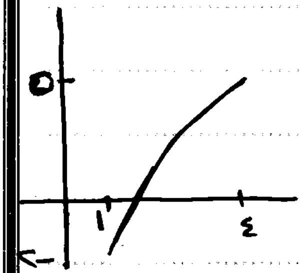
$$-٨ \le \int_{١}^{٥} ق(س)\,ءس \le ٨$$

مثال ⑬

في الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق(س) المعرف على [١، ٤]

جد اكبر قيمة للمقدار

$$\int_{١}^{٤} (٢ - ٣ق(س))\,ءس$$



$$-٢ \le ق(س) \le ٥$$

بالضرب في -٣

$$٦ \ge -٣ق(س) \ge -١٥$$

$$+٢ \qquad +٢ \qquad +٢$$

$$٨ \ge ٢ - ٣ق(س) \ge -١٣$$

$$\int_{١}^{٤} ٨ \ge \int_{١}^{٤} ٢ - ٣ق(س) \ge \int_{١}^{٤} -١٣$$

$$٢٤ \ge \int_{١}^{٤} ٢ - ٣ق(س) \ge -٢٩$$

اكبر قيمة = ٢٤

ورقة عمل

(١) أوجد $\int_{-٢}^{٢} |س^{٢}+٤س+٤| \, ءس$

أ) $\frac{٦٤}{٣}$ ب) $-\frac{٦٤}{٣}$ جـ) ٢٠ د) −٢٠

(٢) اذا كان $\int_{١}^{ك} [٢س] = ٣$ حيث ك>١ جد ك

أ) −٣ ب) ١,٥ جـ) $\frac{١٧}{٨}$ د) $-\frac{١٧}{٨}$

(٣) اذا كان $د(س) = \begin{cases} [س+١] & ٢ \le س \le ٤ \\ |٤س| & ٤ < س \le ٥ \end{cases}$

فان قيمة $\int_{٢}^{٥} د(س) \, ءس =$

(٤) اذا كان $د(س) = س^{٢} - \int_{١}^{٣} \sqrt{س^{٢}+١} + \int \sqrt{س^{٢}-٥}$

فاوجد دَ(٣)

أ) −٨ ب) ٨ جـ) $\sqrt{٥}$ د) صفر

(٥) اذا كان $\int_{١}^{٣} د(س) \, ءس = ٧$

$\int_{٧}^{٣} د(س) \, ءس = ٤$ فان $\int_{١}^{٧} د(س) + ٣ =$

أ) ٩ ب) ١١ جـ) ٢١ د) ٢٩

(٦) اوجد $\int_{١}^{٤} [\frac{١}{٢} س] \, ءس$

أ) ٤ ب) −٤ جـ) −٢ د) ٢

(٧) اذا كان ن عدد طبيعي فاثبت أن

$\int_{٠}^{١} س^{ن} \, ءس + \int_{٠}^{١} س^{\frac{١}{ن}} \, ءس = ١$

(٨) اذا كان $\int د(س) \, ءس = س^{٢} - ٢س + ٧$

وكان $\int_{١}^{ب} د(س) \, ءس = ١٢$ اوجد قيمة ب

(٩) اذا كان $د(س) = \begin{cases} ٣أ & س > ٢ \\ ٣س^{٢}+٢ & س \le ٢ \end{cases}$

وكان $\int_{٠}^{٣} د(س) \, ءس = -١٢$

اوجد قيمة الثابت أ

(١٠) اوجد قيمة $\int_{٢}^{٤} \frac{|س^{٢}-٤س+٣|}{س-١} \, ءس$

(١١) اذا كان د(س) ≤ ٢ لجميع قيم س ∈ [١، ٣]

فان اصغر قيمة للمقدار $\int_{١}^{٣} -٢د(س) \, ءس =$

أ) ٨ ب) −٨ جـ) ٤ د) −٤

(١٢) دون اجراء التكامل بين أن

$\int_{٠}^{٢} \frac{٥}{س^{٢}+١} \, ءس$ ينحصر بين ٢ ، ١٠ ؟

(١٣) احسب $\int_{-٢}^{٣} [\frac{٢-س}{٢}] \, ءس$

(١٤) اذا كان $\int_{١}^{٣} (٢س + ٢د(س)) \, ءس = ٦$

وكان $\int_{١}^{٥} د(س) \, ءس = -٢$ جد $\int_{٥}^{٣} د(س) \, ءس$

(١٥) دون حساب التكامل بين ان

$\int_{٢}^{٥} (٣س-٢) \, ءس \le \int_{٢}^{٥} (٢س+٣) \, ءس$

(١٦) اذا كان $\int_{١}^{٣} د(س) \, ءس = ٣$

$\int_{٤}^{٣} د(س) \, ءس = -٢$ جد $\int_{١}^{٤} (٢د(س) + \sqrt{س})$

(١٧) اذا كان م(س) معكوس لمشتقة د(س) على [٢، ٣] وكان م(٢) = ٤ ، م(٣) = ١٠

فان $\int_{٢}^{٣} د(س) \, ءس$

أ) ١٠ ب) ٦ جـ) ٤ د) ١

(١٨) ما قيمة $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{ءس}{١-جاس} + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{ءس}{١+جاس}$

أ) $٢\sqrt{٣}$ ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ جـ) $\frac{١}{٢\sqrt{٣}}$ د) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

⑲ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (٢ + \text{جتا}^2\text{س})\,\text{ءس} + \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \text{حا}^2\text{س}\,\text{ءس} =$

أ) $-\frac{٣\pi}{٢}$ ب) $\frac{-\pi}{٢}$ جـ) $\frac{\pi}{٢}$ د) $\frac{٣\pi}{٢}$

⑳ اذا كان $\int_{-\pi}^{\pi} \text{ظا}^2\text{س}\,\text{ءس} = \text{أ}$ وكان $\int_{\pi}^{-\pi} \text{قا}^2\text{س}\,\text{ءس} = \text{ب}$ فان أ + ب تساوي

أ) ١ ب) صفر جـ) -٢π د) ٢π

㉑ اذا كان $\int_{٠}^{\text{جـ}} [\tfrac{١}{٢}\text{س} + ١]\,\text{ءس} = ٩$ فان قيمة جـ تساوي

أ) ٣ ب) ٤ جـ) ٥ د) ٦

㉒ اذا كان $\text{ق(س)} = \int_{١}^{٢} ٢\text{س}\,\text{ءس} + \int \frac{\text{س}^2}{٢\text{س}+١}$ فان ق′(١)

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) ١ جـ) ٢ د) $\frac{٧}{٣}$

㉓ $\int_{١}^{٣} (٥ + \int_{٣}^{١} ٥\,\text{ءس})\,\text{ءس}$

أ) ٢٠ ب) ١٠ جـ) −١٠ د) صفر

㉔ اذا كان م(س)، ل(س) معكوسين لمشتقة ق(س) وكان $\int_{٢}^{٨} (\text{ل(س)} - \text{م(س)})\,\text{ءس} = ١٨$ فان $\int_{٣}^{٥} (\text{م(س)} - \text{ل(س)})\,\text{ءس} =$

أ) −٦ ب) −٣ جـ) ٣ د) ٦

㉕ اذا كان $\int_{١}^{\text{أ}} |٢\text{س} - ٢|\,\text{ءس} = ٥$ جد قيمة أ حيث أ > ٠.

㉖ $\text{ق(س)} = [٢ - \text{س}] + |٢\text{س} - ٤|$

اوجد $\int_{٠}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{ءس}$

㉗ اوجد $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \sqrt{١ - \text{حا٢س}}\,\text{ءس}$

㉘ اثبت ان $\sqrt{٨} \le \int_{٠}^{٢} \sqrt{٣ - \text{جتا}٢\pi\text{س}} \le ٤$

㉙ اذا كان $\int_{-٢}^{٢} (\text{أ} + \text{ق(س)})\,\text{ءس} = ١٢$ وكان $\int_{٢}^{-٢} ٤\text{ق(س)}\,\text{ءس} = ٨\text{أ}$ فما قيمة أ

㉚ اذا كان $١ \le \text{ق(س)} \le ٤$ لكل س ∈ [−١، ٥] نجد أ، ب بحيث ان

$\text{أ} \le \int_{-١}^{٥} (٢\text{س} + \text{ق(س)})\,\text{ءس} \le \text{ب}$

㉛ بين دون اجراء التكامل

$٢ \le \int_{١}^{٣} (٣ + ٢\text{حا}^{٣}\frac{\pi}{\text{س}})\,\text{ءس} \le ١٠$

اجابات ورقه العمل

① $\int_{-٢}^{٢} |س^٢+٤س+٤| \,ءس$

$\underset{-٢}{\underline{- - - \quad + +}}$

$= \int_{-٢}^{٢} |(س+٢)^٢| \,ءس$

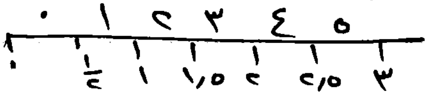
$= \int_{-٢}^{٢} (س+٢)^٢ \,ءس = \left[\frac{(س+٢)^٣}{٣}\right]_{-٢}^{٢} = \frac{٦٤}{٣}$

(أ)

---

② $\int_{١}^{ك} [٢س] = ٣$ ، $ك > ١$

طول الدرجة $= \frac{١}{٢}$ ، س = ٠



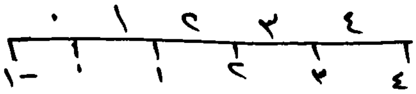
$\int_{١}^{١,٥} ٢ + \int_{١,٥}^{٢} ٣ + \int_{٢}^{ك} ٤ \,ءس = ٣$

$١ + \frac{٣}{٢} + ٤(ك - ٢) = ٣$

$\frac{٥}{٢} + ٤ك - ٨ = ٣ \Rightarrow ك = \frac{١٧}{٨}$

---

③ $[س+١]$



$ق(س) = \begin{cases} ٣ & ٢ \le س < ٣ \\ ٤ & ٣ \le س < ٤ \\ ٢س & ٤ < س \le ٥ \end{cases}$

$\int_{٢}^{٣} ٣ \,ءس + \int_{٣}^{٤} ٤ \,ءس + \int_{٤}^{٥} ٢س \,ءس$

(ب)

$= ٣ + ٤ + [س^٢]_{٤}^{٥} = ٧ + ٢٥ - ١٦ = ١٦$

---

④ $ق'(س) = ٢س + \sqrt{س^٢ - ٥}$

$ق'(٣) = ٦ + \sqrt{٩ - ٥}$

(ب) $= ٦ + ٢ = ٨$

---

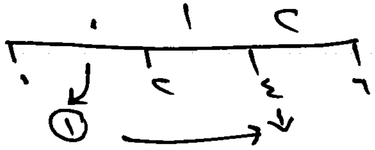
⑤ $\int_{١}^{٧} ق(س) \,ءس + \int_{١}^{٧} ٣ \,ءس$

$= \left(\int_{١}^{٣} ق(س) \,ءس + \int_{٣}^{٧} ق(س) \,ءس\right) + ٣ \times ٦$

$= (٧ - ٤) + ١٨ = ٣ + ١٨ = ٢١$ (جـ)

---

⑥



$\int_{١}^{٢} ٠ + \int_{٢}^{٤} ١ = ٠ + ٢ = ٢$ (د)

---

⑦ $\int_{٠}^{١} س^{ن} \,ءس + \int_{٠}^{١} س^{\frac{١}{ن}} \,ءس = ١$

$\left[\frac{س^{ن+١}}{ن+١}\right]_{٠}^{١} + \frac{ن}{ن+١} \left[س^{\frac{ن+١}{ن}}\right]_{٠}^{١}$

$\frac{١}{ن+١} + \frac{ن(١)^{\frac{ن+١}{ن}}}{ن+١} - ٠$

$\frac{١}{ن+١} + \frac{ن}{ن+١} = \frac{ن+١}{ن+١} = ١$

توحيد مقام

---

⑧ $\int ق(س) \,ءس = س^٢ - ٢س + ٧$

$\int_{-١}^{ب} ق(س) \,ءس = \left[س^٢ - ٢س + ٧\right]_{-١}^{ب} = ١٢$

$ب^٢ - ٢ب + ب - (١ + ٢ + ٧) = ١٢$

$ب^٢ - ٢ب - ١٥ = ٠$

$(ب - ٥)(ب + ٣) = ٠$

$ب = ٥$

$ب = -٣$

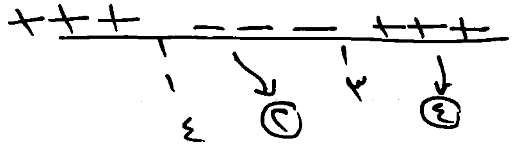
⑨ $\int_{٠}^{٣} ق(س)\,دس = \int_{٠}^{٢} (٣س^{٢}+٢) + \int_{٢}^{٣} ٣أ\,دس$

$\Leftarrow -١٢ = [س^{٣}+٢س]_{٠}^{٢} + ٣أ(٣-٢)$

$-١٢ = ٨+٤+٣أ \Leftarrow ٣أ = -٢٤$

$\Leftarrow أ = -٨$

⑩



$\int_{٢}^{٣} -\frac{(س^{٢}-٤س+٣)}{س-١} + \int_{٣}^{٤} \frac{س^{٢}-٤س+٣}{س-١}$

$= -\int_{٢}^{٣} \frac{(س-٣)\cancel{(س-١)}}{\cancel{س-١}} + \int_{٣}^{٤} \frac{(س-٣)\cancel{(س-١)}}{\cancel{س-١}}$

$= -(\frac{س^{٢}}{٢} - ٣س]_{٢}^{٣}) + [\frac{س^{٢}}{٢} - ٣س]_{٣}^{٤}$

$-(\frac{٩}{٢}-٩) - (٢-٦) + (٨-١٢) - (\frac{٩}{٢}-٩)$

$= \frac{٩}{٢} - ٤ - ٤ + \frac{٩}{٢} = ٩-٨ = ١$

⑪ ق(س) ≥ ٢ بالضرب بـ -٢

$-٢ق(س) \leq -٤ \Leftarrow \int_{١}^{٣} -٢ق(س) \leq \int_{١}^{٣} -٤$

$\int_{١}^{٣} -٢ق(س) \leq -٤(٣-١)$

$\leq -٤ \times ٢$

≤ -٨ (ب)

⑫ $٠ \leq س < ٢ \Leftarrow ٠ \leq س^{٢} < ٤$

$\Leftarrow ١ \leq س^{٢}+١ < ٥$

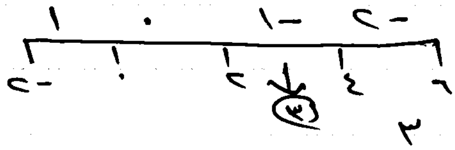
$١ \geq \frac{١}{س^{٢}+١} \geq \frac{١}{٥}$

$٥ \geq \frac{٥}{س^{٢}+١} \geq ١$

$\int_{٠}^{٢} ١\,دس \leq \int_{٠}^{٢} \frac{٥}{س^{٢}+١} \leq \int_{٠}^{٢} ٥\,دس$

$٢ \leq \int_{٠}^{٢} \frac{٥}{س^{٢}+١} \leq ١٠$

⑬ $\int_{-٢}^{٣} [\frac{٢-س}{٢}]\,دس = \int_{-٢}^{٣} [١-\frac{١}{٢}س]$



$\int_{-٢}^{٠} ١ + \int_{٠}^{٢} ٠ + \int_{٢}^{٣} -١\,دس = ٢-١ = ١$

⑭ $\int_{١}^{٣} ٢س\,دس + ٢\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس = ٦$

$[س^{٢}]_{١}^{٣} + ٢\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس = ٦$

$٩-١+٢\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس = ٦$

$\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس = \frac{-٢}{٢} = -١$

$\int_{٥}^{٣} ق(س)\,دس = \int_{٥}^{١} ق(س)\,دس + \int_{١}^{٣} ق(س)\,دس$

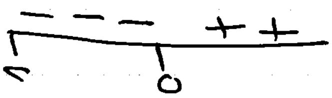
$= ٢-١ = ١$

⑮ $\int_{٢}^{٥} (٣س-٢)\,دس \leq \int_{٢}^{٥} (٢س+٣)\,دس$

الحل

$٣س-٢ \leq ٢س+٣$

$س-٥ \leq ٠ \Leftarrow س-٥ = ٠$



$٣س-٢ \leq ٢س+٣$

$\int_{٢}^{٥} (٣س-٢)\,دس \leq \int_{٢}^{٥} (٢س+٣)\,دس$

⑯ $٢\int_{١}^{٤} ق(س)\,دس + \int_{١}^{٤} س^{\frac{١}{٢}}\,دس$

$٢(\int_{١}^{٣} ق(س)\,دس + \int_{٣}^{٤} ق(س)\,دس) + [\frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}}]_{١}^{٤}$

$= ١٠ + \frac{٢}{٣} \times ٨ - \frac{٢}{٣} = \frac{٤٤}{٣}$

⑰ $\int_{٢}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \text{م}(٣) - \text{م}(٢)$

$= ١٠ - ٤ = ٦$ (ب)

---

⑱ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \left(\frac{١}{١-\text{جاس}} + \frac{١}{١+\text{جاس}}\right)\text{دس}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \left(\frac{١+\text{جاس}+١-\text{جاس}}{١-\text{جا}^{٢}\text{س}}\right)\text{دس}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{٢}{١-\text{جا}^{٢}\text{س}} = \int \frac{٢}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ (أ)

$= \int ٢\,\text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{دس} = ٢\,\text{ظاس}\Big]_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} = ٢\sqrt{٣}$

---

⑲ $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} ٢\,\text{دس} + \int_{\frac{\pi}{٢}}^{\pi} (\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٢}\text{س})\,\text{دس}$

$٢(\pi - \frac{\pi}{٢}) + ١(\pi - \frac{\pi}{٢})$

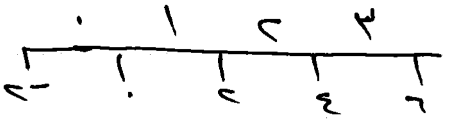
$= \frac{٣\pi}{٢}$ (ج)

---

⑳ $\int_{-\pi}^{\pi} (\text{ظا}^{٢}\text{س} - \text{قا}^{٢}\text{س})\,\text{دس} = \int_{-\pi}^{\pi} -١\,\text{دس}$

$\text{أ} + \text{ب} = -(\pi + \pi) = -٢\pi$ (ج)

㉑



$\int_{٠}^{٢} ١\,\text{دس} + \int_{٢}^{٤} ٢\,\text{دس} + \int_{٤}^{\text{ج}} ٣\,\text{دس}$

$٢ + ٤ + ٣(\text{ج} - ٤) = ٩$

$٦ + ٣\text{ج} - ١٢ = ٩$

$٣\text{ج} = ١٥$

$\text{ج} = ٥$

㉒ $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}}{٢\text{س}+١}$

$\text{ق}'(١) = \frac{١}{٢+١} = \frac{١}{٣}$ (أ)

㉓ $\int_{١}^{٣} (٥ + ٥(١-٣))\,\text{دس}$

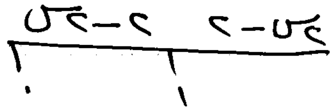
$= \int_{١}^{٣} (٥ - ١٠)\,\text{دس} = \int_{١}^{٣} -٥\,\text{دس} = -١٠$

(ج)

㉔ $\int_{٢}^{٨} \text{ج}\,\text{دس} = ١٨ \Rightarrow \text{ج}(٨-٢) = ١٨$

$٦\text{ج} = ١٨ \rightarrow \text{ج} = ٣$

㉕



① $٠ < \text{أ} \leq ١$

$\int_{٠}^{\text{أ}} (٢ - ٢\text{س})\,\text{دس} = ٥$

$٢\text{س} - \text{س}^{٢}\Big]_{٠}^{\text{أ}} = ٥$

$\text{أ}^{٢} - ٢\text{أ} + ٥ = ٠$ لا حل

② $\text{أ} > ١$

$\int_{٠}^{١} ٢ - ٢\text{س} + \int_{١}^{\text{أ}} ٢\text{س} - ٢ = ٥$

$٢\text{س} - \text{س}^{٢}\Big]_{٠}^{١} + \text{س}^{٢} - ٢\text{س}\Big]_{١}^{\text{أ}} = ٥$

$١ + \text{أ}^{٢} - ٢\text{أ} - (١ - ٢) = ٥$

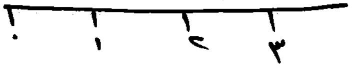
$١ + \text{أ}^{٢} - ٢\text{أ} + ١ = ٥$

$\text{أ}^{٢} - ٢\text{أ} - ٣ = ٠$

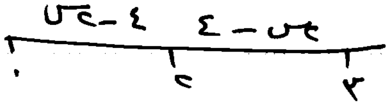
$(\text{أ} - ٣)(\text{أ} + ١) = ٠$

$\text{أ} = ٣$ ، $\text{أ} = -١$ مرفوض

(٢٦) $[٢-س]$



$|٢س-٤|$



$\int_{٠}^{٣}[٢-س] = \int_{٠}^{١}١ + \int_{١}^{٢}٠ + \int_{٢}^{٣}-١$

$= ١ + ٠ - ١ = \text{صفر}$

$\int_{٠}^{٣}|٢س-٤| = \int_{٠}^{٢}٤-٢س + \int_{٢}^{٣}٢س-٤$

$= [٤س-س^{٢}]_{٠}^{٢} + [س^{٢}-٤س]_{٢}^{٣}$

$= ٨-٤ + (٩-١٢) - (٤-٨) = ٥$

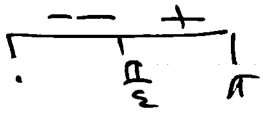
---

(٢٧) $\int \sqrt{١-\text{جا}٢س}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \sqrt{\text{جا}^{٢}س+\text{جتا}^{٢}س-٢\,\text{جاس}\,\text{جتاس}}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \sqrt{(\text{جاس}-\text{جتاس})^{٢}}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} |\text{جاس}-\text{جتاس}|\ دس$



$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{جتاس}-\text{جاس}$

$= [\text{جاس}+\text{جتاس}]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}} - ١$

---

(٢٨) $١ \geq \text{جتا}\pi س \geq -١$

$-١ \leq -\text{جتا}\pi س \leq ١$

$٢ \leq ٣-\text{جتا}\pi س \leq ٤$

$\sqrt{٢} \leq \sqrt{٣-\text{جتا}\pi س} \leq \sqrt{٤}$

$\int_{٠}^{٢}\sqrt{٢} \leq \int_{٠}^{٢}\sqrt{٣-\text{جتا}\pi س} \leq \int_{٠}^{٢}٢$

$٢\sqrt{٢} \leq \int_{٠}^{٢}\sqrt{٣-\text{جتا}\pi س} \leq ٤$

(٢٩) $\int_{-٢}^{٢} أ + \int_{-٢}^{٢} ق(س)\ دس = ١٢$

لكن $٤\int_{-٢}^{٢} ق(س)\ دس = -٨أ$

$\int_{-٢}^{٢} ق(س)\ دس = -٢أ \Leftarrow$

$أ(٤) - ٢أ = ١٢ \Leftarrow ٢أ = ١٢$ $\boxed{أ = ٦}$

(٣٠) $٤ \geq ق(س) \geq ١$

$\int_{-١}^{٥} ٢س+٤ \geq \int_{-١}^{٥} (٢س+ق(س))\ دس \geq \int_{-١}^{٥} ٢س+١$

$[س^{٢}+٤س]_{١}^{٥} \geq \int_{-١}^{٥} (٢س+ق(س))\ دس \geq [س^{٢}+س]_{-١}^{٥}$

$٢٥+٢٠ - (١-٤) \geq \int_{-١}^{٥} (٢س+ق(س)) \geq ٢٥+٥-(١-١)$

$٤٨ \geq \int_{-١}^{٥} (٢س+ق(س))\ دس \geq ٣٠$

(٣١) $١ \geq \text{جا}\frac{\pi}{س} \geq -١$

$١ \geq \text{جا}^{٣}\frac{\pi}{س} \geq -١$ $\quad ٢ \times$

$٢ \geq ٢\text{جا}^{٣}\frac{\pi}{س} \geq -٢$ $\quad +٣$

$٥ \geq ٣+٢\text{جا}^{٣}\frac{\pi}{س} \geq ١$

$\int_{١}^{٣} ٥\ دس \geq \int_{١}^{٣} (٣+٢\text{جا}^{٣}\frac{\pi}{س}) \geq \int_{١}^{٣} ١$

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

مشتقته وتكامله

تذكير

$\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{أ} = \text{جـ} \Longleftrightarrow \text{أ} = \text{ب}^{\text{جـ}}$

حيث أ ، ب اعداد حقيقية موجبة
كما ان ب ≠ ٠

مثلاً

$\text{لو}_{٢}\,١٦ = ٤ \Longleftrightarrow ٢^{٤} = ١٦$

$\text{لو}_{٣}\,٢٧ = ٣ \Longleftrightarrow ٣^{٣} = ٢٧$

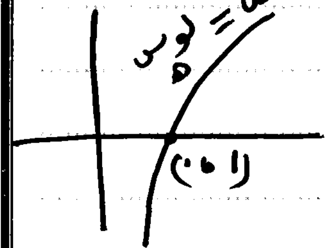
$\text{لو}_{٥}\,\frac{١}{٢٥} = -٢ \Longleftrightarrow ٥^{-٢} = \frac{١}{٢٥}$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} = \text{ص} \Longleftrightarrow \text{س} = \text{هـ}^{\text{ص}}$$

اذا كان الاساس (هـ) فانه يسمى لوغاريتم طبيعي حيث هـ العدد النيبيري (هـ ≈ ٢,٧)

خواص اللوغاريتم

① اللوغريتم غير معرف عند الاعداد السالبه والصفر



② $\text{لو}_{\text{هـ}}\,١ = ٠$

③ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} = ١$

④ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن}\;\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$

⑤ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\times\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص}$

⑥ $\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص}$

⑦ $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{ق(س)}} = \text{ق(س)}$

مثال

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{٧} = ٧$ ، $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} = \text{س}^{٢}$

مشتقة اللوغريتم الطبيعي

قاعدة

اذا كان ق(س) = لوس ، س > ٠

فان $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}}$

وبشكل عام

اذا كان ق(س) = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ م(س)

فان $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{م}'(\text{س})}{\text{م}(\text{س})}$

حيث م(س) > ٠ ، كما ان م(س) قابل للاشتقاق

• ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ اقتران

$\text{ص}' = \frac{\text{مشتقة ما داخل اللوغريتم}}{\text{ما داخل اللوغريتم نفسه}}$

مثال ①

اوجد ق'(س) للاقترانات التالية

① ق(س) = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}}$

② ق(س) = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ س² + ١

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{٢س}}{\text{س}^2 + 1}$

③ ق(س) = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ جتاس

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} = -\text{ظاس}$

④ ق(س) = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ (٣ + ظا٥س)

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{٥قا}^2\text{٥س}}{\text{٣} + \text{ظا٥س}}$

⑤ ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}$ (٥س + جا³٢س)

$\text{ص}' = \frac{\text{٥} + \text{٣جا}^2\text{٢س} \times \text{جتا٢س} \times \text{٢}}{\text{٥س} + \text{جا}^3\text{٢س}}$

⑥ $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا} \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}} \, \text{جتا} \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$

⑦ $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٢ \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ أوجد

$\text{ق}'(١)$ ، $\text{ق}'(\text{هـ})$ ، $\text{ق}'(\frac{١}{\text{هـ}})$

الحل

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{س}^٢ \times \frac{١}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \times ٢\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{س} + ٢\text{س} \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$

$\text{ق}'(١) = ١ + ٢ \times \text{لو}_{\text{هـ}} ١ = ١ + ٠ = ١$

$\text{ق}'(\text{هـ}) = \text{هـ} + ٢\text{هـ} \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{هـ} = \text{هـ} + ٢\text{هـ} = ٣\text{هـ}$

$\text{ق}'(\frac{١}{\text{هـ}}) = \frac{١}{\text{هـ}} + ٢ \times \frac{١}{\text{هـ}} \times \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{١}{\text{هـ}}$

$= \frac{١}{\text{هـ}} + \frac{٢}{\text{هـ}} \times -١ = \frac{-١}{\text{هـ}}$

مثال ②

$\text{ص} = \frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}}$ أوجد $\text{ص}'$

$\text{ص}' = \frac{-١ \times \frac{١}{\text{س}}}{(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})^٢}$

مثال ③

$\text{ص} = \text{لو} \sqrt{٥\text{س}+١}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\frac{٥}{٢\sqrt{٥\text{س}+١}}}{\sqrt{٥\text{س}+١}} = \frac{٥}{٢(٥\text{س}+١)}$

أو $\text{ص} = \text{لو}(٥\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢} \text{لو}(٥\text{س}+١)$

$\text{ص}' = \frac{١}{٢} \times \frac{٥}{٥\text{س}+١}$

مثال ④

$\text{ص} = \text{لو} \frac{\text{س}^٢+١}{٤\text{س}+٣}$ أوجد $\text{ص}'$

الحل

$\text{ص} = \text{لو}(\text{س}^٢+١) - \text{لو}(٤\text{س}+٣)$

$\text{ص}' = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^٢+١} - \frac{٤}{٤\text{س}+٣}$

مثال ⑤

$\text{ص} = \text{لو} \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$ أوجد $\text{ص}'$

$\text{ص}' = \frac{\frac{١}{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}} = \frac{١}{\text{س} \, \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}}$

مثال ⑥

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}|$

ملاحظة هامة

اذا كان ما داخل اللوغاريتم قيمة مطلقة فانها تهمل لأن ما داخل اللوغاريتم موجب دائماً

$\Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}$

ملاحظة هامة

لا داعي لإعادة تعريف القيمة المطلقة

مثال ⑦

$ق(س) = لو_{هـ} |٤ - ٣س|$

$$ق'(س) = \frac{-٣}{٤ - ٣س}$$

مثال ⑧

$ق(س) = لو_{هـ} |جاس|$

$$ق'(س) = \frac{جتاس}{جاس} = ظتاس$$

مثال ⑨

اذا كانت $ق(س) = لو_{هـ} (٣س^٢ + ٤)^٢$

جد $ق'(٢)$

أ) $\frac{٢}{٣}$　ب) $\frac{٣}{٢}$　جـ) $\frac{١}{١٦}$　د) ١٦

الحل

$ق(س) = ٢ لو_{هـ} (٣س^٢ + ٤)$

$$ق'(س) = ٢ \times \frac{٦س}{٣س^٢ + ٤}$$

$$ق'(٢) = \frac{٢٤}{١٦} = \frac{٣}{٢} \quad ⓑ$$

مثال ⑩

$ص = لو_{هـ} (س ظاس)$ جد $ص'$

الحل

$ص = لو_{هـ} س + لو_{هـ} ظاس$

$$ص' = \frac{١}{س} + \frac{قا^٢س}{ظاس}$$

مثال ⑪

$ص = لو_{هـ} \left(\frac{س - ٢}{س^٢ + ١}\right)$ جد $ص'$

الحل

$ص = ٢(لو(س - ٢) - لو(س^٢ + ١))$

$$ص' = ٢\left(\frac{١}{س} - \frac{٢س}{س^٢ + ١}\right)$$

ملاحظة هامة

اذا كان الأس متغير ونريد المشتقة نقوم بادخال اللوغاريتم على الطرفين بهدف فصل الاساس عن الأس

مثال ⑭

$ص = س^س$ أوجد $ص'$ حيث $س ≠ ٠$.

الحل

$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} س^س = س لو_{هـ} س$

$$\frac{ص'}{ص} = س \times \frac{١}{س} + لو_{هـ} س \times ١$$

$$\frac{ص'}{ص} = ١ + لو_{هـ} س$$

$ص' = (١ + لو_{هـ} س) ص = (١ + لو_{هـ} س) س^س$

مثال ⑮

اذا كانت $لو_{هـ} \sqrt{ص} + لو_{هـ} \sqrt{ص^٣} = س$

جد $ص'$

الحل $\frac{١}{٢} لوص + \frac{٣}{٢} لوص = س$

$$\frac{١}{٢} \frac{ص'}{ص} + \frac{٣}{٢} \frac{ص'}{ص} = ١$$

$$٢ \frac{ص'}{ص} = ١ \Leftarrow ص' = \frac{ص}{٢}$$

مثال ⑯

إذا كان $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س ص} = \text{س} - \text{ص}$

فأوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ؟؟

الحل

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{س} - \text{ص}$$

$$\frac{1}{\text{س}} + \frac{\text{صَ}}{\text{ص}} = 1 - \text{صَ}$$

$$\text{صَ} + \frac{\text{صَ}}{\text{ص}} = 1 - \frac{1}{\text{س}}$$

$$\text{صَ}\left(1 + \frac{1}{\text{ص}}\right) = 1 - \frac{1}{\text{س}}$$

$$\text{صَ} = \frac{1 - \frac{1}{\text{س}}}{1 + \frac{1}{\text{ص}}}$$

مثال ⑰

إذا كان $\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}^{\text{س}}$ فأوجد صَ

الحل

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$$

$$\frac{\text{صَ}}{\text{ص}} = \cancel{\text{س}} \times \frac{1}{\cancel{\text{س}}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \times 1$$

$$\frac{\text{صَ}}{\text{ص}} = 1 + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$$

$$\text{صَ} = (1 + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})\,\text{ص}$$

مثال ⑱

إذا كان $\text{ص}^2 = \text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{ص} + \text{س}|$

جد صَ

الحل

$$2\,\text{ص}\,\text{صَ} = \frac{\text{صَ} + 1}{\text{ص} + \text{س}}$$

$$2\,\text{ص}\,\text{صَ}\,(\text{ص} + \text{س}) = \text{صَ} + 1$$

$$2\,\text{ص}^2\,\text{صَ} + 2\,\text{س}\,\text{ص}\,\text{صَ} = \text{صَ} + 1$$

$$2\,\text{ص}^2\,\text{صَ} + 2\,\text{س}\,\text{ص}\,\text{صَ} - \text{صَ} = 1$$

$$\text{صَ}\,(2\,\text{ص}^2 + 2\,\text{س}\,\text{ص} - 1) = 1$$

$$\text{صَ} = \frac{1}{2\,\text{ص}^2 + 2\,\text{س}\,\text{ص} - 1}$$

مثال ⑲

إذا كان $\text{ق(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{س}^2 + 1)$

$\text{هـ(س)} = \text{س}^2$ جد $(\text{ق} \circ \text{هـ})'(1)$

الحل

$$(\text{ق} \circ \text{هـ})'(1) = \text{قَ}(\text{هـ}(1)) \times \text{هـَ}(1)$$

$$= \text{قَ}(1) \times 2 \qquad \text{قَ(س)} = \frac{2\,\text{س}}{\text{س}^2 + 1}$$

$$= \frac{2}{1+1} \times 2 = 2$$

مثال ⑳

$\text{س} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} + 2)^2$ جد صَ

الحل

$$1 = 2\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} + 2) \times \frac{\text{صَ}}{\text{ص}}$$

$$\text{صَ} = \frac{\text{ص}}{2\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} + 2)}$$

تكامل اقتران اللوغريتم الطبيعي

القاعدة

① $\int \frac{\text{١}}{\text{س}} \, \text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{جـ}$

② $\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})} \, \text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ق}(\text{س})| + \text{جـ}$

ملاحظات هامة

① اذا كانت مشتقة المقام = البسط

فان $\int \frac{\text{البسط}}{\text{المقام}} \, \text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{المقام}| + \text{جـ}$

② اذا كانت مشتقة المقام = البسط × ثابت

فان $\int \frac{\text{البسط}}{\text{المقام}} \, \text{دس} = \frac{\text{١}}{\text{الثابت}} \times \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{المقام}| + \text{جـ}$

مثال ① $\int \frac{\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٥}}{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٥س} + \text{١}} \, \text{دس}$

لاحظ ان مشتقة المقام = البسط

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{\text{٣}} + \text{٥س} + \text{١}| + \text{جـ}$

مثال ② $\int \frac{\text{جتاس} - \text{جاس}}{\text{جتاس} + \text{جاس}} \, \text{دس}$

مشتقة المقام = البسط

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتاس} + \text{جاس}| + \text{جـ}$

مثال ③ $\int \frac{\text{جا٢س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{١}} \, \text{دس}$

مشتقة المقام = البسط

$\text{٢جاس جتاس} = \text{جا٢س}$

$= \text{لو} |\text{جا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{١}| + \text{جـ}$

مثال ④ $\int \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٣}} + \text{١}} \, \text{دس}$

مشتقة المقام = $\text{٣س}^{\text{٢}}$

لذلك نضرب كل من البسط والمقام بالعدد ٣

$= \int \frac{\text{١}}{\text{٣}} \times \frac{\text{٣س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٣}} + \text{١}} \, \text{دس} = \frac{\text{١}}{\text{٣}} \int \frac{\text{٣س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٣}} + \text{١}}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٣}} \, \text{لو} |\text{س}^{\text{٣}} + \text{١}| + \text{جـ}$

مثال ⑤ $\int \frac{\text{٥}}{\text{س} + \text{هـ}}$ حيث هـ العدد النيبري

مشتقة المقام = ١

البسط = ٥ $\Leftarrow \text{٥} \int \frac{\text{١}}{\text{س} + \text{هـ}} \, \text{دس}$

$= \text{٥} \, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + \text{هـ}| + \text{جـ}$

مثال ⑥ $\int \frac{\text{جا٣س}}{\text{١} + \text{جتا٣س}} \, \text{دس}$

مشتقة المقام = ٣جا٣س = البسط

$= \frac{\text{١}}{\text{٣}} \, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{١} + \text{جتا٣س}| + \text{جـ}$

مثال ⑦ $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}\sqrt{\text{س}}+١} \, \text{ءس}$

$= \int \frac{\text{س}^{\frac{١}{٢}}}{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}+١} \, \text{ءس}$

مشتقة المقام $\frac{٣}{٢}\text{س}^{\frac{١}{٢}}$ = البسط

$= \frac{١}{\frac{٣}{٢}} \int \frac{\frac{٣}{٢}\text{س}^{\frac{١}{٢}}}{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}+١} \, \text{ءس}$

$= \frac{٢}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{\frac{٣}{٢}}+١| + \text{جـ}$

مثال ⑧ $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{٥ - \text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}}$

$= \int \frac{\text{س}^{\frac{١}{٣}}}{٥ - \text{س}^{\frac{٤}{٣}}} \, \text{ءس}$

مشتقة المقام $= \frac{-٤}{٣}\text{س}^{\frac{١}{٣}}$ = البسط

$= \frac{-٣}{٤} \text{لو} |٥ - \text{س}^{\frac{٤}{٣}}| + \text{جـ}$

ملاحظة هامة

$\int \frac{\text{ثابت}}{\text{أس}^{\text{ن}} + \text{ب س}} \, \text{ءس}$

تحل باخراج $\text{س}^{\text{ن}}$ (اعلى أس) عامل مشترك من المقام ثم رفعها للبسط

مثال ⑨ $\int \frac{١}{\text{س}^{١٠} + \text{س}} \, \text{ءس}$

الحل

$\int \frac{١}{\text{س}^{١٠}(١+\text{س}^{-٩})} \, \text{ءس} = \int \frac{\text{س}^{-١٠}}{١+\text{س}^{-٩}} \, \text{ءس}$

مشتقة المقام $= -٩\text{س}^{-١٠}$ = البسط

$= -\frac{١}{٩} \text{لو} |١ + \text{س}^{-٩}| + \text{جـ}$

مثال ⑩ $\int \frac{١}{٢\text{س}^{٦} - ٣\text{س}} \, \text{ءس}$

$= \int \frac{١}{\text{س}^{٦}(٢-٣\text{س}^{-٥})} \, \text{ءس} = \int \frac{\text{س}^{-٦}}{(٢-٣\text{س}^{-٥})} \, \text{ءس}$

⟸ البسط = مشتقة المقام $= ١٥\text{س}^{-٦}$

$= \frac{١}{١٥} \text{لو} |٢ - ٣\text{س}^{-٥}| + \text{جـ}$

مثال ⑪ $\int \frac{(١ - \text{س})^{٣}}{٣\text{س}} \, \text{ءس}$

الحل $\int \frac{١ - ٣\text{س} + ٣\text{س}^{٢} - \text{س}^{٣}}{٣\text{س}} \, \text{ءس}$

$= \int \frac{١}{٣\text{س}} - ١ + \text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٢}$

$= \frac{١}{٣} \text{لو} |\text{س}| - \text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{\text{س}^{٣}}{٩} + \text{جـ}$

مثال ⑫ $\int \frac{١ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{٣ + \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

مشتقة المقام $= ٠ + \text{س} \times \frac{١}{\text{س}} + \text{لوس} \times ١$

$= ١ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} = \text{البسط}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |٣ + \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}| + \text{جـ}$

ملاحظة هامة

تكامل كل من ظا، ظتا، قتا، قا تحل باستخدام اللوغريتم

مثال ⑬

$\int$ ظاس دس = $\int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ دس

مشتقة المقام = جاس = البسط

= − لو$_{\text{هـ}}$ |جتاس| + جـ

مثال ⑭

$\int$ ظتا٣س دس = $\int \frac{\text{جتا٣س}}{\text{جا٣س}}$ دس

= $\frac{1}{3}$ لو$_{\text{هـ}}$ |جا٣س| + جـ

مشتقة المقام = ٣ جتا٣س = البسط

مثال ⑮

$\int$ قاس دس

الحل نضرب كل من البسط والمقام في قاس + ظاس

$\int$ قاس × $\frac{\text{قاس + ظاس}}{\text{قاس + ظاس}}$ دس

= $\int \frac{\text{قا}^2\text{س + قاس ظاس}}{\text{قاس + ظاس}}$ دس

مشتقة المقام = قاس ظاس + قا^{2}س

= لو$_{\text{هـ}}$ |قاس + ظاس| + جـ

تلخيص هام

① $\int$ جاس ، $\int$ جتاس **قوانين**

② $\int$ ظاس ، $\int$ ظتاس ، $\int$ قاس
$\int$ قتاس لوغاريتم

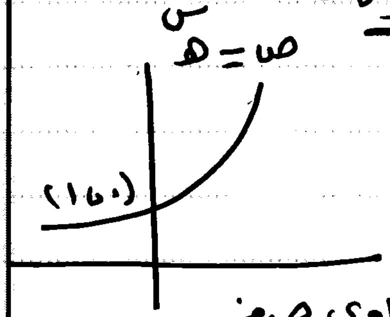
③ $\int$ جا^{2}س ، $\int$ جتا^{2}س ، $\int$ ظا^{2}س
$\int$ ظتا^{2}س استبدال
باستخدام المتطابقات

الاقتران الأسي الطبيعي مشتقته وتكامله

الأقتران الأسي : هو الأقتران الذي يكون فيه الاس متغير مثلا $هـ^{س}$ ، $هـ^{س^٢+٣}$ ، $هـ^{جاس}$ ، $٣^{س}$ ------

واذا كان الاساس هو العدد النيبيري (هـ) فانه يسمى اقتران اسي طبيعي

خواصه وميزاته



① رسمه كما في الشكل لأحظ ان $هـ^{س} \neq ٠$ لايمكن ان تساوي صفر

② للتحويل من الصورة اللوغارتمية الى الصورة الاسيه والعكس

$لو_{هـ} ص = س \Leftrightarrow ص = هـ^{س}$ ، $ص > ٠$

③ $هـ^{٠} = ١$ ، $هـ^{س} \times هـ^{ص} = هـ^{س+ص}$

$\frac{هـ^{س}}{هـ^{ص}} = هـ^{س-ص}$ ، $(هـ^{س})^{ص} = هـ^{س \times ص}$

④ $ص = لو_{هـ} هـ^{ق(س)} \Leftarrow ص = ق(س)$

$ص = هـ^{لو_{هـ} ق(س)} \Leftarrow ص = ق(س)$

مشتقة الأقتران الاسي الطبيعي

قاعدة

① $ق(س) = هـ^{س} \Leftarrow ق'(س) = هـ^{س}$

② $ق(س) = هـ^{ل(س)} \Leftarrow ق'(س) = ل'(س) هـ^{ل(س)}$

البرهان

$ص = هـ^{ل(س)} \Leftarrow لو_{هـ} ص = لو_{هـ} هـ^{ل(س)}$

$لو_{هـ} ص = ل(س)$ بالاشتقاق الضمني

$\frac{ص'}{ص} = ل'(س) \Leftarrow$

$ص' = ل'(س) \times ص$

$ق'(س) = ل'(س) \times هـ^{ل(س)}$

مثال ①

جد المشتقة الأولى لكل مما يلي

١) $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{٥\text{س}} \Rightarrow \text{ق}'(\text{س}) = ٥\,\text{هـ}^{٥\text{س}}$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = (٢\text{س} + ٢)\,\text{هـ}^{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}$

٣) $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{جتاس}}$ ، $\text{ق}'(\text{س}) = -\text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{جتاس}}$

٤) $\text{ص} = \text{س}^٣ + \text{هـ}^{\text{س}^٣} + \text{لوس}^٣$

$\text{ص}' = ٣\text{س}^٢ + ٣\text{س}^٢\,\text{هـ}^{\text{س}^٣} + \frac{٣\text{س}^٢}{\text{س}^٣}$

٥) $\text{ص} = (\text{هـ}^{\text{س}})^٣$

الحل $\text{ص} = \text{هـ}^{٣\text{س}}$ $\text{ص}' = ٣\,\text{هـ}^{٣\text{س}}$

٦) $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{١}{\text{س}}}$ $\text{ص}' = \frac{-١}{\text{س}^٢}\,\text{هـ}^{\frac{١}{\text{س}}}$

٧) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^٢} + \text{لو}(\text{س}^٣ + ٤\text{س})$

$\text{ص}' = ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^٢} + \frac{٣\text{س}^٢ + ٤}{\text{س}^٣ + ٤\text{س}}$

٨) $\text{ص} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{س}^٢}$

الحل $\text{ص} = \text{س} \times \text{س}^٢ = \text{س}^٣$

$\text{ص}' = ٣\text{س}^٢$

٩) $\text{ص} = \underset{\text{ثابت}}{\text{هـ}^٣} \Rightarrow \text{ص}' = \text{صفر}$

١٠) $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{هـ}^{٤\text{س}}}$

الحل $\text{ص} = \text{هـ}^{\frac{٤\text{س}}{٣}}$

$\text{ص}' = \frac{٤}{٣}\,\text{هـ}^{\frac{٤\text{س}}{٣}}$

١١) $\text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٢\text{س}}$

$\text{ص}' = \frac{٢\,\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٢}{٢\sqrt{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٢\text{س}}}$

١٢) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \text{هـ}^{\text{جتاس}}$

الحل

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جاس} + \text{جتاس}}$

$\text{ص}' = (\text{جتاس} - \text{جاس})\,\text{هـ}^{\text{جاس} + \text{جتاس}}$

١٣) $\text{ص} = \text{هـ}^{٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}}$

الحل $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جا}^٣\text{س}} = \text{جا}^٣\text{س}$

$\text{ص}' = ٣\,\text{جا}^٢\text{س}\,\text{جتاس}$

١٤) $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{٧\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}}}$

الحل $\text{ص} = \text{هـ}^{٧\text{س} - ٢\text{س}} = \text{هـ}^{٥\text{س}}$

$\text{ص}' = ٥\,\text{هـ}^{٥\text{س}}$

١٥) $\text{ص} = \frac{١+\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

الحل

$\text{ص} = \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}}} + ١ = \text{هـ}^{-\text{س}} + ١$

$\text{ص}' = -\text{هـ}^{-\text{س}}$

١٦) $\text{هـ}^{\text{ص}^{٢}} = ٥\text{س} + ١$ اشتقاق ضمني

$٢\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}^{٢}} \times \text{ص}' = ٥$

$\text{ص}' = \frac{٥}{٢\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}^{٢}}}$

١٧) اذا كانت $\text{ص} = (\text{هـ}^{٥\text{س}})^{٣}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{حا}^{٢}\,٣\text{س}$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل

$\text{ص} = \text{هـ}^{١٥\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{حا}^{٢}\,٣\text{س}$

$= \text{هـ}^{١٥\text{س}} \times ٢\ \text{لو}\,\text{حا}\,٣\text{س}$

$= ٢\,\text{هـ}^{١٥\text{س}}\ \text{لو}\,\text{حا}\,٣\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\,\text{هـ}^{١٥\text{س}} \times \frac{٣\ \text{جتا}\,٣\text{س}}{\text{حا}\,٣\text{س}} + \text{لو}\,\text{حا}\,٣\text{س} \times ٣٠\,\text{هـ}^{١٥\text{س}}$

١٨) $\text{ص} = \text{هـ}^{٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+١)} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{ظا}\,٥\text{س}}$

الحل

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+١)^{٢}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{ظا}\,٥\text{س}}$

$\text{ص} = (\text{س}+١)^{٢} + \text{ظا}\,٥\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢(\text{س}+١) + ٥\ \text{قا}^{٢}\,٥\text{س}$

ملاحظة هامة

القاعدة السابقة صحيحة في الأقتران الأسي الطبيعي (الذي اساسه هـ) أما اذا كان الاساس ليس هـ مثلاً $٥^{\text{س}}$ ، $٤^{\text{س}^{٢}}$ ، $\text{س}^{\text{س}}$ ـــ في هذه الحالة ندخل اللوغريتم للطرفين ثم نقوم بالاشتقاق

مثال ②

اوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لما يلي

١) $\text{ص} = ٢^{٣\text{س}}$ عندما $\text{س} = \frac{١}{٣}$

الحل

بادخال اللوغارتيم للطرفين

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,٢^{٣\text{س}} = ٣\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\,٢$

بالاشتقاق الضمني

$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = ٣\ \text{لو}_{\text{هـ}}\,٢$

$\text{ص}' = ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,٢ \times \text{ص}$

$= ٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,٢ \times ٢^{٣\text{س}}$

② $ص = ٤^{س^{٣}+٤س}$

<u>الحل</u>

$لو_{هـ} ص = (س^{٣}+٤س) لو_{هـ} ٤$

$\frac{ص'}{ص} = (٣س^{٢}+٤) لو_{هـ} ٤$

$ص' = (٣س^{٢}+٤) لو_{هـ} ٤ \times ص$

$= (٣س^{٢}+٤) لو_{هـ} ٤ \times ٤^{س^{٣}+٤س}$

③ اذا كانت $ص = أ^{ق(س)}$ فاثبت ان $\frac{دص}{دس} = ق'(س) لو_{هـ} أ \times أ^{ق(س)}$

<u>الحل</u>

$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} أ^{ق(س)} = ق(س) لو_{هـ} أ$

$\frac{ص'}{ص} = ق'(س) لو_{هـ} أ$

$ص' = ق'(س) لو_{هـ} أ \times ص$

$ص' = ق'(س) لو_{هـ} أ \times أ^{ق(س)}$

مثال ④

اذا كانت $ص = جاس\, هـ^{س}$ فاثبت ان $ص'' - ٢ص' + ٢ص = صفر$

<u>الحل</u>

$ص' = جاس \times هـ^{س} + هـ^{س} \times جتاس$

$ص'' = \cancel{جاس \times هـ^{س}} + هـ^{س} \times جتاس$
$\cancel{+ هـ^{س} \times جاس} + جتاس \times هـ^{س}$

$ص'' = ٢ هـ^{س} جتاس$

$ص'' - ٢ص' + ٢ص =$
$٢ هـ^{س} جتاس - ٢ (جاس \times هـ^{س} + هـ^{س} \times جتاس)$
$+ ٢ جاس\, هـ^{س}$
$= \cancel{٢ هـ^{س} جتاس} - \cancel{٢ هـ^{س}} جاس - \cancel{٢ هـ^{س} جتاس}$
$\cancel{+ ٢ جاس}\, هـ^{س} = صفر$

مثال ⑤

اذا كانت $ص = هـ^{أس}$ جد قيمة أ التي تحقق المعادلة

$ص'' - ٥ص' + ٦ص = صفر$

<u>الحل</u>

$ص' = أ هـ^{أس}$ $ص'' = أ^{٢} هـ^{أس}$

بالتعويض في المعادلة

$أ^{٢} هـ^{أس} - ٥أ هـ^{أس} + ٦ هـ^{أس} = ٠$

$هـ^{أس} (أ^{٢} - ٥أ + ٦) = ٠$

$هـ^{أس} \neq ٠ \Leftarrow أ^{٢} - ٥أ + ٦ = ٠$

$(أ - ٣)(أ - ٢) = ٠$

$أ = ٣$ $أ = ٢$

مثال ⑥

اذا كانت $ص^{ص} = هـ^{س}$ اثبت

أن $\frac{دص}{دس} = \frac{ص}{ص + س}$

الحل

$لو_{هـ} ص^{ص} = لو_{هـ} هـ^{س}$

$ص \, لو_{هـ} ص = س \, لو_{هـ} هـ = س$

اشتقاق ضمني

$ص \times \frac{ص'}{\cancel{ص}} + لو_{هـ} ص \times ص' = ١$

$ص' \left(١ + لو_{هـ} ص \right) = ١$

$ص' = \frac{١}{١ + لو_{هـ} ص}$

لكن $ص \, لو_{هـ} ص = س$

$\Leftarrow لو_{هـ} ص = \frac{س}{ص}$ بالتعويض في ص

$ص' = \frac{١}{١ + \frac{س}{ص}} = \frac{١}{\frac{ص + س}{ص}}$

$= \frac{ص}{ص + س}$

مثال ⑦

اذا كان $\int ق(س) \, دس = هـ^{س^٢} + لو_{هـ} حاس + جـ$

جد $ق'(س)$

$\leftarrow$

الحل

باشتقاق الطرفين

ظتاس

$ق(س) = ٢س \, هـ^{س^٢} + \frac{جتاس}{حاس} \uparrow$

$ق'(س) = ٢س \times ٢س \, هـ^{س^٢} + هـ^{س^٢} \times ٢$

$- قتا^٢ س$

$= ٤س^٢ هـ^{س^٢} + ٢هـ^{س^٢} - قتا^٢ س$

مثال ⑧

اذا كان $س^٢ \, هـ^{٢ص} = ١$ اثبت

ان $\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{س}$

الحل

نشتق

$س^٢ \times ٢ص' \, هـ^{٢ص} + هـ^{٢ص} \times ٢س = ٠$

$\frac{\cancel{س^٢ \times} ٢ص' \, \cancel{هـ^{٢ص}}}{\cancel{٢س^٢ \, هـ^{٢ص}}} = \frac{-\cancel{٢}س \, \cancel{هـ^{٢ص}}}{٢س^٢ \, \cancel{هـ^{٢ص}}}$

$ص' = \frac{-س}{س^٢} = \frac{-١}{س}$

مثال ⑨

$ص^٢ = لو_{هـ} سص - هـ^{س^٢}$ اوجد $\frac{دص}{دس}$

الحل $ص^٢ = لو_{هـ} س + لو_{هـ} ص - هـ^{س^٢} \Leftarrow$ يتبع

$$\text{٢ص صَ} = \frac{\text{١}}{\text{س}} + \frac{\text{صَ}}{\text{ص}} - \text{٢س}\,\text{هـ}^{\text{س}^{\text{٢}}}$$

$$\text{٢ص صَ} - \frac{\text{صَ}}{\text{ص}} = \frac{\text{١}}{\text{س}} - \text{٢س}\,\text{هـ}^{\text{س}^{\text{٢}}}$$

$$\frac{\text{صَ}\left(\text{٢ص} - \frac{\text{١}}{\text{ص}}\right)}{\cancel{\text{٢ص} - \frac{\text{١}}{\text{ص}}}} = \frac{\frac{\text{١}}{\text{س}} - \text{٢س}\,\text{هـ}^{\text{س}^{\text{٢}}}}{\text{٢ص} - \frac{\text{١}}{\text{ص}}}$$

$$\text{صَ} = \frac{\frac{\text{١}}{\text{س}} - \text{٢س}\,\text{هـ}^{\text{س}^{\text{٢}}}}{\text{٢ص} - \frac{\text{١}}{\text{ص}}}$$

مثال ⑩

اذا كان $\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}}$ فان $\text{قَ(٢)} =$

أ) هـ ب) ٢ ج) صفر د) لوهـ

الحل

$\text{ق(س)} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}} = \text{هـ}$ ثابت

قَ(س) = صفر ، قَ(٢) = ٠

الجواب (ج)

مثال ⑪

اذا كان $\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س} + \text{ص}$

فأثبت ان

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{١} - \text{س ص} - \text{ص}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{س ص} - \text{١}}$$

الحل

باشتقاق الطرفين

$$(\text{س صَ} + \text{ص})\,\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{١} + \text{صَ}$$

$$\text{س صَ}\,\text{هـ}^{\text{س ص}} + \text{ص}\,\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{١} + \text{صَ}$$

$$\text{س صَ}\,\text{هـ}^{\text{س ص}} - \text{صَ} = \text{١} - \text{ص}\,\text{هـ}^{\text{س ص}}$$

$$\frac{\text{صَ}\left(\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س ص}} - \text{١}\right)}{\cancel{\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س ص}} - \text{١}}} = \frac{\text{١} - \text{ص}\,\text{هـ}^{\text{س ص}}}{\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س ص}} - \text{١}}$$

لكن $\text{هـ}^{\text{س ص}} = \text{س} + \text{ص}$

$$\text{صَ} = \frac{\text{١} - \text{ص}(\text{س}+\text{ص})}{\text{س}(\text{س}+\text{ص}) - \text{١}}$$

$$= \frac{\text{١} - \text{س ص} - \text{ص}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{س ص} - \text{١}}$$

مثال ⑫

جد $\int \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{\text{٣}} + \text{جاس})}\,\text{دس}$

الحل

$$= \int (\text{س}^{\text{٣}} + \text{جاس})\,\text{دس}$$

$$= \frac{\text{س}^{\text{٤}}}{\text{٤}} - \text{جتاس} + \text{جـ}$$

مثال ⑬

جد معادلة المماس لمنحنى

$\text{ص} = (\text{س} - \text{١})\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{٢}$

عند النقطة (١،٢) ← يتبع الحل

الحل

(١ ، ٢) نقطة التماس ولايجاد ميل المماس نجد صَ

$$\text{صَ} = (\text{س}-١)\times \text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} \times ١ + \frac{٣}{\text{س}}$$

$$\text{ميل المماس} = \text{صَ}\Big|_{\text{س}=١}$$

$$= (١-١)\,\text{هـ}^{١} + \text{هـ}^{١} + \frac{٣}{١}$$

$$= \text{هـ} + ٣$$

معادلة المماس $\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_١)$

$$\text{ص} - ٢ = (\text{هـ} + ٣)\,(\text{س} - ١)$$

مثال ⑭

اذا كانت $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{أ جتاس}} + \text{هـ}^{\text{لو جاس}} + \int_{.}^{\pi} \frac{\text{دس}}{٢+\text{جاس}}$

وكانت $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=\frac{\pi}{٢}} = -٤$ جد قيمة أ

الحل

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{أ جاس هـ}^{\text{أجتاس}} + \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} + ٠$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=\frac{\pi}{٢}} = -\text{أ جا}\tfrac{\pi}{٢}\,\text{هـ}^{\text{أجتا}\frac{\pi}{٢}} + \frac{\text{جتا}\frac{\pi}{٢}}{\text{جا}\frac{\pi}{٢}} = -٤$$

$$-\text{أ} \times ١\ \text{هـ}^{٠} + \frac{٠}{١} = -٤$$

$$-\text{أ} = -٤$$

$$\text{أ} = ٤$$

تكامل الاقتران الاسي الطبيعي

القاعدة

① $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

② $\int \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}}\,\text{دس} = \frac{\text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}}}{\text{أ}} + \text{جـ}$

ملاحظه

القاعدة صحيحه فقط اذا كان الاس خطي .

مثال ①

جد كلاً من التكاملات الآتيه

١) $\int ٥\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = ٥\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{هـ}^{٢\text{س}+١}\,\text{دس} = \frac{\text{هـ}^{٢\text{س}+١}}{٢} + \text{جـ}$

٣) $\int \text{هـ}^{١-\frac{١}{٣}\text{س}}\,\text{دس} = \frac{\text{هـ}^{١-\frac{١}{٣}\text{س}}}{-\frac{١}{٣}} + \text{جـ}$

٤) $\int \sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{دس} = \int \text{هـ}^{\frac{\text{س}}{٢}}\,\text{دس}$

$$= ٢\,\text{هـ}^{\frac{\text{س}}{٢}} + \text{جـ}$$

٥) $\int \frac{٥}{\sqrt[٣]{هـ^{٦س-٣}}} دس = ٥\int هـ^{-\frac{١}{٣}(٦س-٣)} دس$

$= ٥\int هـ^{-٢س+١} دس = \frac{٥}{-٢} هـ^{-٢س+١} + جـ$

٦) $\int \frac{هـ^{س}+٤}{هـ^{س}} دس = \int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}} + \frac{٤}{هـ^{س}}$

$= \int (١ + ٤هـ^{-س}) دس$

$= س - ٤هـ^{-س} + جـ$

٧) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}+١} دس$

مشتقة المقام = البسط

$= لو_{هـ} |هـ^{س}+١| + جـ$

٨) $\int \frac{٥+٣هـ^{٣س}}{هـ^{٣س}+٥س-١}$

الحل

مشتقة المقام $= ٣هـ^{٣س}+٥ =$ البسط

$لو_{هـ} |هـ^{٣س}+٥س-١| + جـ$

٩) $\int \frac{هـ^{٣س} - هـ^{٥س} - هـ^{س} + ٧}{هـ^{س}}$

$= \int \frac{هـ^{٣س}}{هـ^{س}} - \frac{هـ^{٥س}}{هـ^{س}} - \frac{هـ^{س}}{هـ^{س}} + \frac{٧}{هـ^{س}}$

$= \int (هـ^{٢س} + هـ^{٤س} - ١ + ٧هـ^{-س}) دس$

$= \frac{هـ^{٢س}}{٢} + \frac{هـ^{٤س}}{٤} - س - ٧هـ^{-س} + جـ$

⑩ $\int_{٠}^{لو_{هـ}٣} هـ^{٢س} دس = \left[\frac{هـ^{٢س}}{٢}\right]_{٠}^{لو_{هـ}٣}$

$= \frac{١}{٢}(هـ^{٢لو_{هـ}٣} - هـ^{٠}) = \frac{١}{٢}(هـ^{لو_{هـ}٩} - ١)$

$= \frac{١}{٢}(٩-١) = \frac{١}{٢} \times ٨ = ٤$

⑪ اثبت ان $\int_{٠}^{لو_{هـ}٣} \frac{هـ^{س}}{٤+هـ^{س}} دس$

$= لو_{هـ} \frac{٧}{٥}$

الحل

مشتقة المقام $= هـ^{س} =$ البسط

$= \left[لو|٤+هـ^{س}|\right]_{٠}^{لو_{هـ}٣}$

$= لو|٤+هـ^{لو_{هـ}٣}| - لو(٤+هـ^{٠})$

$= لو(٤+٣) - لو(٤+١)$

$= لو_{هـ}٧ - لو_{هـ}٥ = لو_{هـ}\frac{٧}{٥}$

⑫ $\int \frac{هـ^{٢س}-٤}{هـ^{س}-٢} دس$

الحل $= \int \frac{(هـ^{س})^{٢}-٤}{هـ^{س}-٢} = \int \frac{\cancel{(هـ^{س}-٢)}(هـ^{س}+٢)}{\cancel{هـ^{س}-٢}}$

$= \int هـ^{س}+٢ = هـ^{س}+٢س+جـ$

ورقة عمل

① $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}}} + \text{أ}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}}$

وكانت $\text{ق}'(١) = \text{هـ}$ جد قيمة أ؟

② اذا كانت $\text{ص} = \text{لو}\left(\frac{\text{س}^{٣}}{(\text{س}+٢)^{٣}}\right)$

فان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{\text{س}=١}$ تساوي

أ) $\frac{٤}{٣}$ ب) $\frac{١}{٣}$ ج) ١ د) ٢

③ اذا كانت $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ك}\text{س}}$ تحقق

المعادلة $\text{ص}'' + ٢\text{ص}' - ٨\text{ص} = ٠$

فاوجد قيمة ك ؟

④ $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}-٢} + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢}-٣)$ فان

$\text{ق}'(٢)$

أ) ٥ ب) ٤ ج) ٣ د) ٢

⑤ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{س}} - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{هـ}^{\text{س}}+١)$

فان $\text{ق}'(٠) =$

أ) $\frac{١}{\text{هـ}+١}$ ب) $١ - \text{لو}_{\text{هـ}}٢$ ج) ٢ د) $\frac{١}{٢}$

⑥ $\int \text{ظتاس}\ \text{دس}$

أ) $\text{لو}|\text{جاس}| + \text{جـ}$ ب) $\text{لو}|\text{قاس}| + \text{جـ}$

ج) $\text{لو}|\text{قتاس}| + \text{جـ}$ د) $-\text{لو}|\text{جتاس}| + \text{جـ}$

⑦ قيمة التكامل $\int_{-٣}^{-١} \frac{\text{س}^{٢}+١}{\text{هـ}^{-\text{س}}}\,\text{دس}$

أ) موجبة ب) سالبة ج) صفر د) لا يمكن تحديدها

⑧ $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}+١}}{\text{هـ}^{\text{س}-١}}\,\text{دس} =$

أ) $\frac{\text{هـ}^{٣}}{٣} + \text{جـ}$ ب) $\text{س} + \text{جـ}$ ج) $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{س}-١} + \text{جـ}$

د) $\text{هـ}^{٢}\text{س} + \text{جـ}$

⑨ اذا علمت ان منحنى $\text{ق}'(\text{س})$ يقع

فوق محور السينات في الفترة $[-١، ٥]$

اثبت ان $\int_{١}^{١} (\text{ق}'(\text{س}) + \text{هـ}^{-\text{س}})\,\text{دس} >$ صفر

⑩ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٣}$ جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

⑪ اذا كان $\text{ص} = ٥^{٣\text{س}^{٢}}$ اثبت

ان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{لو}_{\text{هـ}}٥ \times ٥^{٣\text{س}^{٢}} \times ٦\text{س}$

⑫ اذا كان $\text{م}(\text{س}) = ٨\,\text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}} + \text{هـ}^{٤-\text{س}}$

مقلوب المشتقة $\text{ق}(\text{س})$ المتصل على

$[١، ٥]$ اوجد $\text{ق}(٤)$

(١٣) اذا كان
$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{٣\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{قاس} - \int \frac{٢\text{س}+\text{أ}}{\text{س}^٣+١}\,\text{دس}$
وكان ق'(٠) = ٥ جد قيمة الثابت أ

(١٤) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}\,\frac{\text{س}^٥}{\text{س}^٢+١}$
فان ق'(١) =

أ) ٣ ب) ٢ ج) ١ د) ٤

(١٥) اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند اي نقطة يعطى بالعلاقة $\frac{٧}{٢\text{س}-٣}$ وكان منحنى ق يمر بالنقطة (٢، ٥) أكتب قاعدة الاقتران ق

ج) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٧}{٢}\,\text{لو}|٢\text{س}-٣| + \text{جـ}$

(١٦) $\int_{١}^{\text{هـ}^٣} \frac{٥}{\text{س}}\,\text{دس} =$

أ) ١٠ ب) ١٥ ج) $\text{هـ}^٣$ د) $\frac{١}{\text{هـ}}$

(١٧) اذا كانت $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ظا}^٢\,٣\text{س}$
أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

(١٨) جد $\int \frac{٢\text{س} - \text{حاس}}{\text{س}^٢ + \text{جتاس}}\,\text{دس}$

(١٩) $\int \left(\frac{٥}{\text{ظاس}} + \frac{\text{ظا}^٢\text{س}}{\text{ظاس}}\right)\text{دس}$

(٢٠) جد $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{حا}٢\text{س}}{٥ - ٣\,\text{جتا}^٢\text{س}}\,\text{دس}$

ج) $\frac{١}{٣}(\text{لو}_{\text{هـ}}٥ - \text{لو}_{\text{هـ}}٢)$

(٢١) $\int_{١}^{٢} \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{٢\text{س}}$ تساوي

أ) ٤ ب) −٤ ج) ٣ د) −٣

(٢٢) جد قيمة $\int \frac{٦ + ٢\text{هـ}^{٧\text{س}}}{\text{هـ}^{٤\text{س}}}$

(٢٣) $\int \frac{٤\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{س}\,\text{هـ}^{٢\text{س}}}{\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}}$

(٢٤) اذا كان $\text{س} = \text{هـ}^{\text{ن}^٢}$ ، $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ن}^٣}$
أوجد $\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢}$

(٢٥) اذا كان
$\text{هـ}^{\text{س}\,\text{ص}} = \text{س}^٢ + \text{ص}$ اثبت ان
$(\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}\,\text{ص}} - ١)\,\text{ص}' = ٢\text{س} - \text{ص}\,\text{هـ}^{\text{س}\,\text{ص}}$

(٢٦) اذا كان
$\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ص}-١} + \text{ص}\,\text{هـ}^{-\frac{\text{س}}{٢}} = ٢$ أوجد
$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند س = .

(٢٧) اذا كان

ص = $هـ^{٣س}$ + $س^٢$ ابثت ان

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} - ٢ = ٩(ص - س^٢)$

(٢٨) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند اي نقطة عليه (س ، ص) يساوي ٧ - ٢$هـ^س$ وكان ق(لو$_هـ$ ٢) = ٣ اوجد ق(س)

(٢٩) ص = $هـ^{لو_هـ ٧}$ فان $\frac{دص}{دس}$

أ) ٧ ب) ١ ج) صفر د) لو$_هـ$ ٧

(٣٠) اوجد قيم س التي يكون عندها مماس المنحنى

ص = ٩$س^٣$ - ٨ لو$_هـ$ س موازيًا لمحور السينات ؟

(٣١) اذا كان

∫ $هـ^س$ ق($هـ^س$) دس = س لو$_هـ$ س + $س^٢$ - ٣

فاوجد قيمة $هـ^٢$ ق($هـ^٢$)

اجابات ورقة عمل الاقتران اللوغريتمي والاسي

① $\text{ق}(\text{س}) = \text{ه}^{\frac{١}{\text{س}}} + \frac{\text{أ}}{٢}\,\text{لو}_{\text{ه}}\text{س}$

$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}\,\text{ه}^{\frac{١}{\text{س}}} + \frac{\text{أ}}{٢} \times \frac{١}{\text{س}}$

$\text{قَ}(١) = -\,\text{ه} + \frac{\text{أ}}{٢} \times \frac{١}{١} = \text{ه}$

$\frac{\text{أ}}{٢} = ٢\,\text{ه} \Leftarrow \text{أ} = ٤\,\text{ه}$

②

$\text{ص} = \text{لو}\,\text{س}^{٣} - \text{لو}(\text{س}+٢)^{٣}$

$= ٣\,\text{لو}\,\text{س} - ٣\,\text{لو}(\text{س}+٢)$

$\text{صَ} = ٣ \times \frac{١}{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}+٢}$

$\text{صَ}\Big|_{\text{س}=١} = \frac{٣}{١} - \frac{٣}{٣} = ٣ - ١ = ٢$

الاجابه (د)

③ $\text{صَ} = \text{ك}\,\text{ه}^{\text{ك}\text{س}}$

$\text{صً} = \text{ك}^{٢}\,\text{ه}^{\text{ك}\text{س}}$

$\text{صً} + ٢\,\text{صَ} - ٨\,\text{ص} = ٠$

$\text{ك}^{٢}\,\text{ه}^{\text{ك}\text{س}} + ٢\text{ك}\,\text{ه}^{\text{ك}\text{س}} - ٨\,\text{ه}^{\text{ك}\text{س}} = ٠$

$\text{ه}^{\text{ك}\text{س}}(\text{ك}^{٢} + ٢\text{ك} - ٨) = ٠$

$\text{ك}^{٢} + ٢\text{ك} - ٨ = ٠$

$(\text{ك}+٤)(\text{ك}-٢) = ٠$

$\text{ك} = -٤ \qquad \text{ك} = ٢$

④ $\text{قَ}(\text{س}) = \text{ه}^{\text{س}-٢} + \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}-٣}$

$\text{قَ}(٢) = \text{ه}^{٠} + \frac{٤}{١} = ١ + ٤$

$= ٥$

(أ)

⑤ $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{ه}}\text{ه}^{\text{س}} - \text{لو}_{\text{ه}}(\text{ه}^{\text{س}}+١)$

$= \text{س} - \text{لو}_{\text{ه}}(\text{ه}^{\text{س}}+١)$

$\text{قَ}(\text{س}) = ١ - \frac{\text{ه}^{\text{س}}}{\text{ه}^{\text{س}}+١}$

$\text{قَ}(١) = ١ - \frac{١}{١+١} = ١ - \frac{١}{٢}$

$= \frac{١}{٢}$

الاجابه (د)

⑥ $\int \text{ظتاس}\ \text{دس} = \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\ \text{دس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جاس}| + \text{جـ}$

(أ)

⑦ $\int_{-٣}^{-١} (\text{س}^{٢}+١)\ \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{دس}$

$\text{س}^{٢}+١$ موجب على $[-٣ ، -١]$

$\text{هـ}^{\text{س}}$ موجب

$\Leftarrow (\text{س}^{٢}+١)\ \text{هـ}^{\text{س}}$ موجب

(أ)

⑧ $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}+١}}{\text{هـ}^{\text{س}-١}} = \int \frac{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}} \times \text{هـ}^{١}}{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}} \times \text{هـ}^{١}}$

$= \int \text{هـ}^{١} \times \text{هـ}^{١} = \int \text{هـ}^{٢}\ \text{دس}$

$= \text{هـ}^{٢}\text{س} + \text{جـ}$

(د)

⑨ $\text{ق}(\text{س}) > ٠ \quad \text{س} \in (٠ ، ١)$

$\text{هـ}^{-\text{س}} > ٠ \quad \text{س} \in (١ ، ١)$

$\Leftarrow \text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}^{-\text{س}} > ٠ ، \text{س} \in (٠ ، ١)$

$\int_{٠}^{١} (\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}^{-\text{س}})\ \text{دس} > ٠$

$\int_{١}^{٠} (\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}^{-\text{س}})\ \text{دس} < ٠$

⑩ $\text{ص} = ٣\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$

$\text{ص}' = ٣\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \times \frac{١}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \times ٦\text{س}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}$

⑪ $\text{ص} = ٥^{٣\text{س}^{٢}}$

$\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ص} = ٣\text{س}^{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}} ٥$

$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = ٣\text{لو}_{\text{هـ}} ٥ \times ٢\text{س}$

$\text{ص}' = ٦\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}} ٥ \times \text{ص}$

$= ٦\ \text{لو}_{\text{هـ}} ٥\ \text{س} \times ٥^{٣\text{س}^{٢}}$

⑫ $\text{م}(\text{س}) = ٤\ \text{لوس} + \text{هـ}^{٤-\text{س}}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{م}'(\text{س})$

$= \frac{٤}{\text{س}} - \text{هـ}^{٤-\text{س}}$

$\text{ق}(٤) = ٤ - \text{هـ}^{٠} = ٤ - ١ = \underline{\underline{٣}}$

⑬ $\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{هـ}^{٣\text{س}} - \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} - \frac{٢\text{س} + \text{أ}}{\text{س}^{٣}+١}$

$\text{ق}'(٠) = ٣\text{هـ}^{٠} - \text{صفر} - \frac{\text{أ}}{١} = ٥$

$٣ - \text{أ} = ٥$

$\text{أ} = -٢$

⑭ $\text{ق}(\text{س}) = \text{لوس}^{٥} - \text{لو}(\text{س}^{٢}+١)$

$= ٥\text{لوس} - \text{لوس}^{٢}+١$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٥}{\text{س}} - \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+١} \quad \text{ق}'(١) = ٥ - ١$

$= ٤$ (د)

⑮ $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{7}{2\text{س} - 3}$

$\int \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس} = \int \frac{7}{2\text{س} - 3}\,\text{دس}$

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{7}{2}\,\text{لو}|2\text{س} - 3| + \text{ج}$

$\text{ق}(2) = \frac{7}{2}\,\text{لو}|2 \times 2 - 3| + \text{ج} = 5$

$\frac{7}{2}\,\text{لو}\,1 + \text{ج} = 5$

$\Leftarrow \boxed{\text{ج} = 5}$

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{7}{2}\,\text{لو}|2\text{س} - 3| + 5$

⑯ $\int_{1}^{\text{هـ}^3} \frac{5}{\text{س}} = 5\,\text{لو}|\text{س}|\Big]_{1}^{\text{هـ}^3}$

$= 5\,\text{لو}\,\text{هـ}^3 - 5\,\text{لو}\,1$

$= 15\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} - \text{صفر} = 15$

الاجابه (ب)

⑰ $\text{ص} = \text{لو}\,\text{ظا}^2 3\text{س} = 2\,\text{لو}\,\text{ظا}\,3\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2 \times \frac{3\,\text{قا}^2 3\text{س}}{\text{ظا}\,3\text{س}}$

⑱ $\int \frac{2\text{س} - \text{حاس}}{\text{س}^2 + \text{جتاس}}\,\text{دس}$

$= \text{لو}|\text{س}^2 + \text{جتاس}| + \text{ج}$

البسط = مشتقة المقام

⑲ $\int \frac{5}{\text{ظاس}} + \frac{2\,\text{ظا}^2\text{س}}{\text{ظاس}}$ (

$\int 5\,\text{ظتاس} + 2\,\text{ظاس}$ (

$= 5\,\text{لو}|\text{حاس}| - 2\,\text{لو}|\text{جتاس}| + \text{ج}$

⑳ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{حا}2\text{س}}{5 - 3\,\text{جتا}^2\text{س}}$

مشتقة المقام = ٦ جتاس حاس

$= 3\,\text{حا}2\text{س}$

$= \frac{\text{البسط}}{3}$

$= \frac{1}{3}(\text{لو}|5 - 3\,\text{جتا}^2\text{س}|\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{3}(\text{لو}\,5 - \text{لو}\,2)$

㉑ $\int_{1}^{2} \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{2\text{س}}\,\text{دس} = \int_{1}^{2} 2\text{س}\,\text{دس}$

$= \text{س}^2\Big]_{1}^{2} = 4 - 1 = 3$

(ج)

㉒ $\int \frac{5 + 2\text{هـ}^{7\text{س}}}{\text{هـ}^{4\text{س}}}$

$= \int \frac{5}{\text{هـ}^{4\text{س}}} + \frac{2\text{هـ}^{7\text{س}}}{\text{هـ}^{4\text{س}}}$

$= \int 5\text{هـ}^{-4\text{س}} + 2\text{هـ}^{3\text{س}}$

$= \frac{5\text{هـ}^{-4\text{س}}}{-4} + \frac{2\text{هـ}^{3\text{س}}}{3} + \text{ج}$

㉓ $\int \frac{4\,\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}}{\text{س}\,\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}} + \frac{\cancel{\text{س}}\,\text{هـ}^{2\text{س}}}{\cancel{\text{س}}\,\text{هـ}^{\text{س}}}$

$\int \frac{4}{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} = 4\,\text{لو}|\text{س}| + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ج}$

(٢٤) $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس}$

$= ٣ هـ^{ن} \times \frac{١}{٢ هـ^{٢ن}} = \frac{٣}{٢} هـ^{-ن}$

$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{-٣}{٢} هـ^{-ن} \times \frac{١}{٢ هـ^{٢ن}} = \frac{-٣}{٤} هـ^{-٣ن}$

(٢٥) $هـ^{س ص} = س^{٢} + ص$

$(س ص' + ص) هـ^{س ص} = ٢س + ص'$

$س ص' هـ^{س ص} + ص هـ^{س ص} = ٢س + ص'$

$س ص' هـ^{س ص} - ص' = ٢س - ص هـ^{س ص}$

$ص' (س هـ^{س ص} - ١) = ٢س - ص هـ^{س ص}$

(٢٦) $س هـ^{-\frac{١}{٢}ص} + ص هـ^{-\frac{س}{٢}} = ٢$

$س \times -\frac{١}{٢} ص' هـ^{-\frac{١}{٢}ص} + هـ^{-\frac{١}{٢}ص}$

$+ ص \times -\frac{١}{٢} هـ^{-\frac{س}{٢}} + هـ^{-\frac{س}{٢}} \times ص' = ٠$

عندما $س = ٠$ فان $٠ \times هـ^{-\frac{١}{٢}ص} + ص هـ^{٠} = ٢$

$ص = ٢$ بالتعويض

$صفر + هـ^{-١} - ١ + ص' = ٠$

$ص' = ١ - \frac{١}{هـ}$

(٢٧) $ص' = ٣ هـ^{٣س} + ٢س$

$ص'' = ٩ هـ^{٣س} + ٢$

$ص'' - ٢ = ٩ هـ^{٣س}$

لكن $هـ^{٣س} = ص - س^{٢}$ من المعادلة

$ص'' - ٢ = ٩(ص - س^{٢})$

(٢٨) $ق'(س) = ٧ - ٢ هـ^{س}$

$ق(س) = \int ٧ - ٢ هـ^{س} دس$

$= ٧س - ٢ هـ^{س} + جـ$

$ق(لو_{هـ}٢) = ٧لو_{هـ}٢ - هـ^{لو_{هـ}٢} + جـ = ٣$

$= ٧لو_{هـ}٢ - ٢ + جـ = ٣$

$جـ = ٥ - ٧ لو_{هـ}٢$

(٢٩) $ص' = صفر$ لأن $هـ^{لو ٧} = ٧$ ثابت (جـ)

(٣٠) موازي لمحور السينات $ق'(س) = ٠$

$ص' = ٢٧ س^{٢} - ٨ \times \frac{١}{س} = ٠$

$\frac{٢٧س^{٣} - ٨}{س} = ٠$

$٢٧س^{٣} - ٨ = ٠$

$(٣س - ٢)(٩س^{٢} + ٦س + ٤)$

$٣س - ٢ = ٠ \longleftarrow س = \frac{٢}{٣}$

(٣١)

$\int هـ^{٢س} ق(هـ^{٢س}) دس = س لو_{هـ}س + س^{٢} - ٣$

بالاشتقاق

$هـ^{٢س} ق(هـ^{٢س}) = \cancel{س} \times \frac{١}{\cancel{س}} + لو س \times ١$

$+ ٢س$

$س = ١$

$هـ^{٢} ق(هـ^{٢}) = ١ + لو_{هـ}١ \times ١ + ٢ \times ١$

$= ١ + ٠ + ٢$

$= ٣$

التكامل بالتعويض

اذا كان داخل التكامل حاصل ضرب اقترانين احدهما مشتقة لآخر أو على الأقل الجزء المتغير من المشتقة فاننا نلجأ الى التعويض (الاستبدال)

النوع الأول

يستخدم عندما يكون هناك علاقة بالاشتقاق بين الاقترانين

قاعدة

$$\int ق(هـ(س))\, هـ'(س)\, دس$$

$$= \int ق(ص)\, دص$$

حيث $ص = هـ(س)$ ، $دص = هـ'(س)\, دس$

مثال ①

$$\int 2س\,(س^2+5)^{18}\, دس$$

نلاحظ ان مشتقة $(س^2+5) = 2س$

لذلك نفرض $ص = س^2+5$

$\frac{دص}{دس} = 2س \Leftarrow دص = 2س\, دس$

$\Leftarrow دس = \frac{دص}{2س}$

نعود للتكامل ونعوض قيمة الفرض وقيمة دس

$\Leftarrow \int 2س\,(س^2+5)^{18}\, دس$

$= \int \cancel{2س}\, ص^{18} \times \frac{دص}{\cancel{2س}} = \int ص^{18}\, دص$

تكامل بالنسبة لص

$= \frac{ص^{19}}{19} + جـ$ ونعوض قيمة ص

$= \frac{(س^2+5)^{19}}{19} + جـ$

مثال ②

$$\int \frac{س+1}{\sqrt{س^2+2س+7}}\, دس$$

الحل

نفرض $ص = \sqrt{س^2+2س+7}$

$ص^2 = س^2+2س+7$

$2ص\, دص = (2س+2)\, دس$

$دس = \frac{2ص\, دص}{2س+2}$

$\int \frac{س+1}{\cancel{ص}} \times \frac{2\cancel{ص}\, دص}{2س+2}$

$\int \cancel{س+1} \times \frac{\cancel{2}\, دص}{\cancel{2(س+1)}} = \int 1\, دص$

$= ص + جـ = \sqrt{س^2+2س+7} + جـ$

مثال ③

$$\int \frac{(\sqrt{\text{س}}+\text{٥})^{\text{٩}}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$$

الحل

$$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}+\text{٥} \qquad \text{دص} = \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$$

$$\text{دس} = \text{٢}\sqrt{\text{س}}\ \text{، دص}$$

$$= \int \frac{\text{ص}^{\text{٩}}}{\cancel{\sqrt{\text{س}}}} \times \text{٢}\cancel{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دص}$$

$$= \int \text{٢}\,\text{ص}^{\text{٩}}\,\text{دص} = \frac{\text{٢}\,\text{ص}^{\text{١٠}}}{\text{١٠}} + \text{ج}$$

$$= \frac{\text{٢}(\sqrt{\text{س}}+\text{٥})^{\text{١٠}}}{\text{١٠}} + \text{ج}$$

مثال ④

$$\int \frac{\text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}}} \times \sqrt[\text{٣}]{\text{١}+\frac{\text{١}}{\text{س}}}\,\text{دس}$$

الحل

$$\text{ص} = \text{١} + \frac{\text{١}}{\text{س}} \Leftarrow \text{دص} = \frac{-\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}\,\text{دس}$$

$$\Leftarrow \text{دس} = -\text{س}^{\text{٢}}\,\text{دص}$$

$$\int \frac{\text{٢}}{\cancel{\text{س}^{\text{٢}}}} \times \sqrt[\text{٣}]{\text{ص}} \times -\cancel{\text{س}^{\text{٢}}}\,\text{دص}$$

$$\int -\text{٢}\,\text{ص}^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}\,\text{دص}$$

$$= -\text{٢} \times \frac{\text{٣}}{\text{٤}}\,\text{ص}^{\frac{\text{٤}}{\text{٣}}}$$

$$= \frac{-\text{٣}}{\text{٢}}\left(\text{١}+\frac{\text{١}}{\text{س}}\right)^{\frac{\text{٤}}{\text{٣}}} + \text{ج}$$

مثال ⑤

$$\text{جد } \int_{\text{٠}}^{\text{٤}} \text{س}\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٩}}\,\text{دس}$$

الحل

$$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٩}}$$

$$\text{ص}^{\text{٢}} = \text{س}^{\text{٢}}+\text{٩} \Leftarrow \text{٢ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢س}$$

$$\text{دس} = \frac{\cancel{\text{٢}}\text{ص}}{\cancel{\text{٢}}\text{س}}\,\text{دص}$$

$$\text{عندما س} = \text{٠} \Leftarrow \text{ص} = \text{٣}$$

$$\text{س} = \text{٤} \Leftarrow \text{ص} = \text{٥}$$

$$\int_{\text{٣}}^{\text{٥}} \cancel{\text{س}} \times \text{ص} \times \frac{\text{ص}}{\cancel{\text{س}}}\,\text{دص}$$

$$\int_{\text{٣}}^{\text{٥}} \text{ص}^{\text{٢}}\,\text{دص} = \left.\frac{\text{ص}^{\text{٣}}}{\text{٣}}\right]_{\text{٣}}^{\text{٥}}$$

$$= \frac{\text{١٢٥}}{\text{٣}} - \text{٩} = \frac{\text{٩٨}}{\text{٣}}$$

مثال ⑥

$$\int \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{س}}\,(\text{٢}+\sqrt{\text{س}})}\,\text{دس}$$

الحل

$$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \qquad \text{دص} = \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$$

$$\Leftarrow \text{دس} = \text{٢}\sqrt{\text{س}}\,\text{دص}$$

$$\int \frac{\text{١}}{\text{ص}(\text{٢}+\text{ص})} \times \text{٢}\sqrt{\text{س}}\,\text{دص}$$

$$= \int \frac{\text{١}}{\cancel{\text{ص}}(\text{٢}+\text{ص})} \times \text{٢}\cancel{\text{ص}}\,\text{دص} = \int \frac{\text{٢}}{\text{٢}+\text{ص}}\,\text{دص}$$

$$= \text{٢ لو}|\text{٢}+\text{ص}| + \text{ج} = \text{٢لو}|\text{٢}+\sqrt{\text{س}}|$$

مثال ⑦

$\int \frac{1}{س\,لو_{هـ}س}\,دس$

الحل

$ص = لو_{هـ}س \Leftarrow دص = \frac{1}{س}\,دس$

$\Leftarrow دس = س\,دص$

$= \int \frac{1}{\cancel{س}\,ص} \times \cancel{س}\,دص$

$= لو|ص| + جـ = لو|لو_{هـ}س| + جـ$

مثال ⑧

$\int س\,هـ^{س^{2}}\,دس$

الحل

$ص = س^{2} \quad دص = 2س\,دس$

$\Leftarrow دس = \frac{دص}{2س}$

$\int \cancel{س}\,هـ^{ص} \times \frac{دص}{2\cancel{س}}$

$\frac{1}{2}\,هـ^{ص} + جـ = \frac{1}{2}\,هـ^{س^{2}} + جـ$

مثال ⑨

$\int س^{2}\,هـ^{س^{3}+1}\,دس$

الحل

$ص = س^{3}+1 \Leftarrow دص = 3س^{2}\,دس$

$دس = \frac{دص}{3س^{2}}$

$\int \cancel{س^{2}}\,هـ^{ص} \times \frac{دص}{3\cancel{س^{2}}}$

$= \frac{1}{3}\,هـ^{ص} + جـ = \frac{1}{3}\,هـ^{س^{3}+1} + جـ$

ملاحظة هامة

$\int هـ^{ليس\ خطي}\,دس$

يحل بالتعويض ونفرض

ص = الأس

مثال ⑩

$\int جا2س\,هـ^{جا^{2}س}\,دس$

الحل

$ص = جا^{2}س ، دص = 2\,جاس\,جتاس\,دس$

$= جا2س\,دس$

$\int \cancel{جا2س}\,هـ^{ص} \times \frac{دص}{\cancel{جا2س}}$

$= \int هـ^{ص}\,دص$

$= هـ^{ص} + جـ$

$= هـ^{جا^{2}س} + جـ$

مثال ⑪

$$\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}} + ٢\text{س}}{\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{س}^{٢}}} \, \text{ءس}$$

الحل

$$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{س}^{٢}$$

$$\text{ءص} = (\text{هـ}^{\text{س}} + ٢\text{س}) \, \text{ءس}$$

$$\int \frac{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}} + ٢\text{س}}}{\text{ص}^{\frac{١}{٢}}} \times \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}} + ٢\text{س}}}$$

$$\int \text{ص}^{-\frac{١}{٢}} \text{ءص} = ٢ \times \text{ص}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$$

$$٢\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{س}^{٢}} + \text{جـ}$$

مثال ⑫

$$\int \text{هـ}^{٢\text{س}} \text{جتا}^{٢} \text{هـ}^{٢\text{س}} \, \text{ءس}$$

الحل

$$\text{ص} = \text{هـ}^{٢\text{س}}$$

$$\text{ءص} = ٢ \, \text{هـ}^{٢\text{س}} . \text{ءس} = ٢\text{ص} \, \text{ءس}$$

$$\Leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٢\text{ص}}$$

$$\int \cancel{\text{ص}} \, \text{جتا}^{٢}\text{ص} \times \frac{\text{ءص}}{\cancel{٢\text{ص}}}$$

$$\frac{١}{٢} \int \text{جتا}^{٢}\text{ص} \, \text{ءص}$$

$$\frac{١}{٢} \int \frac{١}{٢} (١ + \text{جتا}٢\text{ص}) \, \text{ءص}$$

$$\frac{١}{٤} \left(\text{ص} + \frac{١}{٢} \text{جا}٢\text{ص} \right) + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٤} \left(\text{هـ}^{٢\text{س}} + \frac{١}{٢} \text{جا}(٢\text{هـ}^{٢\text{س}}) \right) + \text{جـ}$$

مثال ⑬

$$\int \frac{\text{س} \, \text{جتا}\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}} \, \text{ءس}$$

$$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{٢}+١} \qquad \text{ص}^{٢} = \text{س}^{٢}+١$$

$$٢\text{ص} \, \text{ءص} = ٢\text{س} \, \text{ءس} \Leftarrow \text{ءس} = \frac{\cancel{٢}\text{ص} \, \text{ءص}}{\cancel{٢}\text{س}}$$

$$\int \frac{\cancel{\text{س}} \, \text{جتا}\text{ص}}{\cancel{\text{ص}}} \times \frac{\cancel{\text{ص}} \, \text{ءص}}{\cancel{\text{س}}}$$

$$= \int \text{جتا}\text{ص} \, \text{ءص} = \text{جا}\text{ص} + \text{جـ}$$

$$= \text{جا}\sqrt{\text{س}^{٢}+١} + \text{جـ}$$

ملاحظة هامة

اذا كان ما داخل اقتران أكبر عدد صحيح ليس اقتران خطي فان السؤال يحل بالتكامل بالتعويض ونفرض ص = ما داخل أكبر عدد صحيح

مثال ⑭

أوجد $\int_{١}^{٢} \text{س} \times [\text{س}^{٢} - ٣] . \text{ءس}$

$\Leftarrow$ يتبع الحل

الحل

نفرض $\text{ص} = \text{س}^2 - 3$

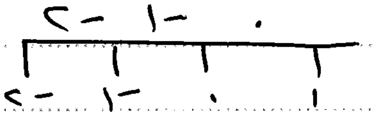
$\text{ءص} = 2\text{س} \cdot \text{ءس} \Rightarrow \frac{\text{ءص}}{2\text{س}} = \text{ءس}$

عندما $\text{س} = 1 \Rightarrow \text{ص} = -2$

$\text{س} = 2 \Rightarrow \text{ص} = 1$

$$\int_1^2 \text{س}\,[\text{س}^2 - 3] \cdot \text{ءس} = \int_{-2}^{1} \cancel{\text{س}}\,[\text{ص}] \times \frac{\text{ءص}}{2\cancel{\text{س}}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{1} [\text{ص}]\, \text{ءص}$$



$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{-1} -2\,\text{ءص} + \int_{-1}^{0} -1 \cdot \text{ءص} + \int_{0}^{1} 0 \cdot \text{ءص} \right)$$

$$= \frac{1}{2}(-2 + -1 + \text{صفر}) = \frac{1}{2} \times -3 = \frac{-3}{2}$$

مثال ⑮

$$\int_0^{\pi} \text{جاس}\,[1 - \text{جتاس}] \cdot \text{ءس}$$

الحل

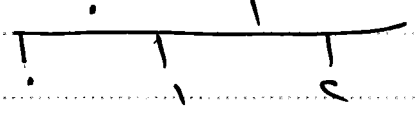
$\text{ص} = 1 - \text{جتاس} \Rightarrow \text{ءص} = \text{جاس}\,\text{ءس}$

$\Rightarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جاس}}$

عندما $\text{س} = 0 \rightarrow \text{ص} = 1 - \text{جتا}0 = \text{صفر}$

$\text{س} = \pi \rightarrow \text{ص} = 1 - \text{جتا}\pi = 2$

$$\int_0^2 \cancel{\text{جاس}}\,[\text{ص}] \times \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{جاس}}}$$



$$= \int_0^1 \text{صفر} \cdot \text{ءص} + \int_1^2 1 \cdot \text{ءص}$$

$$= \text{صفر} + 1 \overset{1}{=} 1$$

مثال ⑯

$$\int \frac{\text{س}\sqrt{1+\text{س}}}{1 - \sqrt{1+\text{س}}}$$

الحل

$$\int \frac{\text{س}\sqrt{1+\text{س}}}{1 - \sqrt{1+\text{س}}} \times \frac{(1 + \sqrt{1+\text{س}})}{1 + \sqrt{1+\text{س}}}$$ الضرب بالمرافق

$$= \int \frac{\text{س}\sqrt{1+\text{س}} + \text{س}(1+\text{س})}{1 - (1+\text{س})}$$

$$= \int \frac{\text{س}\sqrt{1+\text{س}} + \text{س} + \text{س}^2}{\cancel{1} - \text{س} - \cancel{1}}$$

$$= \int \frac{\text{س}\sqrt{1+\text{س}}}{-\text{س}} - \frac{\text{س}}{\text{س}} - \frac{\text{س}^2}{\text{س}}$$

$$= \int -\sqrt{1+\text{س}} - \int 1\,\text{ءس} - \int \text{س}\,\text{ءس}$$

$$= -\int (1+\text{س})^{\frac{1}{2}} - \text{س} - \frac{\text{س}^2}{2}$$

$$= \frac{-2}{3}(1+\text{س})^{\frac{3}{2}} - \text{س} - \frac{\text{س}^2}{2}$$

مثال ⑰

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}^3\text{س}\ \text{جتاس}\ \text{ءس}$$

الحل

$\text{ص} = \text{جاس} \Rightarrow \text{ءص} = \text{جتاس}\,\text{ءس}$

$\text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$

$\text{س} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{ص} = 1$ ، $\text{س} = 0 \rightarrow \text{ص} = 0$

يتبع ←

$$= \int_{0}^{1} \text{ص}^{3} \times \cancel{\text{جتاص}} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاص}}}$$

$$= \int_{0}^{1} \text{ص}^{3}\,\text{دص} = \left[\frac{\text{ص}^{4}}{4}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{4}$$

مثال (١٨)

$$\int (\text{س}+3)\,\text{جتا}(\text{س}^{2}+6\text{س}+5)\,\text{دس}$$

الحل

$$\text{ص} = \text{س}^{2}+6\text{س}+5$$

$$\text{دص} = (2\text{س}+6)\,.\,\text{دس}$$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{2\text{س}+6}$$

$$\int (\text{س}+3)\,\text{جتاص} \times \frac{\text{دص}}{2\text{س}+6}$$

$$\int \cancel{(\text{س}+3)}\,\text{جتاص} \times \frac{\text{دص}}{2\cancel{(\text{س}+3)}}$$

$$\frac{1}{2}\int \text{جتاص}\,\text{دص} = \frac{1}{2}\text{جاص} + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{2}\text{جا}(\text{س}^{2}+6\text{س}+5) + \text{جـ}$$

مثال (١٩)

$$\int \text{س}\,\text{جاس}^{2}\,\text{ظا}^{2}(\text{جتاس}^{2})\,\text{دس}$$

الحل

$$\text{ص} = \text{جتاس}^{2}$$

$$\text{دص} = -2\text{س}\,\text{جاس}^{2}\,\text{دس}$$

$$\int \cancel{\text{س}\,\text{جاس}^{2}}\,\text{ظا}^{2}\text{ص} \times \frac{\text{دص}}{-2\cancel{\text{س}\,\text{جاس}^{2}}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \text{ظا}^{2}\text{ص}\,\text{دص}$$

$$= -\frac{1}{2}\int (\text{قا}^{2}\text{ص}-1)\,\text{دص}$$

$$= -\frac{1}{2}(\text{ظاص}-\text{ص}) + \text{جـ}$$

مثال (٢٠)

$$\int \frac{\text{جاس}\,\text{جتاس}}{(1-2\,\text{جا}^{2}\text{س})^{3}}\,\text{دس}$$

الحل

$$\text{ص} = 1-2\,\text{جا}^{2}\text{س}$$

$$\text{دص} = -4\,\text{جاس}\,\text{جتاس}\,\text{دس}$$

$$\int \frac{\cancel{\text{جاس}\,\text{جتاس}}}{\text{ص}^{3}} \times \frac{\text{دص}}{-4\cancel{\text{جاس}\,\text{جتاس}}}$$

$$-\frac{1}{4}\int \text{ص}^{-3}\,\text{دص}$$

$$= -\frac{1}{4} \times \frac{\text{ص}^{-2}}{-2} + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{8\,\text{ص}^{2}} + \text{جـ} = \frac{1}{8(1-2\,\text{جا}^{2}\text{س})^{2}} + \text{جـ}$$

مثال (٢١)

$$\int \text{قا}^{2}\text{س}\,\text{ظا}^{4}\text{س}\,\text{دس}$$

الحل $\text{ص} = \text{ظاس}$ ، $\text{دص} = \text{قا}^{2}\text{س}\,\text{دس}$

$$\int \cancel{\text{قا}^{2}\text{س}} \times \text{ص}^{4} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^{2}\text{س}}} = \int \text{ص}^{4}\,\text{دص}$$

$$= \frac{\text{ص}^{5}}{5} + \text{جـ} = \frac{\text{ظا}^{5}\text{س}}{5} + \text{جـ}$$

مثال ㉒

$\int (٣ + \text{قا}^{٢}\text{س}) \times \text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$

$= \int ٣\,\text{ظا}^{٢}\text{س} + \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ظا}^{٢}\text{س}$

① $\int ٣\,\text{ظا}^{٢}\text{س} = \int ٣(\text{قا}^{٢}\text{س} - ١)\ \text{دس}$

$= ٣(\text{ظاس} - \text{س}) + \text{جـ}$

② $\int \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظاس} \quad \text{دص} = \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$

$\int \cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}\ \text{ص}^{٢} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}} = \int \text{ص}^{٢}\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{جـ} = \frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣} + \text{جـ}$

مثال ㉓

$\int \text{ظتا}^{٩}\text{س}\ \text{قتا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$

الحل

$\text{ص} = \text{ظتاس} \quad \text{دص} = -\text{قتا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$

$\int \text{ص}^{٩} \times \cancel{\text{قتا}^{٢}\text{س}} \times \frac{\text{دص}}{-\text{قتا}^{٢}\text{س}}$

$= \int -\text{ص}^{٩}\ \text{دص}$

$= -\frac{\text{ص}^{١٠}}{١٠} + \text{جـ}$

$= -\frac{\text{ظتا}^{١٠}\text{س}}{١٠} + \text{جـ}$

ملاحظة هامة

في الأقترانات الدائرية اذا لم تكن الزوايا اقترانات خطية فان السؤال يحل على التكامل بالتعويض وتفرض ان

ص = الزاوية

مثال ①

$\int (٢\text{س} - ١)\ \text{قا}^{٢}(\text{س}^{٢} - \text{س} + ٣)\ \text{دس}$

الحل

$\text{ص} = \text{س}^{٢} - \text{س} + ٣$

$\text{دص} = (٢\text{س} - ١)\ \text{دس}$

$\int \cancel{(٢\text{س} - ١)}\ \text{قا}^{٢}\text{ص} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{٢\text{س} - ١}}$

$= \int \text{قا}^{٢}\text{ص}\ \text{دص} = \text{ظاص} + \text{جـ}$

$= \text{ظا}(\text{س}^{٢} - \text{س} + ٣) + \text{جـ}$

مثال ②

$\int \frac{\text{س}\ \text{ظا}^{٢}\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}\ \text{دس}$

الحل

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}^{٢}+١} \quad \text{دص} = \frac{٢\text{س}}{٢\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\cancel{\text{س}}\ \text{ظا}^{٢}\text{ص}}{\cancel{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}} \times \frac{\cancel{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}}{\cancel{\text{س}}} \times \text{دص}$

$\int \text{ظا}^{٢}\text{ص}\ \text{دص} = \int (\text{قا}^{٢}\text{ص} - ١) = \text{ظاص} - \text{ص}$

$= \text{ظا}\sqrt{\text{س}^{٢}+١} - \sqrt{\text{س}^{٢}+١} + \text{جـ}$

مثال ③

$\int \text{س}^{٢}\ \text{جا س}^{٣}\ \text{جتا}^{٤}\text{س}^{٣}\ \text{د س}$

$\text{ص} = \text{جتا س}^{٣}$

$\text{د ص} = -٣\text{س}^{٢}\ \text{جا س}^{٣}\ \text{د س}$

$\int \cancel{\text{س}^{٢}\text{جا س}^{٣}}\ \text{ص}^{٤} \times \dfrac{\text{د ص}}{-٣\cancel{\text{س}^{٢}\text{جا س}^{٣}}}$

$-\dfrac{١}{٣}\int \text{ص}^{٤}\ \text{د ص} = -\dfrac{١}{٣}\ \dfrac{\text{ص}^{٥}}{٥} + \text{جـ}$

$= -\dfrac{١}{١٥}\left(\text{جتا س}^{٣}\right)^{٥} + \text{جـ}$

عليك حل السؤال بفرض $\text{ص} = \text{س}^{٣}$ تعويض مرتين

مثال ④

جد $\int \text{جا س}\ \text{جتا}^{٢}(\text{جتا س})\ \text{د س}$

الحل

$\text{ص} = \text{جتا س}$ ، $\text{د ص} = -\ \text{جا س د س}$

$\int \cancel{\text{جا س}}\ \text{جتا}^{٢}\text{ص} \times \dfrac{\text{د ص}}{-\cancel{\text{جا س}}}$

$-\int \dfrac{١}{٢}\left(١ + \text{جتا٢ص}\right)\text{د ص}$

$-\dfrac{١}{٢}\left(\text{ص} + \dfrac{\text{جا٢ص}}{٢}\right) + \text{جـ}$

$-\dfrac{١}{٢}\left(\text{جتا س} + \dfrac{\text{جا(٢ جتا س)}}{٢}\right) + \text{جـ}$

مثال ④

$\int \dfrac{\text{لو}\sqrt{\text{س}+٢}}{\text{س}+٢}\ \text{د س}$

الحل $\text{ص} = \text{لو}\sqrt{\text{س}+٢} = \dfrac{١}{٢}\text{لو(س}+٢)$

$\text{د ص} = \dfrac{١}{٢} \times \dfrac{١}{\text{س}+٢}\ \text{د س}$

$\text{د س} = ٢(\text{س}+٢)\ \text{د ص}$

$= \int \dfrac{\text{ص}}{\cancel{\text{س}+٢}} \times ٢\cancel{(\text{س}+٢)}\ \text{د ص}$

$= \int ٢\text{ص د ص} = \dfrac{\cancel{٢}\text{ص}^{٢}}{\cancel{٢}} + \text{جـ}$

$= \left(\text{لو}\sqrt{\text{س}+٢}\right)^{٢} + \text{جـ}$

مثال ⑤

$\int_{١}^{\frac{١}{\text{هـ}}} \dfrac{(\text{لو س})^{٢}}{\text{س}}\ \text{د س}$

الحل

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \Leftarrow \text{د ص} = \dfrac{١}{\text{س}}\text{د س}$

$\text{د س} = \text{س د ص}$

عندما $\text{س} = ١$ فان $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}١ = ٠$

$\text{س} = \dfrac{١}{\text{هـ}} \Leftarrow \text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\dfrac{١}{\text{هـ}} = -١$

$= \int_{٠}^{-١} \dfrac{\text{ص}^{٢}}{\cancel{\text{س}}} \times \cancel{\text{س}} \times \text{د ص}$

$\left[\dfrac{\text{ص}^{٣}}{٣}\right]_{٠}^{-١} = \dfrac{-١}{٣}$

مثال ⑳

اذا كان ق′(س) × جاس − ق(س) × ظتاس = ٠.

وكان ق$(\frac{\pi}{2})$ = $\sqrt{2}$ ، جد ق$(\frac{\pi}{4})$

الحل

$$\frac{\text{ق}'(\text{س})\ \text{جاس}}{\text{ق}(\text{س})} = \frac{\cancel{\text{ق}(\text{س})}\ \text{ظتاس}}{\cancel{\text{ق}\ \text{جاس}}}$$

$$\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})} = \int \frac{\text{ظتاس}}{\text{جاس}}$$

لو ق(س) = لو|جاس| + جـ

لو ق$(\frac{\pi}{2})$ = لو|جا$\frac{\pi}{2}$| + جـ

لو $\sqrt{2}$ = لو$_{\text{هـ}}$ ١ + جـ

لو $\sqrt{2}$ = ٠ + جـ ⟸ جـ = لو$_{\text{هـ}}$ $\sqrt{2}$

لو ق$(\frac{\pi}{4})$ = لو|جا$\frac{\pi}{4}$| + لو $\sqrt{2}$

لو ق$(\frac{\pi}{4})$ = لو $\frac{1}{\sqrt{2}}$ + لو $\sqrt{2}$

لو ق$(\frac{\pi}{4})$ = لو $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}$ = لو$_{\text{هـ}}$ ١ = ٠.

$\text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ق}(\frac{\pi}{4})} = \text{هـ}^{\cdot}$

ق$(\frac{\pi}{4})$ = ١

النوع الثاني

معطيات ومطلوب

في هذا النوع من الاسئلة يعطى في السؤال معطيات ويطلب غيرها ويكون حل هذه النوعية من الاسئلة بجعل المطلوب يشبه المعطيات .

مثال ①

اذا كان $\int_{0}^{1} س\,ق(س)\,دس = ٦$ فأوجد

$\int_{-٢}^{-١} (س+٢)\,ق(س+٢)\,دس$

الحل

نفرض $ص = س + ٢$ ، $دص = دس$

$س = -٢ \leftarrow ص = ٠$

$س = -١ \leftarrow ص = ١$

$\Leftarrow \int_{-٢}^{-١} (س+٢)\,ق(س+٢)\,دس$

$= \int_{0}^{1} ص\,ق(ص)\,دص$ من المعطيات

$= ٦$

مثال ②

اذا كان $\int_{٢}^{٣} س\,ق(٥س)\,دس = ٤$

فاوجد $\int_{0}^{1} (٣س+٦)\,ق(٥س+١٠)\,دس$

الحل

نجعل المطلوب كالمعطيات

$\int_{0}^{1} (٣س+٦)\,ق(٥س+١٠)\,دس =$

$\int_{0}^{1} ٣(س+٢)\,ق(٥(س+٢))\,دس$

$ص = س + ٢$ $دص = دس$

$س = ٠ \leftarrow ص = ٢$

$س = ١ \leftarrow ص = ٣$

$= \int_{٢}^{٣} ٣\,ص\,ق(٥ص)\,دص = ٣ \times ٤ = ١٢$

مثال ③

اذا كان $\int^{٤} (ق(س) + ٢)\,دس = ٨$

فاوجد $\int_{٢}^{١} س\,ق(س^{٢})\,دس$

الحل

$ص = س^{٢} \leftarrow دص = ٢س.دس$

$س = ٢ \leftarrow ص = ٤$

$س = ١ \leftarrow ص = ١$

$= \int_{٤}^{١} \cancel{س}\,ق(ص) \times \frac{دص}{\cancel{٢س}}$

$= \frac{١}{٢} \int_{٤}^{١} ق(ص)\,دص$

ولكنه من المعطيات $\Longleftarrow$ يتبع اكمل

$$\int_{١}^{٤} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{١}^{٤} ٢\,\text{دس} = ٨$$

$$\int_{١}^{٤} \text{ق(س)}\,\text{دس} + ٢(٤-١) = ٨$$

$$\int_{١}^{٤} \text{ق(س)}\,\text{دس} = ٨ - ٦ = ٢$$

$$\text{المطلوب} = \frac{١}{٢} \times \underset{\text{عكس حدود التكامل}}{\boxed{-٢}} = ١$$

مثال ④

اذا كان $\text{ق}(٢) = ٣$ ، $\text{ق}(١) = ٥$

فاوجد $\int_{١}^{\frac{١}{٢}} \text{قَ}\left(\frac{١}{\text{س}}\right) \times \text{س}^{-٢}\,\text{دس}$

الحل

$\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}$ ، $\text{دص} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}\,\text{دس}$

$\text{دس} = -\text{س}^{٢}\,\text{دص}$

$\text{س} = ١ \longrightarrow \text{ص} = ١$

$\text{س} = \frac{١}{٢} \longrightarrow \text{ص} = ٢$

$$\Leftarrow \int_{١}^{٢} \text{قَ(ص)} \times \cancel{\text{س}^{-٢}} \times \cancel{-\text{س}^{٢}}\,\text{دص}$$

$$= -\int_{١}^{٢} \text{قَ(ص)}\,\text{دص}$$

$$= -\left(\text{ق}(٢) - \text{ق}(١)\right)$$

$$= -(٣ - ٥) = ٢$$

مثال ⑤

اذا كان $\text{ق}(١) = ٢$ ، $\text{ق}(٤) = ٥$

فاوجد $\int_{١}^{٢} ٢\text{س}\,\text{قَ}(\text{س}^{٢})\,\text{ق}^{٣}(\text{س}^{٢})\,\text{دس}$

الحل

$\text{ص} = \text{ق}(\text{س}^{٢})$

$\text{دص} = \text{قَ}(\text{س}^{٢}) \times ٢\text{س}\,\text{دس}$

$$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{قَ}(\text{س}^{٢}) \times ٢\text{س}}$$

$\text{س} = ١ \longrightarrow \text{ص} = \text{ق}(١) = ٢$

$\text{س} = ٢ \longrightarrow \text{ص} = \text{ق}(٤) = ٥$

$$\int_{٢}^{٥} \cancel{٢\text{س}\,\text{قَ}(\text{س}^{٢})} \times \text{ص}^{٣} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قَ}(\text{س}^{٢}) \times ٢\text{س}}}$$

$$= \int_{٢}^{٥} \text{ص}^{٣}\,\text{دص} = \left[\frac{\text{ص}^{٤}}{٤}\right]_{٢}^{٥}$$

$$= \frac{٦٢٥}{٤} - \frac{١٦}{٤} = \frac{٦٠٩}{٤}$$

مثال ⑥

اذا كان الأقتران ق(س) متصلاً على ع وكان أ ثابت فاثبت ان

$$\int_{أ}^{٢أ} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \int_{٠}^{أ} \text{ق}(٢أ - \text{س})\,\text{دس}$$

الحل

نفرض $\text{ص} = ٢أ - \text{س} \Leftarrow \text{دص} = -\text{دس}$

$\text{س} = ٠ \longrightarrow \text{ص} = ٢أ$

$\text{س} = أ \longrightarrow \text{ص} = أ$

$$\Leftarrow \int_{٠}^{أ} \text{ق}(٢أ - \text{س})\,\text{دس} = \int_{٢أ}^{أ} -\text{ق(ص)}\,\text{دص}$$

$$= -\int_{٢أ}^{أ} \text{ق(ص)}\,\text{دص} = \int_{أ}^{٢أ} \text{ق(ص)}\,\text{دص}$$

قاعدة

$$\int (\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{دس} = \frac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{أ}(\text{ن}+١)} + \text{جـ}$$

هذه القاعدة تستخدم فقط للاقترانات الخطية

البرهان

نفرض $\text{ص} = \text{أس}+\text{ب}$

$\text{دص} = \text{أ}\,\text{دس} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{أ}}$

$$= \int \text{ص}^{\text{ن}} \times \frac{\text{دص}}{\text{أ}} = \frac{\text{ص}^{\text{ن}+١}}{\text{أ}(\text{ن}+١)} + \text{جـ}$$

$$= \frac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{أ}(\text{ن}+١)}$$

أمثلة

① $\int (٤\text{س}-٦)^{٨}\,\text{دس}$

$$= \frac{(٤\text{س}-٦)^{٩}}{٤\times٩} + \text{جـ}$$

② $\int \sqrt[٤]{٤-٢\text{س}}\,\text{دس}$

$$= \int (٤-٢\text{س})^{\frac{١}{٤}}\,\text{دس}$$

$$= \frac{(٤-٢\text{س})^{\frac{٥}{٤}}}{-٢\times\frac{٥}{٤}} + \text{جـ}$$

③ $\int_{٠}^{٤} \frac{١}{\sqrt{٢\text{س}+١}}\,\text{دس}$

الحل $\int_{٠}^{٤} (٢\text{س}+١)^{-\frac{١}{٢}}\,\text{دس}$

$$= \left[\frac{(٢\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}}}{٢\times\frac{١}{٢}}\right]_{٠}^{٤} = \sqrt{٩}-\sqrt{١} = ٢$$

---

④ $\int_{١}^{٣} \frac{١}{\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٤}\,\text{دس}$

$$= \int_{١}^{٣} \frac{١}{(\text{س}+٢)^{٢}}\,\text{دس} = \int_{١}^{٣} (\text{س}+٢)^{-٢}\,\text{دس}$$

$$= \left[\frac{(\text{س}+٢)^{-١}}{١}\right]_{١}^{٣} = -\frac{١}{٥}+\frac{١}{٣} = \frac{٢}{١٥}$$

مثال ⑦

اذا كان $\int_{-١}^{١} ٢\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ١٠$

جد $\int_{٢}^{٤} (\text{ق}(\text{س}-٣) + \text{س})\,\text{دس}$

الحل

$\int_{-١}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \frac{١٠}{٢} = ٥$

$\int_{٢}^{٤} \text{ق}(\text{س}-٣) + \int_{٢}^{٤} \text{س}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}-٣ \qquad \text{دص} = \text{دس}$

$\text{س} = ٢ \leftarrow \text{ص} = -١ \text{ ، } \text{س} = ٤ \leftarrow \text{ص} = ١$

$\int_{-١}^{١} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} + \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢}\right]_{٢}^{٤}$

$٥ + ٨ - ٢ = ١١$

مثال ⑧

اذا كان $\int_{3}^{7} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{8}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س}-5)\,\text{دس}$

اوجد قيمة الثابت جـ

الحل

$\text{ص} = \text{س} - 5$ ، $\text{دص} = \text{دس}$

$\text{س} = 8 \longrightarrow \text{ص} = 3$

$\text{س} = \text{جـ} \longrightarrow \text{ص} = \text{جـ} - 5$

$$\int_{8}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س}-5)\,\text{دس} = \int_{3}^{\text{جـ}-5} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$$

$$= \int_{3}^{7} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \Leftarrow 7 = \text{جـ} - 5$$

$\Leftarrow \text{جـ} = 12$

مثال ⑨

اذا كان $\int_{0}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 5$

احسب $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}2\text{س}\;\text{ق}(\text{جا}2\text{س})\,\text{دس}$

الحل

$\text{ص} = \text{جا}2\text{س} \Leftarrow \text{دص} = 2\,\text{جتا}2\text{س}\,\text{دس}$

$\text{س} = \frac{\pi}{4} \longrightarrow \text{ص} = \text{جا}\frac{\pi}{2} = 1$

$\text{س} = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \text{ص} = \text{جا}\pi = 0$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}2\text{س}\;\text{ق}(\text{جا}2\text{س})\,\text{دس} = \int_{1}^{0} \cancel{\text{جتا}2\text{س}}\;\text{ق}(\text{ص}) \times \frac{\text{دص}}{2\,\cancel{\text{جتا}2\text{س}}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{1}^{0} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} = \frac{-5}{2}$$

مثال ⑩

اذا كان ق(س) اقتران قابل للتكامل على ح وكان ق(8) = 8 ، ق(1) = 0 فما قيمة $\int_{1}^{2} 3\text{س}^2\,\text{ق}'(\text{س}^3)\,\text{دس}$

الحل

$\text{ص} = \text{س}^3$ $\quad$ $\text{دص} = 3\text{س}^2\,\text{دس}$

$\text{س} = 1 \longrightarrow \text{ص} = 1$

$\text{س} = 2 \longrightarrow \text{ص} = 8$

$$\int_{1}^{2} 3\text{س}^2\,\text{ق}'(\text{س}^3)\,\text{دس} = \int_{1}^{8} \cancel{3\text{س}^2}\,\text{ق}'(\text{ص}) \times \frac{\text{دص}}{\cancel{3\text{س}^2}}$$

$$= \int_{1}^{8} \text{ق}'(\text{ص})\,\text{دص} = \text{ق}(8) - \text{ق}(1)$$

$$= 8 - 0 = 8$$

مثال ⑪

اذا كان $\int_{0}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 3$ ، $\int_{2}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 5$

فان $\int_{3}^{8} \text{ق}(\text{س}-3)\,\text{دس}$

أ) 8 $\quad$ ب) 5 $\quad$ جـ) 2- $\quad$ د) 8-

الحل

$\text{ص} = \text{س} - 3$ $\quad$ $\text{دص} = \text{دس}$

$\text{س} = 3 \longrightarrow \text{ص} = 0$

$\text{س} = 8 \longrightarrow \text{ص} = 5$ $\Leftarrow \int^{5} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$

$$\int_{0}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{0}^{2} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{2}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$$

$= 3 + 5 = 8$ (أ)

مثال ⑫

اذا كان $\int_{١}^{هـ} س\,ق(س)\,دس = ٤$

فما قيمة $\int_{٠}^{٢} هـ^{س}\,ق(\sqrt{هـ^{س}})\,دس$

الحل

$ص = \sqrt{هـ^{س}} = هـ^{\frac{س}{٢}}$

$دص = \frac{١}{٢}\,هـ^{\frac{س}{٢}}\,دس$

$دس = \frac{٢}{هـ^{\frac{س}{٢}}}\,دص$

$س = ٠ \rightarrow ص = ١$

$س = ٢ \rightarrow ص = هـ$

$\int_{١}^{هـ} \cancel{هـ^{س}} \times ق(ص) \times \frac{٢}{\cancel{هـ^{\frac{س}{٢}}}}$

$٢\int_{١}^{هـ} هـ^{\frac{س}{٢}} \times ق(ص)$

$= ٢\int_{١}^{هـ} ص\,ق(ص)\,دص$ من المعطيات

$= ٢ \times ٤ = ٨$

النوع الثالث

اختصار جزئي والرجوع للفرض

في هذا النوع بعد الفرض يبقى تجايا من المتغير الاول لذلك نرجع للفرض ونكتب المتغير القديم بدلالة المتغير الجديد.

مثال ①

جد $\int س^٥ \sqrt{س^٣+١}\ د س$

الحل

$ص = \sqrt{س^٣+١}$

$ص^٢ = س^٣+١$

$٢ص\ د ص = ٣س^٢\ د س$

$\Leftarrow د س = \frac{٢ص}{٣س^٢} د ص$

$\int \cancel{س^٥} \times ص \times \frac{٢ص}{٣\cancel{س^٢}}$

$\frac{٢}{٣}\int س^٣ \times ص^٢$

لكن $ص^٢ = س^٣+١$

$\Leftarrow س^٣ = ص^٢ - ١$

$\frac{٢}{٣}\int (ص^٢-١) \times ص^٢$

$\frac{٢}{٣}\int (ص^٤ - ص^٢)\ د ص = \frac{٢}{٣}\left(\frac{ص^٥}{٥} - \frac{ص^٣}{٣}\right)$

$= \frac{٢}{٣}\left(\frac{(\sqrt{س^٣+١})^٥}{٥} - \frac{(\sqrt{س^٣+١})^٣}{٣}\right) + ج$

مثال ②

$\int س^٥ \sqrt{س^٢-١}\ د س$

الحل :.

$ص = \sqrt{س^٢-١} \Leftarrow ص^٢ = س^٢ - ١$

$٢ص د ص = ٢س د س \Leftarrow د س = \frac{ص}{س} د ص$

$\int س^٥ \sqrt{س^٢-١}\ د س = \int \cancel{س^٥} ص \times \frac{ص}{\cancel{س}} د ص$

$= \int س^٤ ص^٢ د ص$

لكن $ص^٢ = س^٢ - ١ \Leftarrow س^٢ = ص^٢+١$

$س^٤ = (ص^٢+١)^٢$

$\int (ص^٢+١)^٢ ص^٢ د ص$

$= \int (ص^٤ + ٢ص^٢+١) \times ص^٢ د ص$

$= \int (ص^٦ + ٢ص^٤ + ص^٢)\ د ص$

$= \frac{ص^٧}{٧} + \frac{٢ص^٥}{٥} + \frac{ص^٣}{٣} + ج$

$\frac{(\sqrt{س^٢-١})^٧}{٧} + \frac{٢(\sqrt{س^٢-١})^٥}{٥} + \frac{(\sqrt{س^٢-١})^٣}{٣} + ج$

مثال ③

$$\int \frac{1}{1-\text{س}^2} \times \sqrt{\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}}\ \text{دس}$$

الحل

$$\text{ص} = \frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}$$

$$\text{دص} = \frac{(1-\text{س}) \times 1 - (1+\text{س}) \times -1}{(1-\text{س})^2}$$

$$\text{دص} = \frac{1 \cancel{-\text{س}} + 1 \cancel{+\text{س}}}{(1-\text{س})^2} = \frac{2}{(1-\text{س})^2}\ \text{دس}$$

$$\text{دس} = \frac{(1-\text{س})^2}{2}\ \text{دص}$$

$$= \int \frac{1}{(1+\text{س})\cancel{(1-\text{س})}} \times \sqrt{\text{ص}} \times \frac{\cancel{(1-\text{س})}^{\overset{(1-\text{س})}{2}}}{2}\ \text{دص}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1-\text{س}}{1+\text{س}} \sqrt{\text{ص}}\ \text{دص}$$

$$\text{لكن ص} = \frac{1+\text{س}}{1-\text{س}} \text{ ، } \frac{1}{\text{ص}} = \frac{1-\text{س}}{1+\text{س}}$$

$$\Leftarrow = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\text{ص}} \times \sqrt{\text{ص}}\ \text{دص}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\text{ص}^{\frac{1}{2}}}\ \text{دص} = \frac{1}{2} \int \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\ \text{دص}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\ \text{ص}^{\frac{1}{2}} + \text{جـ}$$

$$= \sqrt{\text{ص}} + \text{جـ}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}} + \text{جـ}$$

مثال ④

$$\int \frac{\sqrt{\text{ظتاس}}}{\text{جا}2\text{س}}\ \text{دس}$$

الحل

$$\text{ص} = \sqrt{\text{ظتاس}} \Leftarrow \text{ص}^2 = \text{ظتاس}$$

$$2\text{ص دص} = -\text{قتا}^2\text{س دس}$$

$$\text{دس} = \frac{2\text{ص دص}}{-\text{قتا}^2\text{س}}$$

$$\int \frac{\text{ص}}{\text{جا}2\text{س}} \times \frac{2\text{ص}}{-\text{قتا}^2\text{س}}\ \text{دص}$$

$$-\int \frac{\text{ص}}{\cancel{2}\cancel{\text{جاس}}\ \text{جتاس}} \times \cancel{2} \times \text{ص} \times \cancel{\text{جا}^2\text{س}}\ \text{دص}$$

$$-\int \frac{\text{ص}^2}{\text{جتاس}} \times \text{جاس دص}$$

$$-\int \text{ص}^2 \times \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\ \text{دص}$$

$$= -\int \text{ص}^2 \times \frac{1}{\text{ظتاس}}\ \text{دص}$$

$$= -\int \text{ص}^2 \times \frac{1}{\text{ص}^2}\ \text{دص}$$

$$= -\int 1\ \text{دص} = -\text{ص} + \text{جـ}$$

$$= -\sqrt{\text{ظتاس}} + \text{جـ}$$

مثال ⑤

$$\int (\text{س}+1)^{3}(\text{س}^{2}+2\text{س}+5)^{3}\,\text{دس}$$

الحل

$$\text{ص} = \text{س}^{2}+2\text{س}+5$$

$$\text{دص} = (2\text{س}+2)\,\text{دس} = 2(\text{س}+1)\,\text{دس}$$

$\Leftarrow$

$$\int \cancel{(\text{س}+1)}^{3} \times \text{ص}^{3} \times \frac{\text{دص}}{2\cancel{(\text{س}+1)}}$$

$$\frac{1}{2}\int (\text{س}+1)^{2} \times \text{ص}^{3}\,\text{دص}$$

$$= \frac{1}{2}\int (\underline{\text{س}^{2}+2\text{س}}+1)\,\text{ص}^{3}\,\text{دص}$$

لكن $\text{ص} = \text{س}^{2}+2\text{س}+5$

$$\text{ص}-5 = \underline{\text{س}^{2}+2\text{س}}$$

$$= \frac{1}{2}\int (\text{ص}-5+1)\,\text{ص}^{3}\,\text{دص}$$

$$= \frac{1}{2}\int (\text{ص}-4)\,\text{ص}^{3}\,\text{دص}$$

$$= \frac{1}{2}\int (\text{ص}^{4}-4\text{ص}^{3})\,\text{دص}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ص}^{5}}{5} - \frac{\cancel{4}\,\text{ص}^{4}}{\cancel{4}}\right) + \text{ج}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(\text{س}^{2}+2\text{س}+5)^{5}}{5} - (\text{س}^{2}+2\text{س}+5)^{4}\right) + \text{ج}$$

النوع الرابع

تحليل ثم استخدام التعويض

مثال ①

$\int (س^{٥} - ٣س)^{٣} \, دس$

الحل

$\int (س(س^{٤} - ٣))^{٣} \, دس$

$\int س^{٣} (س^{٤} - ٣)^{٣} \, دس$

$ص = س^{٤} - ٣$ ، $دص = ٤س^{٣}.دس$

$دس = \frac{دص}{٤س^{٣}}$

$= \int \cancel{س^{٣}} ص^{٣} \times \frac{دص}{٤\cancel{س^{٣}}}$

$= \frac{١}{٤} \int ص^{٣} \, دص = \frac{١}{٤} \, \frac{ص^{٤}}{٤} + جـ$

$= \frac{١}{١٦} (س^{٤} - ٣)^{٤} + جـ$

مثال ②

$\int \sqrt{س^{٢} + ٢س^{٤}} \, دس$ حيث $س > ٠$.

الحل

$= \int \sqrt{س^{٢}(١ + ٢س^{٢})} \, دس$

$= \int \sqrt{س^{٢}} \sqrt{١ + ٢س^{٢}} \, دس$

$= \int |س| \sqrt{١ + ٢س^{٢}} \, دس$

لكن $س > ٠$.

$= \int س \sqrt{١ + ٢س^{٢}} \, دس$

$ص = ١ + ٢س^{٢}$ $دص = ٤س \, دس$

$دس = \frac{دص}{٤س}$

$\int \cancel{س} \sqrt{ص} \times \frac{دص}{٤\cancel{س}}$

$\frac{١}{٤} \int ص^{\frac{١}{٢}} \, دص = \frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

$= \frac{١}{٦} (\sqrt{١ + ٢س^{٢}})^{٣} + جـ$

مثال ③

$\int س^{٢} \sqrt[٣]{س^{٧} - س^{٣}} \, دس$

$\int س^{٢} \sqrt[٣]{س^{٣}(س^{٤} - ١)} \, دس$

$\int س^{٢} \sqrt[٣]{س^{٣}} \sqrt[٣]{س^{٤} - ١} \, دس$

$\int س^{٢} \times س \sqrt[٣]{س^{٤} - ١} \, دس$

$\int س^{٣} \sqrt[٣]{س^{٤} - ١} \, دس$

$ص = س^{٤} - ١$ $دص = ٤س^{٣} \, دس$

$\int \cancel{س^{٣}} ص^{\frac{١}{٣}} \times \frac{دص}{٤\cancel{س^{٣}}} = \frac{١}{٤} \int ص^{\frac{١}{٣}} \, دص$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} = \frac{٣}{١٦} (س^{٤} - ١)^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

مثال ④

$$\int س^{٨}\left(\frac{٢}{س}-\frac{٣}{س^{٢}}\right)^{٤} دس$$

توحيد مقام

$$\int س^{٨}\left(\frac{٢س-٣}{س^{٢}}\right)^{٤} دس$$

$$\int \cancel{س^{٨}}\,\frac{(٢س-٣)^{٤}}{\cancel{س^{٨}}} دس$$

$$=\frac{(٢س-٣)^{٥}}{٥\times٢}+ج$$

مثال ⑤

$$\int \left(س^{-\frac{٣}{٤}}+١\right)^{\frac{١}{٣}} دس$$

$$=\int\left(س^{-\frac{٣}{٤}}\left(١+\frac{١}{س^{-\frac{٣}{٤}}}\right)\right)^{\frac{١}{٣}}$$

$$=\int\left(س^{-\frac{٣}{٤}}\right)^{\frac{١}{٣}}\left(١+\frac{١}{س^{-\frac{٣}{٤}}}\right)^{\frac{١}{٣}}$$

$$\int س^{-\frac{١}{٤}}\left(١+س^{\frac{٣}{٤}}\right)^{\frac{١}{٣}}$$

$$ص=١+س^{\frac{٣}{٤}} \Leftarrow دص=\frac{٣}{٤}س^{-\frac{١}{٤}}دس$$

$$دس=\frac{٤}{٣}\,\frac{١}{س^{-\frac{١}{٤}}}\,دص$$

$$\int \cancel{س^{-\frac{١}{٤}}}\,ص^{\frac{١}{٣}}\times\frac{٤}{٣}\times\frac{١}{\cancel{س^{-\frac{١}{٤}}}}دص$$

$$\frac{٤}{٣}\times\frac{٣}{٤}ص^{\frac{٤}{٣}}+ج=ص^{\frac{٤}{٣}}+ج$$

$$\left(١+س^{\frac{٣}{٤}}\right)^{\frac{٤}{٣}}+ج$$

مثال ⑥

$$\int\frac{س^{٢}+٣}{(س^{٢}-٣)^{٢}}دس$$

الحل

$$\int\frac{س^{٢}+٣}{س^{٢}\left(س-\frac{٣}{س}\right)^{٢}}$$

$$ص=س-\frac{٣}{س} \quad دص=١+\frac{٣}{س^{٢}}دس$$

$$=\frac{س^{٢}+٣}{س^{٢}}دس$$

$$\Leftarrow دس=\frac{س^{٢}}{س^{٢}+٣}دص$$

$$\int\frac{\cancel{س^{٢}+٣}}{\cancel{س^{٢}}\,ص^{٢}}\times\frac{\cancel{س^{٢}}}{\cancel{س^{٢}+٣}}دص$$

$$\int\frac{١}{ص^{٢}}دص=\int ص^{-٢}دص$$

$$=\frac{ص^{-١}}{-١}+ج$$

$$=\frac{-١}{ص}+ج$$

$$=\frac{-١}{س-\frac{٣}{س}}+ج$$

مثال ⑦

$$\int\sqrt[٥]{(س^{٢}-٦س+٩)^{٤}}$$

$$=\int\sqrt[٥]{((س-٣)^{٢})^{٢}}=\sqrt[٥]{(س-٣)^{٤}}$$

$$=\int(س-٣)^{\frac{٤}{٥}}=\frac{٥}{٩}\times\underline{(س-٣)^{\frac{٩}{٥}}}+ج$$

النوع الخامس

دمج القوى

تكاملات على صورة

$$\int \frac{(ق(س))^{ن}}{س^{م}} دس$$

نحل على التعويض ونقوم بتحليل $س^{م}$ بحيث نجعل أس البسط = أس المقام

مثال ①

$$\int \frac{(٢س+١)^{٦}}{س^{٨}} دس$$

نأخذ من المقام اعلى قوه داخل القوس مضروبه في قوة القوس

$$(س^{١})^{٦} = س^{٦}$$

$$\int \frac{(٢س+١)^{٦}}{س^{٦} × س^{٢}} = \int \frac{(٢س+١)^{٦}}{س^{٦}} × \frac{١}{س^{٢}}$$

$$= \int \left(\frac{٢س+١}{س}\right)^{٦} × \frac{١}{س^{٢}}$$

$$= \int \left(٢ + \frac{١}{س}\right)^{٦} × \frac{١}{س^{٢}}$$

$$ص = ٢ + \frac{١}{س} \qquad دص = \frac{-١}{س^{٢}} دس$$

$$= \int ص^{٦} × \frac{١}{\cancel{س^{٢}}} × -\cancel{س^{٢}} × دص$$

$$= -\int ص^{٦} دص = -\frac{ص^{٧}}{٧} + جـ$$

$$= -\frac{\left(٢ + \frac{١}{س}\right)^{٧}}{٧} + جـ$$

مثال ②

$$\int \frac{(س^{٣} - ٥س)^{٧}}{س^{٢٤}}$$

$$س^{٢٤} = (س^{٣})^{٧} × س^{٣}$$

$$\int \frac{(س^{٣} - ٥س)^{٧}}{س^{٢١}} × \frac{١}{س^{٣}}$$

$$= \int \left(\frac{س^{٣} - ٥س}{س^{٣}}\right)^{٧} × \frac{١}{س^{٣}}$$

$$= \int \left(١ - \frac{٥}{س^{٢}}\right)^{٧} × \frac{١}{س^{٣}} دس$$

$$ص = ١ - \frac{٥}{س^{٢}} \qquad دص = \frac{٥ × ٢س}{س^{٤}} = \frac{١٠}{س^{٣}} دس$$

$$= \int ص^{٧} × \frac{١}{\cancel{س^{٣}}} × \frac{\cancel{س^{٣}}}{١٠} دص$$

$$\frac{١}{١٠} \int ص^{٧} دص = \frac{١}{١٠} \frac{ص^{٨}}{٨} + جـ = \frac{١}{٨٠} \left(١ - \frac{٥}{س^{٢}}\right)^{٨} + جـ$$

مثال ③

$$\int \frac{\sqrt{س - س^{٢}}}{س^{٤}} \, دس \quad ، س > ٠$$

الحل

$$= \int \frac{(س - س^{٢})^{\frac{١}{٢}}}{(س^{٢})^{\frac{١}{٢}} \times س^{٣}}$$

$$= \int \left(\frac{س - س^{٢}}{س^{٢}}\right)^{\frac{١}{٢}} \times س^{-٣} \, دس$$

$$= \int \left(\frac{١}{س} - ١\right)^{\frac{١}{٢}} \times س^{-٣} \, دس$$

$$ص = \sqrt{\frac{١}{س} - ١}$$

$$ص^{٢} = \frac{١}{س} - ١ \Leftarrow ٢ص \, دص = \frac{-١}{س^{٢}} \, دس$$

$$\Leftarrow = \int ص \times س^{-٣} \times -٢ص \times س^{٢} \, دص$$

$$= \int -٢ص^{٢} \times س^{-١} \, دص$$

لكن $ص^{٢} = \frac{١}{س} - ١$

$$\frac{١}{س} = ص^{٢} + ١$$

$$\int -٢ص^{٢} \times (ص^{٢} + ١) \, دص$$

$$= \int (-٢ص^{٤} - ٢ص^{٢}) \, دص$$

$$= \frac{-٢ص^{٥}}{٥} - \frac{٢ص^{٣}}{٣} + جـ$$

$$= \frac{-٢\left(\sqrt{\frac{١}{س} - ١}\right)^{٥}}{٥} - \frac{٢\left(\sqrt{\frac{١}{س} - ١}\right)^{٣}}{٣} + جـ$$

مثال ④

$$\int \frac{١}{س^{٢} \times \sqrt{س^{٢} + ١}} \, دس$$

الحل

$$\int \frac{(س^{٢} + ١)^{-\frac{١}{٢}}}{س^{٢}} \, دس$$

$$= \int \frac{(س^{٢} + ١)^{-\frac{١}{٢}}}{(س^{٢})^{-\frac{١}{٢}}} \times \frac{١}{س^{٣}} \, دس$$

$$= \int \left(\frac{س^{٢} + ١}{س^{٢}}\right)^{-\frac{١}{٢}} \times \frac{١}{س^{٣}} \, دس$$

$$= \int \left(١ + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{-\frac{١}{٢}} \times \frac{١}{س^{٣}} \, دس$$

$$ص = ١ + \frac{١}{س^{٢}} \quad ، دص = \frac{-١ \times ٢\cancel{س}}{\cancel{س^{٤}}}$$

$$دس = \frac{س^{٣}}{-٢} \, دص$$

$$\int ص^{-\frac{١}{٢}} \times \frac{١}{\cancel{س^{٣}}} \times \frac{\cancel{س^{٣}}}{-٢} \times دص$$

$$-\frac{١}{٢} \times \frac{٢ص^{\frac{١}{٢}}}{١} + ه$$

$$-٢\left(١ + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{\frac{١}{٢}} + جـ$$

مثال ⑤

جد $\int \frac{(س + ١)^{٩}}{س^{١١}} \, دس$

الحل

$$= \int \frac{(س + ١)^{٩}}{س^{٩}} \times \frac{١}{س^{٢}} \, دس$$

يتبع $\Leftarrow$

$= \int (\frac{١}{س} + ١)^{٩} \times \frac{١}{س^{٢}} \cdot دس$

$ص = \frac{١}{س} + ١ \quad دص = \frac{-١}{س^{٢}} دس$

$\int ص^{٩} \times \frac{١}{\cancel{س^{٢}}} \times -\cancel{س^{٢}} دص$

$- \int ص^{٩} دص = - \frac{ص^{١٠}}{١٠} + جـ$

$= - \frac{(\frac{١}{س} + ١)^{١٠}}{١٠} + جـ$

مثال ⑥

$\int \sqrt{١ + س^{-\frac{٢}{٣}}} \; دس \quad ، ٠ < س$

$= \sqrt{س^{-\frac{٢}{٣}}(١ + س^{\frac{٢}{٣}})}$

$= \sqrt{\frac{١}{س^{\frac{٢}{٣}}}(١ + س^{\frac{٢}{٣}})}$

$= \int \sqrt{\frac{١}{س^{\frac{٢}{٣}}}} \sqrt{١ + س^{\frac{٢}{٣}}}$

$= \int \frac{١}{|س^{\frac{١}{٣}}|} \sqrt{١ + س^{\frac{٢}{٣}}} \quad ، ٠ < س$

$= \int \frac{١}{س^{\frac{١}{٣}}} \sqrt{١ + س^{\frac{٢}{٣}}}$

$ص = ١ + س^{\frac{٢}{٣}} \quad ، \quad دص = \frac{٢}{٣} س^{-\frac{١}{٣}} دس$

$\int \frac{١}{\cancel{س^{\frac{١}{٣}}}} \times \sqrt{ص} \times \frac{٣}{٢} \cancel{س^{\frac{١}{٣}}} دص$

$\frac{٣}{٢} \int \sqrt{ص} \; دص$

$= \frac{٣}{٢} \int ص^{\frac{١}{٢}} دص = \frac{٣}{٢} \times \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

$= (١ + س^{\frac{٢}{٣}})^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

مثال ⑦

$\int \frac{١}{\sqrt[٣]{س^{٥}} - س} \; دس$

$= \int \frac{١}{س^{\frac{٥}{٣}} - س} دس = \int \frac{١}{س^{\frac{٥}{٣}}(١ - س^{-\frac{٢}{٣}})}$

$ص = ١ - س^{-\frac{٢}{٣}} \quad دص = \frac{٢}{٣} س^{-\frac{٥}{٣}} دس$

$= \int \frac{١}{\cancel{س^{\frac{٥}{٣}}} \times ص} \times \frac{٣}{٢} \times \cancel{س^{\frac{٥}{٣}}} دص$

$= \frac{٣}{٢} \int \frac{١}{ص} دص = \frac{٣}{٢} لوهـ |ص| + جـ$

$= \frac{٣}{٢} لوهـ |١ - س^{-\frac{٢}{٣}}| + جـ$

تكامل الاقترانات الدائرية بطريقة التكامل بالتعويض

① تكاملات تحوي حا ، جتا

الطريقة

نجعل أُس إما حا ، جتا يساوي (١) والباقي بدلالة الآخر

$\int$ حا س والباقي بدلالة جتا س
مفردة
نفرض ص = جتا

$\int$ جتا س والباقي بدلالة حا س
مفردة
نفرض ص = حا س

وللتحويل نستخدم

$\text{حا}^2\text{س} = 1 - \text{جتا}^2\text{س}$

$\text{جتا}^2\text{س} = 1 - \text{حا}^2\text{س}$

مثال ①

$\int \text{جتا}^3\text{س}\ \text{حا}^2\text{س}\ \text{دس}$

الحل

$\int \text{جتاس}\ \text{جتا}^2\text{س}\ \text{حا}^2\text{س}\ \text{دس}$

$\int \underbrace{\text{جتاس}}_{\text{مفردة}}\underbrace{(1 - \text{حا}^2\text{س})}_{\text{بدلالة حا}}\ \text{حا}^2\text{س}\ \text{دس}$

نفرض ص = حا س

$\text{دص} = \text{جتاس دس} \Leftarrow \text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{جتاس}}$

$\int \cancel{\text{جتاس}}(1 - \text{ص}^2) \times \text{ص}^2 \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$\int (\text{ص}^2 - \text{ص}^4)\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^3}{3} - \frac{\text{ص}^5}{5} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{حا}^3\text{س}}{3} - \frac{\text{حا}^5\text{س}}{5} + \text{جـ}$

مثال ②

$\int \text{جتا}^3\text{س}\ \text{حا}^3\text{س}$

$\int \text{جتاس}\ \text{جتا}^2\text{س}\ \text{حا}^3\text{س}$

$= \int \text{جتاس}(1 - \text{حا}^2\text{س})\ \text{حا}^3\text{س}\ \text{دس}$

ص = حا س ، دص = جتاس دس

$\int \cancel{\text{جتاس}}(1 - \text{ص}^2)\ \text{ص}^3 \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$\int (\text{ص}^3 - \text{ص}^5)\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^4}{4} - \frac{\text{ص}^6}{6} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{حا}^4\text{س}}{4} - \frac{\text{حا}^6\text{س}}{6} + \text{جـ}$

مثال ③

$$\int \text{حا}^{3}\text{س}\ \text{جتا}^{\text{ن}}\text{س}\ \text{دس}$$

الحل

$$\int \text{حاس}\ \text{حا}^{2}\text{س}\ \text{جتا}^{\text{ن}}\text{س}\ \text{دس}$$

$$\int \text{حاس}\,(1-\text{جتا}^{2}\text{س})\ \text{جتا}^{\text{ن}}\text{س}\ \text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{جتاس} \qquad \text{دص} = -\text{حاس}\ \text{دس}$$

$$\int \cancel{\text{حاس}}\,(1-\text{ص}^{2})\ \text{ص}^{\text{ن}} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{-\text{حاس}}}$$

$$-\int \left(\text{ص}^{\text{ن}} - \text{ص}^{\text{ن}+2}\right) \text{دص}$$

$$= -\left(\frac{\text{ص}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} - \frac{\text{ص}^{\text{ن}+3}}{\text{ن}+3}\right) + \text{ج}$$

$$= -\left(\frac{\text{جتا}^{\text{ن}+1}\text{س}}{\text{ن}+1} - \frac{\text{جتا}^{\text{ن}+3}\text{س}}{\text{ن}+3}\right) + \text{ج}$$

مثال ④

$$\int \text{جتا}^{3}\text{س}\ \text{دس}$$

الحل

$$\int \text{جتاس}\ \text{جتا}^{2}\text{س}\ \text{دس}$$

$$\int \text{جتاس}\,(1-\text{حا}^{2}\text{س})\ \text{دس}$$

$$\text{ص} = \text{حاس} \qquad \text{دص} = \text{جتاس}$$

$$\int \cancel{\text{جتاس}}\,(1-\text{ص}^{2}) \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$$

$$= \text{ص} - \frac{\text{ص}^{3}}{3} + \text{ج} = \text{حاس} - \frac{\text{حا}^{3}\text{س}}{3} + \text{ج}$$

ملاحظة هامة

اذا كان حا ، جتا داخل التكامل لوحده وكانت القوه

① زوجيه ← التكامل مباشر حيث نستخدم المتطابقه

$$\text{حا}^{2}\text{س} = \tfrac{1}{2}\,(1 - \text{جتا}2\text{س})$$

$$\text{جتا}^{2}\text{س} = \tfrac{1}{2}\,(1 + \text{جتا}2\text{س})$$

مثلاً

$$\text{حا}^{4}\text{س} = (\text{حا}^{2}\text{س})^{2} = \left(\tfrac{1}{2}(1-\text{جتا}2\text{س})\right)^{2}$$

$$\text{جتا}^{6}\text{س} = (\text{جتا}^{2}\text{س})^{3} = \left(\tfrac{1}{2}(1+\text{جتا}2\text{س})\right)^{3}$$

② فرديه ← التكامل بالتعويض حيث نقوم بتحليل الاس الفردي بهدف الحصول على

$$\int \text{حاس} \times \text{الباقي بدلالة جتاس}$$

$$\text{ص} = \text{جتاس}$$

$$\int \text{جتاس} \times \text{الباقي بدلالة حاس}$$

$$\text{ص} = \text{حاس}$$

مثال ⑤

$\int \text{جا}^{٥}\text{س}\ \text{دس}$

الحل

$\int \text{جاس}\ \text{جا}^{٤}\text{س}\ \text{دس}$

$= \int \text{جاس}\ (١ - \text{جتا}^{٢}\text{س})^{٢}\ \text{دس}$

ص = جتاس   دص = −جاس دس

$= \int \cancel{\text{جاس}}\ (١ - \text{ص}^{٢})^{٢} \times \frac{\text{دص}}{-\cancel{\text{جاس}}}$

$= - \int (١ - ٢\text{ص}^{٢} + \text{ص}^{٤})\ \text{دص}$

$= -(\text{ص} - \frac{٢\text{ص}^{٣}}{٣} + \frac{\text{ص}^{٥}}{٥}) + \text{جـ}$

$= -(\text{جتاس} - \frac{٢(\text{جتاس})^{٣}}{٣} + \frac{\text{جتا}^{٥}\text{س}}{٥}) + \text{جـ}$

مثال ⑥

$\int \frac{\text{جتا}^{٥}\text{س}}{\sqrt{\text{جاس}}}\ \text{دس}$

الحل

$\int \frac{\text{جتاس} \times (\text{جتا}^{٢}\text{س})^{٢}}{\sqrt{\text{جاس}}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتاس}\ (١ - \text{جا}^{٢}\text{س})^{٢}}{\sqrt{\text{جاس}}}\ \text{دس}$

ص = جاس   دص = جتاس دس

$= \int \frac{\cancel{\text{جتاس}}\ (١ - \text{ص}^{٢})^{٢}}{\sqrt{\text{ص}}} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \int \frac{١ - ٢\text{ص}^{٢} + \text{ص}^{٤}}{\sqrt{\text{ص}}}\ \text{دص}$

$= \int (\frac{١}{\sqrt{\text{ص}}} - \frac{٢\text{ص}^{٢}}{\sqrt{\text{ص}}} + \frac{\text{ص}^{٤}}{\sqrt{\text{ص}}})\ \text{دص}$

$= \int (\text{ص}^{\frac{-١}{٢}} - ٢\ \text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ص}^{\frac{٧}{٢}})\ \text{دص}$

$= ٢\text{ص}^{\frac{١}{٢}} - ٢ \times \frac{٢}{٥}\text{ص}^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٢}{٩}\text{ص}^{\frac{٩}{٢}}$

$= ٢\ \text{جا}^{\frac{١}{٢}}\text{س} - \frac{٤}{٥}(\text{جاس})^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٢}{٩}(\text{جاس})^{\frac{٩}{٢}}$

مثال ⑦

$\int \text{جا}^{٤}\text{س}\ \text{دس}$

الحل

$\int (\text{جا}^{٢}\text{س})^{٢}\ \text{دس}$

$= \int \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا٢س})^{٢}\ \text{دس}$

$= \int \frac{١}{٤}(١ - ٢\text{جتا٢س} + \text{جتا}^{٢}\text{٢س})$

$= \frac{١}{٤}\int (١ - ٢\text{جتا٢س} + \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا٤س}))$

$= \frac{١}{٤}(\text{س} - \frac{٢\text{جا٢س}}{٢} + \frac{١}{٢}(\text{س} + \frac{\text{جا٤س}}{٤})) + \text{جـ}$

$\int \text{جتا}^{٤}\text{س}\ \text{دس}$

لنفس الطريقه

مثال ⑧

$\int \frac{1}{\text{قا}^3\text{س}\ \text{قتا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \text{جتا}^3\text{س}\ \text{جا}^2\text{س}\ \text{دس}$

$= \int \text{جتاس}\ \text{جتا}^2\text{س}\ \text{جا}^2\text{س}\ \text{دس}$

$= \int \text{جتاس}\ (1 - \text{جا}^2\text{س})\ \text{جا}^2\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس} \qquad \text{دص} = \text{جتاس دس}$

$= \int \cancel{\text{جتاس}}\ (1 - \text{ص}^2)\ \text{ص}^2\ \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \int (\text{ص}^2 - \text{ص}^4)\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^3}{3} - \frac{\text{ص}^5}{5} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{جا}^3\text{س}}{3} - \frac{\text{جا}^5\text{س}}{5} + \text{جـ}$

مثال ⑨

$\int \text{جا٤س}\ \text{جتا}^2\text{٢س}\ \text{دس}$

$\text{جا٤س} = \text{٢جا٢س}\ \text{جتا٢س}$

$\int \text{٢جا٢س}\ \text{جتا٢س}\ \text{جتا}^2\text{٢س}$

$\int \text{٢جا٢س}\ \text{جتا}^3\text{٢س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جتا٢س} \qquad \text{دص} = -\text{٢جا٢س}$

$\int \cancel{\text{٢جا٢س}}\ \text{ص}^3 \times \frac{\text{دص}}{\cancel{-\text{٢جا٢س}}}$

$-\int \text{ص}^3\ \text{دص} = -\frac{\text{ص}^4}{4} + \text{جـ} = -\frac{\text{جتا}^4\text{٢س}}{4} + \text{جـ}$

② تكاملات تحوي ظا ، قا

① $\int \text{قا}^2\text{س}$ والباقي بدلالة ظاس

نفرض ص = ظاس

② $\int$ قاس ظاس والباقي بدلالة قاس نفرض ص = قاس

متطابقات هامه

$\text{قا}^2\text{س} = 1 + \text{ظا}^2\text{س}$

$\text{ظا}^2\text{س} = \text{قا}^2\text{س} - 1$

ملاحظه

① قا فرديه نفرض ص = قاس

② قا زوجيه نفرض ص = ظاس

مثال ①

$\int \text{قا}^4\text{س}\ \text{دس}$

الحل

$\int \text{قا}^2\text{س}\ \text{قا}^2\text{س}\ \text{دس}$

$\int \text{قا}^2\text{س}\ (1 + \text{ظا}^2\text{س})\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظاس} \qquad \text{دص} = \text{قا}^2\text{س دس}$

$\int \cancel{\text{قا}^2\text{س}}\ (1 + \text{ص}^2) \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^2\text{س}}}$

$= \text{ص} + \frac{\text{ص}^3}{3} + \text{جـ} = \text{ظاس} + \frac{\text{ظا}^3\text{س}}{3} + \text{جـ}$

مثال ②

$\int \text{قا}^{٤}\text{س}\ \text{ظا}^{١}\text{س}\ \text{دس}$

الحل

قا زوجي نفرض $\text{ص} = \text{ظا}^{١}\text{س}$

$\text{دص} = \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$

$\int \cancel{\text{قا}^{٤}\text{س}}\ \text{ص}^{٥} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}}\ \text{دس}$

$\int \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{ص}^{٥} \times \text{دص}$

$\text{قا}^{٢}\text{س} = ١ + \text{ظا}^{٢}\text{س}$

$\int (١ + \text{ظا}^{٢}\text{س})\ \text{ص}^{٥}\ \text{دص}$

$\int (١ + \text{ص}^{٢})\ \text{ص}^{٥}\ \text{دص}$

$\int \text{ص}^{٥} + \text{ص}^{٧}\ \text{دص} = \frac{\text{ص}^{٦}}{٦} + \frac{\text{ص}^{٨}}{٨} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{ظا}^{٦}\text{س}}{٦} + \frac{\text{ظا}^{٨}\text{س}}{٨} + \text{جـ}$

مثال ③

$\int \text{قا}^{٣}\text{س}\ \text{ظا}^{٣}\text{س}\ \text{دس}$

قا فردية نفرض $\text{ص} = \text{قا}\text{س}$

$\text{دص} = \text{قا}\text{س}\ \text{ظا}^{١}\text{س}$

$\int \text{قا}\text{س}\ \text{ظا}\text{س}\ \ \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$

$\int \text{قا}\text{س}\ \text{ظا}\text{س}\ \ \text{قا}^{٢}\text{س}\ (\text{قا}^{٢}\text{س} - ١)\ \text{دس}$

$\int \cancel{\text{قا}\text{س}\ \text{ظا}^{١}\text{س}}\ \text{ص}^{٢}\ (\text{ص}^{٢} - ١) \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}\text{س}\ \text{ظا}^{١}\text{س}}}$

$\int \text{ص}^{٢}(\text{ص}^{٢} - ١)\ \text{دص}$

$= \int (\text{ص}^{٤} - \text{ص}^{٢})\ \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^{٥}}{٥} - \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{جـ}$

$\frac{\text{قا}^{٥}\text{س}}{٥} - \frac{\text{قا}^{٣}\text{س}}{٣} + \text{جـ}$

مثال ④

$\int \text{قا}^{ن}\text{س}\ \text{ظا}\text{س}\ \text{دس}$

الحل

$\int \text{قا}\text{س}\ \text{ظا}\text{س} \times \text{قا}^{ن-١}\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{قا}\text{س} \quad \text{دص} = \text{قا}\text{س}\ \text{ظا}^{١}\text{س}\ \text{دس}$

$\int \cancel{\text{قا}\text{س}\ \text{ظا}^{١}\text{س}} \times \text{ص}^{ن-١} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}\text{س}\ \text{ظا}\text{س}}}$

$= \int \text{ص}^{ن-١}\ \text{دص} = \frac{\text{ص}^{ن}}{ن} + \text{جـ}$

$= \frac{(\text{قا}\text{س})^{ن}}{ن} + \text{جـ}$

مثال ⑤

$\int \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٤}\text{س}}\ \text{دس}$

الحل

$\int \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} \times \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{دس}$

$\int \text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظا}^{١}\text{س} \quad \text{دص} = \text{قا}^{٢}\text{س}$

يتبع ⇐

$\int \text{ص}^{٢} \times \cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}} \times \frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}}$

$\int \text{ص}^{٢}\,\text{د ص} = \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{جـ} = \frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣} + \text{جـ}$

مثال ⑥

$\int \frac{\text{جا}^{\text{ن}}\text{س}}{\text{جتا}^{\text{ن}+٢}\text{س}}\,\text{د س}$

الحل

$\int \frac{\text{جا}^{\text{ن}}\text{س}}{\text{جتا}^{\text{ن}}\text{س}} \times \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{د س}$

$\int \text{ظا}^{\text{ن}}\text{س} \times \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{د س}$

$\text{ص} = \text{ظا س} \qquad \text{د ص} = \text{قا}^{٢}\text{س د س}$

$\int \text{ص}^{\text{ن}} \times \cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}} \times \frac{\text{د ص}}{\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}}$

$\int \text{ص}^{\text{ن}}\,\text{د ص} = \frac{\text{ص}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{ظا}^{\text{ن}+١}\text{س}}{\text{ن}+١} + \text{جـ}$

مثال ⑦

$\int \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س} \times \sqrt{١+\text{ظا س}}}\,\text{د س}$

الحل

$= \int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\sqrt{١+\text{ظا س}}}\,\text{د س}$

$\text{ص} = \sqrt{١+\text{ظا س}}$

$\text{ص}^{٢} = ١ + \text{ظا س}$

$٢\text{ص د ص} = \text{قا}^{٢}\text{س د س}$

$\int \frac{\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}}{\cancel{\text{ص}}} \times \frac{٢\cancel{\text{ص}}}{\cancel{\text{قا}^{٢}\text{س}}}\,\text{د ص}$

$\int ٢\,\text{د ص} = ٢\text{ص} + \text{جـ}$

$= ٢\sqrt{١+\text{ظا س}} + \text{جـ}$

ملاحظة هامة

الأقترانات التي تحوي ظتا ، قتا نتعامل معها بنفس طريقة ظا ، قا

$\text{قتا}^{٢}\text{س} = ١ + \text{ظتا}^{٢}\text{س}$

$\text{ظتا}^{٢}\text{س} = \text{قتا}^{٢}\text{س} - ١$

مثال ①

$\int \text{قتا}^{٦}\,٣\text{س ظتا }٣\text{س د س}$

الحل

$\int \text{قتا}^{٥}\,٣\text{س ظتا }٣\text{س قتا }٣\text{س د س}$

$\text{ص} = \text{قتا }٣\text{س} \qquad \text{د ص} = -٣\,\text{قتا }٣\text{ ظتا }٣\text{س}$

$\int \cancel{\text{قتا }٣\text{س ظتا }٣\text{س}} \times \text{ص}^{٥} \times \frac{\text{د ص}}{-٣\,\cancel{\text{قتا }٣\text{س ظتا }٣\text{س}}}$

$-\frac{١}{٣}\int \text{ص}^{٥}\,\text{د ص} = -\frac{١}{٣} \times \frac{\text{ص}^{٦}}{٦} + \text{جـ}$

$= -\frac{١}{١٨}\,\frac{\text{قتا}^{٦}\text{س}}{} + \text{جـ}$

مثال ②

$\int \text{قتا}^{٤}\text{س}\ \text{ظتا}^{٥}\text{س}\ \text{دس}$

الحل

$\int \text{قتا}^{٢}\text{س}\ \text{قتا}^{٢}\text{س}\ \text{ظتا}^{٥}\text{س}\ \text{دس}$

$\int \text{قتا}^{٢}\text{س}\ (١ + \text{ظتا}^{٢}\text{س})\ \text{ظتا}^{٥}\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظتاس}$

$\text{دص} = -\text{قتا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$

$= \int \cancel{\text{قتا}^{٢}\text{س}}\ (١ + \text{ص}^{٢})\ \text{ص}^{٥} \times \frac{\text{دص}}{-\cancel{\text{قتا}^{٢}\text{س}}}$

$- \int (١ + \text{ص}^{٢})\ \text{ص}^{٥}\ \text{دص}$

$= - \int (\text{ص}^{٥} + \text{ص}^{٧})\ \text{دص}$

$= - \left(\frac{\text{ص}^{٦}}{٦} + \frac{\text{ص}^{٨}}{٨}\right) + \text{جـ}$

$= - \left(\frac{\text{ظتا}^{٦}\text{س}}{٦} + \frac{\text{ظتا}^{٨}\text{س}}{٨}\right) + \text{جـ}$

مثال ③

$\int \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{ظا}^{٣}\text{س}}\ \text{دس}$

الحل

$\int \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}} \times \frac{١}{\text{ظا}^{٣}\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \text{قتا}^{٢}\text{س}\ \text{ظتا}^{٣}\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظتاس} \qquad \text{دص} = -\text{قتا}^{٢}\text{س}$

$= \int \cancel{\text{قتا}^{٢}\text{س}} \times \text{ص}^{٣} \times \frac{\text{دص}}{-\cancel{\text{قتا}^{٢}\text{س}}}$

$- \int \text{ص}^{٣}\ \text{دص}$

$= - \frac{\text{ص}^{٤}}{٤} + \text{جـ} = - \frac{\text{ظتا}^{٤}\text{س}}{٤} + \text{جـ}$

تدريبات الكتاب

تدريب ① ص ٢٦٦

جد كلا من التكاملات الآتية

① $\int س^{٢}(٦س^{٣}+٥)^{٣}\, ءس$

$ص = ٦س^{٣}+٥ ، ءص = ١٨س^{٢}\, ءس$

$\int \cancel{س^{٢}}\, ص^{٣} \times \frac{ءص}{١٨\cancel{س^{٢}}}$

$\frac{١}{١٨}\int ص^{٣}\, ءص = \frac{١}{١٨}\times\frac{ص^{٤}}{٤} + جـ$

$= \frac{١}{٧٢}(٦س^{٣}+٥)^{٤} + جـ$

② $\int (س+٣)\sqrt[٥]{س^{٢}+٦س-٤}\, ءس$

$ص = س^{٢}+٦س-٤$

$ءص = (٢س+٦)\, ءس$

$\int \cancel{س+٣}\, ص^{\frac{١}{٥}} \times \frac{ءص}{٢\cancel{(س+٣)}}$

$\frac{١}{٢}\int ص^{\frac{١}{٥}}\, ءص$

$\frac{١}{٢}\times\frac{٥}{٦}ص^{\frac{٦}{٥}} + جـ$

$= \frac{٥}{١٢}(س^{٢}+٦س-٤)^{\frac{٦}{٥}} + جـ$

③ $\int \frac{١٠س-٥}{\sqrt[٣]{(س^{٢}-س+١)^{٢}}}$

$ص = س^{٢}-س+١$

$ءص = (٢س-١)\, ءس$

$\int \frac{٥\cancel{(٢س-١)}}{ص^{\frac{٢}{٣}}} \times \frac{ءص}{\cancel{٢س-١}}$

$\int ٥\, ص^{-\frac{٢}{٣}}\, ءص$

$= ٥\times٣\, ص^{\frac{١}{٣}} + جـ = ١٥(س^{٢}-س+١)^{\frac{١}{٣}} + جـ$

تدريب ② ص ٢٦٧

① $\int س^{٧}\sqrt{س^{٤}-٣}\, ءس$

$ص = س^{٤}-٣ \qquad ءص = ٤س^{٣}\, ءس$

$= \int \cancel{س^{٧}}\, ص^{\frac{١}{٢}} \times \frac{ءص}{٤\cancel{س^{٣}}}$

$= \frac{١}{٤}\int س^{٤}\, ص^{\frac{١}{٢}} \times ءص$

$س^{٤} = ص+٣$

$= \frac{١}{٤}\int (ص+٣)\, ص^{\frac{١}{٢}}\, ءص$

$= \frac{١}{٤}\int (ص^{\frac{٣}{٢}} + ٣\, ص^{\frac{١}{٢}})\, ءص$

$= \frac{١}{٤}(\frac{٢}{٥}ص^{\frac{٥}{٢}} + \cancel{٣}\times\frac{٢}{\cancel{٣}}ص^{\frac{٣}{٢}}) + جـ$

$= \frac{١}{٤}(\frac{٢}{٥}(س^{٤}-٣)^{\frac{٥}{٢}} + ٢(س^{٤}-٣)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

② $\int \text{٢س}^{\text{٥}}(\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥})^{\text{٤}}\,\text{ءس}$

الحل

$\text{ص}=\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥} \qquad \text{ءص}=\text{٢س ءس}$

$\int \cancel{\text{٢}}\cancel{\text{س}}^{\text{٥}}(\text{ص})^{\text{٤}}\frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{٢س}}}$

$\int \text{س}^{\text{٤}}\,\text{ص}^{\text{٤}}\,\text{ءص}$

لكن $\text{س}^{\text{٢}}=\text{ص}-\text{٥}$

$\text{س}^{\text{٤}}=(\text{ص}-\text{٥})^{\text{٢}}$

$\int (\text{ص}-\text{٥})^{\text{٢}}\times \text{ص}^{\text{٤}}\,\text{ءص}$

$=\int (\text{ص}^{\text{٢}}-\text{١٠ص}+\text{٢٥})\text{ص}^{\text{٤}}\,\text{ءص}$

$=\int (\text{ص}^{\text{٦}}-\text{١٠ص}^{\text{٥}}+\text{٢٥ص}^{\text{٤}})\,\text{ءص}$

$=\frac{\text{ص}^{\text{٧}}}{\text{٧}}-\frac{\text{١٠ص}^{\text{٦}}}{\text{٦}}+\frac{\text{٢٥ص}^{\text{٥}}}{\text{٥}}+\text{جـ}$

$=\frac{(\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥})^{\text{٧}}}{\text{٧}}-\frac{\text{٥}}{\text{٣}}(\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥})^{\text{٦}}+\text{٥}(\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥})^{\text{٥}}+\text{جـ}$

تدرب ③ ص٢٦٨

① $\int \frac{(\text{٢س}+\text{١})^{\text{٥}}}{\text{س}^{\text{٧}}}\,\text{ءس}$

الحل

$\int \frac{(\text{٢س}+\text{١})^{\text{٥}}}{\text{س}^{\text{٥}}\times\text{س}^{\text{٢}}}\,\text{ءس}$

$=\int \left(\frac{\text{٢س}+\text{١}}{\text{س}}\right)^{\text{٥}}\times\frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}\,\text{ءس}$

$=\int \left(\text{٢}+\frac{\text{١}}{\text{س}}\right)^{\text{٥}}\times\frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}\,\text{ءس}$

$\text{ص}=\text{٢}+\frac{\text{١}}{\text{س}}\text{ ، }\text{ءص}=\frac{-\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}\,\text{ءس}$

$\int \text{ص}^{\text{٥}}\times\frac{\text{١}}{\cancel{\text{س}^{\text{٢}}}}\times-\cancel{\text{س}^{\text{٢}}}\,\text{ءص}$

$-\int \text{ص}^{\text{٥}}\,\text{ءص}=-\frac{\text{ص}^{\text{٦}}}{\text{٦}}+\text{جـ}$

$=\frac{-\left(\text{٢}+\frac{\text{١}}{\text{س}}\right)^{\text{٦}}}{\text{٦}}+\text{جـ}$

② $\int \text{س}^{\text{٢}}\sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٧}}+\text{٥س}^{\text{٣}}}\,\text{ءس}$

الحل

$\int \text{س}^{\text{٢}}\sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٣}}(\text{س}^{\text{٤}}+\text{٥})}\,\text{ءس}$

$\int \text{س}^{\text{٢}}\times\sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٣}}}\times\sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٤}}+\text{٥}}\,\text{ءس}$

$=\int \text{س}^{\text{٣}}\sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٤}}+\text{٥}}\,\text{ءس}$

$\text{ص}=\text{س}^{\text{٤}}+\text{٥} \qquad \text{ءص}=\text{٤س}^{\text{٣}}\,\text{ءس}$

$\int \cancel{\text{س}^{\text{٣}}}\,\text{ص}^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}\times\frac{\text{ءص}}{\text{٤}\cancel{\text{س}^{\text{٣}}}}$

$\frac{\text{١}}{\text{٤}}\int \text{ص}^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}\,\text{ءص}=\frac{\text{١}}{\text{٤}}\times\frac{\text{٣}}{\text{٤}}\text{ص}^{\frac{\text{٤}}{\text{٣}}}+\text{جـ}$

$\frac{\text{٣}}{\text{١٦}}(\text{س}^{\text{٤}}+\text{٥})^{\frac{\text{٤}}{\text{٣}}}+\text{جـ}$

③ $\int \sqrt[\text{٣}]{\text{٤س}^{\text{٥}}+\text{٢س}^{\text{٣}}}\,\text{ءس}$

الحل

$\int \sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٣}}(\text{٤س}^{\text{٢}}+\text{٢})}$

$\int \sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٣}}}\sqrt[\text{٣}]{\text{٤س}^{\text{٢}}+\text{٢}}\,\text{ءس}$

يتبع ⟸

$$\int \text{س}\sqrt[٣]{٤\text{س}^{٢}+٢}\ \text{د س}$$

$$\text{ص} = ٤\text{س}^{٢}+٢ \quad \text{د ص} = ٨\text{س}\ \text{د س}$$

$$\int \cancel{\text{س}}\ \text{ص}^{\frac{١}{٣}} \times \frac{\text{د ص}}{٨\cancel{\text{س}}}$$

$$\frac{١}{٨}\int \text{ص}^{\frac{١}{٣}}\ \text{د ص} = \frac{١}{٨} \times \frac{٣}{٤}\text{ص}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{٣}{٣٢}\left(٤\text{س}^{٢}+٢\right)^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$$

---

④ $\int \left(٧\text{س}^{٥} - ٢\text{س}\right)^{٣}\ \text{د س}$

<u>الحل</u>

$$\int \left(\text{س}\left(٧\text{س}^{٤}-٢\right)\right)^{٣}$$

$$\int \text{س}^{٣}\left(٧\text{س}^{٤}-٢\right)^{٣}\ \text{د س}$$

$$\text{ص} = ٧\text{س}^{٤}-٢ \quad \text{د ص} = ٢٨\text{س}^{٣}\ \text{د س}$$

$$\int \cancel{\text{س}^{٣}}\ \text{ص}^{٣} \times \frac{\text{د ص}}{٢٨\cancel{\text{س}^{٣}}}$$

$$\frac{١}{٢٨}\int \text{ص}^{٣}\ \text{د ص} = \frac{١}{٢٨}\ \frac{\text{ص}^{٤}}{٤} + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{١١٢}\left(٧\text{س}^{٤}-٢\right)^{٤} + \text{جـ}$$

<u>تدريب</u> ④ ص٢٦٩

① $\int_{٠}^{٤} \text{س}\sqrt{\text{س}^{٢}+٩}\ \text{د س}$

$$\text{ص} = \text{س}^{٢}+٩$$

$$\text{د ص} = ٢\text{س}\ \text{د س}$$

$$\text{س} = ٠ \leftarrow \text{ص} = ٩$$

$$\text{س} = ٤ \leftarrow \text{ص} = ٢٥$$

$$\int_{٩}^{٢٥} \cancel{\text{س}}\ \text{ص}^{\frac{١}{٢}} \times \frac{\text{د ص}}{٢\cancel{\text{س}}}$$

$$\frac{١}{٢}\int_{٩}^{٢٥} \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\ \text{د ص}$$

$$\frac{١}{\cancel{٢}} \times \frac{\cancel{٢}}{٣}\ \text{ص}^{\frac{٣}{٢}}\Big]_{٩}^{٢٥}$$

$$\frac{١}{٣}\left((٢٥)^{\frac{٣}{٢}} - (٩)^{\frac{٣}{٢}}\right) = \frac{٩٨}{٣}$$

---

⑤ $\int_{١}^{٢} \frac{(\text{س}+١)^{٥}}{\text{س}^{٧}}\ \text{د س}$

$$\int_{١}^{٢} \frac{(\text{س}+١)^{٥}}{\text{س}^{٥}} \times \frac{١}{\text{س}^{٢}}\ \text{د س}$$

$$\int_{١}^{٢} \left(\frac{\text{س}+١}{\text{س}}\right)^{٥} \times \frac{١}{\text{س}^{٢}}\ \text{د س}$$

$$\int_{١}^{٢} \left(١+\frac{١}{\text{س}}\right)^{٥} \times \frac{١}{\text{س}^{٢}}$$

$$\text{ص} = ١+\frac{١}{\text{س}} \ ، \ \text{د ص} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}\ \text{د س}$$

$$\text{س} = ١ \leftarrow \text{ص} = ٢$$

$$\text{س} = ٢ \leftarrow \text{ص} = ١,٥$$

$$\int_{٢}^{١,٥} \text{ص}^{٥} \times \frac{١}{\cancel{\text{س}^{٢}}} \times -\cancel{\text{س}^{٢}}\ \text{د ص}$$

$$-\int_{٢}^{١,٥} \text{ص}^{٥}\ \text{د ص} = -\left(\frac{\text{ص}^{٦}}{٦}\Big]_{٢}^{١,٥}\right)$$

$$= -\left(\frac{(١,٥)^{٦}}{٦} - \frac{(٢)^{٦}}{٦}\right)$$

تدريب ⑤ ص ٢٧٠

① $\int (\text{س}^{٢}+١)\,\text{حا}(\text{س}^{٣}+٣\text{س}+١)\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٣}+٣\text{س}+١$

$\text{دص} = (٣\text{س}^{٢}+٣)\,\text{دس}$

$\int \cancel{(\text{س}^{٢}+١)}\,\text{حاص} \times \dfrac{\text{دص}}{٣\cancel{(\text{س}^{٢}+١)}}$

$\frac{١}{٣}\int \text{حاص}\,\text{دص} = -\frac{١}{٣}\,\text{جتاص} + \text{جـ}$

$= -\frac{١}{٣}\,\text{جتا}(\text{س}^{٣}+٣\text{س}+١) + \text{جـ}$

② $\int \text{س}\,\text{ظا}^{٢}(\text{س}^{٢}+٥)\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢}+٥ \qquad \text{دص} = ٢\text{س}\,\text{دس}$

$\int \cancel{\text{س}}\,\text{ظا}^{٢}\text{ص} \times \dfrac{\text{دص}}{٢\cancel{\text{س}}}$

$\frac{١}{٢}\int \text{ظا}^{٢}\text{ص}\,\text{دص}$

$\frac{١}{٢}\int (\text{قا}^{٢}\text{ص}-١)\,\text{دص}$

$\frac{١}{٢}\,(\text{ظاص} - \text{ص}) + \text{جـ}$

$\frac{١}{٢}\,\big(\text{ظا}(\text{س}^{٢}+٥) - (\text{س}^{٢}+٥)\big) + \text{جـ}$

③ $\int_{١}^{٢} \dfrac{\text{هـ}^{\frac{٣}{\text{س}}}}{\text{س}^{٢}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \frac{٣}{\text{س}} \text{،} \ \text{دص} = \frac{-٣}{\text{س}^{٢}}\,\text{دس}$

$\text{س} = ١ \leftarrow \text{ص} = ٣$

$\text{س} = ٢ \leftarrow \text{ص} = \frac{٣}{٢}$

$\int_{٣}^{\frac{٣}{٢}} \dfrac{\text{هـ}^{\text{ص}}}{\cancel{\text{س}^{٢}}} \times \dfrac{-\cancel{\text{س}^{٢}}}{٣}\,\text{دص}$

$-\frac{١}{٣}\int_{٣}^{\frac{٣}{٢}} \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص} = -\frac{١}{٣}\left(\text{هـ}^{\text{ص}}\right]_{٣}^{\frac{٣}{٢}}\Big)$

$= -\frac{١}{٣}\left(\text{هـ}^{\frac{٣}{٢}} - \text{هـ}^{٣}\right)$

تدريب ⑥ ص ٢٧٢

① $\int \text{ظا}^{٥}٣\text{س}\,\text{قا}^{٢}٣\text{س}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظا}٣\text{س} \qquad \text{دص} = ٣\text{قا}^{٢}٣\text{س}\,\text{دس}$

$\int \text{ص}^{٥} \times \cancel{\text{قا}^{٢}٣\text{س}} \times \dfrac{\text{دص}}{٣\cancel{\text{قا}^{٢}٣\text{س}}}$

$\frac{١}{٣}\int \text{ص}^{٥}\,\text{دص}$

$\frac{١}{٣}\,\frac{\text{ص}^{٦}}{٦} + \text{جـ}$

$\frac{١}{١٨} \times (\text{ظا}٣\text{س})^{٦} + \text{جـ}$

② $\int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{قتا}^{٥}\text{٢س}}\,\text{ءس}$

<u>الحل</u>

$\int \text{جتا٢س جا}^{٥}\text{٢س ءس}$

$\text{ص} = \text{جا٢س}$

$\text{ءص} = \text{٢ جتا٢س ءس}$

$\int \cancel{\text{جتا٢س}}\ \text{ص}^{٥} \times \frac{\text{ءص}}{\text{٢}\cancel{\text{جتا٢س}}}$

$\frac{١}{٢}\int \text{ص}^{٥}\,\text{ءص} = \frac{١}{٢}\,\frac{\text{ص}^{٦}}{٦} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{١٢}(\text{جا٢س})^{٦} + \text{جـ}$

③ $\int \text{جا}^{٣}\text{س ءس}$

$= \int \text{جاس جا}^{٢}\text{س ءس}$

$= \int \text{جاس}(١ - \text{جتا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{جتاس} \quad \text{ءص} = -\text{جاس ءس}$

$\int \cancel{\text{جاس}}(١ - \text{ص}^{٢}) \times \frac{\text{ءص}}{-\cancel{\text{جاس}}}$

$-\int (١ - \text{ص}^{٢})\,\text{ءص}$

$= \int (\text{ص}^{٢} - ١)\,\text{ءص}$

$= \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} - \text{ص} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{٣} - \text{جتاس} + \text{جـ}$

④ $\int \text{جا}^{٤}\text{٥س جتا}^{٣}\text{٥س ءس}$

$\int \text{جتا٥س جا}^{٤}\text{٥س جتا}^{٢}\text{٥س ءس}$

$= \int \text{جتا٥س جا}^{٤}\text{٥س}(١ - \text{جا}^{٢}\text{٥س})\,\text{ءس}$

$\text{ص} = \text{جا٥س}$

$\text{ءص} = \text{٥ جتا٥س ءس}$

$\int \cancel{\text{جتا٥س}}\ \text{ص}^{٤}(١ - \text{ص}^{٢})\,\frac{\text{ءص}}{\text{٥}\cancel{\text{جتا٥س}}}$

$\frac{١}{٥}\int (\text{ص}^{٤} - \text{ص}^{٦})\,\text{ءص}$

$= \frac{١}{٥}\left(\frac{\text{ص}^{٥}}{٥} - \frac{\text{ص}^{٧}}{٧}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٥}\left(\frac{\text{جا}^{٥}\text{٥س}}{٥} - \frac{\text{جا}^{٧}\text{٥س}}{٧}\right) + \text{جـ}$

ورقة عمل

① اوجد قيمة

$\int_{أ}^{ب} ق'(هـ(س)) \times هـ'(س)\ دس$

② اذا كان ق(٩) = ٨ ، ق(٤) = ٣

فاوجد قيمة $\int_{٢}^{٣} س\ ق'(س^{٢})\ دس$

③ اذا كان $\int_{١}^{جـ} ق(س-١)\ دس = \int_{-٣}^{٤} ق(س+٣)\ دس$

فان قيمة جـ =

أ) ٦ ب) ٨ جـ) ٩ د) ١٠

④ اذا كان $\int_{-١}^{٢} ق(س+١)\ دس = -٥$

$\int_{٠}^{٢} ق(س)\ دس = -٤$ فان $\int_{٢}^{٣} ق(س)\ دس =$

أ) ٧ ب) ٣ جـ) -٧ د) -٣

⑤ اوجد $\int هـ^{س+٣هـ^{س}}\ دس$

⑥ اوجد $\int \frac{١}{جتا^{٢}س\sqrt{ظاس-١}}$

⑦ اوجد $\int هـ^{٢س} جا(هـ^{٢س-١})\ دس$

⑧ اوجد $\int \frac{\sqrt[3]{س}}{٥-س\sqrt[3]{س}}\ دس$

⑨ $\int \frac{١}{\sqrt{١-\sqrt{س}}}\ دس$

⑩ $\int \sqrt{\frac{١+\sqrt{س}}{س}}\ دس$

⑪ $\int \frac{\sqrt{لو_{هـ}س}}{س}\ دس$

⑫ اذا كان $\int_{١}^{٥} ق(س)\ دس = ٤$

فاوجد $\int_{٠}^{٤} \left(ق(س+١) - \sqrt{س}\right) دس$

⑬ اوجد $\int_{١}^{٢} \frac{س^{٢}+١}{س^{٣}+٣س}\ دس$

⑭ $\int \frac{جتا\sqrt{١+س}}{\sqrt{١+س}}\ دس$

(١٥) $\int_{-\sqrt{٥}}^{١} \frac{|\text{س}|}{\sqrt{٩ - \text{س}^٢}}\ \text{دس}$

(١٦) $\int (١ + \sqrt{٢\text{س} - ١})^٥\ \text{دس}$

(١٧) اذا كان ميل المماس لمنحنى الإقتران ق(س) هو ٢ جتاس جاس وكان منحنى ق يمر بالنقطة (٠ ، ٢) جد قاعدة الأقتران ق

(١٨) جد $\int (\text{س} + ٢)(\text{س} - ١)^٧\ \text{دس}$

(١٩) اوجد $\int \frac{(\text{س} + ١)^٥}{\text{س}^٧}\ \text{دس}$

(٢٠) اذا كان $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) \neq \text{صفر}$ فاوجد $\int (\text{ق}(\text{س}))^{\text{ن}}\ \text{دس}$

(٢١) اثبت أن

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا}^{\text{ن}}\text{س}\ \text{دس} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتا}^{\text{ن}}\text{س}\ \text{دس}$

مساعده $\text{جا}^{\text{ن}}\text{س} = \text{جتا}^{\text{ن}}(\frac{\pi}{٢} - \text{س})$

(٢٢) اوجد $\int \text{جا}^{\text{ن}}\text{س}\ \text{قا}^{\text{ن}+٢}\text{س}\ .\text{دس}$

(٢٣) اثبت ان

$\int_{\text{م}}^{٢\text{م}} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} = \int_{٠}^{\text{م}} \text{ق}(٢\text{م} - \text{س})\ \text{دس}$

(٢٤) اذا كان $\int_{١٠}^{٢} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} = ٦$

جد $\int_{١}^{٣} (\text{س}\ \text{ق}(\text{س}^٢ + ١) + ٤\text{س})\ \text{دس}$

(٢٥) اوجد $\int \frac{(\text{س}(١ + \frac{١}{\text{س}}))^٥}{\text{س}^٧}\ \text{دس}$

(٢٦) $\int \sqrt[٣]{\text{س}^٥ - \text{س}^٣}\ \text{دس}$

(٢٧) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جاس جتاس}}{\sqrt{١ + \text{جا}^٢\text{س}}}\ \text{دس}$

(٢٨) $\int \frac{١}{\text{س}(\text{لو}_{\text{ه}}\text{س})^٢}\ \text{دس}$

(٢٩) $\int (٣ - \text{س})\ \text{ه}^{٦\text{س} - \text{س}^٢}\ \text{دس}$

(٣٠) $\int \frac{\sqrt{\text{س}^٢ + \text{س}^٤}}{\text{س}^٥}$

(٣١) $\int \frac{\text{س}^٢ + ٣}{(\text{س}^٢ - ٣)^٢}$

اجابات ورقة عمل التكامل بالتعويض

① $\int_{\text{م}}^{\text{ن}} \text{ق}'(\text{هـ}(\text{س})) \times \text{هـ}'(\text{س})\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{هـ}(\text{س}) \qquad \text{دص} = \text{هـ}'(\text{س})\,\text{دس}$

$\text{س} = \text{م} \qquad \text{ص} = \text{هـ}(\text{م})$

$\text{س} = \text{ن} \qquad \text{ص} = \text{هـ}(\text{ن})$

$= \int_{\text{هـ}(\text{م})}^{\text{هـ}(\text{ن})} \text{ق}'(\text{ص}) \times \cancel{\text{هـ}'(\text{س})} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{هـ}'(\text{س})}}$

$= \int_{\text{هـ}(\text{م})}^{\text{هـ}(\text{ن})} \text{ق}'(\text{ص})\,\text{دص} = \text{ق}(\text{ص}) \Big|_{\text{هـ}(\text{م})}^{\text{هـ}(\text{ن})}$

$= \text{ق}(\text{هـ}(\text{ن})) - \text{ق}(\text{هـ}(\text{م})) + \text{جـ}$

② $\int_{٢}^{٣} ٢\text{س}\,\text{ق}'(\text{س}^{٢})\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٢} \qquad \text{دص} = ٢\text{س}\,\text{دس}$

$\text{س} = ٢ \rightarrow \text{ص} = ٤$

$\text{س} = ٣ \rightarrow \text{ص} = ٩$

$\int_{٤}^{٩} \cancel{٢\text{س}}\,\text{ق}'(\text{ص}) \frac{\text{دص}}{\cancel{٢\text{س}}} =$

$= \text{ق}(٩) - \text{ق}(٤)$

$٨ - ٣ = ٥$

③ $\int_{١}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س} - ١)\,\text{دس} = \int_{-٣}^{٤} \text{ق}(\text{س} + ٣)\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س} - ١ \qquad \text{دص} = \text{دس}$

$\text{س} = ١ \quad \text{ص} = ٠ \text{ ، } \text{س} = \text{جـ} \quad \text{ص} = \text{جـ} - ١$

$\text{ع} = \text{س} + ٣ \qquad \text{دع} = \text{دع}$

$\text{س} = -٣ \rightarrow \text{ع} = ٠$

$\text{س} = ٤ \rightarrow \text{ع} = ٧$

$\int_{٠}^{\text{جـ}-١} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} = \int_{٠}^{٧} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$

$\text{جـ} - ١ = ٧ \Rightarrow \text{جـ} = ٨$

(ب)

④ $\int_{-١}^{٢} \text{ق}(\text{س} + ١)\,\text{دس} = -٥$

$\text{ص} = \text{س} + ١ \qquad \text{دص} = \text{دس}$

$\text{س} = -١ \text{ ، } \text{ص} = ٠ \;/\; \text{س} = ٢ \text{ ، } \text{ص} = ٣$

$\int_{٠}^{٣} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} = -٥$

$\int_{٢}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = \int_{٢}^{٠} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٠}^{٣} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

$= +٢ + -٥$

$= -٣$ (د)

⑤ $\int هـ^{س+٣هـ^{س}}\ دس$

اكمل

$= \int هـ^{س} \times هـ^{٣هـ^{س}}\ دس$

$ص = ٣هـ^{س}$ ، $دص = ٣\ هـ^{س}\ دس$

$= \int \cancel{هـ^{س}} \times هـ^{ص} \times \frac{دص}{٣\cancel{هـ^{س}}}$

$\frac{١}{٣}\int هـ^{ص}\ دص = \frac{١}{٣} هـ^{ص} + جـ$

$= \frac{١}{٣} هـ^{٣هـ^{س}} + جـ$

⑥ $\int \frac{١}{جتا^{٢}س \sqrt{ظاس - ١}}$

$= \int قا^{٢}س \times \frac{١}{\sqrt{ظاس - ١}}$

$ص = \sqrt{ظاس - ١}$ ، $ص^{٢} = ظاس - ١$

$٢ص\ دص = قا^{٢}س\ دس$

$\int \cancel{قا^{٢}س} \times \frac{١}{\cancel{ص}} \times \frac{٢\cancel{ص}\ دص}{\cancel{قا^{٢}س}}$

$\int ٢\ دص$

$= ٢ص + جـ$

$= ٢\sqrt{ظاس - ١} + جـ$

⑦ $\int هـ^{٢س}\ جا^{٢}\left(هـ^{٢س-١}\right) دس$

$ص = هـ^{٢س-١}$ ، $دص = ٢\ هـ^{٢س-١}$

$\int هـ^{٢س}\ جا^{٢}ص \times \frac{دص}{٢هـ^{٢س-١}}$

$\int \cancel{هـ^{٢س}}\ جا^{٢}ص \times \frac{دص}{٢\cancel{هـ^{٢س}} \times هـ^{-١}}$

$= \int \frac{هـ}{٢}\ جا^{٢}ص\ دص$

$= \frac{هـ}{٢}\int \frac{١}{٢}\left(١ - جتا٢ص\right) دص$

$= \frac{هـ}{٤}\left(ص - \frac{جا٢ص}{٢}\right) + جـ$

$= \frac{هـ}{٤}\left(هـ^{٢س-١} - \frac{جا٢(هـ^{٢س-١})}{٢}\right) + جـ$

⑧ $\int \frac{\sqrt[٣]{س}}{٥ - س\sqrt[٣]{س}}\ دس$

$ص = ٥ - س\sqrt[٣]{س} = ٥ - س^{\frac{٤}{٣}}$

$دص = -\frac{٤}{٣} س^{\frac{١}{٣}}\ دس$

$\int \frac{\cancel{س^{\frac{١}{٣}}}}{ص} \times \frac{دص}{-\frac{٤}{٣}\cancel{س^{\frac{١}{٣}}}}$

$= \frac{-٣}{٤}\int \frac{١}{ص}\ دص$

$= \frac{-٣}{٤}\ لو|ص| + جـ$

$= \frac{-٣}{٤}\ لو|٥ - س\sqrt[٣]{س}| + جـ$

⑨ $\int \frac{١}{\sqrt{١-\sqrt{\text{س}}}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = ١-\sqrt{\text{س}} \Rightarrow \sqrt{\text{س}} = ١-\text{ص}$

$\text{دص} = \frac{-١}{٢\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$

$\int \frac{١}{\sqrt{\text{ص}}} \times -٢\sqrt{\text{س}}\,\text{دص}$

$\int \frac{١}{\sqrt{\text{ص}}} \times -٢(١-\text{ص})\,\text{دص}$

$= -٢\int \frac{١-\text{ص}}{\sqrt{\text{ص}}}\,\text{دص}$

$= -٢\int \frac{١}{\sqrt{\text{ص}}} - \frac{\text{ص}}{\sqrt{\text{ص}}}\,\text{دص}$

$= -٢\int \text{ص}^{\frac{-١}{٢}} - \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\,\text{دص}$

$= -٢\left(٢\text{ص}^{\frac{١}{٢}} - \frac{٢}{٣}\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}\right) + \text{جـ}$

$= -٢\left(٢(١-\sqrt{\text{س}})^{\frac{١}{٢}} - \frac{٢}{٣}(١-\sqrt{\text{س}})^{\frac{٣}{٢}}\right) + \text{جـ}$

⑩ $\int \sqrt{\frac{١+\sqrt{\text{س}}}{\text{س}}}\,\text{دس}$

الحل

$\int \frac{\sqrt{١+\sqrt{\text{س}}}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = ١+\sqrt{\text{س}} \qquad \text{دص} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$

$\int \frac{\sqrt{\text{ص}}}{\cancel{\sqrt{\text{س}}}} \times ٢\cancel{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دص}$

$٢\int \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\,\text{دص} = ٢ \times \frac{٢}{٣}\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

$\frac{٤}{٣}(١+\sqrt{\text{س}})^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

⑪ $\int \frac{\sqrt{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \qquad \text{دص} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\int \frac{\sqrt{\text{ص}}}{\cancel{\text{س}}} \times \text{دص} \times \cancel{\text{س}}$

$\int \text{ص}^{\frac{١}{٢}}\,\text{دص} = \frac{٢}{٣}\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

$\frac{٢}{٣}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

---

⑫ $\int_{٠}^{٤} \text{ق}(\text{س}+١)\,\text{دس} - \int_{٠}^{٤} \text{س}^{\frac{١}{٢}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}+١ \qquad \text{دص} = \text{دس}$

$\text{س} = ٠ \quad \text{ص} = ١ \quad ، \quad \text{س} = ٤ \quad \text{ص} = ٥$

$\int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} = ٤$

$\int_{٠}^{٤} \text{ق}(\text{س}+١) - \int_{٠}^{٤} \text{س}^{\frac{١}{٢}}\,\text{دس}$

$= \int_{١}^{٥} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} - \left[\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٤}$

$= ٤ - \frac{١٦}{٣} = \frac{١٢}{٣} - \frac{١٦}{٣}$

$= \frac{-٤}{٣}$

⑬ اوجد $\int_{١}^{٢} \frac{س^{٢}+١}{س^{٣}+٣س}\, دس$

الحل

$ص = س^{٣} + ٣س$

$دص = ٣س^{٢} + ٣ = ٣(س^{٢}+١)\, دس$

$س = ١ \,،\, ص = ٤ \;/\; س = ٢ \,،\, ص = ١٤$

$$\int_{٤}^{١٤} \frac{\cancel{س^{٢}+١}}{ص} \times \frac{دص}{٣\cancel{(س^{٢}+١)}}$$

$$\frac{١}{٣}\int_{٤}^{١٤} \frac{١}{ص} \times دص$$

$$= \frac{١}{٣}\Big[لو_{ھ}|ص|\Big]_{٤}^{١٤}$$

$$\frac{١}{٣}\left(لو_{ھ}|١٤| - لو_{ھ}(٤)\right) + جـ$$

⑭ $\int \frac{جتا\sqrt{١+س}}{\sqrt{١+س}}\, دس$

$ص = \sqrt{١+س}$

$دص = \frac{١}{٢\sqrt{١+س}}\, دس$

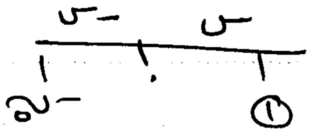
$$\int \frac{جتاص}{\cancel{\sqrt{١+س}}} \times ٢\cancel{\sqrt{١+س}}\, دص$$

$$٢\int جتاص\, دص$$

$$= ٢جاص + جـ$$

$$= ٢جا\sqrt{١+س} + جـ$$

⑮ $\int_{-\sqrt{٥}}^{١} \frac{|س|}{\sqrt{٩-س^{٢}}}\, دس$



$$= \int_{-\sqrt{٥}}^{٠} \frac{-س}{\sqrt{٩-س^{٢}}} + \int_{٠}^{١} \frac{س}{\sqrt{٩-س^{٢}}}$$

$ص = \sqrt{٩-س^{٢}} \qquad ص^{٢} = ٩ - س^{٢}$

$\cancel{٢}ص\, دص = -\cancel{٢}س\, دس$

$س = -\sqrt{٥} \qquad ص = ٤$

$س = ٠ \qquad ص = ٣$

$س = ١ \qquad ص = \sqrt{٨}$

① $\int_{٤}^{٣} \frac{\cancel{-س}}{ص} \times \frac{-ص}{\cancel{س}}\, دس$

$\int_{٤}^{٣} ١\, دس = ١(٣-٤) = -١$

② $\int_{٣}^{\sqrt{٨}} \frac{\cancel{س}}{\cancel{ص}} \times \frac{-\cancel{ص}}{\cancel{س}}\, دص$

$\int_{٣}^{\sqrt{٨}} دص = -(\sqrt{٨}-٣)$

$\int_{-\sqrt{٥}}^{١} \frac{|س|}{\sqrt{٩-س^{٢}}} = -١ - (\sqrt{٨}-٣)$

⑯ $\int \left(١ + \sqrt{٢س - ١}\right)^{٥} \, دس$

$ص = ١ + \sqrt{٢س - ١}$

$دص = \frac{٢}{٢\sqrt{٢س - ١}} \, دس$

$\int ص^{٥} \times \sqrt{٢س - ١} \, دص$

$\sqrt{٢س - ١} = ص - ١$

$\int ص^{٥} \left(ص - ١\right) دص$

$\int \left(ص^{٦} - ص^{٥}\right) دص$

$\frac{ص^{٧}}{٧} - \frac{ص^{٦}}{٦} + ج$

$\frac{\left(١ + \sqrt{٢س - ١}\right)^{٧}}{٧} - \frac{\left(١ + \sqrt{٢س - ١}\right)^{٦}}{٦} + ج$

---

⑰

$ق'(س) = ٢ \, جتاس \, جاس = جا٢س$

$ق(س) = \int جا٢س \, دس = -\frac{جتا٢س}{٢} + ج$

$ق(٠) = -\frac{جتا٠}{٢} + ج = ٢$

$-\frac{١}{٢} + ج = ٢$

$\Leftarrow ج = \frac{٥}{٢}$

$ق(س) = -\frac{١}{٢} جتا٢س + \frac{٥}{٢}$

---

⑱ $\int \left(س + ٢\right)\left(س - ١\right)^{٧} دس$

$ص = س - ١ \quad دص = دس$

$س = ص + ١$

$\int \left(ص + ١ + ٢\right) ص^{٧} \, دص$

$\int ص^{٨} + ٣ص^{٧} \, دص$

$= \frac{ص^{٩}}{٩} + \frac{٣ص^{٨}}{٨} + ج$

$= \frac{\left(س - ١\right)^{٩}}{٩} + \frac{٣}{٨}\left(س - ١\right)^{٨} + ج$

---

⑲ $\int \frac{\left(س + ١\right)^{٥}}{س^{٥} \times س^{٢}} \, دس$

$\int \left(\frac{س + ١}{س}\right)^{٥} \times \frac{١}{س^{٢}} \, دس$

$\int \left(١ + \frac{١}{س}\right)^{٥} \times \frac{١}{س^{٢}} \, دس$

$ص = ١ + \frac{١}{س} \quad دص = \frac{-١}{س^{٢}} \, دس$

$\int ص^{٥} \times \frac{١}{\cancel{س^{٢}}} \times -\cancel{س^{٢}} \, دص$

$- \int ص^{٥} \, دص$

$= -\frac{ص^{٦}}{٦} + ج$

$= -\frac{\left(١ + \frac{١}{س}\right)^{٦}}{٦} + ج$

⑳ $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$

$\int (\text{ق}(\text{س}))^{\text{ن}}\, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ق}(\text{س}) \qquad \text{دص} = \text{ق}'(\text{س}) = \text{ص}$

$\int \text{ص}^{\text{ن}} \times \frac{\text{دص}}{\text{ق}'(\text{س})}$

$= \int \text{ص}^{\text{ن}} \times \frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \int \text{ص}^{\text{ن}-1}\, \text{دص}$

$= \frac{\text{ص}^{\text{ن}}}{\text{ن}} + \text{جـ} = \frac{(\text{ق}(\text{س}))^{\text{ن}}}{\text{ن}} + \text{جـ}$

㉑ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}^{\text{ن}}\text{س}\, \text{دس} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}^{\text{ن}}\text{س}\, \text{دس}$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}^{\text{ن}}(\frac{\pi}{2} - \text{س})\, \text{دس}$

$\text{ص} = \frac{\pi}{2} - \text{س} \qquad \text{دص} = -\text{دس}$

$\text{س} = 0 \text{، } \text{ص} = \frac{\pi}{2} \text{ ، } \text{س} = \frac{\pi}{2} \text{ ، } \text{ص} = 0$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \text{جتا}^{\text{ن}}\text{ص} \times -\text{دص}$

$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \text{جتا}^{\text{ن}}\text{ص}\, \text{دص}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جتا}^{\text{ن}}\text{ص}\, \text{دص}$

㉒ $\int \text{جا}^{\text{ن}}\text{س}\ \text{قا}^{\text{ن}+2}\text{س}\, \text{دس}$

$= \int \text{جا}^{\text{ن}}\text{س} \times \text{قا}^{\text{ن}}\text{س}\ \text{قا}^{2}\text{س}\, \text{دس}$

$= \int \text{جا}^{\text{ن}}\text{س} \times \frac{1}{\text{جتا}^{\text{ن}}\text{س}}\ \text{قا}^{2}\text{س}\, \text{دس}$

$= \int \text{ظا}^{\text{ن}}\text{س}\ \text{قا}^{2}\text{س}\, \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظاس} \qquad \text{دص} = \text{قا}^{2}\text{س}\, \text{دس}$

$\int \text{ص}^{\text{ن}} \times \cancel{\text{قا}^{2}\text{س}} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^{2}\text{س}}}$

$= \frac{\text{ص}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{جـ} = \frac{\text{ظا}^{\text{ن}+1}\text{س}}{\text{ن}+1} + \text{جـ}$

㉓ $\text{ص} = 2\text{م} - \text{س} \qquad \text{دص} = -\text{دس}$

$\text{س} = 0 \longrightarrow \text{ص} = 2\text{م}$

$\text{س} = \text{م} \longrightarrow \text{ص} = \text{م}$

$\int_{2\text{م}}^{\text{م}} \text{ق}(\text{ص}) \times -\text{دص}$

$= -\int_{2\text{م}}^{\text{م}} \text{ق}(\text{ص})\, \text{دص}$

$= \int_{\text{م}}^{2\text{م}} \text{ق}(\text{ص})\, \text{دص}$

㉔

$$\int_{1}^{3} \text{س}\,\text{هـ}(\text{س}^2+1)\,\text{دس} + \int_{1}^{3} 4\text{س}\,\text{دس}$$

$\text{ص} = \text{س}^2+1$ $\quad \text{دص} = 2\text{س}\,\text{دس}$

$\text{س}=1 \quad \text{ص}=2 \;/\; \text{س}=3 \quad \text{ص}=10$

$$\int_{2}^{10} \cancel{\text{س}}\,\text{هـ}(\text{ص}) \times \frac{\text{دص}}{2\cancel{\text{س}}} + \int_{1}^{3} 4\text{س}\,\text{دس}$$

$$\frac{1}{2}\int_{2}^{10} \text{هـ}(\text{ص})\,\text{دص} + \Big[2\text{س}^2\Big]_{1}^{3}$$

$$\frac{1}{2}\times -6 \;+\; 18-2$$

$$-3 + 16 = 13$$

㉕

$$\int \frac{\left(\text{س}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)\right)^5}{\text{س}^7}\,\text{دس}$$

$$= \int \frac{\text{س}^5\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^5}{\text{س}^7}$$

$$= \int \frac{\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^5}{\text{س}^2}$$

$\text{ص} = 1+\frac{1}{\text{س}}$ $\quad \text{دص} = \frac{-1}{\text{س}^2}\,\text{دس}$

$$= \int \frac{\text{ص}^5}{\cancel{\text{س}^2}} \times -\cancel{\text{س}^2}\,\text{دص}$$

$$= -\int \text{ص}^5\,\text{دص} = -\frac{\text{ص}^6}{6} + \text{جـ}$$

$$= -\frac{\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^6}{6} + \text{جـ}$$

㉖

$$\int \sqrt[3]{\text{س}^5-\text{س}^3}\;\text{دس}$$

$$= \int \sqrt[3]{\text{س}^3(\text{س}^2-1)}\;\text{دس}$$

$$\int \text{س}\,\sqrt[3]{\text{س}^2-1}\;\text{دس}$$

$\text{ص} = \text{س}^2-1$ $\quad \text{دص} = 2\text{س}\,\text{دس}$

$$= \int \cancel{\text{س}}\;\text{ص}^{\frac{1}{3}} \times \frac{\text{دص}}{2\cancel{\text{س}}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \text{ص}^{\frac{1}{3}}\,\text{دص} = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\,\text{ص}^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{3}{8}\left(\text{س}^2-1\right)^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$$

㉗

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{حاس}\,\text{جتاس}}{\sqrt{1+\text{حا}^2\text{س}}}\,\text{دس}$$

$\text{ص} = \sqrt{1+\text{حا}^2\text{س}}$ $\quad \text{ص}^2 = 1+\text{حا}^2\text{س}$

$\cancel{2}\text{ص}\,\text{دص} = \cancel{2}\text{حاس}\,\text{جتاس}\,\text{دس}$

$\text{س} = 0 \quad \text{ص} = 1$

$\text{س} = \frac{\pi}{2} \quad \text{ص} = \sqrt{2}$

$$\int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{\cancel{\text{حاس}\,\text{جتاس}}}{\cancel{\text{ص}}} \times \frac{\cancel{\text{ص}}\,\text{دص}}{\cancel{\text{حاس}\,\text{جتاس}}}$$

$$\int_{1}^{\sqrt{2}} \text{دص} = \sqrt{2}-1$$

㉘ $\int \frac{١}{س(لو_{هـ}س)^{٢}}\,ءس$

$ص = لو_{هـ}س \qquad ءص = \frac{١}{س}\,ءس$

$\int \frac{١}{\cancel{س} \times ص} \times \cancel{س}\,ءص$

$= لو|ص| + جـ$

$= لو(لو_{هـ}س) + جـ$

㉙ $\int (٣ - س)\,هـ^{٦س - س^{٢}}\,ءس$

$ص = ٦س - س^{٢}$

$ءص = (٦ - ٢س)\,ءس = ٢(٣ - س)\,ءس$

$\int (\cancel{٣ - س})\,هـ^{ص} \times \frac{ءص}{٢\cancel{(٣ - س)}}$

$\frac{١}{٢}\int هـ^{ص}\,ءص$

$= \frac{١}{٢}هـ^{ص} + جـ = \frac{١}{٢}هـ^{٦س - س^{٢}} + جـ$

㉚ $\int \frac{\sqrt{س^{٢} + س^{٤}}}{س^{٥}}$

$= \int \frac{\sqrt{س^{٢}(١ + س^{٢})}}{س^{٥}}$

$= \int \frac{|س|\sqrt{١ + س^{٢}}}{س^{٥}}$

$س > ٠$

$\int \frac{\cancel{س}\,(١ + س^{٢})^{\frac{١}{٢}}}{\cancel{س}^{٥}}$

$\int \frac{(١ + س^{٢})^{\frac{١}{٢}}}{س^{٢} \times س^{٣}} = \int \left(\frac{١ + س^{٢}}{س^{٢}}\right)^{\frac{١}{٢}} \times \frac{١}{س^{٣}}$

$= \int \left(\frac{١}{س^{٢}} + ١\right)^{\frac{١}{٢}} \times \frac{١}{س^{٣}}\,ءس$

$ص = \frac{١}{س^{٢}} + ١ \qquad ءص = \frac{-٢}{س^{٣}}$

$= \int ص^{\frac{١}{٢}} \times \frac{١}{\cancel{س^{٣}}} \times \frac{\cancel{س^{٣}}}{-٢}\,ءص$

$-\frac{١}{٢}\int ص^{\frac{١}{٢}}\,ءص$

$= -\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣}ص^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

$-\frac{١}{٣}\left(\frac{١}{س^{٢}} + ١\right)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

$س < ٠$ نفس الطريقة

㉛ $\int \frac{س^{٢} + ٣}{(س^{٢} - ٣)^{٢}}\,ءس$

$= \int \frac{س^{٢} + ٣}{س^{٢}(س - \frac{٣}{س})^{٢}}\,ءس$

$ص = س - \frac{٣}{س} \qquad ءص = ١ + \frac{٣}{س^{٢}}\,ءس$

$ءص = \left(\frac{س^{٢} + ٣}{س^{٢}}\right)ءس$

$\int \frac{\cancel{س^{٢} + ٣}}{\cancel{س^{٢}}\,ص^{٢}} \times \frac{\cancel{س^{٢}}}{\cancel{س^{٢} + ٣}}\,ءص$

$\int ص^{-٢}\,ءص = \frac{ص^{-١}}{-١} = \frac{-١}{س - \frac{٣}{س}} + جـ$

التكامل بالأجزاء

يستخدم التكامل بالاجزاء في الحالات التي لا يوجد علاقة بالاشتقاق بين الأقترانين .

ويمكن حل السؤال على طريقة الاجزاء اذا كان احد الأقترانين كثير حدود والأقتران الآخر يمكن ايجاد تكامله .

قاعدة الاجزاء

$$\int \text{ق} \cdot \text{دهـ} = \text{ق} \cdot \text{هـ} - \int \text{هـ} \cdot \text{دق}$$

البرهان

$$(\text{ق} \cdot \text{هـ})' = \text{ق} \cdot \text{هـ}' + \text{هـ} \cdot \text{ق}'$$

نكامل الطرفين بالنسبة لـ س

$$\int (\text{ق} \cdot \text{هـ})' \, \text{دس} = \int \text{ق} \cdot \text{هـ}' \, \text{دس} + \int \text{هـ} \cdot \text{ق}' \, \text{دس}$$

لكن $\frac{\text{دهـ}}{\text{دس}} = \text{هـ}' \Leftarrow \text{هـ}' \, \text{دس} = \text{دهـ}$

$\frac{\text{دق}}{\text{دس}} = \text{ق}' \Leftarrow \text{ق}' \, \text{دس} = \text{دق}$

$$\Leftarrow \; = \int \text{ق} \cdot \text{دهـ} + \int \text{هـ} \cdot \text{دق}$$

$$\Leftarrow \; \text{ق} \cdot \text{هـ} = \int \text{ق} \cdot \text{دهـ} + \int \text{هـ} \, \text{دق}$$

$$\leftarrow \; \int \text{ق} \cdot \text{دهـ} = \text{ق} \cdot \text{هـ} - \int \text{هـ} \cdot \text{دق}$$

وإذا كان التكامل محدود فان

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق} \cdot \text{دهـ} = \text{ق} \cdot \text{هـ} \Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ} \cdot \text{دق}$$

ملاحظة هامة

① يجب كتابة الاقترانين على صورة حاصل ضرب

② الذي نسميه ق هو الذي تنتهي مشتقته ولو بعد حين
إما اذا كانت مشتقة الاقترانين فنتهيه فالذي تنتهي مشتقته أولا يكون ق .

النوع الأول

أجزاء فقط

مثال ①

أوجد $\int \text{س حاس} \, \text{ءس}$

الحل

$\text{ق} = \text{س} \qquad \text{ءهـ} = \text{حاس}$

$\text{ءق} = \text{ءس} \qquad \text{هـ} = \int \text{حاس ءس}$

ضرب ×

$-\int \qquad = -\text{جتاس}$

$= -\text{س جتاس} - \int -\text{جتاس ءس}$

$= -\text{س جتاس} + \int \text{جتاس ءس}$

$= -\text{س جتاس} + \text{حاس} + \text{ج}$

مثال ②

$\int (\text{٢س} - ١) \, \text{جتا٣س} \, \text{ءس}$

$\text{ق} = \text{٢س} - ١ \qquad \text{ءهـ} = \text{جتا٣س}$

$\text{ءق} = \text{٢ءس} \qquad \text{هـ} = \int \text{جتا٣س}$

$-\int \qquad = \frac{\text{حا٣س}}{٣}$

$= (\text{٢س} - ١) \times \frac{\text{حا٣س}}{٣} - \int \frac{\text{حا٣س}}{٣} \times \text{٢ءس}$

$= (\text{٢س} - ١) \frac{\text{حا٣س}}{٣} - \frac{٢}{٣} \int \text{حا٣س ءس}$

$= (\text{٢س} - ١) \frac{\text{حا٣س}}{٣} + \frac{٢}{٣} \frac{\text{جتا٣س}}{٣} + \text{ج}$

مثال ③

$\int \frac{\text{٣س}}{\sqrt[٣]{\text{٢س} + ١}} \, \text{ءس}$

يجب كتابة الاقترانين على صورة حاصل ضرب

$= \int \text{٣س} \, (\text{٢س} + ١)^{-\frac{١}{٣}} \, \text{ءس}$

$\text{ق} = \text{٣س} \qquad \text{ءهـ} = (\text{٢س} + ١)^{-\frac{١}{٣}}$

$\text{ءق} = \text{٣ءس} \qquad \text{هـ} = \frac{(\text{٢س} + ١)^{\frac{٢}{٣}}}{٢ \times \frac{٢}{٣}}$

$= \text{٣س} \times \frac{٣}{٤} (\text{٢س} + ١)^{\frac{٢}{٣}} - \int \frac{٣}{٤} (\text{٢س} + ١)^{\frac{٢}{٣}} \times \text{٣ءس}$

$= \frac{٩}{٤} \text{س} (\text{٢س} + ١)^{\frac{٢}{٣}} - \frac{٩}{٤} \frac{(\text{٢س} + ١)^{\frac{٥}{٣}}}{٢ \times \frac{٥}{٣}} + \text{ج}$

مثال ④

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{٥س جتا٢س} \, \text{ءس}$

الحل

$\text{ق} = \text{٥س} \qquad \text{ءهـ} = \text{جتا٢س}$

$\text{ءق} = \text{٥ءس} \qquad \text{هـ} = \frac{\text{حا٢س}}{٢}$

$= \left[\text{٥س} \times \frac{\text{حا٢س}}{٢} \right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} - \int \frac{٥}{٢} \text{حا٢س ءس}$

= ٥/٢ س حا٢س]٠^(π/٢) − ٥/٢ × −١/٢ جتا٢س]٠^(π/٢)

= −٥/٢

مثال ⑤

∫ (س حاس / قاس) ءس

الحل

∫ س حاس جتاس ءس

لكن حا٢س = ٢حاس جتاس

= ∫ س ١/٢ حا٢س ءس

ق = ١/٢ س   ءهـ = حا٢س

ءق = ١/٢ ءس   هـ = −جتا٢س/٢

= −١/٤ س جتا٢س − ∫ ١/٤ × −جتا٢س

= −١/٤ س جتا٢س + ١/٤ حا٢س/٢ + جـ

مثال ⑥

∫ ٣س² حاس ءس   اجزاء مرتين

الحل

ق = ٣س²   ءهـ = حاس

ءق = ٦س . ءس   هـ = −جتاس

= −٣س² جتاس + ∫ ٦س جتاس

اجزاء

⇐ ∫ ٦س جتاس ءس

ق = ٦س   ءهـ = جتاس

ءق = ٦ . ءس   هـ = حاس

= ٦س حاس − ∫ ٦ حاس ءس

= ٦س حاس + ٦ جتاس + جـ

الجواب

= −٣س² جتاس + ٦س حاس + ٦جتاس + جـ

مثال ⑦

∫ (س−٢)² جتا(س+١) ءس   اجزاء مرتين

الحل

ق = (س−٢)²   ءهـ = جتا(س+١)

ءق = ٢(س−٢)   هـ = حا(س+١)

= (س−٢)² حا(س+١) − ∫ ٢(س−٢) حا(س+١)

⇐ ∫ ٢(س−٢) حا(س+١) ءس   اجزاء

ق = ٢(س−٢)   ءهـ = حا(س+١)

ءق = ٢   هـ = −جتا(س+١)

= −٢(س−٢) جتا(س+١) − ∫ −٢ جتا(س+١)

−٢(س−٢) جتا(س+١) + ∫ ٢ جتا(س+١) ءس

−٢(س−٢) جتا(س+١) + ٢ حا(س+١) + جـ

الجواب

= (س−٢)² حا(س+١) + ٢(س−٢) جتا(س+١)
− ٢حا(س+١) + جـ

مثال ⑧

$\int$ س^{٢} $\sqrt{١-س}$ دس اجزاء مرتين

الحل

ق = س^{٢} دهـ = $\sqrt{١-س}$ دس

دق = ٢س دس $\to$ هـ = $\frac{(١-س)^{\frac{٣}{٢}}}{-\frac{٣}{٢}}$

= $-\frac{٢}{٣}$ س^{٢} $(١-س)^{\frac{٣}{٢}}$ $-\int -\frac{٤}{٣}$ س $(١-س)^{\frac{٣}{٢}}$ دس

هـ $\int -\frac{٤}{٣}$ س $(١-س)^{\frac{٣}{٢}}$ دس اجزاء مره أخرى

ق = $-\frac{٤}{٣}$ س دهـ = $(١-س)^{\frac{٣}{٢}}$

دق = $-\frac{٤}{٣}$ $\to$ هـ = $-\frac{٢}{٥}$ $(١-س)^{\frac{٥}{٢}}$

= $\frac{٨}{١٥}$ س $(١-س)^{\frac{٥}{٢}}$ $-\int \frac{٨}{١٥}$ $(١-س)^{\frac{٥}{٢}}$

= $\frac{٨}{١٥}$ س $(١-س)^{\frac{٥}{٢}}$ $-$ $\frac{٨}{١٥} \times \frac{-٢}{٧}$ $(١-س)^{\frac{٧}{٢}}$

الجواب =

$-\frac{٢}{٣}$ س^{٢} $(١-س)^{\frac{٣}{٢}}$ $-$ $\frac{٨}{١٥}$ س $(١-س)^{\frac{٥}{٢}}$

$-$ $\frac{١٦}{١٠٥}$ $(١-س)^{\frac{٧}{٢}}$

مثال ⑨

اوجد $\int$(س^{٩} قا^{٢}س + ٩ س^{٨} ظاس) دس

الحل

= $\int$ س^{٩} قا^{٢}س اجزاء

ق = س^{٩} دهـ = قا^{٢}س . دس

دق = ٩ س^{٨} $\to$ هـ = ظاس

= س^{٩} ظاس $-\int$ ٩ س^{٨} ظاس

بالتعويض

الجواب

س^{٩} ظاس $-$ ~~$\int$ ٩ س^{٨} ظاس~~ + ~~$\int$ ٩ س^{٨} ظاس~~

= س^{٩} ظاس

يمكن ان نختار الجزء الثاني
ويكون نفس الجواب

مثال ⑪

$\int$ لو(س^{٢} − ١) دس

اجزاء

ق = لو س^{٢} − ١ دهـ = دس

دق = $\frac{٢س}{س^{٢}-١}$ $\to$ هـ = س

= س لو س^{٢} − ١ $-\int$ $\frac{س \times ٢س}{س^{٢}-١}$

= س لو(س^{٢} − ١) $-\int$ $\frac{٢س^{٢}}{س^{٢}-١}$ كسور جزئية

الدرس القادم

مثال ⑪

جد $\int س^{ن} \times لو_{هـ} س^{٣} \; ءس$

الحل

$ق = لو_{هـ} س^{٣}$ $\quad ءهـ = س^{ن}$

$ءق = \frac{٣س^{٢}}{س^{٣}} \to هـ = \frac{س^{ن+١}}{ن+١}$

$= \frac{٣}{س} ءس$

$= \frac{س^{ن+١}}{ن+١} لو_{هـ} س^{٣} - \int \frac{٣}{س} \times \frac{س^{ن+١}}{ن+١}$

$= \frac{س^{ن+١}}{ن+١} لو_{هـ} س^{٣} - \int \frac{٣}{ن+١} س^{ن}$

$= \frac{س^{ن+١}}{ن+١} لو_{هـ} س^{٣} - \frac{٣}{ن+١} \times \frac{س^{ن+١}}{ن+١}$

مثال ⑫

$\int \frac{لو_{هـ} س}{\sqrt[٥]{س^{٢}}} ءس$

الحل $\int س^{\frac{-٢}{٥}} لو_{هـ} س \; ءس$

$ق = لو_{هـ} س$ $\quad ءهـ = س^{\frac{-٢}{٥}} ءس$

$ءق = \frac{١}{س} ءس \to هـ = \frac{٥}{٣} س^{\frac{٣}{٥}}$

$= \frac{٥}{٣} س^{\frac{٣}{٥}} لو_{هـ} س - \int \frac{٥}{٣} س^{\frac{٣}{٥}} \times \frac{١}{س} ءس$

$= \frac{٥}{٣} س^{\frac{٣}{٥}} لو_{هـ} س - \frac{٥}{٣} \int س^{\frac{-٢}{٥}} ءس$

$= \frac{٥}{٣} س^{\frac{٣}{٥}} لو_{هـ} س - \frac{٥}{٣} \times \frac{٥}{٣} س^{\frac{٣}{٥}} + ج$

مثال ⑬

اوجد $\int لو_{هـ} س \; ءس$

الحل

$ق = لو_{هـ} س$ $\quad ءهـ = ءس$

$ءق = \frac{١}{س} ءس \to هـ = س$

$= س \, لو_{هـ} س - \int \frac{١}{س} \times س \, ءس$

$= س \, لو_{هـ} س - لو \, ءس$

$= س \, لو_{هـ} س - س + ج$

مثال ⑭

اوجد $\int_{١}^{هـ} (لو_{هـ} س)^{٢} ءس$ اجزاء مرتين

الحل

$ق = (لو_{هـ} س)^{٢}$ $\quad ءهـ = ءس$

$ءق = ٢(لو_{هـ} س) \times \frac{١}{س}$ $\quad هـ = س$

$= س(لو_{هـ} س)^{٢} \Big]_{١}^{هـ} - \int_{١}^{هـ} ٢ لو س \times \frac{١}{\cancel{س}} \cancel{س}$

$= ٤هـ^{٢} - \int_{١}^{هـ} ٢ لو_{هـ} س \, . \, ءس \leftarrow$

$\int_{١}^{هـ^{٢}} ٢ لو_{هـ} س \; دس$ اجزاء

$ص = لو س \qquad دهـ = ٢ دس$

$دص = \frac{١}{س} \quad ، \quad هـ = ٢س$

$= ٢س لو_{هـ} س \Big]_{١}^{هـ^{٢}} - \int_{١}^{هـ^{٢}} ٢ \; دس$

$= \Big[٢هـ^{٢} \times لو_{هـ} هـ^{٢} - ٠ - (٢س\Big]_{١}^{هـ^{٢}})\Big]$

$= ٤هـ^{٢} - (٢هـ^{٢} - ٢)$

$= ٤هـ^{٢} - ٢هـ^{٢} + ٢ = ٢هـ^{٢} + ٢$

الجواب

$٤هـ^{٢} - ٢هـ^{٢} - ٢$

$= ٢هـ^{٢} - ٢$

مثال ⑮

جد $\int س (لو_{هـ} س)^{٢} \; دس$

اجزاء مرتين

$ص = (لو_{هـ} س)^{٢} \qquad دهـ = س \, . \, دس$

أكمل الحل — — —

مثال ⑯

$\int س^{٢} هـ^{٣س} \; دس$ اجزاء مرتين

الحل

$ص = س^{٢} \qquad دهـ = هـ^{٣س} \; دس$

$دص = ٢س \; دس \xrightarrow{} هـ = \frac{١}{٣} هـ^{٣س}$

$= \frac{١}{٣} س^{٢} هـ^{٣س} - \int \frac{٢}{٣} س \; هـ^{٣س} \; دس$

اجزاء

$ص = \frac{٢}{٣} س \qquad دهـ = هـ^{٣س}$

$دص = \frac{٢}{٣} دس \xrightarrow{} هـ = \frac{١}{٣} هـ^{٣س}$

$= \frac{٢}{٩} س هـ^{٣س} - \int \frac{٢}{٩} هـ^{٣س} \; دس$

$= \frac{٢}{٩} س هـ^{٣س} - \frac{٢}{٩} \frac{هـ^{٣س}}{٣}$

الجواب

$\frac{١}{٣} س^{٢} هـ^{٣س} - \frac{٢}{٩} س هـ^{٣س} + \frac{٢}{٢٧} هـ^{٣س} + جـ$

مثال ⑰

$\int \frac{س + هـ^{٣س} + ٣}{هـ^{س}}$

الحل

$\int \frac{س}{هـ^{س}} + \int \frac{هـ^{٣س}}{هـ^{س}} + \int \frac{٣}{هـ^{س}}$

$= \int س هـ^{-س} \; دس + \int هـ^{٢س} \; دس + \int ٣ هـ^{-س}$

اجزاء

$ص = س \qquad دهـ = هـ^{-س}$

$دص = ١ دس \qquad هـ = \frac{هـ^{-س}}{-١}$

$\frac{-س}{هـ^{س}} - \int - هـ^{-س} \; دس$

$= \frac{-س}{هـ^{س}} + \frac{هـ^{-س}}{-١} + \frac{هـ^{٢س}}{٢} + ٣ \frac{هـ^{-س}}{-١}$

مثال ⑱

$\int س\, هـ^{س} \times (١+س)^{-٢}\, دس$

اجزاء

$و = س\, هـ^{س}$ $دهـ = (١+س)^{-٢}$

$دو = س\, هـ^{س} + هـ^{س}$ $هـ = \frac{(١+س)^{-١}}{-١}$

$= هـ^{س}(س+١)$

$= -س\, هـ^{س}(١+س)^{-١} - \int هـ^{س}\cancel{(١+س)} \times \frac{-١}{\cancel{١+س}}$

$= \frac{-س\, هـ^{س}}{١+س} + \int هـ^{س}\, دس$

$= \frac{-س\, هـ^{س}}{١+س} + هـ^{س} + ج$

مثال ⑲

اذا كان $\int_{-١}^{٣} س\, وَ(س)\, دس = ١٥$

فأوجد قيمة $\int_{-١}^{٣} و(س)\, دس$ علماً

بأن $و(٣) = ٥$ ، $و(-١) = ٢$

الحل

$\int_{-١}^{٢} س\, وَ(س)\, دس = ١٥$

$و = س$ $دهـ = وَ(س)$

$دو = دس$ $هـ = و(س)$

$= س\, و(س)\Big]_{-١}^{٣} - \int_{-١}^{٣} و(س)\, دس$

$١٥ = ٣و(٣) - (-١)و(-١) - \int_{-١}^{٣} و(س)\, دس$

$\cancel{١٥} = \cancel{١٥} + ٢ - \int_{-١}^{٣} و(س)\, دس$

$\Leftarrow \int_{-١}^{٣} و(س)\, دس = ٢$

مثال ⑳

$\int \sqrt[٣]{س^{٤} + ٢س^{٣}}\, دس$

الحل

$\int \sqrt[٣]{س^{٣}(س+٢)} = \int \sqrt[٣]{س^{٣}}\ \sqrt[٣]{س+٢}$

$\int س \sqrt[٣]{س+٢}\, دس$

اجزاء

$و = س$ $دهـ = (س+٢)^{\frac{١}{٣}}$

$دو = دس$ $هـ = \frac{٣}{٤}(س+٢)^{\frac{٤}{٣}}$

$= \frac{٣}{٤}س(س+٢)^{\frac{٤}{٣}} - \int \frac{٣}{٤}(س+٢)^{\frac{٤}{٣}}\, دس$

$= \frac{٣}{٤}س(س+٢)^{\frac{٤}{٣}} - \frac{٣}{٤} \times \frac{٣}{٧}(س+٢)^{\frac{٧}{٣}}$

عليه حلها بالتعويض

$ص = س+٢$ $دص = دس$

$س = ص-٢$

$\int س \cdot ص^{\frac{١}{٣}} \times دص$

$= \int (ص-٢)\, ص^{\frac{١}{٣}}\, دص$

$= \int ص^{\frac{٤}{٣}} - ٢ص^{\frac{١}{٣}} + ج$

$= \frac{٣}{٧}ص^{\frac{٧}{٣}} - ٢\times\frac{٣}{٤}ص^{\frac{٤}{٣}} + ج$

$= \frac{٣}{٧}(س+٢)^{\frac{٧}{٣}} - \frac{٦}{٤}(س+٢)^{\frac{٤}{٣}} + ج$

مثال ②①

اذا كان $\int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \text{س جاس دس} = \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{أس}^{\text{٢}} + \text{٢س})\,\text{دس}$ اوجد أ

الحل

ق = س ، دهـ = جاس

دق = دس ، هـ = -جتاس

$= -\text{س جتاس}\Big]_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} + \int \text{جتاس دس}$

$= -\frac{\pi}{\text{٢}}\,\text{جتا}\frac{\pi}{\text{٢}} - (\text{٠}) + \text{جاس}\Big]_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}}$

$= \text{٠} + \text{جا}\frac{\pi}{\text{٢}} - \text{٠} = \text{جا}\frac{\pi}{\text{٢}} = \text{١}$

$\text{١} = \frac{\text{أس}^{\text{٣}}}{\text{٣}} + \text{س}^{\text{٢}}\Big]_{\text{٠}}^{\text{٢}}$

$\text{١} = \frac{\text{٨أ}}{\text{٣}} + \text{٤} \Leftarrow \frac{\text{٨أ}}{\text{٣}} = -\text{٣}$

$\Leftarrow \text{٨أ} = -\text{٩} \Leftarrow \text{أ} = \frac{-\text{٩}}{\text{٨}}$

مثال ②②

اذا كان م(س) هو معكوس لمشتقة الأقتران ق(س) جد $\int_{\text{٢}}^{\text{٣}} \text{س ق}'(\text{س})\,\text{دس}$
علماً بان ق(٢) = ٥
ق(٣) = م(٢) = ١ ، م(٣) = ٧

الحل

$\int_{\text{٢}}^{\text{٣}} \text{س ق}'(\text{س})\,\text{دس}$

ق = س ، دهـ = ق'(س)

دق = دس ، هـ = ق(س)

$= \text{س ق(س)}\Big]_{\text{٢}}^{\text{٣}} - \int_{\text{٢}}^{\text{٣}} \text{ق(س) دس}$

$= \text{٣ق(٣)} - \text{٢ق(٢)} - \big(\text{م(٣)} - \text{م(٢)}\big)$

$= \text{٣} - \text{٢}\times\text{٥} - (\text{٧} - \text{١})$

$= \text{٣} - \text{١٠} - \text{٦} = -\text{١٣}$

مثال ②③

اذا كان ص = ق(س) حيث س ≠ ٠
وكان س ص' + ص = جتاس
جد قاعدة ق(س) ؟

الحل

ص' = ق'(س)

س ق'(س) + ق(س) = جتاس

باخذ تكامل الطرفين

$\int \text{س ق}'(\text{س}) + \int \text{ق(س)} = \int \text{جتاس دس}$

ق = س ، دهـ = ق'(س)

دق = دس ، هـ = ق(س)

$\text{س ق(س)} - \cancel{\int \text{ق(س) دس}} \cancel{+} \int \text{ق(س) دس} = \text{جاس} + \text{ج}$

$\frac{\text{س ق(س)}}{\text{س}} = \frac{\text{جاس} + \text{ج}}{\text{س}}$

$\text{ق(س)} = \frac{\text{جاس} + \text{ج}}{\text{س}}$

مثال (٢٤) مهم

اذا كان ق(١) × هـ(١) = ٥

وكان ق(٣) هـ(٣) = ١٨

وكان $\int_{1}^{3} \text{ق} . \text{دهـ} = 8$ اوجد قيمة

$\int_{1}^{3} \text{هـ} . \text{دق}$.

الحل:

حسب قانون الاجزاء

$$\int_{1}^{3} \text{ق} . \text{دهـ} = \text{ق} \bullet \text{هـ} \Big]_{1}^{3} - \int_{1}^{3} \text{هـ} . \text{دق}$$

$$8 = \text{ق}(3) \times \text{هـ}(3) - \text{ق}(1) \times \text{هـ}(1) - \int_{1}^{3} \text{هـ} . \text{دق}$$

$$8 = (18 - 5) - \int_{1}^{3} \text{هـ} . \text{دق}$$

$$8 - 13 = -\int_{1}^{3} \text{هـ} . \text{دق} = -5$$

$$\int_{1}^{3} \text{هـ} . \text{دق} = 5$$

مثال (٢٥)

اذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق على ح وكان ق(٢) = ٣ وكان

$$\int_{0}^{2} \text{س}^{\text{ن}} \text{ق}'(\text{س}) \, \text{دس} + \text{ن} \int_{0}^{2} \text{س}^{\text{ن}-1} \text{ق}(\text{س}) \, \text{دس} = 96$$

اوجد قيمة ن ؟

الحل

$\text{ق} = \text{س}^{\text{ن}}$ $\text{دهـ} = \text{ق}'(\text{س})$

$\text{دق} = \text{ن} \, \text{س}^{\text{ن}-1}$ $\text{هـ} = \text{ق}(\text{س})$

$$\text{س}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}) \Big]_{0}^{2} - \cancel{\int_{0}^{2} \text{ن} \, \text{س}^{\text{ن}-1} \text{ق}(\text{س})}$$

$$+ \cancel{\int_{0}^{2} \text{ن} \, \text{س}^{\text{ن}-1} \text{ق}(\text{س})} = 96$$

$$\text{س}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}) \Big]_{0}^{2} = 96$$

$$2^{\text{ن}} \text{ق}(2) - (0)^{\text{ن}} \text{ق}(0) = 96$$

$$2^{\text{ن}} \times 3 - 0 = 96$$

$$2^{\text{ن}} \times 3 = 96 \Rightarrow 2^{\text{ن}} = \frac{96}{3}$$

$$2^{\text{ن}} = 32 = 2^{5} \Rightarrow \text{ن} = 5$$

النوع الثاني

تعويض واجزاء

مثال ①

$\int \text{س}^3 \text{جتا س}^2 \text{ دس}$ ← غير خطي (تعويض)

الحل

$\text{ص} = \text{س}^2 \Leftarrow \text{دص} = \text{٢س دس}$

$\int \cancel{\text{س}^3} \text{جتا ص} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{٢س}}}$

$\int \text{س}^2 \text{جتا ص} \times \frac{\text{دص}}{2} = \frac{1}{2}\int \text{ص جتا ص دص}$

اجزاء

$\text{ع} = \text{ص}$ $\text{ده} = \text{جتا ص}$

$\text{دع} = \text{دص}$ $\text{ه} = \text{جا ص}$

$= \frac{1}{2}(\text{ص جا ص} - \int \text{جا ص دص})$

$= \frac{1}{2}(\text{ص جا ص} + \text{جتا ص}) + \text{جـ}$

$= \frac{1}{2}(\text{س}^2 \text{جا س}^2 + \text{جتا س}^2) + \text{جـ}$

مثال ②

$\int \text{جا} \sqrt{\text{س}} \text{ دس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ $\text{دص} = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} \text{ دس}$

$\int \text{جا} \sqrt{\text{س}} \text{ دس} = \int \text{جا ص} \times \text{٢ص دص}$

اجزاء

$\text{ع} = \text{٢ص}$ $\text{ده} = \text{جا ص}$

$\text{د} = \text{٢دص}$ $\text{ه} = \text{-جتا ص}$

$= \text{-٢ص جتا ص} + \int \text{٢جتا ص دص}$

$= -2\sqrt{\text{س}} \text{ جتا} \sqrt{\text{س}} + \text{٢جا ص} + \text{جـ}$

$= -2\sqrt{\text{س}} \text{ جتا} \sqrt{\text{س}} + 2\text{جا} \sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$

مثال ③

جد $\int \frac{\text{س جا س}}{\text{جتا}^3 \text{س}} \text{ دس}$ اجزاء

$\text{ع} = \text{س}$ $\text{ده} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^3 \text{س}} \text{ دس}$

$\text{دع} = \text{دس}$ $\text{ه} = \int \frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^3 \text{س}} \text{ دس}$

نجد $\int \frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^3 \text{س}}$ بالتعويض

$\text{ص} = \text{جتا س}$ $\text{دص} = \text{- جا س دس}$

$\text{ه} = \int \frac{\cancel{\text{جا س}}}{\text{ص}^3} \times \frac{\text{دص}}{-\cancel{\text{جا س}}} = \int \frac{-1}{\text{ص}^3} \text{ دص}$

$= \int -\text{ص}^{-3} \text{ دص} = \frac{\text{ص}^{-2}}{-2} +$

$\text{ه} = \frac{1}{2\text{ص}^2} = \frac{1}{2\text{جتا}^2\text{س}} = \frac{1}{2} \text{قا}^2 \text{س}$

⇐ نعود للاجزاء

$= \text{س} \times \frac{1}{2} \text{قا}^2 \text{س} - \int \frac{1}{2} \text{قا}^2 \text{س دس}$

$= \frac{1}{2} \text{س قا}^2 \text{س} - \frac{1}{2} \text{ظا س} + \text{جـ}$

مثال ④

$\int \text{س ظتا}^2 \sqrt{1+\text{س}}$

$\text{ص} = \sqrt{1+\text{س}} \Leftarrow \text{ص}^2 = 1 + \text{س}$

$\text{٢ص دص} = \text{دس} \Leftarrow \text{س} = \text{ص}^2 - 1$

$\int (\text{ص}^2 - 1) \times \text{ظتا}^2 \text{ص} \times \text{٢ص دص}$

$= \int (\text{٢ص}^3 - \text{٢ص}) \text{ ظتا}^2 \text{ص}$ ⇐

$= \int (٢ص^{٣} - ٢ص)\ (قتا^{٢}ص - ١)$

$= \int (٢ص^{٣} - ٢ص)\ قتا^{٢}ص - (٢ص^{٣} - ٢ص)$

اجزاء

$ق = ٢ص^{٣} - ٢ص \qquad ءهـ = قتا^{٢}ص$

$ءق = ٦ص^{٢} - ٢$

$هـ = - ظتاص$

$(٢ص^{٣} - ٢ص) \times - ظتاص + \int (٦ص^{٢} - ٢)\ ظتاص$

$\int (٦ص^{٢} - ٢)\ ظتاص$ اجزاء

أكمل الحل — — —

مثال ⑤

$\int جا٢س\ هـ^{جتاس}\ ءس$

الحل

$ص = جتاس \qquad ءص = - جاس\ ءس$

$\int ٢جاس\ جتاس \times هـ^{ص} \times \frac{ءص}{-\cancel{جاس}}$

$-٢ \int ص\ هـ^{ص}\ ءص$ اجزاء

$ق = ص \qquad ءهـ = هـ^{ص}$

$ءق = ءص \qquad هـ = هـ^{ص}$

$= -٢ (ص\ هـ^{ص} - \int هـ^{ص}\ ءص)$

$-٢ص\ هـ^{ص} + ٢\ هـ^{ص} + جـ$

$-٢جتاس\ هـ^{جتاس} + ٢\ هـ^{جتاس} + جـ$

مثال ⑥

$\int هـ^{\sqrt{٢س+١}}\ ءس$

$ص = \sqrt{٢س+١} \qquad ص^{٢} = ٢س + ١$

$٢ص\ ءص = ٢\ ءس$

$\int هـ^{ص} \times ءص \times ص$

$= \int هـ^{ص} \times ص\ ءص$

$ق = ص \qquad ءهـ = هـ^{ص}$

$ءق = ءص \qquad هـ = هـ^{ص}$

كما بالمثال السابق

مثال ⑦

$\int \sqrt{س}\ هـ^{\sqrt{س}}\ ءس$

$ص = \sqrt{س} \qquad ءص = \frac{١}{٢\sqrt{س}}\ ءس$

$\int \sqrt{س}\ هـ^{ص} \times ٢\sqrt{س}\ ءص$

$\int ٢س\ هـ^{ص}\ ءص$

لكن $س = ص^{٢}$

$\int ٢ص^{٢}\ هـ^{ص}\ ءص$

$ق = ٢ص^{٢} \qquad ءهـ = هـ^{ص}$

$ءق = ٤ص \qquad هـ = هـ^{ص}$

$٢ص^{٢}\ هـ^{ص} - \int ٤ص\ هـ^{ص}$

اجزاء مرة اخرى

مثال ⑧

$\int \text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}\ \text{هـ}^{\text{س}})\ \text{دس}$

الحل

$\int \text{س}\ (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{س}})\ \text{دس}$

$\int (\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{س}^2)\ \text{دس}$

اجزاء

$\text{ق} = \text{لو س}$ $\quad$ $\text{دهـ} = \text{س}$

$\text{دق} = \frac{\text{دس}}{\text{س}}$ $\quad$ $\text{هـ} = \frac{\text{س}^2}{2}$

$\frac{\text{س}^2}{2}\ \text{لو س} - \int \frac{1}{\text{س}} \times \frac{\text{س}^2}{2}\ \text{دس}$

$\frac{\text{س}^2}{2}\ \text{لو س} - \int \frac{1}{2}\ \text{س}\ \text{دس}$

$\frac{\text{س}^2}{2}\ \text{لو س} - \frac{1}{2}\frac{\text{س}^2}{2} + \frac{\text{س}^3}{3} + \text{جـ}$

مثال ⑨

اذا كان $\int_{-2}^{6} \text{ق(س)}\ \text{دس} = 8$

حيث $\text{ق}(6) = \text{ق}(-2) = 4$

جد $\int_{-1}^{3} \text{س}\ \text{ق}'(2\text{س})\ \text{دس}$

اجزاء

$\text{ق} = \text{س}$ $\quad$ $\text{دهـ} = \text{ق}'(2\text{س})$

$\text{دق} = \text{دس}$ $\quad$ $\text{هـ} = \int \text{ق}'(2\text{س})\ \text{دس}$

$\text{ص} = 2\text{س}$ $\quad$ $\text{دص} = 2\ \text{دس}$

$= \int \text{ق}'(\text{ص})\ \frac{\text{دص}}{2}$ $\qquad =$

$= \frac{1}{2}\ \text{ق(ص)} = \frac{1}{2}\text{ق}(2\text{س})$

$= \text{س} \times \frac{1}{2}\text{ق}(2\text{س}) \Big]_{-1}^{3} - \int_{-1}^{3} \frac{1}{2}\text{ق}(2\text{س})\ \text{دس}$

$\Leftarrow \int_{-1}^{3} \frac{1}{2}\ \text{ق}(2\text{س})\ \text{دس}$

$\text{ص} = 2\text{س}$ $\qquad$ $\frac{\text{دص}}{2} = \text{دس}$

$\text{س} = -1 \leftarrow \text{ص} = -2$

$\text{س} = 3 \leftarrow \text{ص} = 6$

$\frac{3}{2}\ \text{ق}(6) - (\frac{-1}{2} \times \text{ق}(-2))$

$- \frac{1}{4} \int_{-2}^{6} \text{ق(ص)}\ \text{دص}$

$(\frac{3}{2} \times 4 + \frac{1}{2} \times 4) - \frac{1}{4} \times 8$

$(6 + 2) - 2 = 6$

مثال ⑩

اذا كان $\int_{-1}^{5} \text{ق(س)}\ \text{دس} = 4$

$\text{ق}(5) = 3$ ، $\text{ق}(-1) = 4$ فاحسب

$\int_{2}^{-1} \text{س}\ \text{ق}'(3 - 2\text{س})\ \text{دس}$

$\text{ق} = \text{س}$ $\quad$ $\text{دهـ} = \text{ق}'(3 - 2\text{س})$

$\text{دق} = \text{دس}$ $\quad$ $\text{هـ} = \int \text{ق}'(3 - 2\text{س})$

$= \int \frac{\text{ق}'(\text{ص})}{-2}$

$= -\frac{1}{2}\ \text{ق(ص)}$

$= -\frac{1}{2}\ \text{ق}(3 - 2\text{س})$

$-\frac{\text{س}}{2}\ \text{ق}(3 - 2\text{س}) \Big]_{2}^{-1} + \frac{1}{2} \int_{2}^{-1} \underset{=\text{ص}}{\text{ق}(3 - 2\text{س})}\ \text{دس}$

$\frac{1}{2}\ \text{ق}(5) - (-1 \times \text{ق}(-1)) + \frac{1}{4} \int_{-1}^{5} \text{ق(ص)}\ \text{دص}$

$\text{س} = 2 \leftarrow \text{ص} = -1$

$\text{س} = -1 \quad \text{ص} =$

$\frac{1}{2} \times 3 + 4 + \frac{1}{\cancel{4}} \times \cancel{4}$

$\frac{3}{2} + 4 + 1 = \frac{3}{2} + 5$

امثلة على تكاملات دوريه

نقصد بالتكاملات الدوريه وهي التكاملات التي تتكرر ولا تنتهي وهي

$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{دس}$

$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}\,\text{دس}$

$\int \text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\,\text{دس}$

$\int \text{جتا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\,\text{دس}$

مثال ①

$\int \text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{ق} = \text{هـ}^{\text{س}} \qquad \text{دهـ} = \text{جاس}\,\text{دس}$

$\text{دق} = \text{هـ}^{\text{س}} \qquad \text{هـ} = -\,\text{جتاس}$

$\int \text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = -\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} + \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}$

اجزاء

$\text{ق} = \text{هـ}^{\text{س}} \qquad \text{دهـ} = \text{جتاس}$

$\text{دق} = \text{هـ}^{\text{س}} \qquad \text{هـ} = \text{جاس}$

$\int \text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = -\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}\,\text{دس}$

$$\frac{٢\int \text{جاس}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}}{\cancel{٢}} = \frac{-\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}}{٢}$$

مثال ②

$\int \text{جتا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\,\text{دس}$

الحل

$\text{ق} = \text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \qquad \text{دهـ} = \text{دس}$

$\text{دق} = \frac{-\,\text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}} \qquad \text{هـ} = \text{س}$

$= \text{س}\,\text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \int \frac{\text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\cancel{\text{س}}} \times \cancel{\text{س}}\,\text{دس}$

اجزاء

$\text{ق} = \text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \qquad \text{دهـ} = \text{دس}$

$\text{دق} = \frac{\text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}} \qquad \text{هـ} = \text{س}$

$\int \text{جتا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) = \text{س}\,\text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{س}\,\text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{\text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\cancel{\text{س}}} \times \cancel{\text{س}}$

$$\frac{٢\int \text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\cancel{٢}} = \frac{\text{س}\,\text{جتا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{س}\,\text{جا}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{٢}$$

التكامل بطريقة الجدول

نستخدم هذه الطريقة لإيجاد تكامل حاصل ضرب اقترانين أحدهما كثير حدود والاقتران الآخر على احد الصور الآتية

① جا أ س ② جتا أ س ③ $هـ^{أ س}$

④ $(أ س + ب)^{ن}$ ن ≠ -١
أ ≠ ٠

مثال ①

جد $\int س^{٢}$ جا س ء س

نكون جدول كما يلي

	ق (اجراء التفاضل)		ءهـ (اجراء التكامل)	
اشتقاق	$س^{٢}$	⊕	جاس	تكامل
	٢س	⊖	-جتاس	
	٢	⊕	-جاس	
	صفر	⊖	جتاس	

① اجراء الاشتقاق حتى نحصل على الصفر

② اجراء التكامل في الطرف المقابل

③ في الوسط نضع اشارة + ، - ، + ، - وهكذا
دائماً نبدأ ⊕

④ نرسم اسهم من العمود الأول الى العمود الثاني كما في الشكل

⑤ الناتج

$\int س^{٢}$ جاس ءس =

$س^{٢}$ × -جتاس - ٢س × -جاس
+ ٢ × جتاس + جـ
= - $س^{٢}$ جتاس + ٢س جاس
+ ٢ جتاس + جـ

مثال ②

اوجد $\int س^{٢} هـ^{٢س}$ ءس
باستخدام الجدول

	ق	ءهـ
⊕	$س^{٢}$	$هـ^{٢س}$
⊖	٢س	½ $هـ^{٢س}$
⊕	٢	¼ $هـ^{٢س}$
⊖	صفر	⅛ $هـ^{٢س}$

= ½ $س^{٢} هـ^{٢س}$ + ٢س × ¼ $هـ^{٢س}$
+ ٢ × ⅛ $هـ^{٢س}$ + جـ

ورقة عمل

① اذا كان $\int_{٢}^{٥} س\, قَ(س)\, ءس = ٢٠$

جد $\int_{٢}^{٥} ق(س)\, ءس$ علماً بان ق(٥) = ٨ ، ق(٢) = ٣

② اذا كان ق(س) يمر بالنقطتين (٢، ٣) (١٠، ١) ، $\int_{٢}^{١٠} ق(س) ءس = ٦$ إحسب
$\int_{١}^{٥} س٨\, قَ(٢س)\, ءس$

③ اذا كان ق(٥) = ٤ ، ق(٢) = ٢ ، قَ(٥) = ٣
قَ(٢) = ٤ جد $\int_{٢}^{٥} س\, قً(س)\, ءس$

④ اذا كان ق(٥) = ٧ ، قَ(٥) = ١١ ، ق(٤) = ٦
قَ(٤) = ٩ جد $\int_{١}^{٢} س\, قً(س+٣)\, ءس$

⑤ جد $\int ٣س^{٥}\, جتا(س^{٣}+١)\, ءس$

⑥ جد $\int جتا^{٣}س\, جا(جاس)\, ءس$

⑦ جد $\int قتا^{٢}\sqrt{س}\, ءس$

⑧ اذا كان $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} س\, جاس\, ءس = \int_{٠}^{٢} (مس^{٢}+٢س)\, ءس$
اوجد قيمة م

⑨ جد $\int \frac{لو_{ه}س}{\sqrt{س}}\, ءس$

⑩ جد $\int \frac{٣س+٥}{ه^{س}}\, ءس$

⑪ اذا كان ميل المماس لمنحنى ق عند اي نقطة (س ، ص) يعطى بالعلاقة $\frac{س\, ه^{س}}{(س+١)^{٢}}$ فاوجد معادلة المنحنى اذا كان المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢ه)

⑫ جد $\int (س^{٥}+١)^{٨}\, س^{١٤}\, ءس$

⑬ اذا كان $\int_{\pi}^{٣} ٢ق(س)\, ءس = ٦$
$\int_{٠}^{٣} ق(س)\, ءس = -٢$ فاوجد
$\int_{٠}^{\pi} (ق(س) - س\, جتاس)\, ءس$

⑭ اذا علمت ان $\int \sqrt[٣]{س+س^{٣}}\, ءس = م(س)$
فاوجد $\int \frac{س^{\frac{١}{٣}}}{(١+س^{٢})^{\frac{٢}{٣}}}\, ءس$

⑮ اذا كان ق(س) = $ه^{٢س}$ ، ك(س) = س
جد $\int س\, قَ(ك(س))\, ءس$

⑯ جد $\int \frac{س\, جتاس}{جا^{٣}س}\, ءس$

⑰ جد $\int ه^{س}\left(لو_{ه}س + \frac{١}{س}\right) ءس$

⑱ اذا كان $\int_{١}^{ه} لو_{ه}س = ١$

جد $\int_{١}^{ه} (لو_{ه}س)^{٢}\, ءس$

⑲ اوجد $\int (س^{٢}+٢س+١)^{٥}\, لو(س+١)^{ن}\, ءس$

اجابات ورقة عمل التكامل بالاجزاء

① $\int_{٢}^{٥}$ س قَ(س) دس = ٢٠

ع = س   دهـ = قَ(س)

دع = دس → هـ = ق(س)

= س ق(س) $\Big]_{٢}^{٥}$ − $\int_{٢}^{٥}$ ق(س) دس

= ٥ ق(٥) − ٢ق(٢) − $\int_{٢}^{٥}$ ق(س) دس

٢٠ = ٥ × ٨ − ٢ × ٣ − $\int_{٢}^{٥}$ ق(س) دس

$\int_{٢}^{٥}$ ق(س) دس = ٣٤ − ٢٠ = ١٤

② $\int_{١}^{٥}$ ٨س قَ(٢س) دس

ص = ٢س   دص = ٢ دس

س = ١ ص = ٢ / س = ٥ ، ص = ١٠

$\int_{٢}^{١٠}$ ٨س قَ(ص) × $\frac{دص}{٢}$

= ٤ $\int_{٢}^{١٠}$ س قَ(ص) دص $\boxed{س = \frac{ص}{٢}}$

= ٤ $\int_{٢}^{١٠}$ $\frac{ص}{٢}$ قَ(ص) دص

= ٢ $\int_{٢}^{١٠}$ ص قَ(ص) دص

ع = ص   دهـ = قَ(ص)

دع = دص   هـ = ق(ص)

= ٢ (ص ق(ص) $\Big]_{٢}^{١٠}$ − $\int_{٢}^{١٠}$ ق(ص) دص

= ٢(١٠ق(١٠) − ٢ق(٢)) − ٦

= ٢(١٠ × ١ − ٢ × ٣) − ٦

= ٢ × ٤ − ٦ = ٨ − ٦ = ٢

---

③ $\int_{٢}^{٥}$ س قً(س) دس

ع = س   دهـ = قً(س)

دع = دس   هـ = قَ(س)

= س قَ(س) $\Big]_{٢}^{٥}$ − $\int_{٢}^{٥}$ قَ(س) دس

= (٥قَ(٥) − ٢قَ(٢)) − (ق(٥) − ق(٢))

= (١٥ − ٨) − (٤ − ٢)

= ٧ − ٢ = ٥

---

④ $\int_{١}^{٢}$ س قً(س + ٣) دس

ص = س + ٣   س = ١   ص = ٤

دص = دس   س = ٢   ص = ٥

$\int_{٤}^{٥}$ (ص − ٣) قً(ص) × دص

ع = ص − ٣   دهـ = قً(ص)

دع = دص   هـ = قَ(ص)

= (ص − ٣) قَ(ص) $\Big]_{٤}^{٥}$ − $\int_{٤}^{٥}$ قَ(ص) دص

= ٢ قَ(٥) − قَ(٤) − (ق(٥) − ق(٤))

= (٢٢ − ٩) − (٧ − ٦) = ١٣ − ١ = ١٢

⑤ $\int ٣\text{س}^{٥}\,\text{جتا}(\text{س}^{٣}+١)\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٣}+١$ $\quad$ $\text{دص} = ٣\text{س}^{٢}\text{دس}$

$\text{س}^{٣} = \text{ص}-١$

$\int ٣\text{س}^{٥}\,\text{جتاص}\,\frac{\text{دص}}{٣\text{س}^{٢}} = \int \text{س}^{٣}\,\text{جتاص دص}$

$= \int (\text{ص}-١)\,\text{جتاص دص}$

$\text{ع} = \text{ص}-١$ $\quad$ $\text{دهـ} = \text{جتاص}$

$\text{دع} = \text{دص} \longrightarrow \text{هـ} = \text{جاص}$

$= (\text{ص}-١)\text{جاص} - \int \text{جاص دص}$

$= (\text{ص}-١)\,\text{جاص} + \text{جتاص} + \text{جـ}$

$= (\text{س}^{٣}+١-١)\,\text{جا}(\text{س}^{٣}+١) + \text{جتا}(\text{س}^{٣}+١) + \text{جـ}$

⑥ $\int \text{جتا}^{٣}\text{س}\,\text{جا}(\text{جاس})\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$ $\quad$ $\text{دص} = \text{جتاس دس}$

$\int \text{جتا}^{٣}\text{س}\,\text{جاص} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{جتاس}}}$

$= \int \text{جتا}^{٢}\text{س}\,\text{جاص دص} = \int (١-\text{جا}^{٢}\text{س})\,\text{جاص دص}$

$= \int (١-\text{ص}^{٢})\,\text{جاص دص}$

$\text{ع} = ١-\text{ص}^{٢}$ $\quad$ $\text{دهـ} = \text{جاص}$

$\text{دع} = -٢\text{ص دص} \longrightarrow \text{هـ} = -\text{جتاص}$

أكمل الحل اجزاء مرتين .

⑦ $\int \text{قتا}^{٢}\sqrt{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ $\quad$ $\text{ص}^{٢} = \text{س} \Leftarrow ٢\text{ص دص} = \text{دس}$

$\int \text{قتا}^{٢}\text{ص} \times ٢\text{ص دص}$

$\text{ع} = ٢\text{ص}$ $\quad$ $\text{دهـ} = \text{قتا}^{٢}\text{ص}$

$\text{دع} = ٢\text{دص}$ $\quad$ $\text{هـ} = -\text{ظتاص}$

$= -٢\text{ص ظتاص} + ٢\int \text{ظتاص دص}$

$= -٢\text{ص ظتاص} + ٢\,\text{لو}|\text{جاص}| + \text{جـ}$

$= -٢\sqrt{\text{س}}\,\text{ظتا}\sqrt{\text{س}} + ٢\,\text{لو}|\text{جا}\sqrt{\text{س}}| + \text{جـ}$

⑧ اذا كانت $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{س جاس دس}$

$= \int_{٠}^{٢} (\text{أ س}^{٢}+٢\text{س})\,\text{دس}$ جد أ

$\text{ع} = \text{س}$ $\quad$ $\text{دهـ} = \text{جاس}$

$\text{دع} = \text{دس} \longrightarrow \text{هـ} = -\text{جتاس}$

$-\text{س جتاس}\Big]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جتاس دس}$

$= -\frac{\pi}{٢}\,\text{جتا}\frac{\pi}{٢} - (\text{صفر}) + \text{جاس}\Big]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} = ١$

$\frac{\text{أ س}^{٣}}{٣} + \text{س}^{٢}\Big]_{٠}^{٢} = ١ \Leftarrow \frac{٨\text{أ}}{٣} + ٤ = ١$

$\frac{٨\text{أ}}{٣} = -٣ \Leftarrow \text{أ} = \frac{-٩}{٨}$

⑨ $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس} = \int \text{س}^{-\frac{١}{٢}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س دس}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\quad$ $\text{دهـ} = \text{س}^{-\frac{١}{٢}}$

$\text{دع} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس} \longrightarrow \text{هـ} = ٢\,\text{س}^{\frac{١}{٢}}$

$= ٢\sqrt{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{١}{\text{س}} \times ٢\text{س}^{\frac{١}{٢}}\text{دس}$

$= ٢\sqrt{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - ٢\int \text{س}^{-\frac{١}{٢}}\text{دس}$

$= ٢\sqrt{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - ٤\,\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$

⑩ $\int \frac{٣\text{س}+٥}{\text{هـ}^{٢\text{س}}}\,\text{دس} = \int (٣\text{س}+٥)\,\text{هـ}^{-٢\text{س}}$

$\text{ع} = ٣\text{س}+٥$ $\quad$ $\text{دهـ} = \text{هـ}^{-٢\text{س}}$

$\text{دع} = ٣\text{دس}$ $\quad$ $\text{هـ} = -\frac{١}{٢}\text{هـ}^{-٢\text{س}}$

$= -\frac{١}{٢}(٣\text{س}+٥)\,\text{هـ}^{-٢\text{س}} + \frac{٣}{٢}\int \text{هـ}^{-٢\text{س}}\text{دس}$

$= -\frac{١}{٢}(٣\text{س}+٥)\,\text{هـ}^{-٢\text{س}} + \frac{٣}{-٤}\,\text{هـ}^{-٢\text{س}} + \text{جـ}$

⑪ $\int ق'(س) = \int \frac{س هـ^{س}}{(س+١)^{٢}} دس$

$ق(س) = \int س هـ^{س} (س+١)^{-٢} دس$

$ع = س هـ^{س}$ $دهـ = (س+١)^{-٢}$

$دع = س هـ^{س} + هـ^{س}$ $هـ = \frac{(س+١)^{-١}}{-١}$

$= هـ^{س}(س+١)$

$= \frac{-س هـ^{س}}{س+١} - \int هـ^{س}(س+١) \times \frac{-١}{س+١}$

$= \frac{-س هـ^{س}}{س+١} + هـ^{س} + جـ$

$ق(١) = -\frac{هـ}{٢} + هـ + جـ = ٢هـ$

$جـ = هـ + \frac{هـ}{٢} = \frac{٣هـ}{٢}$

---

⑫ $\int (س^{٥}+١)^{٨} س^{١٤} دس$

$ص = س^{٥}+١$ $دص = ٥س^{٤} دس$

$\int ص^{٨} \times س^{١٤} \times \frac{دص}{٥س^{٤}} = \frac{١}{٥} \int ص^{٨} \times س^{١٠} دص$

لكن $س^{٥} = ص-١$ بالتربيع $س^{١٠} = (ص-١)^{٢}$

$\frac{١}{٥} \int (ص-١)^{٢} ص^{٨} دص$

$= \frac{١}{٥} \int (ص^{٢} - ٢ص + ١) ص^{٨} دص$

$= \frac{١}{٥} \int (ص^{١٠} - ٢ص^{٩} + ص^{٨}) دص$

$= \frac{١}{٥} \left(\frac{ص^{١١}}{١١} - ٢\frac{ص^{١٠}}{١٠} + \frac{ص^{٩}}{٩} \right) + جـ$

$= \frac{١}{٥} \left(\frac{(س^{٥}+١)^{١١}}{١١} - ٢\frac{(س^{٥}+١)^{١٠}}{١٠} + \frac{(س^{٥}+١)^{٩}}{٩} + جـ$

---

⑬ $\int_{٠}^{\pi} ق(س) دس = \int_{٠}^{٣} ق(س) دس + \int_{٣}^{\pi} ق(س) دس$

$= -٢ - ٣ = -٥$

$\int_{٠}^{\pi} ق(س) دس - \int_{٠}^{\pi} س جتاس دس$

$-٥ - \int_{٠}^{\pi} س جتاس دس$ / اجزاء

$ع = س$ $دهـ = جتاس$

$دع = دس \longrightarrow هـ = جاس$

$[س جاس]_{٠}^{\pi} - \int_{٠}^{\pi} جاس دس$

$صفر + [جتاس]_{٠}^{\pi}$

$= جتا\pi - جتا٠ = -١ - ١ = -٢$

الجواب $= -٥ - -٢ = -٣$

---

⑭ $\int \sqrt[٣]{س+س^{٣}} دس = \int \sqrt[٣]{س} (س^{٢}+١)^{\frac{١}{٣}}$

$ع = (س^{٢}+١)^{\frac{١}{٣}}$ $\int دهـ = \int س^{\frac{١}{٣}}$

$دع = \frac{١}{٣}(س^{٢}+١)^{-\frac{٢}{٣}} \times ٢س \longrightarrow هـ = \frac{٣}{٤} س^{\frac{٤}{٣}}$

$\int \sqrt[٣]{س+س^{٣}} دس =$

$\frac{٣}{٤} س^{\frac{٤}{٣}} (س^{٢}+١)^{\frac{١}{٣}} - \frac{٢}{٤} \int س^{\frac{٤}{٣}} (س^{٢}+١)^{-\frac{٢}{٣}} \times س$

$م(س) = \frac{٣}{٤} س^{\frac{٤}{٣}} (س^{٢}+١)^{\frac{١}{٣}} - \frac{٢}{٤} \int \frac{س^{\frac{٧}{٣}}}{(س^{٢}+١)^{\frac{٢}{٣}}}$

$\frac{١}{٢} \int \frac{س^{\frac{٧}{٣}}}{(س^{٢}+١)^{\frac{٢}{٣}}} = \frac{٣}{٤} س^{\frac{٤}{٣}} (س^{٢}+١)^{\frac{١}{٣}} - م(س)$

---

⑮ $ق'(س) = ٢هـ^{٢س}$ ، $ك(س) = س$

$ك(س^{٢}) = س^{٢}$ ، $ق'(س^{٢}) = ٢هـ^{٢س^{٢}}$

$\int س ق'(ك(س^{٢})) دس = \int س ق'(س^{٢}) دس$

$= \int س \times ٢هـ^{٢س^{٢}} دس = \int ٢س هـ^{٢س^{٢}} دس$

$ص = ٢س^{٢}$ $دص = ٤س$

$\int \cancel{٢س} هـ^{ص} \times \frac{دص}{\cancel{٤س}} = \frac{١}{٢} \int هـ^{ص} دص$

$= \frac{١}{٢} هـ^{ص} + جـ = \frac{١}{٢} هـ^{٢س^{٢}} + جـ$

⑯ $\int \text{س} \dfrac{\text{حتاس}}{\text{حا}^3\text{س}} \, \text{دس}$

$\text{ع} = \text{س}$ ، $\text{دع} = \text{دس}$ ، $\text{دهـ} = \int \dfrac{\text{حتاس}}{\text{حا}^3\text{س}}$

$\text{ص} = \text{حاس}$ ، $\text{دص} = \text{حتاس}$

$\text{هـ} = \int \dfrac{\cancel{\text{حتاس}}}{\text{ص}^3} \times \dfrac{\text{دص}}{\cancel{\text{حتاس}}}$

$= \int \text{ص}^{-3} \, \text{دص}$

$= \dfrac{\text{ص}^{-2}}{-2} = \dfrac{-1}{2\text{ص}^2}$

$= \dfrac{-1}{2\,\text{حا}^2\text{س}}$

$= \dfrac{-\text{س}}{2\,\text{حا}^2\text{س}} - \int \dfrac{-1}{2\,\text{حا}^2\text{س}} \, \text{دس}$

$= \dfrac{-\text{س}}{2\,\text{حا}^2\text{س}} + \dfrac{1}{2} \int \text{قتا}^2\text{س} \, \text{دس}$

$= \dfrac{-\text{س}}{2\,\text{حا}^2\text{س}} - \dfrac{1}{2} \, \text{ظتاس} + \text{جـ}$

⑰ $\int \text{هـ}^{\text{س}} \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \dfrac{1}{\text{س}}\right) \text{دس}$

$= \int \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \int \dfrac{1}{\text{س}} \, \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{دس}$

$\int \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{لوس} \, \text{دس}$

$\text{ع} = \text{لوس}$ ، $\text{دهـ} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{دع} = \dfrac{1}{\text{س}}$ ، $\text{هـ} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$= \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \dfrac{1}{\text{س}} \, \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{دس}$

$\int \text{هـ}^{\text{س}} \left(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \dfrac{1}{\text{س}}\right) \text{دس} = \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \cancel{\int \dfrac{1}{\text{س}} \, \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{دس}} + \cancel{\int \dfrac{1}{\text{س}} \, \text{هـ}^{\text{س}}} \, \text{دس}$

⑱ $\int_{1}^{\text{هـ}} (\text{لوس})^2 \, \text{دس}$

$\text{ع} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2$ ، $\text{دهـ} = \text{دس}$

$\text{دع} = 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \dfrac{1}{\text{س}}$ ، $\text{هـ} = \text{س}$

$= \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - \int 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \dfrac{1}{\cancel{\text{س}}} \times \cancel{\text{س}}$

$= \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - 2\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \, \text{دس}$

اجزاء $\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{دهـ} = \text{دس}$

$\text{دع} = \dfrac{1}{\text{س}}$ ، $\text{هـ} = \text{س}$

$= \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - 2\left(\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \dfrac{1}{\cancel{\text{س}}} \times \cancel{\text{س}} \, \text{دس}\right)$

$= \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^2 - 2\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - 2\text{س} + \text{جـ}$

⑲ $\int (\text{س}^2 + 2\text{س} + 1) \, \text{لو}(\text{س}+1)^{\text{ن}} \, \text{دس}$

$= \int (\text{س}+1)^2 \, \text{لو}(\text{س}+1)^{\text{ن}} \, \text{دس}$

$\text{ع} = \text{لو}(\text{س}+1)^{\text{ن}}$ ، $\text{دهـ} = (\text{س}+1)^2$

$\text{دع} = \dfrac{\text{ن}(\text{س}+1)^{\text{ن}-1}}{(\text{س}+1)^{\text{ن}}}$ ، $\text{هـ} = \dfrac{(\text{س}+1)^3}{3}$

$= \dfrac{\text{ن}}{\text{س}+1}$

$\dfrac{1}{3}(\text{س}+1)^3 \, \text{لو}(\text{س}+1)^{\text{ن}} - \int \dfrac{\text{ن}}{(\text{س}+1)} \times \dfrac{(\text{س}+1)^3}{3}$

$\dfrac{1}{3}(\text{س}+1)^3 \, \text{لو}(\text{س}+1)^{\text{ن}} - \int \dfrac{\text{ن}}{3}(\text{س}+1)^2$

$\dfrac{1}{3}(\text{س}+1)^3 \, \text{لو}(\text{س}+1)^{\text{ن}} - \dfrac{\text{ن}}{3} \, \dfrac{(\text{س}+1)^3}{3} + \text{جـ}$

التكامل بالكسور الجزئية

اولاً :- تجزئة الكسر

∫ ق(س) / هـ(س) دس .

الشروط

① هـ(س) كثير حدود من الدرجة الثانية ويحلل الى عوامله الأولية

② درجة ق(س) < درجة هـ(س)

مثال ①

∫ ٤ / (س^٢ - ٤) دس

الحل

٤ / (س^٢ - ٤) نجزئ الكسر وذلك بتحليل المقام الى عوامله .

= ٤ / ((س - ٢)(س + ٢))

= أ / (س - ٢) + ب / (س + ٢) توحيد مقام

= (أ(س + ٢) + ب(س - ٢)) / ((س - ٢)(س + ٢))

٤ = أ(س + ٢) + ب(س - ٢)

عندما س = ٢ (صفر البسط) س - ٢ = ٠
س = ٢

٤ = أ(٢ + ٢) + ب × ٠

٤ = ٤أ ⇐ أ = ١

س + ٢ = ٠ ⇐ س = -٢

عندما س = -٢

٤ = أ(-٢ + ٢) + ب(-٢ - ٢)

٤ = -٤ب ⇐ ب = -١ نعوض بدل أ، ب

٤ / (س^٢ - ٤) = ١ / (س - ٢) + -١ / (س + ٢) وندخل التكامل

∫ ٤ / (س^٢ - ٤) = ∫ ١ / (س - ٢) - ∫ ١ / (س + ٢)

= لو|س - ٢| - لو|س + ٢| + جـ

دائماً التكامل الناتج من تجزئة الكسر باللوغريتم

ملاحظة هامة

اذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام.

① التكامل باللوغاريتم اذا كانت مشتقة المقام تختصر مع البسط

② التكامل بالكسور الجزئية اذا كانت مشتقة المقام لا تختصر مع البسط.

مثال

① $\frac{س}{س^2-٩}$ ⇐ مشتقة المقام = البسط
لوغاريتم

② $\int \frac{س+١}{س^2-٩}$ البسط ≠ مشتقة المقام
المقام يحلل لكسور جزئية

مثال ②

$\int \frac{٣س+١}{س^2-٤س+٣} \, دس$

البسط ليس مشتقة المقام
⇐ كسور جزئية

$\frac{٣س+١}{س^2-٤س+٣} = \frac{٣س+١}{(س-٣)(س-١)}$

$= \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{س-١}$

$= \frac{أ(س-١) + ب(س-٣)}{(س-٣)(س-١)}$

س = ٣ ⇐

$٣×٣+١ = أ(٣-١) + ٠$

$١٠ = ٢أ \Leftarrow أ = ٥$

س = ١ ⇐

$٣×١+١ = ٠ + ب(١-٣)$

$٤ = -٢ب \Leftarrow ب = -٢$

$= \int \frac{٥}{س-٣} + \int \frac{-٢}{س-١}$

$= ٥ لو|س-٣| - ٢ لو|س-١| + ج$

مثال ③

$\int \frac{١}{س^2-٥} \, دس$

$\frac{١}{س^2-٥} = \frac{أ}{س-\sqrt{٥}} + \frac{ب}{س+\sqrt{٥}}$

$= \frac{أ(س+\sqrt{٥}) + ب(س-\sqrt{٥})}{(س-\sqrt{٥})(س+\sqrt{٥})}$

$س = \sqrt{٥} \Leftarrow$

$١ = ٢\sqrt{٥}أ + ٠ \Leftarrow أ = \frac{١}{٢\sqrt{٥}}$

$س = -\sqrt{٥}$

$١ = ٠ - ٢\sqrt{٥}ب \Leftarrow ب = \frac{-١}{٢\sqrt{٥}}$

$\int \frac{١}{س^2-٥} = \int \frac{\frac{١}{٢\sqrt{٥}}}{س-\sqrt{٥}} - \int \frac{\frac{١}{٢\sqrt{٥}}}{س+\sqrt{٥}}$

$= \frac{١}{٢\sqrt{٥}} لو|س-\sqrt{٥}| - \frac{١}{٢\sqrt{٥}} لو|س+\sqrt{٥}|$

مثال ④

$$جد \int \frac{٧س}{٢س^{٢}-٥س-٣}\,دس$$

$$\frac{٧س}{٢س^{٢}-٥س-٣} = \frac{٧س}{(٢س+١)(س-٣)}$$

$$= \frac{أ}{٢س+١} + \frac{ب}{س-٣}$$

$$= \frac{أ(س-٣) + ب(٢س+١)}{(٢س+١)(س-٣)}$$

$س = ٣ \Leftarrow$

$٧ \times ٣ = ٠ + ب(٢\times٣+١)$

$٢١ = ٧ب \Leftarrow ب = ٣$

$س = -\frac{١}{٢} \Leftarrow$

$٧ \times -\frac{١}{٢} = أ(-\frac{١}{٢}-٣) + ب \times ٠$

$-\frac{٧}{٢} = -\frac{٧}{٢}أ \Leftarrow أ = ١$

$$= \int \frac{١}{٢س+١} + \int \frac{٣}{س-٣}$$

$$= \frac{١}{٢}لو|٢س+١| + ٣\,لو|س-٣|$$

مثال ⑤

$$\int \frac{١}{س^{٢}-٤س+٤}\,دس$$

الحل

$$\int \frac{١}{(س-٢)(س-٢)}\,دس$$

$$\int \frac{١}{(س-٢)^{٢}}\,دس = \int (س-٢)^{-٢}$$

$$= \frac{(س-٢)^{-١}}{-١} + جـ$$

ملاحظه هامة

اذا كان المقام تربيعي يحلل الى عوامل متشابهه لذلك لا نستخدم الكسور الجزئية كما في المثال السابق

مثال ⑥

$$\int \frac{٥س+٢}{س^{٢}+٢س+١}$$

المقام يحلل $(س+١)(س+١)$

ليس كسور جزئية

$$= \int \frac{(٥س+٢)}{(س+١)(س+١)} = \int \frac{٥س+٢}{(س+١)^{٢}}$$

$= \int (٥س+٢)(س+١)^{-٢}$ نستخدم الاجزاء او الجدول

$ق = ٥س+٢ \qquad دهـ = (س+١)^{-٢}$

$دق = ٥ \qquad هـ = \frac{-١}{س+١}$

$$= (٥س+٢) \times \frac{-١}{س+١} + \int \frac{٥}{س+١}$$

$$= \frac{-(٥س+٢)}{س+١} + ٥\,لو|س+١| + جـ$$

مثال ⑦

$$\int \frac{\text{٨س}^{\text{٣}}}{\text{س}^{\text{٤}}-\text{٩}}\ \text{ءس}$$

ملاحظه هامه

هنا المقام غير تربيعي

البسط = مشتقة المقام

يحل بالتعويض

$$\text{ص} = \text{س}^{\text{٤}} - \text{٩} \leftarrow \text{ءص} = \text{٤س}^{\text{٣}}\ \text{ءس}$$

$$\int \frac{\text{٨}\cancel{\text{س}^{\text{٣}}}}{\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{٤}\cancel{\text{س}^{\text{٣}}}}$$

$$\text{٢}\int \frac{\text{١}}{\text{ص}}\ \text{ءص} = \text{٢ لو}\,|\text{ص}| + \text{جـ}$$

$$= \text{٢ لو}\,|\text{س}^{\text{٤}}-\text{٩}| + \text{جـ}$$

مثال ⑧

$$\text{اوجد} \int \frac{\text{س}}{\text{س}^{\text{٤}}-\text{١}}\ \text{ءس}$$

الحل

$$= \frac{\text{س}}{(\text{س}^{\text{٢}}-\text{١})(\text{س}^{\text{٢}}+\text{١})}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{\text{٢}} \Leftarrow \text{ءص} = \text{٢س}$$

$$\int \frac{\cancel{\text{س}}}{(\text{ص}-\text{١})(\text{ص}+\text{١})} \times \frac{\text{ءص}}{\text{٢}\cancel{\text{س}}}$$

$$\frac{\text{١}}{\text{٢}} \int \frac{\text{١}}{(\text{ص}-\text{١})(\text{ص}+\text{١})}$$

$$= \frac{\text{أ}}{\text{ص}-\text{١}} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+\text{١}}$$

$$= \frac{\text{أ}(\text{ص}+\text{١}) + \text{ب}(\text{ص}-\text{١})}{(\text{ص}-\text{١})(\text{ص}+\text{١})}$$

$$\text{١} = \text{أ}(\text{ص}+\text{١}) + \text{ب}(\text{ص}-\text{١})$$

عندما ص = ١

$$\text{١} = \text{٢أ} \leftarrow \text{أ} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$$

عندما ص = −١

$$\text{١} = -\text{٢ب} \longleftarrow \text{ب} = -\frac{\text{١}}{\text{٢}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \int \frac{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}{\text{ص}-\text{١}} + \frac{-\frac{\text{١}}{\text{٢}}}{\text{ص}+\text{١}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left(\frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{لو}\,|\text{ص}-\text{١}| - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{لو}\,|\text{ص}+\text{١}|\right)$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٤}}\,\text{لو}\,|\text{س}^{\text{٢}}-\text{١}| - \frac{\text{١}}{\text{٤}}\,\text{لو}\,|\text{س}^{\text{٢}}+\text{١}|$$

مثال ⑨

$$\int \frac{\text{٤س}+\text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}}+\text{س}+\text{٥}}\ \text{ءس}$$

ملاحظة : هنا المقام تربيعي ولا يحلل لذلك نحل بالتعويض.

الحل

$$\text{ص} = \text{س}^{\text{٢}}+\text{س}+\text{٥} \text{ ، } \text{ءص} = (\text{٢س}+\text{١})\ \text{ءس}$$

$$\leftarrow = \int \frac{\text{٤س}+\text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}}+\text{س}+\text{٥}}\ \text{ءس}$$

$$= \int \frac{\text{٢}\cancel{(\text{١}+\text{٢س})}}{\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{\cancel{\text{١}+\text{٢س}}}$$

$$= \text{٢ لو}\,|\text{ص}| + \text{جـ}$$

$$= \underset{\text{هـ}}{\text{٢ لو}}\,|\text{س}^{\text{٢}}+\text{س}+\text{٥}| + \text{جـ}$$

مثال (١٠)

$$\int \frac{٨\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} - ١٦}\,\text{دس}$$

الحل

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$　　$\text{دص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$$\int \frac{٨\,\text{ص}}{\text{ص}^{٢} - ١٦} \times \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$$

$$= \int \frac{٨\,\cancel{\text{ص}}}{\text{ص}^{٢} - ١٦} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\text{هـ}}} = \int \frac{٨}{\text{ص}^{٢} - ١٦}\,\text{دص}$$

كسور جزئية

$$\frac{٨}{\text{ص}^{٢} - ١٦} = \frac{٨}{(\text{ص} - ٤)(\text{ص} + ٤)}$$

$$= \frac{\text{أ}}{\text{ص} - ٤} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} + ٤}$$

$$= \frac{\text{أ}(\text{ص} + ٤) + \text{ب}(\text{ص} - ٤)}{(\text{ص} - ٤)(\text{ص} + ٤)}$$

$\text{ص} = ٤ \leftarrow ٨ = ٨\text{أ} \leftarrow \text{أ} = ١$

$\text{ص} = -٤ \leftarrow ٨ = -٤\text{ب} \leftarrow \text{ب} = -١$

$$= \int \frac{١}{\text{ص} - ٤} + \int \frac{-١}{\text{ص} + ٤}$$

$$= \text{لو}|\text{ص} - ٤| - \text{لو}|\text{ص} + ٤|$$

$$= \text{لو}|\text{هـ}^{\text{س}} - ٤| - \text{لو}|\text{هـ}^{\text{س}} + ٤| + \text{جـ}$$

مثال (١١)

$$\int \frac{١}{\text{س} - ٢\sqrt{\text{س}} - ٣}\,\text{دس}$$

الحل

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \leftarrow \text{ص}^{٢} = \text{س}$

$٢\text{ص}\,\text{دص} = \text{دس}$

$$= \int \frac{١}{\text{ص}^{٢} - ٢\text{ص} - ٣} \times ٢\text{ص}\,\text{دص}$$

$$= \int \frac{٢\text{ص}}{\text{ص}^{٢} - ٢\text{ص} - ٣}\,\text{دص}$$ كسور جزئية

$$\frac{٢\text{ص}}{\text{ص}^{٢} - ٢\text{ص} - ٣} = \frac{\text{أ}}{(\text{ص} - ٣)} + \frac{\text{ب}}{(\text{ص} + ١)}$$

$$= \frac{\text{أ}(\text{ص} + ١) + \text{ب}(\text{ص} - ٣)}{(\text{ص} - ٣)(\text{ص} + ١)}$$

$\text{ص} = ٣ \leftarrow ٦ = ٤\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

$\text{ص} = -١ \leftarrow -٢ = -٤\text{ب} \leftarrow \text{ب} = \frac{١}{٢}$

$$= \int \frac{\frac{٣}{٢}}{\text{ص} - ٣} + \int \frac{\frac{١}{٢}}{\text{ص} + ١}$$

$$= \frac{٣}{٢}\,\text{لو}|\text{ص} - ٣| + \frac{١}{٢}\,\text{لو}|\text{ص} + ١|$$

$$= \frac{٣}{٢}\,\text{لو}|\sqrt{\text{س}} - ٣| + \frac{١}{٢}\,\text{لو}|\sqrt{\text{س}} + ١|$$

ثانياً :-

الكسور الجزئيه باستخدام القسمة الطويلة

ملاحظات هامة

① يجب ان يكون كل من البسط و المقام كثيرات حدود .
درجة البسط ≥ درجة المقام

②
$$\frac{\text{المقسوم}}{\text{المقسوم عليه}} = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

③ يجب ترتيب كل من المقسوم والمقسوم عليه حسب قوى س المتنازليه

④ تتوقف عملية القسمه عندما تصبح درجة الباقي أقل من درجة المقسوم عليه .

مثال ①

جد $\int \frac{١٢\text{س}^{٢}}{٢\text{س}+١}\,\text{ءس}$

الحل

درجة البسط > درجة المقام

$$\begin{array}{r|l} & ٦\text{س} - ٣ \\ \hline ٢\text{س}+١ & \cancel{١٢\text{س}^{٢}} \\ & \mp\cancel{١٢\text{س}^{٢}} \mp ٦\text{س} \\ \hline & \cancel{-٦\text{س}} \\ & \pm\cancel{٦\text{س}} \pm ٣ \\ \hline & +٣ \end{array}$$

$$\int \frac{١٢\text{س}^{٢}}{٢\text{س}+١}\,\text{ءس} = \int \underbrace{(٦\text{س} - ٣)}_{\text{الناتج}}\,\text{ءس} + \int \frac{\overset{\text{الباقي}}{\boxed{٣}}}{\underbrace{\boxed{٢\text{س}+١}}_{\text{المقسوم عليه}}}$$

$$= \frac{٦\text{س}^{٢}}{٢} - ٣\text{س} + \frac{٣}{٢}\text{لو}|٢\text{س}+١| + \text{جـ}$$

مثال ②

$\int \frac{٦\text{س}}{٣\text{س}+٢}$ قسمة طويله

$$\begin{array}{r|l} & ٢ \\ \hline ٣\text{س}+٢ & \cancel{٦\text{س}} \\ & \cancel{-٦\text{س}} \mp ٤ \\ \hline & -٤ \end{array}$$

$$= \int ٢ - \int \frac{٤}{٣\text{س}+٢}$$

$$= ٢\text{س} - \frac{٤}{٣}\text{لو}|٣\text{س}+٢| + \text{جـ}$$

مثال ③

جد $\int \frac{\text{س}^{٣}+٣}{\text{س}^{٢}-١}\,\text{ءس}$

ملاحظه هامة جداً

هنا نلاحظ ان المقام يحلل ، ويحل بالكسور الجزئيه لكن يجب اولاً ان نقسم قسمه طويله

يتبع الحل ←

$$\begin{array}{r} س \\ س^٢-١ \,\overline{)\, س^٣+٣} \\ \underline{-س^٣ \pm س} \\ س+٣ \end{array}$$

$$= \int س \, ءس + \int \frac{س+٣}{س^٢-١}$$

كسور جزئية

$$= \frac{أ}{س-١} + \frac{ب}{س+١}$$

$$= \frac{أ(س+١) + ب(س-١)}{(س-١)(س+١)}$$

$$س+٣ = أ(س+١) + ب(س-١)$$

$$س = ١ \Rightarrow$$

$$١+٣ = ٢أ \Rightarrow أ = ٢$$

$$س = -١ \Rightarrow ٢ = -٢ب \Rightarrow ب = -١$$

$$= \int س \, ءس + \int \frac{٢}{س-١} + \int \frac{-١}{س+١}$$

$$= \frac{س^٢}{٢} + ٢لو|س-١| - لو|س+١|$$

مثال ④

$$\int \frac{\sqrt{س^٤+٦س^٢+٩}}{س^٢-س}$$

الحل

$$= \int \frac{\sqrt{(س^٢+٣)^٢}}{س^٢-س} = \int \frac{|س^٢+٣|}{س^٢-س} ءس$$

$$س^٢+٣ \quad \overline{+ \quad + \quad + \quad +}$$

$$= \int \frac{س^٢+٣}{س^٢-س} ءس$$

قسمة طويلة

$$\begin{array}{r} ١ \\ س^٢-س \,\overline{)\, س^٢+٣} \\ \underline{\overset{\ominus}{س^٢} \overset{\oplus}{\pm} س} \\ س+٣ \end{array}$$

$$= \int ١ ءس + \int \frac{س+٣}{س^٢-س}$$

كسور جزئية $= \frac{س+٣}{س(س-١)}$

$$= \frac{أ}{س-١} + \frac{ب}{س}$$

$$= \frac{أس + ب(س-١)}{س(س-١)}$$

$$= أس + ب(س-١)$$

$$س = ٠ \Rightarrow ٣ = -ب \qquad \boxed{ب = -٣}$$

$$س = ١ \Rightarrow أ = ٤$$

$$= \int ١ ءس + \int \frac{-٣}{س} + \int \frac{٤}{س-١}$$

$$= س + -٣لو|س| + ٤لو|س-١|$$

مثال ⑤

$$\int \frac{\sqrt{س}}{س-٤} ءس$$

$$ص = \sqrt{س} \qquad ءص = \frac{١}{٢\sqrt{س}} ءس$$

$$= \int \frac{ص}{ص^٢-٤} \times ٢\sqrt{س} \, ءص$$

يتبع ←

$$= \int \frac{ص}{ص^٢-٤} \times ٢ص\, ءص$$

$$= \int \frac{٢ص^٢}{ص^٢-٤}\, ءص$$ قسمة طويلة

$$\begin{array}{r} ٢ \\ ص^٢-٤ \,\overline{)\; ٢ص^٢} \\ \underline{-٢ص^٢ \pm ٨} \\ +٨ \end{array}$$

$$= \int ٢ءس + \int \frac{٨}{ص^٢-٤}$$ كسور جزئية

$$\frac{٨}{ص^٢-٤} = \frac{٨}{(ص-٢)(ص+٢)}$$

$$= \frac{أ}{ص-٢} + \frac{ب}{ص+٢}$$

$$= \frac{أ(ص+٢) + ب(ص-٢)}{(ص-٢)(ص+٢)}$$

$ص = ٢ \leftarrow$

$٨ = ٤أ \longleftarrow أ = ٢$

$ص = -٢$

$٨ = -٤ب \longleftarrow ب = -٢$

$$\int ٢ءس + \int \frac{٢}{ص-٢} - \int \frac{٢}{ص+٢}$$

$$= ٢س + ٢لو|ص-٢| - ٢لو|ص+٢|$$

$$= ٢س + ٢لو|\sqrt{س}-٢| - ٢لو|\sqrt{س}+٢|$$

تكاملات متميزة ومراجعة لجميع التكاملات

ملاحظة هامة

اذا ظهرت $\sqrt{س}$ ، $هـ^{س}$ كزاوية أو كجزء من كسر فورًا بالتعويض

مثال ① مهم جدًا

$$\int \frac{دس}{س\sqrt{١-س}}$$

الحل

$ص = \sqrt{١-س} \leftarrow ص^{٢} = ١-س$

$\Leftarrow س = ١-ص^{٢}$

$٢ص\,دص = -دس$

$$\int \frac{-٢\cancel{ص}\,دص}{(١-ص^{٢})\cancel{ص}} = \int \frac{-٢}{١-ص^{٢}}\,دص$$

$$= \int \frac{٢}{ص^{٢}-١}\,دص$$

$$= \frac{أ}{ص-١} + \frac{ب}{ص+١}$$

$$= \frac{أ(ص+١) + ب(ص-١)}{(ص-١)(ص+١)}$$

--- أكمل الحل.

مثال ②

جد $\int \frac{١}{١+\sqrt[٣]{س}}\,دس$

الحل

$ص = \sqrt[٣]{س} \qquad ص^{٣} = س$

$٣ص^{٢}\,دص = دس$

$$\int \frac{١}{١+ص} \times ٣ص^{٢}\,دص$$

$$= \int \frac{٣ص^{٢}}{١+ص}\,دص \quad \text{قسمة طويلة}$$

$$\begin{array}{r|l} ٣ص-٣ & \\ \hline ٣ص^{٢} & ص+١ \\ \mp ٣ص^{٢} \mp ٣ص & \\ \hline -٣ص & \\ \pm ٣ص \pm ٣ & \\ \hline +٣ & \end{array}$$

$$= \int ٣ص-٣ + \int \frac{٣}{ص+١}$$

$$= \frac{٣ص^{٢}}{٢} - ٣ص + ٣\,لو|ص+١|$$

$$= \frac{٣(\sqrt[٣]{س})^{٢}}{٢} - ٣\sqrt[٣]{س} + ٣\,لو|\sqrt[٣]{س}+١| + جـ$$

مثال ③

$$\int \frac{هـ^{س}}{1+\frac{4}{س}+\frac{4}{س^{2}}}$$

الحل

$$\int \frac{هـ^{س}}{\frac{س^{2}+4س+4}{س^{2}}} = \int \frac{س^{2}هـ^{س}}{س^{2}+4س+4}$$

$$= \int \frac{س^{2}هـ^{س}}{(س+2)^{2}}$$

$$= \int س^{2}هـ^{س}(س+2)^{-2}\,دس$$

و = $س^{2}هـ^{س}$ دهـ = $(س+2)^{-2}$

دو = $س^{2}هـ^{س} + هـ^{س} \times 2س$ هـ = $\frac{(س+2)^{-1}}{-1}$

$= \frac{-1}{س+2}$

$$\frac{-س^{2}هـ^{س}}{س+2} - \int (س^{2}هـ^{س}+هـ^{س}2س) \times \frac{-1}{س+2}$$

$$\frac{-س^{2}هـ^{س}}{س+2} - \int سهـ^{س}\cancel{(س+2)} \times \frac{-1}{\cancel{س+2}}$$

$$\frac{-س^{2}هـ^{س}}{س+2} + \int س\,هـ^{س}$$

اجزاء

و = س دهـ = $هـ^{س}$

دو = دس هـ = $هـ^{س}$

$= س\,هـ^{س} - \int هـ^{س}\,دس$

$= س\,هـ^{س} - هـ^{س}$

الجواب

$$\frac{-س^{2}هـ^{س}}{س+2} + س\,هـ^{س} - هـ^{س} + جـ$$

مثال ④

$$\int \frac{دس}{(س-1)+\sqrt{س+1}}$$

الحل

$ص = \sqrt{س+1} \Leftarrow دص = \frac{1}{2\sqrt{س+1}}\,دس$

$دس = 2ص\,دص$

تربيع

$ص^{2} = س+1$

$س = ص^{2}-1$

$$\int \frac{2ص\,دص}{(ص^{2}-1-1)+ص}$$

$$= \int \frac{2ص}{ص^{2}+ص-2}\,دص$$

$$= \frac{2ص}{(ص+2)(ص-1)}$$

$$= \frac{أ}{ص+2} + \frac{ب}{ص-1}$$

أكمل الحل ---- ؟؟

مثال ⑤

$$جد \int \frac{1}{(س+2)\sqrt{س+11}}\,دس$$

$ص = \sqrt{س+11}$ $ص^{2} = س+11$

$س = ص^{2}-11$

$2ص\,دص = دس$

$$\int \frac{2\cancel{ص}\,دص}{(ص^{2}-11+2)\times\cancel{ص}} = \int \frac{2دص}{ص^{2}-9}$$

$$= \frac{أ}{ص-3} + \frac{ب}{ص+3}$$

أكمل الحل ---- ؟؟

مثال ⑥

جد $\int \frac{\sqrt{\text{س}+1}+1}{\sqrt{\text{س}+1}-1}\,\text{د س}$

الحل

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}+1} \longrightarrow \text{ص}^2 = \text{س}+1$

$2\text{ص}\,\text{د ص} = \text{د س}$

$\int \frac{(\text{ص}+1)}{\text{ص}-1} \times 2\text{ص}\,\text{د ص}$

$= \int \frac{2\text{ص}^2+2\text{ص}}{\text{ص}-1}\,\text{د ص}$ قسمة طويلة

$$\begin{array}{r|l} & 2\text{ص}+4 \\ \text{ص}-1 & 2\text{ص}^2+2\text{ص} \\ & -2\text{ص}^2 \mp 2\text{ص} \\ \hline & 4\text{ص} \\ & -4\text{ص} \pm 4 \\ \hline & 4 \end{array}$$

$= \int 2\text{ص}+4 + \int \frac{4}{\text{ص}-1}\,\text{د ص}$

$\frac{\cancel{2}\text{ص}^2}{\cancel{2}} + 4\text{ص} + 4\,\text{لو}\,|\text{ص}-1| + \text{ج}$

$(\sqrt{\text{س}+1})^2 + 4(\sqrt{\text{س}+1}) + 4\,\text{لو}\,|\sqrt{\text{س}+1}-1| + \text{ج}$

مثال ⑦

$\int \frac{6}{1+\sqrt{\text{س}}}\,\text{د س}$

الحل

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \qquad \text{ص}^2 = \text{س}$

$2\text{ص}\,\text{د ص} = \text{د س}$

$\int \frac{6}{1+\text{ص}} \times 2\text{ص}\,\text{د ص}$

$= \int \frac{12\text{ص}}{1+\text{ص}}\,\text{د ص}$

$$\begin{array}{r|l} & 12 \\ \text{ص}+1 & 12\text{ص} \\ & -12\text{ص} \mp 12 \\ \hline & -12 \end{array}$$

$\int 12\,\text{د ص} + \int \frac{-12}{\text{ص}+1}$

$12\text{ص} - 12\,\text{لو}\,|\text{ص}+1| + \text{ج}$

$12\sqrt{\text{س}} - 12\,\text{لو}\,|\sqrt{\text{س}}+1| + \text{ج}$

مثال ⑧

$\int \text{جا}\sqrt{\text{س}}\ \text{جتا}^3\sqrt{\text{س}}\ \text{د س}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \qquad \text{ص}^2 = \text{س}$

$2\text{ص}\,\text{د ص} = \text{د س}$

$\int \underbrace{\text{جاص}\ \text{جتا}^3\text{ص}}_{\text{د هـ}} \times \underbrace{2\text{ص}}_{\text{هـ}}\,\text{د ص}$

$\text{هـ} = 2\text{ص} \qquad \text{هـ} = \int \text{جاص}\ \text{جتا}^3\text{ص}$ بتعويض

$\text{د هـ} = 2\,\text{د ص}$

$\text{ع} = \text{جتاص}$

$\text{د ع} = -\text{جاص}\,\text{د ص}$

$\text{هـ} = \int \cancel{\text{جاص}} \times \text{ع}^3 \times \frac{\text{د ع}}{-\cancel{\text{جاص}}}$

$\text{هـ} = -\int \text{ع}^3\,\text{د ع}$

$= \frac{-\text{ع}^4}{4} + \text{ج}$

$= \frac{-\text{جتا}^4\text{ص}}{4}$

$-\frac{2\text{ص}\ \text{جتا}^4\text{ص}}{4} - \int -\frac{2\ \text{جتا}^4\text{ص}}{4} + \text{ج}$

يتبع ←

$$-\frac{ص\,قتا^{٤}ص}{٢} + \frac{١}{٢}\int قتا^{٤}ص + جـ$$

$$-\frac{ص\,قتا^{٤}ص}{٢} + \frac{١}{٢}\int \left(\frac{١}{٢}(١ + قتا٢ص)\right)^{٢}$$

... أكمل اكمل

مثال ⑨

$$\int \frac{س^{٤}}{(س^{٢}-١)^{٢}}\,دس$$ ليس تعويض

اكمل

$$\int \frac{س \,.\, س^{٣}}{(س^{٢}-١)^{٢}}\,دس$$

$$\int س^{٣} \times س(س^{٢}-١)^{-٢}$$

$ع = س^{٣}$ $\quad دهـ = س(س^{٢}-١)^{-٢}$

$دع = ٣س^{٢}\,دس$ $\quad هـ = \int س(س^{٢}-١)^{-٢}$

تعويض $ص = س^{٢} - ١$

$دص = ٢س\,دس$

$$هـ = \int س\,ص^{-٢} \times \frac{دص}{٢\cancel{س}}$$

$$\frac{١}{٢}\,\frac{ص^{-١}}{-١} = \frac{-١}{٢ص}$$

$$= \frac{-١}{٢(س^{٢}-١)}$$

$$\frac{-س^{٣}}{٢(س^{٢}-١)} - \int \frac{-٣س^{٢}}{٢(س^{٢}-١)}$$

$$\frac{-س^{٣}}{٢(س^{٢}-١)} + \int \frac{٣س^{٢}}{٢س^{٢}-٢}$$

قسمة طول

$$\frac{٣}{٢}\int \frac{س^{٢}}{س^{٢}-١}$$

$$\begin{array}{r|l} & ١ \\ \hline س^{٢}-١ & س^{٢} \\ & -س^{٢} \pm ١ \\ \hline & ١ \end{array}$$

$$\frac{-س^{٣}}{٢(س^{٢}-١)} + \frac{٣}{٢}\left(\int ١ + \int \frac{١}{س^{٢}-١}\right)$$

كسور جزئية

$$= \frac{أ}{س-١} + \frac{ب}{س+١}$$

$$= \frac{أ(س+١) + ب(س-١)}{(س-١)(س+١)}$$

$س = ١ \Leftarrow ٢أ = ١ \quad أ = \frac{١}{٢}$

$س = -١ \quad -٢ب = ١ \quad ب = -\frac{١}{٢}$

$$\frac{-س^{٣}}{٢(س^{٢}-١)} + \frac{٣}{٢}\left(\int ١\,دس + \int \frac{\frac{١}{٢}}{س-١} + \int \frac{-\frac{١}{٢}}{س+١}\right)$$

$$\frac{-س^{٣}}{٢(س^{٢}-١)} + \frac{٣}{٢}\left(س + \frac{١}{٢}لو|س-١| - \frac{١}{٢}لو|س+١|\right) + جـ$$

مثال ⑩

$$\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ١}{\sqrt[٣]{\text{س}^٢} + ١}\ \text{دس}$$

الحل

$\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}} \leftarrow \text{ص}^٣ = \text{س}$

$٣\text{ص}^٢\ \text{دص} = \text{دس}$

$$\int \frac{(\text{ص} - ١)}{\text{ص}^٢ - ١} \times ٣\text{ص}^٢\ \text{دص}$$

$$= \int \frac{٣\text{ص}^٣ - ٣\text{ص}^٢}{\text{ص}^٢ - ١}\ \text{دص}$$

قسمة طويلة

أكمل الحل ---- ؟؟

مثال ⑪

$$\int \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}\ \text{دس}$$

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ $\text{دص} = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{دس}$

$\text{دس} = \frac{\text{دص}}{\text{ص}}$

$$\int \frac{١}{\text{ص} - ١} \times \frac{\text{دص}}{\text{ص}}$$

$$\int \frac{١}{\text{ص}(\text{ص} - ١)}\ \text{دص}$$

$$= \frac{\text{أ}}{\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} - ١}$$

$$= \frac{\text{أ}(\text{ص} - ١) + \text{ب}\,\text{ص}}{\text{ص}(\text{ص} - ١)}$$

$\text{أ} = -١$ $\text{ب} = ١$

$$\int \frac{-١}{\text{ص}} + \int \frac{١}{\text{ص} - ١}$$

$= -\text{لو}|\text{ص}| + \text{لو}|\text{ص} - ١| + \text{جـ}$

$= -\text{لو}|\text{هـ}^{\text{س}}| + \text{لو}|\text{هـ}^{\text{س}} - ١| + \text{جـ}$

مثال ⑫

$$\int \frac{\text{س}^٢ - ١}{(\text{س}^٢ + ١)^٢}\ \text{دس}$$

$$\int \frac{\text{س}^٢\left(١ - \frac{١}{\text{س}^٢}\right)}{\left(\text{س}\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)\right)^٢}$$

$$= \int \frac{\cancel{\text{س}^٢}\left(١ - \frac{١}{\text{س}^٢}\right)}{\cancel{\text{س}^٢}\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^٢}$$

$\text{ص} = \text{س} + \frac{١}{\text{س}}$ $\text{دص} = \left(١ - \frac{١}{\text{س}^٢}\right)\text{دس}$

$$= \int \frac{\cancel{\left(١ - \frac{١}{\text{س}^٢}\right)}}{\text{ص}^٢} \times \frac{\text{دص}}{\cancel{\left(١ - \frac{١}{\text{س}^٢}\right)}}$$

$$= \int \text{ص}^{-٢}\ \text{دص}$$

$$= \frac{\text{ص}^{-١}}{-١} + \text{جـ} = \frac{-١}{\text{ص}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-١}{\text{س} + \frac{١}{\text{س}}} + \text{جـ}$$

مثال ⑬

$$\int \frac{١}{(١-\text{جاس})^{٢}}$$

الحل

$$\int \frac{١}{(١-\text{جاس})^{٢}} \times \frac{(١+\text{جاس})^{٢}}{(١+\text{جاس})^{٢}}$$

$$= \int \frac{١+٢\text{جاس}+\text{جا}^{٢}\text{س}}{((١-\text{جاس})(١+\text{جاس}))^{٢}}$$

$$= \int \frac{١+٢\text{جاس}+\text{جا}^{٢}\text{س}}{(١-\text{جا}^{٢}\text{س})^{٢}}$$

$$= \int \frac{١+٢\text{جاس}+\text{جا}^{٢}\text{س}}{(\text{جتا}^{٢}\text{س})^{٢}}$$

$$= \int \frac{١+٢\text{جاس}+\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٤}\text{س}}$$

$$= \int \frac{١}{\text{جتا}^{٤}\text{س}} + \frac{٢\text{جاس}}{\text{جتا}^{٤}\text{س}} + \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٤}\text{س}}$$

$$= \underbrace{\int \text{قا}^{٤}\text{س}}_{\text{تعويض}} + \underbrace{٢\int \text{ظاس قا}^{٣}\text{س}}_{\text{تعويض}} + \underbrace{\int \text{ظا}^{٢}\text{س قا}^{٢}\text{س}}_{\text{تعويض}}$$

مثال ⑭ مميز جداً جداً

$$\int \text{قا}^{٣}\text{س دس}$$

الحل $\int \text{قا}^{٢}\text{س قاس دس}$

دوري

$\text{و} = \text{قاس}$ $\text{ده} = \text{قا}^{٢}\text{س}$

$\text{دو} = \text{قاس ظاس}$ $\text{ه} = \text{ظاس}$

$$\text{قاس ظاس} - \int \text{قاس ظا}^{٢}\text{س}$$

$$\text{قاس ظاس} - \int \text{قاس}(\text{قا}^{٢}\text{س}-١)$$

$$\text{قاس ظاس} - \int \text{قا}^{٣}\text{س} + \int \text{قاس}$$

حل بالتعويض يوجد حله في درس التعويض

$$\int \frac{\text{قاس}(\text{قاس}+\text{ظاس})}{\text{قاس}+\text{ظاس}} =$$

$$= \text{لو}|\text{قاس}+\text{ظاس}|$$

$$\Longleftarrow$$

$$\int \text{قا}^{٣}\text{س دس} = \text{قاس ظاس} - \int \text{قا}^{٣}\text{س} + \text{لو}|\text{قاس}+\text{ظاس}|$$

$$\int \text{قا}^{٣}\text{س} = \frac{\text{قاس ظاس} + \text{لو}|\text{قاس}+\text{ظاس}|}{٢}$$

مثال ⑮

$$\int \frac{\sqrt[3]{\text{س} - \text{س}^3}}{\text{س}^4}\,\text{د}\text{س}$$

الحل

$$\int \frac{\sqrt[3]{\text{س}^3(\text{س}^{-2} - 1)}}{\text{س}^4}$$

$$= \int \frac{\text{س}\sqrt[3]{\text{س}^{-2} - 1}}{\text{س}^4} = \int \text{س}^{-3}\sqrt[3]{\text{س}^{-2} - 1}$$

$$\text{ص} = \text{س}^{-2} - 1 \qquad \text{د}\text{ص} = -2\,\text{س}^{-3}\,\text{د}\text{س}$$

$$\int \cancel{\text{س}^{-3}}\sqrt[3]{\text{ص}} \times \frac{\text{د}\text{ص}}{-2\,\cancel{\text{س}^{-3}}}$$

$$-\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{\text{ص}}\,\text{د}\text{ص} = -\frac{1}{2}\int \text{ص}^{\frac{1}{3}}\,\text{د}\text{ص}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\,\text{ص}^{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{-3}{8}\,(\text{س}^{-2} - 1)^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$$

مثال ⑯

$$\int \sqrt{1 + \text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{د}\text{س}$$

الحل

$$\text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{\text{س}} + 1} \Leftarrow \text{ص}^2 = \text{هـ}^{\text{س}} + 1$$

$$\text{هـ}^{\text{س}} = \text{ص}^2 - 1$$

$$2\text{ص}\,\text{د}\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{د}\text{س}$$

$$\int \text{ص} \times \frac{2\text{ص}\,\text{د}\text{ص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$$

$$= \int \frac{2\text{ص}^2}{\text{ص}^2 - 1}\,\text{د}\text{ص}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & \\ \hline 2\text{ص}^2 & \text{ص}^2 - 1 \\ -2\text{ص}^2 \pm 2 & \\ \hline +2 & \end{array}$$

$$= \int 2\,\text{د}\text{ص} + \int \frac{2}{\text{ص}^2 - 1}$$

كسور جزئية

مثال ⑰

$$\int \frac{\text{هـ}^{\sqrt{\text{س}}}}{(\sqrt{\text{س}} + 1)^2}$$

الحل

$$\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \qquad \text{ص}^2 = \text{س}$$

$$2\text{ص}\,\text{د}\text{ص} = \text{د}\text{س}$$

$$\int \frac{\text{هـ}^{\text{ص}}}{(\text{ص} + 1)^2} \times 2\text{ص}\,\text{د}\text{ص}$$

$$\int 2\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,(\text{ص} + 1)^{-2}\,\text{د}\text{ص}$$

$$\text{ع} = 2\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} \qquad \text{د}\text{هـ} = (\text{ص} + 1)^{-2}$$

$$\text{د}\text{ع} = 2\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + 2\,\text{هـ}^{\text{ص}} \qquad \text{هـ} = \frac{(\text{ص} + 1)^{-1}}{-1}$$

يتبع الحل ←

$$-\frac{2ص\,هـ^{ص}}{ص+1} - \int \frac{(2ص\,هـ^{ص} + 2هـ^{ص})\times -1}{ص+1}$$

$$-\frac{2ص\,هـ^{ص}}{ص+1} + \int \frac{2هـ^{ص}\cancel{(ص+1)}}{\cancel{ص+1}}$$

$$-\frac{2ص\,هـ^{ص}}{ص+1} + 2هـ^{ص} + جـ$$

$$-\frac{2\sqrt{س}\,هـ^{\sqrt{س}}}{\sqrt{س}+1} + 2هـ^{\sqrt{س}} + جـ$$

مثال ⑱

اوجد $\int_{-1}^{1}\sqrt{1+س^{-\frac{2}{3}}}$

الحل

$$= \int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{1}{س^{\frac{2}{3}}}} = \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{س^{\frac{2}{3}}+1}{س^{\frac{2}{3}}}}$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{س^{\frac{2}{3}}+1}}{\sqrt{س^{\frac{2}{3}}}} = \int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{س^{\frac{2}{3}}+1}}{|س^{\frac{1}{3}}|}$$

$|س^{\frac{1}{3}}|$

$-س^{\frac{1}{3}}$ $س^{\frac{1}{3}}$

- - - + + +

-1 0 1

$$= \int_{-1}^{0}\frac{\sqrt{س^{\frac{2}{3}}+1}}{-س^{\frac{1}{3}}} + \int_{0}^{1}\frac{\sqrt{س^{\frac{2}{3}}+1}}{س^{\frac{1}{3}}}$$

$ص = س^{\frac{2}{3}}+1 \quad دص = \frac{2}{3}س^{-\frac{1}{3}}دس$

$دس = دص\times\frac{3}{2}س^{\frac{1}{3}}$

$س = -1 \leftarrow ص = 2 \quad س = 1 \quad ص = 2$

$$= \int \frac{\sqrt{ص}}{\cancel{-س^{\frac{1}{3}}}}\times\frac{3}{2}\cancel{س^{\frac{1}{3}}}\,دص$$

$$+ \int \frac{\sqrt{ص}}{\cancel{س^{\frac{1}{3}}}}\times\frac{3}{2}\cancel{س^{\frac{1}{3}}}\,دص$$

$$= -\frac{3}{2}\int_{2}^{0}\sqrt{ص}\,دص + \frac{3}{2}\int_{0}^{2}\sqrt{ص}\,دص$$

$$= \frac{3}{2}\int_{0}^{2}\sqrt{ص} + \frac{3}{2}\int_{0}^{2}\sqrt{ص}\,دص$$

$$\frac{3}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\int_{0}^{2}\sqrt{ص}\,دص\right)$$

$$= 3\int_{0}^{2}ص^{\frac{1}{2}}دص = 3\int_{0}^{2}ص^{\frac{1}{2}}دص$$

$$= \cancel{3}\times\frac{2}{\cancel{3}}ص^{\frac{3}{2}}\Big]_{0}^{2} = 2\sqrt{2^{3}}$$

$$= 2\sqrt{8}$$

مثال ⑲ مميز

جد $\int \frac{\sqrt{س}}{\sqrt[4]{س^{3}}+س}$

نفرض $س = ص^{4}$

$4ص^{3}دص = دس$

$$\int \frac{\sqrt{ص^{4}}}{(\sqrt[4]{ص^{4}})^{3}+ص^{4}}\times 4ص^{3}دص$$

$$\int \frac{|ص^{2}|}{|ص|^{3}+ص^{4}}\times 4ص^{3}$$

← يتبع

$|ص|^٣ \qquad \dfrac{-ص^٣ \quad \big| \quad ص^٣}{٠}$

① $ص > ٠$

$\int \frac{ص^٢ \times ٤ص^٣}{ص^٣ + ص^٤} \, دص$

$\int \frac{٤\cancel{ص^٥}}{\cancel{ص^٣}(١+ص)} \, دص$

$\int \frac{٤ص^٢}{١+ص} \, دص$

$$\begin{array}{r|l} ٤ص - ٤ & \\ \hline ٤ص^٢ & ص+١ \\ -٤ص^٢ \mp ٤ص & \\ \hline -٤ص & \\ \pm ٤ص \pm ٤ & \\ \hline +٤ & \end{array}$$

$\int ٤ص - ٤ + \int \frac{٤}{ص+١}$

$\frac{\cancel{٤}ص^٢}{\cancel{٢}} - ٤ص + ٤ لو|ص+١|$

$٢(\sqrt[٤]{س})^٢ - ٤(\sqrt[٤]{س}) + ٤ لو|\sqrt[٤]{س}+١|$
$+ جـ$

② $ص < ٠$

اكمل الحل

مثال (٢٠)

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{١-جاس} \times \frac{\sqrt{١+جاس}}{\sqrt{١+جاس}}$

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{١-جا^٢س}}{\sqrt{١+جاس}} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{جتا^٢س}}{\sqrt{١+جاس}}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{|جتاس|}{\sqrt{١+جاس}}$

$\dfrac{\overset{جتاس}{+}}{٠ \qquad \frac{\pi}{٢}}$

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{جتاس}{\sqrt{١+جاس}}$

$ص = ١ + جاس \qquad دص = جتاس \, دس$

$س = ٠ \rightarrow ص = ١ + ٠ = ١$

$س = \frac{\pi}{٢} \rightarrow ص = ١ + جا\frac{\pi}{٢} = ١ + ١ = ٢$

$\int_{١}^{٢} \frac{\cancel{جتاس}}{\sqrt{ص}} \times \frac{دص}{\cancel{جتاس}}$

$= \int_{١}^{٢} \frac{١}{\sqrt{ص}} \times دص$

$= \int_{١}^{٢} ص^{-\frac{١}{٢}} \, دص$

$= \Big[٢ص^{\frac{١}{٢}}\Big]_{١}^{٢}$

$= \Big[٢\sqrt{ص}\Big]_{١}^{٢} = ٢\sqrt{٢} - ٢$

ورقة عمل

① جد $\int \frac{س - ٢}{س^٢ - س}\, ءس$

② اذا كانت المشتقة الأولى للاقتران ص = ق(س) تعطى بالعلاقة $\frac{١}{١ + \sqrt{س}}$ فاوجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً انه يمر بالنقطة (٠٥٠)

③ جد $\int \frac{\sqrt{س}}{س - ٩}\, ءس$

④ جد $\int \frac{١}{(٢س - ١) + \sqrt{٢س + ١}}\, ءس$

⑤ جد $\int \frac{١}{س + ٢س\sqrt[٣]{س}}\, ءس$

⑥ اوجد $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} + ٢هـ^{س} + ١}\, ءس$

⑦ جد $\int \frac{س^٢ - ٧س - ٨}{س^٢ - ٣س + ٢}\, ءس$

⑧ $\int \frac{جتاس}{جا^٢س + ٣جاس + ٢}\, ءس$

⑨ جد $\int \frac{١}{س\sqrt{س + ١}}\, ءس$

⑩ $\int \frac{٥}{س - \sqrt{س} - ٦}\, ءس$

⑪ $\int \frac{قا^٤س}{ظا^٢س - ظاس - ٢}\, ءس$

⑫ $\int \sqrt{٩ + هـ^{س}}\, ءس$

⑬ $\int \frac{هـ^{س}}{(هـ^{س} - ٢)\sqrt{٧ + هـ^{س}}}$

اجابات ورقة العمل

① $\int \frac{س-٢}{س^٢-س}$

$\frac{س-٢}{س^٢-س} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-١}$

$س-٢ = أ(س-١) + ب س$

$س=١ \leftarrow -١ = ب$

$س=٠ \leftarrow -٢ = -أ \leftarrow أ = ٢$

$= \int \left(\frac{٢}{س} + \frac{-١}{س-١}\right) دس$

$= ٢لو|س| - لو|س-١| + جـ$

---

② $ق'(س) = \frac{١}{١+\sqrt{س}}$

$ق(س) = \int \frac{١}{١+\sqrt{س}} دس$

$ص = \sqrt{س} ، ص^٢ = س ، ٢ص دص = دس$

$ق(س) = \int \frac{١}{١+ص} \times ٢ص دص$

$= \int \frac{٢ص}{ص+١} دص$

$$\begin{array}{r|l} ٢ & \\ \hline ٢ص & ص+١ \\ -٢ص \mp ٢ & \\ \hline -٢ & \end{array}$$

$= \int ٢ - \int \frac{٢}{ص+١}$

$= ٢ص - ٢لو|ص+١| + جـ$

$= ٢\sqrt{س} - ٢لو|\sqrt{س}+١| + جـ$

نجد جـ = ٠

---

③ $\int \frac{\sqrt{س}}{س-٩} دس$

$ص = \sqrt{س} ، ص^٢ = س \leftarrow ٢ص دص = دس$

$= \int \frac{ص}{ص^٢-١} \times ٢ص دص$

$= \int \frac{٢ص^٢}{ص^٢-١} دص$

$$\begin{array}{r|l} ٢ & \\ \hline ٢ص^٢ & ص^٢-١ \\ -٢ص^٢ \pm ٢ & \\ \hline ٢ & \end{array}$$

$= \int ٢ + \int \frac{٢}{ص^٢-١} دص$

$\frac{٢}{ص^٢-١} = \frac{أ}{ص-١} + \frac{ب}{ص+١}$

$٢ = أ(ص+١) + ب(ص-١)$

$ص=١ \leftarrow ٢ = ٢أ \leftarrow أ = ١$

$ص=-١ \leftarrow ٢ = -٢ب \leftarrow أ = -١$

$= \int ٢ + \int \frac{١}{ص-١} + \frac{-١}{ص+١}$

$= ٢ص + ٢(لو|ص-١| - لو|ص+١|) + جـ$

$= ٢\sqrt{س} + ٢(لو|\sqrt{س}-١| - لو|\sqrt{س}+١|) + جـ$

---

④ $\int \frac{١}{(٢س-١) + \sqrt{٢س+١}} دس$

$ص = \sqrt{٢س+١}$ $ص^٢ = ٢س + ١$

$\cancel{٢}ص دص = \cancel{٢} دس$ $\leftarrow ٢س = ص^٢ - ١$

$\int \frac{١}{(ص^٢-١-١) + ص} = \int \frac{١}{ص^٢+ص-٢}$

$\frac{١}{ص^٢+ص-٢} = \frac{أ}{ص+٢} + \frac{ب}{ص-١}$

$١ = أ(ص-١) + ب(ص+٢)$

$ص=١ \leftarrow ١ = ٣ب \leftarrow ب = \frac{١}{٣}$

$ص=-٢ \leftarrow ١ = -٣أ \leftarrow أ = \frac{-١}{٣}$

$= \int \frac{-\frac{١}{٣}}{ص+٢} + \int \frac{\frac{١}{٣}}{ص-١}$

$= -\frac{١}{٣} لو|ص+٢| + \frac{١}{٣} لو|ص-١| + جـ$

⑤ $\int \frac{١}{س+٢س\sqrt[٣]{س}}\,دس$

$ص = \sqrt[٣]{س}$ $ص^٣ = س$

$٣ص^٢\,دص = دس$

$\int \frac{١}{ص^٣+٢ص^٣ \times ص} \times ٣ص^٢\,دص$

$= \int \frac{٣\cancel{ص^٢}}{\cancel{ص^٣}(١+٢ص)} = \int \frac{٣}{ص(١+٢ص)}$

$\frac{٣}{ص(١+٢ص)} = \frac{أ}{ص} + \frac{ب}{١+٢ص}$

$٣ = أ(١+٢ص) + ب ص$

$ص = -\frac{١}{٢} \leftarrow ٣ = -\frac{١}{٢}ب \leftarrow ب = -٦$

$ص = ٠ \leftarrow أ = ٣$

$= ٣\int \frac{٣}{ص} + \frac{-٦}{١+٢ص}$

$= ٣(٣ لو|ص| - \frac{٦}{٢} لو|٢ص+١|)$

⑥ $\int \frac{هـ^س}{هـ^{٢س}+٢هـ^س+١}\,دس$

$ص = هـ^س$ $دص = هـ^س\,دس$

$\int \frac{\cancel{هـ^س}}{ص^٢+٢ص+١} \times \frac{دص}{\cancel{هـ^س}}$

$= \int \frac{١}{ص^٢+٢ص+١}\,دص = \int \frac{١}{(ص+١)^٢}\,دص$

$= \int (ص+١)^{-٢}\,دص = \frac{(ص+١)^{-١}}{-١} + جـ$

$= \frac{-١}{ص+١} = \frac{-١}{هـ^س+١} + جـ$

⑦ $\int \frac{س^٢-٧س-٨}{س^٢-٣س+٢}\,دس$

$$\begin{array}{r|l} س^٢-٣س+٢ & \overline{\quad ١ \quad} \\ & س^٢-٧س-٨ \\ & \mp\cancel{س^٢} \pm ٣س \mp ٢ \\ \hline & -٤س-١٠ \end{array}$$

$= \int ١ + \frac{-٤س-١٠}{(س-٢)(س-١)}$

$\frac{-٤س-١٠}{(س-٢)(س-١)} = \frac{أ}{س-٢} + \frac{ب}{س-١}$

$-٤س-١٠ = أ(س-١) + ب(س-٢)$

$س = ١ \leftarrow -١٤ = -ب$ $ب = ١٤$

$س = ٢ \leftarrow -١٨ = أ$ $أ = -١٨$

$= \int ١\,دس + \int \frac{-١٨}{س-٢} + \frac{١٤}{س-١}$

$= س - ١٨ لو|س-٢| + ١٤ لو|س-١| + جـ$

⑧ $\int \frac{جتاس}{جا^٢س+٣جاس+٢}$

$ص = جاس$ $دص = جتاس\,دس$

$\int \frac{\cancel{جتاس}}{ص^٢+٣ص+٢} \times \frac{دص}{\cancel{جتاس}}$

$= \int \frac{١}{ص^٢+٣ص+٢}\,دص$ ← يتبع

$$\frac{1}{ص^2+3ص+2} = \frac{أ}{ص+2} + \frac{ب}{ص+1}$$

$$1 = أ(ص+1) + ب(ص+2)$$

$$ص = -1 \leftarrow 1 = ب$$

$$ص = -2 \leftarrow 1 = -أ \leftarrow أ = -1$$

$$\int \frac{-1}{ص+2} + \frac{1}{ص+1}\, دص$$

$$= -لو|ص+2| + لو|ص+1| + جـ$$

⑨ $$\int \frac{1}{س\sqrt{س+1}}\, دس$$

$$ص = \sqrt{س+1} \qquad ص^2 = س+1$$

$$\Leftarrow س = ص^2 - 1$$

$$2ص\, دص = دس$$

$$= \int \frac{1}{(ص^2-1) \times \cancel{ص}} \times 2\cancel{ص\, د}ص$$

$$= \int \frac{2}{ص^2-1}\, دص$$

$$= \frac{أ}{ص-1} + \frac{ب}{ص+1}$$

$$2 = أ(ص+1) + ب(ص-1)$$

$$ص = 1 \leftarrow 2 = 2أ \leftarrow \boxed{أ = 1}$$

$$ص = -1 \leftarrow 2 = -2ب \qquad ب = -1$$

$$= \int \frac{1}{ص-1} + \frac{-1}{ص+1}$$

$$= لو|ص-1| - لو|ص+1| + جـ$$

$$= لو|\sqrt{س+1} - 1| - لو|\sqrt{س+1} + 1| + جـ$$

⑩ $$\int \frac{5}{س - \sqrt{س} - 6}\, دس$$

$$ص = \sqrt{س} \qquad ص^2 = س$$

$$2ص\, دص = دس$$

$$\int \frac{5}{ص^2 - ص - 6} \times 2ص\, دص$$

$$= \int \frac{10ص}{ص^2 - ص - 6}\, دص$$

$$= \frac{أ}{(ص-3)} + \frac{ب}{ص-2}$$

أكمل الحل ----؟

⑪ $$\int \frac{قا^4 س}{ظا^2 س - ظا س - 2}\, دس$$

$$ص = ظا س \qquad دص = قا^2 س$$

$$\int \frac{\cancel{قا^4 س}}{ص^2 - ص - 2} \times \frac{دص}{\cancel{قا^2 س}}$$

$$= \int \frac{قا^2 س}{ص^2-ص-2}\, دص = \int \frac{1+ظا^2 س}{ص^2-ص-2}\, دص$$

$$= \int \frac{1+ص^2}{ص^2-ص-2}\, دص$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ ص^2-ص-2 \,\overline{)\, ص^2+1} \\ \underline{-ص^2 \pm ص \pm 2} \\ ص+3 \end{array}$$

$$= \int 1 + \int \frac{ص+3}{ص^2-ص-2}$$

$$\frac{ص+3}{ص^2-ص-2} = \frac{أ}{ص-2} + \frac{ب}{ص+1}$$

أكمل الحل

⑫ $$\int \sqrt{9+\text{هـ}^{\text{س}}}\;\text{دس}$$

$$\text{ص} = \sqrt{9+\text{هـ}^{\text{س}}} \leftarrow \text{ص}^2 = 9+\text{هـ}^{\text{س}}$$

$$2\text{ص}\,\text{دص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$$

$$\int \text{ص} \times \frac{2\text{ص}\,\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{س}}}$$

لكن $\text{هـ}^{\text{س}} = \text{ص}^2 - 9$

$$\int \frac{2\text{ص}^2\,\text{دص}}{\text{ص}^2-9}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & \\ \hline \cancel{2}\text{ص}^2 & \text{ص}^2-9 \\ -2\text{ص}^2 \pm 18 & \\ \hline 18 & \end{array}$$

$$= \int 2 + \frac{18}{\text{ص}^2-9}$$

$$\frac{18}{\text{ص}^2-9} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}-3} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+3}$$

أكمل الحل ...؟

$$2 = \text{أ}(\text{ص}+3) + \text{ب}(\text{ص}-3)$$

$$\text{ص}=3 \longrightarrow 2 = 6\text{أ} \leftarrow \text{أ} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ص}=-3 \longrightarrow 2 = -6\text{ب} \leftarrow \text{ب} = \frac{-1}{3}$$

$$2\int \frac{\frac{1}{3}}{\text{ص}-3} + \frac{-\frac{1}{3}}{\text{ص}+3}$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}\text{لو}|\text{ص}-3| - \frac{1}{3}\text{لو}|\text{ص}+3|\right) + \text{جـ}$$

⑬ $$\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}}-2)(\sqrt{7+\text{هـ}^{\text{س}}})}$$

$$\text{ص} = \sqrt{7+\text{هـ}^{\text{س}}} \qquad \text{ص}^2 = 7+\text{هـ}^{\text{س}}$$

$$2\text{ص}\,\text{دص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} \qquad \boxed{\text{هـ}^{\text{س}} = \text{ص}^2-7}$$

$$\int \frac{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}}{(\text{ص}^2-7-2)\times\cancel{\text{ص}}} \times \frac{2\cancel{\text{ص}}\,\text{دص}}{\cancel{\text{هـ}^{\text{س}}}}$$

$$\int \frac{2}{\text{ص}^2-9}\,\text{دص}$$

$$= \frac{\text{أ}}{\text{ص}-3} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+3}$$

المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية

هي المعادلة التي تحتوي على أحد رموز المشتقة دص ، دع ، ص′ ، ق′(س) ، $\frac{دص}{دس}$

مثل

$دص = ٩س . دس$

$٥ص\ دص = ٢س^{٢} . دس$

$ص′\ ص = ٢س$

$\frac{دص}{دس} = ٥س^{٢} - ٢$

حل المعادلة التفاضليه

ايجاد علاقة تربط بين المتغير ص والمتغير س بحيث تحقق المعادلة

خطوات الحل

① فصل المتغيرات

② ادخال التكامل غير المحدود على الطرفين

③ اجراء عملية التكامل بطرق التكامل السابقة.

مثال ①

حل المعادلة التفاضليه

$\frac{دص}{دس} = ص^{٥} . س^{٣}$

الحل

$دص = ص^{٥} . س^{٣} دس$

$\frac{دص}{ص^{٥}} = س^{٣} دس$

$\int \frac{دص}{ص^{٥}} = \int س^{٣} . دس$

$\int ص^{-٥} دص = \int س^{٣} . دس$

$\frac{ص^{-٤}}{-٤} = \frac{س^{٤}}{٤} + جـ$

مثال ②

حل المعادلة التفاضليه

$\frac{دص}{دس} = \frac{قاص}{س^{٢}}$

الحل

$\frac{دص}{قاص} = \frac{دس}{س^{٢}}$

$\int جتاص\ دص = \int س^{-٢} دس$

$جاص = \frac{س^{-١}}{-١} + جـ$

مثال ③

حل المعادلة التفاضلية

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = جا^{2}٣ص جتا٥س

$\frac{\text{دص}}{\text{جا}^2 \text{٣ص}}$ = جتا٥س دس

∫ قتا^{2}٣ص دص = ∫ جتا٥س دس

− $\frac{1}{3}$ ظتا٣ص = $\frac{1}{5}$ جا٥س + جـ

مثال ④

٢ص . $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ + ١٢س − ٤ = صفر

الحل

٢ص . $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٤ − ١٢س

٢ص . دص = (٤ − ١٢س) دس

∫ ٢ص . دص = ∫ (٤ − ١٢س) دس

ص^2 = ٤س − ٦س^2 + جـ

مثال ⑤

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\sqrt{\text{س ص}}$

الحل

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\sqrt{\text{س}}$ × $\sqrt{\text{ص}}$

$\frac{\text{دص}}{\sqrt{\text{ص}}}$ = $\sqrt{\text{س}}$ دس

∫ دص ص$^{-\frac{1}{2}}$ = ∫ س$^{\frac{1}{2}}$ دس

٢ص$^{\frac{1}{2}}$ = $\frac{2}{3}$ س$^{\frac{3}{2}}$ + جـ

مثال ⑥

$\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^3$ = ٦٤ س بأخذ الجذر التكعيبي

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\sqrt[3]{\text{٦٤س}}$ = ٤$\sqrt[3]{\text{س}}$

∫ دص = ∫ ٤ س$^{\frac{1}{3}}$ دس

ص = $\cancel{4}$ × $\frac{3}{\cancel{4}}$ س$^{\frac{4}{3}}$ + جـ

مثال ⑦

$\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^2$ − ١٠ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ + ٢٥ = صفر

الحل

($\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ − ٥) ($\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ − ٥) = صفر

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ − ٥ = صفر

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٥ ⟸ دص = ٥ دس

∫ دص = ∫ ٥ . دس

ص = ٥س + جـ

مثال ⑧

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \sqrt{\text{س} + \text{س ص} + \text{ص} + 1}$

حيث س ، ص > -١

الحل

$\text{دص} = \sqrt{\text{س}(\text{ص}+1) + (\text{ص}+1)} \,.\, \text{دس}$

$= \sqrt{(\text{ص}+1)(\text{س}+1)} \ \text{دس}$

$\frac{\text{دص}}{\sqrt{\text{ص}+1}} = \frac{\cancel{\sqrt{\text{ص}+1}}}{\cancel{\sqrt{\text{ص}+1}}} \times \sqrt{\text{س}+1} \ \text{دس}$

$\frac{\text{دص}}{\sqrt{\text{ص}+1}} = \sqrt{\text{س}+1} \ \text{دس}$

$\int (1+\text{ص})^{-\frac{1}{2}} \text{دص} = \int (\text{س}+1)^{\frac{1}{2}} \text{دس}$

$2(1+\text{ص})^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(\text{س}+1)^{\frac{3}{2}} + \text{ج}$

مثال ⑨

$\text{قا}^2\frac{\text{س}}{4} \,.\, \text{دص} - \text{حا}^2\frac{\text{س}}{4} \,.\, \text{دس} = \text{صفر}$

الحل

$\text{قا}^2\frac{\text{س}}{4} \,.\, \text{دص} = \text{حا}^2\frac{\text{س}}{4} \,.\, \text{دس}$

$\text{دص} = \frac{\text{حا}^2\frac{\text{س}}{4}}{\text{قا}^2\frac{\text{س}}{4}} \,.\, \text{دس}$

$\text{دص} = \text{حا}^2\frac{\text{س}}{4}\ \text{جتا}^2\frac{\text{س}}{4} \,.\, \text{دس}$

نعكس

$\text{حا}2\text{س} = 2\text{حاس جتاس}$

$\frac{1}{2}\text{حا}2\text{س} = \text{حاس جتاس}$

$\frac{1}{2}\text{حا}\frac{\text{س}}{2} = \text{حا}\frac{\text{س}}{4}\ \text{جتا}\frac{\text{س}}{4}$

$\text{دص} = \left(\frac{1}{2}\text{حا}\frac{\text{س}}{2}\right)^2$

$\int \text{دص} = \int \frac{1}{4}\text{حا}^2\frac{\text{س}}{2} \,.\, \text{دس}$

$\text{حا}^2\text{س} = \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}2\text{س})$

$\text{حا}^2\frac{\text{س}}{2} = \frac{1}{2}(1 - \text{جتاس})$

$\Leftarrow$

$\int \text{دص} = \int \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}(1 - \text{جتاس})\ \text{دس}$

$\text{ص} = \frac{1}{8}(\text{س} - \text{حاس}) + \text{ج}$

مثال ⑩

حل المعادلة التفاضلية

$\text{قتاس دص} = \text{جتا}^3\text{س دس}$

الحل

$\text{دص} = \frac{\text{جتا}^3\text{س}}{\text{قتاس}} \,.\, \text{دس}$

$\int \text{دص} = \int \text{جتا}^3\text{س حاس دس}$

بالتعويض

$\text{ص} = \text{جتاس} \quad \text{دص} = -\text{حاس دس}$

$= \int \text{ص}^3\ \cancel{\text{حاس}} \times \frac{\text{دص}}{-\cancel{\text{حاس}}}$

$$= -\int ص^{٣}\,دص = -\frac{ص^{٤}}{٤} + جـ$$

$$ص = -\frac{جتا^{٤}س}{٤} + جـ$$

مثال ⑪ حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{دص}{دس} = \frac{ص}{جتا^{٢}س}$$

الحل

$$\frac{دص}{ص} = \frac{دس}{جتا^{٢}س} = قا^{٢}س\,دس$$

$$\int \frac{دص}{ص} = \int قا^{٢}س\,دس$$

$$لو_{هـ}ص = ظاس + جـ$$

مثال ⑫ حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{دص}{دس} = \frac{ص^{٢}}{س^{٢}-س}$$

الحل

$$\int \frac{دص}{ص^{٢}} = \int \frac{دس}{س^{٢}-س}$$

$$\int ص^{-٢}\,دص = \int \frac{دس}{س^{٢}-س} \text{ كسور جزئية}$$

$$\frac{١}{س^{٢}-س} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-١}$$

$$= \frac{أ(س-١) + ب\,س}{س(س-١)}$$

$$س = ١ \longrightarrow ب = ١$$

$$س = ٠ \longrightarrow -أ = ١ \leftarrow أ = -١$$

$$\frac{ص^{-١}}{-١} = \int \frac{-١}{س} + \frac{١}{س-١}$$

$$\frac{-١}{ص} = -لو|س| + لو|س-١| + جـ$$

مثال ⑬ حل المعادلة التفاضلية

$$(س^{٢}-٩)\,دص = (ص^{٢}-٢ص+١)\,دس$$

الحل

$$\underset{\text{تكامل عادي}}{\frac{دص}{ص^{٢}-٢ص+١}} = \underset{\text{كسور جزئية}}{\frac{دس}{س^{٢}-٩}}$$

$$\frac{دص}{(ص-١)^{٢}} = \frac{دس}{س^{٢}-٩}$$

$$\int (ص-١)^{-٢}\,دص = \int \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{س+٣}$$

أكمل الحل

مثال ⑭

اذا كانت $\frac{دص}{دس} = ص^{٢}\,هـ^{-س}$ وكانت ص = ٢ عند س = ٠ اثبت أن

$$ص = \frac{٢هـ^{س}}{٢-هـ^{س}}$$

الحل

$$\frac{دص}{ص^{٢}} = هـ^{-س}\,دس \Leftarrow \int \frac{دص}{ص^{٢}} = \int هـ^{-س}\,دس$$

$$\int ص^{-٢}\,دص = \int هـ^{-س}\,دس$$

$$\frac{ص^{-١}}{-١} = \frac{هـ^{-س}}{-١} + جـ \Leftarrow \frac{-١}{ص} = \frac{-١}{هـ^{س}} + جـ$$

$$ص = ٢ ،\ س = ٠$$

$$\leftarrow \frac{-١}{٢} = \frac{-١}{١} + جـ \Leftarrow جـ = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{-١}{ص} = \frac{-١}{هـ^{س}} + \frac{١}{٢} \quad \text{بالضرب في سالب}$$

$$\frac{١}{ص} = \frac{١}{هـ^{س}} - \frac{١}{٢} \Leftarrow \frac{١}{ص} = \frac{٢-هـ^{س}}{٢هـ^{س}}$$

$$\Leftarrow ص = \frac{٢هـ^{س}}{٢-هـ^{س}}$$

مثال ⑮ حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س} \cdot \text{هـ}^{\text{س}^2+\text{ص}}$$

<u>الحل</u>: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س} \cdot \text{هـ}^{\text{س}^2} \times \text{هـ}^{\text{ص}}$

$$\int \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\text{ص}}} = \int \text{س} \cdot \text{هـ}^{\text{س}^2} \text{دس}$$

$$\int \text{هـ}^{-\text{ص}} \text{دص} = \int \text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}^2} \text{دس}$$

$\text{ل} = \text{س}^2 \quad \text{دل} = ٢\text{س}\, \text{دس}$

$$\frac{\text{هـ}^{-\text{ص}}}{-١} = \int \text{س}\, \text{هـ}^{\text{ل}} \times \frac{\text{دل}}{٢\cancel{\text{س}}}$$

$$\frac{-١}{\text{هـ}^{\text{ص}}} = \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{ل}} + \text{جـ} = \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{س}^2} + \text{جـ}$$

مثال ⑯ حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{١}{\text{س}^2-٤} = \frac{\text{هـ}^{-٢\text{ص}}(\text{س}+٣)}{\text{س}^2-٢\text{س}}$$

<u>الحل</u>

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{هـ}^{-٢\text{ص}}(\text{س}+٣)(\text{س}^2-٤)}{\text{س}^2-٢\text{س}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{-٢\text{ص}}} = \frac{(\text{س}+٣)(\text{س}^2-٤)}{\text{س}^2-٢\text{س}} \times \text{دس}$$

$$\text{هـ}^{٢\text{ص}}\text{دص} = \frac{(\text{س}+٣)\cancel{(\text{س}-٢)}(\text{س}+٢)}{\text{س}\cancel{(\text{س}-٢)}}\text{دس}$$

$$\text{هـ}^{٢\text{ص}}\text{دص} = \frac{\text{س}^2+٥\text{س}+٦}{\text{س}}\text{دس}$$

$$\int \text{هـ}^{٢\text{ص}}\text{دص} = \int \left(\text{س}+٥+\frac{٦}{\text{س}}\right)\text{دس}$$

$$\frac{\text{هـ}^{٢\text{ص}}}{٢} = \frac{\text{س}^2}{٢} + ٥\text{س} + ٦\text{لو}|\text{س}| + \text{جـ}$$

<u>مثال ⑰</u>

تتكاثر بكتيريا حسب العلاقة

$$\frac{\text{دت}}{\text{دن}} = ٥\text{ن}^4 + ٢٠\text{ن}$$

حيث ت : عدد البكتيريا   ن : الزمن
اذا كان عددها بعد ثانية واحدة يساوي (٣٠) نجد عددها بعد ٣ ثواني .

<u>الحل</u>

$\text{ت} = ٣٠$ عندما $\text{ن} = ١$

المطلوب ت عندما $\text{ن} = ٣$

$$\text{دت} = (٥\text{ن}^4 + ٢٠\text{ن})\,\text{دن}$$

$$\int \text{دت} = \int (٥\text{ن}^4 + ٢٠\text{ن})\,\text{دن}$$

$$\text{ت} = \frac{٥\text{ن}^5}{٥} + \frac{٢٠\text{ن}^2}{٢} + \text{جـ}$$

$$\text{ت} = \text{ن}^5 + ١٠\text{ن}^2 + \text{جـ}$$

$$\text{ت}(١) = (١)^5 + ١٠(١)^2 + \text{جـ} = ٣٠$$

$$١١ + \text{جـ} = ٣٠ \longleftarrow \text{جـ} = ١٩$$

$$\text{ت}(\text{ن}) = \text{ن}^5 + ١٠\text{ن}^2 + ١٩$$

$$\text{ت}(٣) = ٣^5 + ١٠ \times ٩ + ١٩ = ٣٥٢$$

مثال ⑱

آلة صناعية قيمتها عند الشراء (٢٥٠٠) دينار وكانت قيمتها تتناقص بمرور الزمن وفق العلاقة $\frac{\text{ده}}{\text{دن}} = -٥٠٠(\text{ن}+١)^{-2}$

ه : قيمة الآلة بعد ن سنة من شرائها
احسب قيمة الآلة بعد ٣ سنوات من شرائها

يتبع الحل ←

ق = ٢٥٠٠ ، ن = ٠ زمن الشراء

المطلوب ق عند ن = ٣

دق = −٥٠٠ (ن + ١)^−٢ دن

∫ دق = ∫ −٥٠٠ (ن + ١)^−٢ دن

ق = −٥٠٠ (ن + ١)^−١ / −١ + جـ

ق = ٥٠٠ / (ن + ١) + جـ

ق(٠) = ٥٠٠ / (١ + ٠) + جـ

٢٥٠٠ = ٥٠٠ + جـ ⟵ جـ = ٢٠٠٠

ق(ن) = ٥٠٠ / (ن + ١) + ٢٠٠٠

ق(٣) = ٥٠٠ / ٤ + ٢٠٠٠ = ٢١٢٥

مثال ⑲

اذا كان معدل تغير حجم سائل في وعاء نتيجة وجود ثقب بالقاع معطى بالعلاقة دح / دن = ٥ن − ١٠٠ سم^٣/د وكان حجم السائل بعد مرور ١٠ دقائق هو ٢٥٠ سم^٣ فاوجد

① حجم السائل في الوعاء عند بدء تسربه

② الزمن اللازم حتى يتسرب السائل جميعه

الحل

دح = (٥ن − ١٠٠) دن

∫ دح = ∫ (٥ن − ١٠٠) دن

ح = ٥ن^٢ / ٢ − ١٠٠ن + جـ

ح(١٠) = ٥ × ١٠٠ / ٢ − ١٠٠٠ + جـ = ٢٥٠

⟵ جـ = ١٠٠٠

① ح(٠) = ١٠٠٠

② ح = ٠ = ٥/٢ ن^٢ − ١٠٠ن + ١٠٠٠
× ٢/٥

ن^٢ − ٤٠ن + ٤٠٠ = ٠

(ن − ٢٠) (ن − ٢٠) = ٠ ⟸ ن = ٢٠

مثال ⑳

يزداد عدد السمك بمعدل ٢٠٪ من عدده يومياً ، فاذا كان عدد السمك الآن هو ١٠٠ سمكه فكم يصبح بعد ٥٠ يوماً .

الحل

ملاحظه هامه ؛ هنا المعادلة التفاضلية غير جاهزه ويجب ان نقوم بتكوينها

نفرض ان عدد السمك = ع

الزمن بالايام = ن

دع / دن = ٢٠٪ ع　　المعادلة التفاضلية

دع / ع = ٠٫٢٠ دن

∫ دع / ع = ∫ ٠٫٢٠ دن

لوهـ |ع| = ٠٫٢٠ ن + جـ

ع = ١٠٠ عندما ن = ٠

لوهـ ١٠٠ = ٠ + جـ ⟸ جـ = لوهـ ١٠٠

لوهـ ع = هـ^(٠٫٢٠ن + لوهـ ١٠٠)

ع = هـ^(٠٫٢٠ن) × ١٠٠

ع(٥٠) = ١٠٠ × هـ^(٢٠/١٠٠ × ٥٠) = ١٠٠ هـ^١٠

تطبيقات هندسية

ملاحظة

$$\text{ميل المماس} = \text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$$

مثال ①

اذا كان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢س ص}^{٢}$

جد قاعدة العلاقة علمًا بان النقطة (٢، ١) تقع على منحناها.

الحل

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢س ص}^{٢}$$

$$\int \frac{\text{ءص}}{\text{ص}^{٢}} = \int \text{٢س ءس}$$

$$\int \text{ص}^{-٢}\,\text{ءص} = \int \text{٢س ءس}$$

$$\frac{\text{ص}^{-١}}{-١} = \text{س}^{٢} + \text{جـ}$$

$$\frac{-١}{\text{ص}} = \text{س}^{٢} + \text{جـ} \quad \text{نعوض } (\overset{\text{س}}{٢}، \overset{\text{ص}}{١})$$

$$\frac{-١}{١} = ٤ + \text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = ٥$$

$$\frac{-١}{\text{ص}} = \text{س}^{٢} - ٥$$

مثال ②

اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{\text{حاس} - \text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{٣ص}^{٢}}$ جد قاعدة العلاقة علمًا بان $(٤ ، \frac{\pi}{٤})$ تقع على منحناه

الحل

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{حاس} - \text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{٣ص}^{٢}}$$

$$\text{٣ص}^{٢}\,\text{ءص} = (\text{حاس} - \text{قا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس}$$

$$\int \text{٣ص}^{٢}\,\text{ءص} = \int (\text{حاس} - \text{قا}^{٢}\text{س})\,\text{ءس}$$

$$\text{ص}^{٣} = -\text{جتاس} - \text{ظاس} + \text{جـ}$$

نعوض النقطة $(٤ ، \frac{\pi}{٤})$

$$٦٤ = -\text{جتا}\frac{\pi}{٤} - \text{ظا}\frac{\pi}{٤} + \text{جـ}$$

$$٦٤ = -\frac{١}{\sqrt{٢}} - ١ + \text{جـ}$$

$$\text{جـ} = ٦٥ + \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\text{ص}^{٣} = -\text{جتاس} - \text{ظاس} + ٦٥ + \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\text{ص} = \sqrt[٣]{-\text{جتاس} - \text{ظاس} + ٦٥ + \frac{١}{\sqrt{٢}}}$$

مثال ③

اذا كان ميل المماس لمنحنى ق(س) عند اي نقطه (س، ص) يعطى بالعلاقه $٤س هـ^{س^٢}$ جد معادلة هذا المنحنى علمًا بان يمر بالنقطه (٠، ٣)

$$\frac{دص}{دس} = ٤س هـ^{س^٢}$$

$$دص = ٤س هـ^{س^٢} دس$$

$$\int دص = \int ٤س هـ^{س^٢} دس$$

$$ص = س^٢ \xrightarrow{بالتعويض} دص = ٢س دس$$

$$\int ٤س هـ^{ص} \times \frac{دص}{\cancel{٢س}}$$

$$\int ٢هـ^{ص} دص = ٢هـ^{ص} + جـ$$

$$= ٢هـ^{س^٢} + جـ$$

$$\Leftarrow$$

$$ص = ٢هـ^{س^٢} + جـ$$

تعوض (٠، ٣)

$$٣ = ٢هـ^{٠} + جـ = ٢ + جـ$$

$$\Rightarrow جـ = ١$$

$$ص = ٢هـ^{س^٢} + ١$$

مثال ④

اذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى ص هو $\frac{٣ص^٢}{(٢س+١)^٢}$ جد ص اذا كان المنحنى يمر بالنقطة (٠، ١)

الحل

ميل العمودي × ميل المماس = -١

$$\frac{٣ص^٢}{(٢س+١)^٢} \times \frac{دص}{دس} = -١$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{-(٢س+١)^٢}{٣ص^٢}$$

$$دص \times ٣ص^٢ = -(٢س+١)^٢ دس$$

$$\int ٣ص^٢ دص = -\int (٢س+١)^٢ دس$$

$$ص^٣ = -\frac{(٢س+١)^٣}{٢\times٣} + جـ$$

يمر بالنقطة (٠، ١)

$$١ = \frac{-(٠+١)^٣}{٢\times٣} + جـ$$

$$١ = \frac{-١}{٦} + جـ \Rightarrow جـ = ١ + \frac{١}{٦} = \frac{٧}{٦}$$

$$ص^٣ = \frac{-(٢س+١)^٣}{٦} + \frac{٧}{٦}$$

$$ص = \sqrt[٣]{\frac{-(٢س+١)^٣}{٦} + \frac{٧}{٦}}$$

مثال ⑤

اذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند (س، ص) يساوي $\frac{\sqrt{\text{هـ}^{\text{ص}}}}{1-\text{جتا}^2\text{س}}$ جد قاعدة العلاقة ص علماً بان منحناه يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{4}، 0)$

الحل

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\sqrt{\text{هـ}^{\text{ص}}}}{1-\text{جتا}^2\text{س}}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{هـ}^{\frac{1}{2}\text{ص}}}{\text{جا}^2\text{س}}$$

$$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{هـ}^{\frac{1}{2}\text{ص}}} = \frac{\text{دس}}{\text{جا}^2\text{س}}$$

$$\text{هـ}^{-\frac{1}{2}\text{ص}}\,\text{دص} = \text{قتا}^2\text{س}\,\text{دس}$$

$$\int \text{هـ}^{-\frac{1}{2}\text{ص}}\,\text{دص} = \int \text{قتا}^2\text{س}\,\text{دس}$$

$$-2\,\text{هـ}^{-\frac{1}{2}\text{ص}} = -\text{ظتا س} + \text{جـ}$$

$(\frac{\pi}{4}، 0)$

$$-2\,\text{هـ}^{\cdot} = -\text{ظتا}\frac{\pi}{4} + \text{جـ}$$

$$-2 = - \quad + \text{جـ}$$

$$\text{جـ} = -1$$

$$-2\,\text{هـ}^{-\frac{1}{2}\text{ص}} = -\text{ظتا س} - 1$$

مثال ⑥

اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة يساوي $\frac{-\text{ص}(\text{س}^2-1)}{\text{س}^2}$ جد قاعدة العلاقة اذا علمت ان منحناها يمر بالنقطة (١، -١)

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{ص}(\text{س}^2-1)}{\text{س}^2}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \frac{-(\text{س}^2-1)}{\text{س}^2}\,\text{دس}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \left(\frac{-\text{س}^2}{\text{س}^2} + \frac{1}{\text{س}^2}\right)\text{دس}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \left(-1 + \frac{1}{\text{س}^2}\right)\text{دس}$$

$$\int \frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \int \left(-1 + \text{س}^{-2}\right)\text{دس}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} = \left(-\text{س} + \frac{\text{س}^{-1}}{-1}\right) + \text{جـ}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| = \left(-\text{س} - \frac{1}{\text{س}}\right) + \text{جـ}$$

يمر بالنقطة (١، -١)

$$\text{لو}_{\text{هـ}}|-1| = (-1 - 1) + \text{جـ}$$

$$0 = -2 + \text{جـ} \leftarrow \text{جـ} = 2$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| = \left(-\text{س} - \frac{1}{\text{س}}\right) + 2$$

تطبيقات فيزيائية

① $\text{ف}'(\text{ن}) = \text{ع}(\text{ن})$

$\text{ع}'(\text{ن}) = \text{ت}(\text{ن})$

② $\text{ف}(\text{ن}) = \int \text{ع}(\text{ن})\,\text{دن}$

$\text{ع}(\text{ن}) = \int \text{ت}(\text{ن})\,\text{دن}$

تكامل السرعة = المسافة

تكامل التسارع = السرعة

ملاحظة

يصل الجسم أقصى ارتفاع $\text{ع}(\text{ن}) = 0$

السرعة الابتدائية = $\text{ع}(0)$

عندما يتحرك الجسم من السكون

$\text{ع}_{\text{الابتدائية}} = \text{ع}(0) =$ صفر

ملاحظات هامة

① اذا أعطي في سؤال العلاقة ف، ع، ت بدلالة الزمن فإننا نستخدم

$\int \text{ع} = \text{ف}$

$\int \text{ت} = \text{ع}$

② اذا كانت المعادلة تحتوي على اقترانين فنستخدم حل المعادلة التفاضلية

مثلاً $\text{ع} = \sqrt{\text{ف}}$ ، $\text{ت} = 2\sqrt{\text{ع}}$

ملاحظة

$\text{ع} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ ، $\text{ت} = \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

مثال ①

اذا كان تسارع جسم (ت) بعد ن ثانية يعطى بالعلاقة ت(ن) = ٦ن + ٤ فاوجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور ٣ ثواني من بدء حركته علماً بان سرعته الابتدائية ٢م/ث وانه قطع مسافة ٢١م في اول ثانيتين من الحركة.

الحل

ت(ن) = ٦ن + ٤

ع(ن) = ∫(٦ن + ٤) دن

= ٣ن^2 + ٤ن + جـ

ع ابتدائية = ع(٠) = ٢ ← جـ = ٢

⇐ ع(ن) = ٣ن^2 + ٤ن + ٢

ف(ن) = ∫ع(ن) = ∫٣ن^2 + ٤ن + ٢

= ن^3 + ٢ن^2 + ٢ن + جـ

ف(٢) = ٢١

٢١ = ٨ + ٨ + ٤ + جـ

= ٢٠ + جـ

← جـ = ١

ف(ن) = ن^3 + ٢ن^2 + ٢ن + ١

ف(٣) = ٢٧ + ١٨ + ٦ + ١

= ٥٢ م

مثال ② سؤال (٦) الكتاب ص٣٠٩

قذف جسم رأسياً إلى اعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٠م/ث وبتسارع مقداره (-١٠م/ث^2) اذا كان ارتفاعه عن سطح الارض بعد ثانية من حركته يساوي (٨٠م) فاوجد اقصى ارتفاع يصله الجسم عن سطح الارض.

الحل

ت(ن) = -١٠

ع(ن) = ∫ت(ن) دن = ∫-١٠ دن

ع(ن) = -١٠ن + جـ

ع(٠) = ٤٠ = جـ

← جـ = ٤٠

ع(ن) = -١٠ن + ٤٠

ف(ن) = ∫ع(ن) دن = ∫-١٠ن + ٤٠

= $-\frac{١٠ن^2}{٢}$ + ٤٠ن + جـ

ف(١) = ٨٠ = -٥(١)^2 + ٤٠×١ + جـ

← ٨٠ = ٣٥ + جـ

جـ = ٤٥

ف(ن) = -٥ن^2 + ٤٠ن + ٤٥

وعندما يصل الجسم الى اقصى ارتفاع

ع(ن) = صفر

-١٠ن + ٤٠ = ٠ ⇐ ن = ٤

ف(٤) = -٥×١٦ + ٤٠×٤ + ٤٥

= -٨٠ + ١٦٠ + ٤٥

= ١٢٥م

مثال ③

قذفت كرة للأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٦٤م/ث من على ارتفاع ٨٠م جد معادلة الحركة لهذه الكرة اذا علمت ان تسارع الكره يساوي -٣٢م/ث

الحل

ت(ن) = -٣٢

ع(ن) = ∫ ت(ن) = -٣٢ن + جـ

ع(٠) = ٦٤

← جـ = ٦٤

ع(ن) = -٣٢ن + ٦٤

ف(ن) = ∫ع(ن) = ∫ -٣٢ن + ٦٤

= -٣٢ن^{٢}/٢ + ٦٤ن + جـ

ف(ن) = -١٦ن^{٢} + ٦٤ن + جـ

ف(٠) = ٨٠ ⇐ جـ = ٨٠

ف(ن) = -١٦ن^{٢} + ٦٤ن + ٨٠

مثال ④

انطلق جسم من النقطة (٠،٤) باتجاه محور السينات الموجب وبسرعة ابتدائية مقدارها ٣سم/ث وتسارع ثابت مقداره ٦سم/ث^{٢}، جد بعد الجسم عن نقطة الاصل بعد مرور ٢ ثانية من بدء الحركة

الحل

ت(ن) = ٦

ع(ن) = ∫٦ ءن = ٦ن + جـ

ع(٠) = ٣ ← جـ = ٣

ع(ن) = ٦ن + ٣

ف(ن) = ٣ن^{٢} + ٣ن + جـ

ف(٠) = ٤ ← جـ = ٤

ف(ن) = ٣ن^{٢} + ٣ن + ٤

ف(٢) = ١٢ + ٦ + ٤ = ٢٢

مثال ⑤

قذفت كرة من قمة برج ارتفاعه ٦٠م عن سطح الارض للاعلى بسرعة ابتدائية ٢٠م/ث وبتسارع -١٠م/ث^{٢} جد الزمن الذي استغرقته الكره لتعود لسطح الارض .

الحل

ت(ن) = -١٠

ع(ن) = -١٠ن + جـ

ع(٠) = ٢٠ ← جـ = ٢٠

ع(ن) = -١٠ن + ٢٠

ف(ن) = ∫ع(ن) = -٥ن^{٢} + ٢٠ن + جـ

ف(٠) = ٦٠ ← جـ = ٦٠

ف(ن) = -٥ن^{٢} + ٢٠ن + ٦٠

لتعود لسطح الارض ف(ن) = ٠

-٥ن^{٢} + ٢٠ن + ٦٠ = ٠ (ن - ٦)(ن + ٢)

ن^{٢} - ٤ن - ١٢ = ٠ ن = ٦

مثال ⑥

يسير جسم على خط مستقيم حسب العلاقة $ت = \frac{1}{ع}$ ، $ع > ٠$ ، حيث ت: التسارع ع: السرعة ، فاذا تحرك الجسم من السكون فقطع مسافة $١٠\sqrt{٢}$ متر بعد ٤ ثواني من حركته جد المسافة التي قطعها بعد ثانية واحدة من حركته

الحل

$$\frac{دع}{دن} = \frac{1}{ع} \rightarrow ع\,دع = دن$$

$$\int ع\,دع = \int دن$$

$$\frac{ع^{٢}}{٢} = ن + ج \qquad ن = ٠ ، ع = ٠$$

$$\rightarrow ج = ٠$$

$$\frac{ع^{٢}}{٢} = ن \rightarrow ع^{٢} = ٢ن$$

$$ع = \sqrt{٢}\sqrt{ن}$$

$$\frac{دف}{دن} = \sqrt{٢}(ن)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int دف = \int \sqrt{٢}(ن)^{\frac{1}{2}} دن$$

$$ف = \sqrt{٢} \times \frac{٢}{٣} ن^{\frac{٣}{٢}} + ج$$

$$ف(٤) = ١٠\sqrt{٢}$$

$$١٠\sqrt{٢} = \frac{٢\sqrt{٢}}{٣}(٤)^{\frac{٣}{٢}} + ج$$

$$١٠\sqrt{٢} = \frac{٢\sqrt{٢}}{٣} \times ٨ + ج \Rightarrow ج = \frac{٣٠\sqrt{٢}}{٣} - \frac{١٦\sqrt{٢}}{٣}$$

$$ج = \frac{١٤\sqrt{٢}}{٣}$$

$$ف = \frac{٢\sqrt{٢}}{٣} ن^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١٤\sqrt{٢}}{٣}$$

$$ف(١) = \frac{٢\sqrt{٢}}{٣} + \frac{١٤\sqrt{٢}}{٣} = \frac{١٦\sqrt{٢}}{٣}$$

مثال ②

تحرك جسم حسب العلاقة $ع = \sqrt{ف}$ حيث ع السرعة م/ث ف: المسافة كانت المسافة بعد مرور ٢ ثانية هي ٩م جد المسافة بعد مرور ٤ ثواني

الحل

$$ع = \sqrt{ف}$$

$$\frac{دف}{دن} = \sqrt{ف} \rightarrow \frac{دف}{\sqrt{ف}} = دن$$

$$\int ف^{-\frac{1}{2}} دف = \int دن$$

$$٢ف^{\frac{1}{2}} = ن + ج$$

$$ف = ٩ \qquad ن = ٢$$

$$٢\sqrt{٩} = ٢ + ج \Rightarrow ج = ٤$$

$$٢\sqrt{ف} = ن + ٤$$

$$٢\sqrt{ف} = ٤ + ٤ \rightarrow ٢\sqrt{ف} = ٨$$

$$\sqrt{ف} = ٤ \qquad ف = ١٦ \text{ متر}$$

مثال ③

اذا كان تسارع جسم يعطى بالعلاقة $ت(ن) = ع(ن) + ١$ وكان الجسم قد انطلق من السكون فقطع مسافة ه كم في اول دقيقة من حركته جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ٢ دقيقة

← يتبع الحل

الحل

$\frac{دع}{دن} = ع + ١$

$\frac{دع}{ع+١} = دن \leftarrow \int \frac{دع}{ع+١} = \int دن$

$لو|ع+١| = ن + جـ$

$ع(٠) = ٠$

$لو|٠+١| = جـ \quad جـ = ٠$

$لو|ع+١| = ن$

$هـ^{لو|ع+١|} = هـ^{ن}$

$ع+١ = هـ^{ن} \Longrightarrow ع = هـ^{ن} - ١$

$\frac{دف}{دن} = هـ^{ن} - ١$

$دف = (هـ^{ن} - ١)\ دن$

$ف = هـ^{ن} - ن + جـ$

قطع هـ م في (١) دقيقة

$\cancel{هـ} = \cancel{هـ}^{١} - ١ + جـ$

$جـ = ٢$

$ف = هـ^{ن} - ن + ١$

$ف(٢) = هـ^{٢} - ٢ + ١ = هـ^{٢} - ١$

مثال ٤

يتحرك جسم بحيث ان سرعته $ع = \frac{لو_{هـ} ن}{ن}$ فاذا قطع الجسم مسافة ٤م بعد (١) ثانية جد المسافة المقطوعة بعد مرور $هـ^{٢}$ من الثواني

الحل

$ع = \frac{دف}{دن} = \frac{لو_{هـ} ن}{ن}$

$\int دف = \int \frac{١}{ن} لو_{هـ} ن\ دن$

$ص = لو_{هـ} ن \quad دص = \frac{١}{ن} دن$

$\int \frac{١}{\cancel{ن}} \times ص \times دص \times \cancel{ن}$

$= \int ص\ دص = \frac{ص^{٢}}{٢} + جـ$

$ف = \frac{(لو_{هـ} ن)^{٢}}{٢} + جـ$

$ف(١) = \frac{٠}{٢} + جـ = ٤$

$جـ = ٤$

$ف = \frac{١}{٢} (لو_{هـ} ن)^{٢} + ٤$

$ف(هـ^{٢}) = \frac{١}{٢} (لو_{هـ} هـ^{٢})^{٢} + ٤$

$\frac{١}{٢} \times ٤ + ٤$

$٢ + ٤ = ٦$

ورقة عمل

① حل المعادلة التفاضلية

$$\sqrt{س^٢+٣}\ \frac{دص}{دس} = \frac{س ص}{لو_{هـ} ص}$$

علماً بان ص = هـ عندما س = ١

② نقطة مادية تتحرك في خط مستقيم بحيث ان سرعتها (ع) بالأمتار/ث بعد ن ثانية تعطى بالقانون

$$ع = \frac{١}{٢ن^٢+٣ن+١}$$ فاوجد

المسافة ف بدلالة ن علماً بان النقطة المادية كانت عند نقطة الاصل في بداية الحركة.

③ حل المعادلة التفاضلية

$$ص \frac{دص}{دس} = \frac{هـ^{س}}{١ - هـ^{٢س}}$$

④ تحرك جسم بتسارع يعطى بالعلاقة $ت = ٦ن + ٤$ ، اذا كانت السرعة الابتدائية للجسم = ٥م/ث والمسافة المقطوعة بعد ثانيتين من بدء الحركة ٢٦م ، جد المسافة المقطوعة بعد ثلاث ثوان

⑤ اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (١، ٨) يساوي ٤ وكانت $ق''(س) = ١٢س - ٢$ جد قاعدة الاقتران ق(س).

⑥ حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{دص}{دس} = \frac{\sqrt{ص+٢}}{\sqrt{٣س-١}}$$

⑦ جد حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{دص}{دس} = س هـ^{س-ص}$$

⑧ تتناقص حجم الماء في بركة بمعدل $\frac{١}{١٠}$ من حجمها سنوياً اذا كان حجم الماء الآن هو $هـ^{٢}$ جد حجم الماء بعد مرور ٢٠ سنة.

⑨ يتكاثر نوع من النمل في مزرعة وفق المعادلة $\frac{دك}{دن} = \frac{١}{٤}ك$ لكل ساعة حيث ك تدل على عدد النملات اذا كانت ك = ٢٠٠ في البداية (ن = ٠) ماعدد النملات بعد ٨ ساعات

⑩ يتحرك جسم بحيث تسارعه ت = ٢ع حيث ع السرعه ع > ٠ فاذا كانت سرعته الابتدائية ٤م/ث وموقعه الابتدائي ف(٠) = ٠م جد المسافه المقطوعه بعد مرور ٣ ث

⑪ يتحرك جسم بحيث ان تسارعه ت يعطى بالعلاقة ت ، ع = ٥٠ ، ع > ٠ اوجد المسافه التي تقطعها الجسم بعد ٦ ثانيه من بدء الحركه اذا علمت ان سرعته عند بدء الحركه ٣سم/ث وان ف = ١٨ عندما ن = ٠

⑫ وعاء اسطواني الشكل نصف قطره ٢٠سم وارتفاعه ١٦سم ينصب منه الماء حسب العلاقة $\frac{دح}{دن} = ٢\pi ن$ سم³/ث اذا كان الوعاء فارغاً فكم ثانية سيفرغ حتى يمتلئ بالماء

⑬ اطلقت كرة راسياً للاعلى من سطح برج ارتفاعه ٨٠م بسرعه ابتدائية قدرها ٣٠م/ث وتسارع -١٠م/ث² جد سرعة الكره لحظة ارتطامها بالارض

⑭ حل المعادلة التفاضلية

(٤ + ٤ظاس + ظا^{٢}س) $\frac{دص}{دس}$ = ٧ + ٧ظا^{٢}س

اجابات ورقة العمل

①

$$\frac{\text{دص}\times\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}}{\text{ص}} = \frac{\text{س دس}}{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٣}}}$$

$$\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}}{\text{ص}}\,\text{دص} = \int \frac{\text{س دس}}{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٣}}}$$

① $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}}{\text{ص}} = \int \frac{\text{ل}}{\cancel{\text{ص}}} \times \cancel{\text{ص}}\,\text{دل}$ $\text{لوص} = \text{ل}$ $\frac{\text{١}}{\text{ص}} = \text{دل}$

$$= \int \text{ل دل} = \frac{\text{ل}^{\text{٢}}}{\text{٢}} = \frac{(\text{لوص})^{\text{٢}}}{\text{٢}}$$

② $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}+\text{٣}}}\,\text{دس}$ $\text{ع} = \sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٣}}$

$$\text{ع}^{\text{٢}} = \text{س}^{\text{٢}}+\text{٣}$$

$$\cancel{\text{٢}}\text{ع دع} = \cancel{\text{٢}}\text{س دس}$$

$$= \int \frac{\cancel{\text{س}}}{\cancel{\text{ع}}} \times \frac{\cancel{\text{ع}}\,\text{دع}}{\cancel{\text{س}}} = \int \text{دع}$$

$$= \text{ع} + \text{جـ}$$

$$\frac{(\text{لوص})^{\text{٢}}}{\text{٢}} = \text{ع} + \text{جـ}$$

$$= \sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٣}} + \text{جـ}$$

---

⑤ $\int \text{ع} = \int \frac{\text{١}}{\text{٢ن}^{\text{٢}}+\text{٣ن}+\text{١}}\,\text{دن}$

$$\text{ف(ن)} = \int \frac{\text{أ}}{\text{٢ن}+\text{١}} + \frac{\text{ب}}{\text{ن}+\text{١}}$$

$$\text{١} = \text{أ(ن}+\text{١)} + \text{ب(٢ن}+\text{١)}$$

$$\text{ن} = -\text{١} \leftarrow \text{١} = \text{ب}$$

$$\text{ن} = -\tfrac{\text{١}}{\text{٢}} \leftarrow \text{١} = \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \text{٢}$$

$$\text{ف(ن)} = \int \frac{\text{٢}}{\text{٢ن}+\text{١}} + \frac{\text{١}}{\text{ن}+\text{١}}$$

$$= \text{لو}|\text{٢ن}+\text{١}| + \text{لو}|\text{ن}+\text{١}| + \text{جـ}$$

$$\text{ف(٠)} = \text{٠} \Leftarrow \text{جـ} = \text{٠}$$

$$\text{ف(ن)} = \text{لو}|\text{٢ن}+\text{١}| + \text{لو}|\text{ن}+\text{١}|$$

---

③ $\text{ص دص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{١}-\text{هـ}^{\text{٢س}}}\,\text{دس}$

$$\int \text{ص دص} = \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{١}-\text{هـ}^{\text{٢س}}}\,\text{دس}$$

$$\frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{٢}} = -\frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{لو}|\text{١}-\text{هـ}^{\text{٢س}}| + \text{جـ}$$

---

④ $\text{ع(ن)} = \int \overline{\text{ت}}\text{(ن)} = \int \text{٦ن}+\text{٤}$

$$= \text{٣ن}^{\text{٢}}+\text{٤ن}+\text{جـ}$$

$$\text{ع(١)} = \text{٠}+\text{٠}+\text{جـ} = \text{٥} \qquad \text{جـ} = \text{٥}$$

$$\text{ع} = \text{٣ن}^{\text{٢}}+\text{٤ن}+\text{٥}$$

$$\text{ف} = \int (\text{٣ن}^{\text{٢}}+\text{٤ن}+\text{٥})\,\text{دن}$$

$$= \text{ن}^{\text{٣}}+\text{٢ن}^{\text{٢}}+\text{٥ن}+\text{جـ}$$

$$\text{ف(٢)} = \text{٨}+\text{٨}+\text{١٠}+\text{جـ} = \text{٢٦}$$

$$\text{جـ} = \text{٠}$$

$$\text{ف(ن)} = \text{ن}^{\text{٣}}+\text{٢ن}^{\text{٢}}+\text{٥ن}$$

$$\text{ف(٣)} = \text{٢٧}+\text{١٨}+\text{١٥} = \text{٦٠}$$

⑤

$ق''(س) = ١٢س - ٢$

$ق'(س) = \int (١٢س - ٢)\, دس$

$ق'(س) = ٦س^{٢} - ٢س + جـ$

لكن $ق'(١) = ٤$

$ق'(١) = ٦(١)^{٢} - ٢ \times ١ + جـ = ٤$

$جـ = ٠$

$ق'(١) = ٦س^{٢} - ٢س$

$ق(س) = \int (٦س^{٢} - ٢س)\, دس$

$ق(س) = ٢س^{٣} - س^{٢} + جـ$

$ق(١) = ٨ \Leftarrow ٢ - ١ + جـ = ٨$

$جـ = ٧$

$ق(س) = ٢س^{٣} - س^{٢} + جـ$

---

⑥ $\frac{دص}{دس} = \frac{\sqrt{ص+٢}}{\sqrt{٣س-١}}$

$\frac{دص}{\sqrt{ص+٢}} = \frac{دس}{\sqrt{٣س-١}}$

$\int (ص+٢)^{-\frac{١}{٢}}\, دص = \int (٣س-١)^{-\frac{١}{٢}}\, دس$

$٢(ص+٢)^{\frac{١}{٢}} = \frac{٢}{٣}(٣س-١)^{\frac{١}{٢}} + جـ$

---

⑦ $\frac{دص}{دس} = س\, هـ^{س-ص}$

$\frac{دص}{دس} = س\, هـ^{س} \times هـ^{-ص}$

$\int هـ^{ص}\, دص = \int س\, هـ^{س}\, دس$

$\int س\, هـ^{س}\, دس$ اجزاء

$ق = س \qquad دهـ = هـ^{س}$

$دق = دس \Leftarrow هـ = هـ^{س}$

$س\, هـ^{س} - \int هـ^{س}\, دس = هـ^{ص}$

$هـ^{ص} = س\, هـ^{س} - هـ^{س} + جـ$

---

⑧ $\frac{دع}{دن} = \frac{١}{١٠} ع$

$\int \frac{دع}{ع} = \int ٠٫١\, دن$

$لو_{هـ}|ع| = ٠٫١ن + جـ$

$ن = ٠ \qquad ع = هـ^{٢٥}$

$ع = هـ^{٠٫١ن + جـ}$

$هـ^{٢٥} = هـ^{٠ + جـ} \Leftarrow جـ = ٢٥$

$ع = هـ^{٠٫١ن} \times هـ^{٢٥}$

$ع(٢٠) = هـ^{٢} \times هـ^{٢٥} = هـ^{٢٧}$

---

⑨ $\frac{دك}{\frac{١}{٤}ك} = دن$

$\int \frac{٤}{ك}\, دك = \int دن$

$٤ لو_{هـ}|ك| = ن + جـ$

$٤ لو_{هـ} ٢٠٠ = ٠ + جـ \qquad جـ = ٤ لو_{هـ} ٢٠٠$

$٤ لو_{هـ}|ك| = ن + ٤ لو_{هـ} ٢٠٠$

⑩ تَ = ٢ع ⇐ $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = ٢ع

← ∫ $\frac{\text{دع}}{\text{ع}}$ = ∫ ٢ دن

لوهـ|ع| = ٢ن + جـ

ع(٠) = ٤

لوهـ|٤| = جـ

ع = هـ$^{\text{٢ن + لوهـ٤}}$ = هـ$^{\text{٢ن}}$ + ٤

∫ع = ∫ هـ$^{\text{٢ن}}$ + ٤

ف = $\frac{\text{هـ}^{\text{٢ن}}}{\text{٢}}$ + ٤ن + جـ

ف(٠) = $\frac{\text{هـ}^{\text{٠}}}{\text{٢}}$ + ٤ × ٠ + جـ = ٥

$\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ + جـ = ٥ ⇐ جـ = ٥ − $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ = $\frac{\text{٩}}{\text{٢}}$

ف(ن) = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ هـ$^{\text{٢ن}}$ + ٤ن + $\frac{\text{٩}}{\text{٢}}$

ف(٣) = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ هـ$^{\text{٦}}$ + ٦ + $\frac{\text{٩}}{\text{٢}}$

---

⑪ تَ.ع = ٠٫٥ ←

$\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$.ع = ٠٫٥ ← ع دع = ٠٫٥ دن

∫ع دع = ∫٠٫٥ دن

$\frac{\text{ع}^{\text{٢}}}{\text{٢}}$ = ٠٫٥ ن + جـ

ع(٠) = ٣ ← $\frac{\text{٩}}{\text{٢}}$ = جـ

$\frac{\text{ع}^{\text{٢}}}{\text{٢}}$ = ٠٫٥ ن + $\frac{\text{٩}}{\text{٢}}$

ع$^{\text{٢}}$ = ن + ٩ ⇐ ع = $\sqrt{\text{ن+٩}}$

∫ع = ∫ $\sqrt{\text{ن+٩}}$ دن

ف = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$(ن + ٩)$^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}$ + جـ

ف(٠) = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}(٩)^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}$ + جـ = ١٨

١٨ + جـ = ١٨ ⇐ جـ = ٠

ف(٢٧) = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}(٢٧)^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}$

---

⑫ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ = ٢πن ← دح = ٢πن دن

∫دح = ∫٢πن دن

ح = πن$^{\text{٢}}$ + جـ

ح(٠) = ٠ ← جـ = ٠

ح = πن$^{\text{٢}}$ حجم الوعاء

= πنق$^{\text{٢}}$ع   حتى يمتلئ

= π١٠٠ × ١٦

= ١٦٠٠π

١٦٠٠π = πن$^{\text{٢}}$ ← ن = $\sqrt{\text{١٦٠٠}}$

= ٤٠ ثانية

---

⑬ ∫تَ(ن) = ∫− ١٠ دن ← ع(ن) = −١٠ن + جـ

ع(٠) = ٣٠ ← جـ = ٣٠

ع(ن) = −١٠ن + ٣٠ ← ∫ع(ن) = ∫−١٠ن + ٣٠

ف(ن) = −٥ن$^{\text{٢}}$ + ٣٠ن + جـ

ف(٠) = ٨٠ ← جـ = ٨٠

ف(ن) = −٥ن$^{\text{٢}}$ + ٣٠ن + ٨٠   يعود

للأرض ف(ن) = −٥ن$^{\text{٢}}$ + ٣٠ن + ٨٠ = ٠

بالقسمة على −٥ ← ن$^{\text{٢}}$ − ٦ن − ١٦ = ٠

(ن − ٨)(ن + ٢) = ٠   ن = ٨   ن ≠ −٢

ع(٨) = −١٠ × ٨ + ٣٠ = −٥٠ م/ث

---

⑭ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{٧(١ + ظا}^{\text{٢}}\text{س)}}{\text{(ظاس + ٢)}^{\text{٢}}}$ = $\frac{\text{٧قا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{(ظاس + ٢)}^{\text{٢}}}$

∫$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ∫$\frac{\text{٧قا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{(ظاس + ٢)}^{\text{٢}}}$ ص = ظاس + ٢   دص = قا$^{\text{٢}}$س دس

= ∫$\frac{\text{٧}\cancel{\text{قا}^{\text{٢}}\text{س}}}{\text{ص}^{\text{٢}}}$ × $\frac{\text{دص}}{\cancel{\text{قا}^{\text{٢}}\text{س}}}$ = $\frac{\text{٧ص}^{\text{−١}}}{\text{−١}}$ + جـ

ص = $\frac{\text{−٧}}{\text{ظاس + ٢}}$ + جـ

رسم الاقترانات

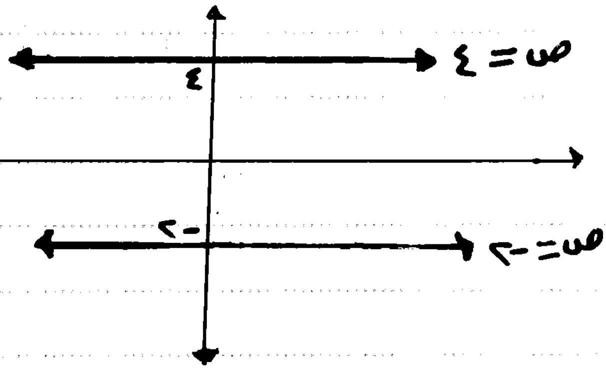
① الاقتران الثابت

ص = م حيث م: ثابت

خط افقي موازي لمحور السينات ويقطع محور الصادات بالنقطة (٠، م)

مثال

ص = ٤ ، ص = -٢

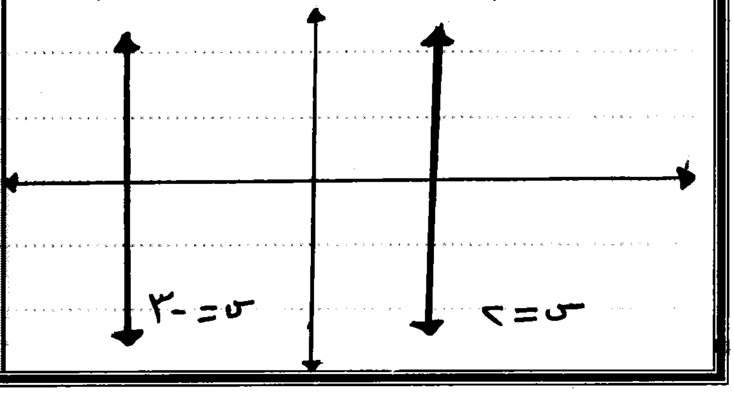


معادلة محور السينات هي ص = ٠

س = م : م ثابت

خط موازي لمحور الصادات وعمودي على السينات

مثال ارسم س = ٢ ، س = -٣



② الاقتران الخطي

ص = م س + ب

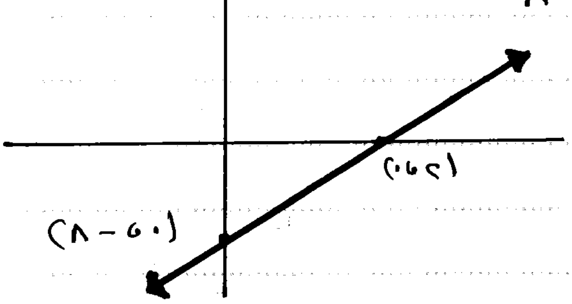
نجد نقطة تقاطعه مع محور السينات ص = ٠

نجد نقطة تقاطعه مع محور الصادات س = ٠

مثال

١) ارسم ص = ٤ س - ٨

س	٠	٢
ص	-٨	٠



③ الاقتران التربيعي

ص = م $س^{2}$ + ن س + جـ

نجد احداثيات الرأس ($\frac{-ن}{٢م}$ ، ق($\frac{-ن}{٢م}$))

معامل $س^{2}$ موجب ∪

معامل $س^{2}$ سالب ∩

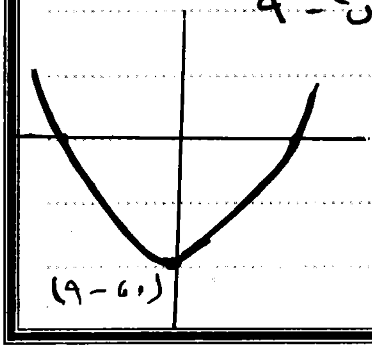
مثال: ارسم ص = $س^{2}$ - ٩

الحل

الرأس

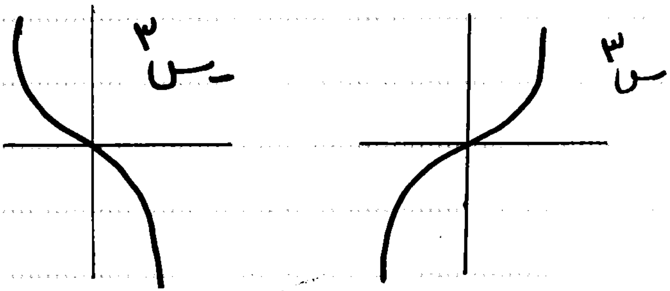
$\frac{-ن}{٢م}$ = ٠ ق(٠) = -٩

(٠، -٩) للاعلى



④ الأقتران التكعيبي

على صورة ص = أ س^{٣} + ب

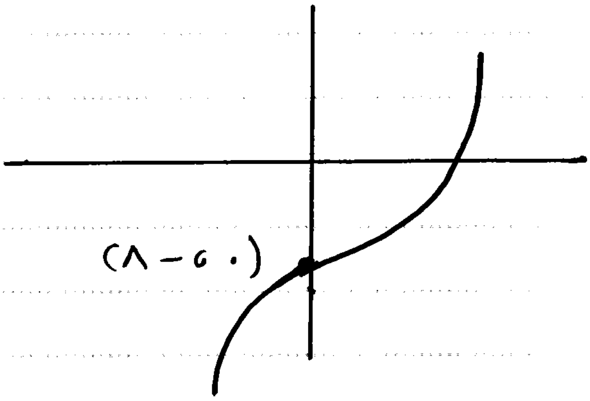


مثال

ارسم ص = س^{٣} − ٨

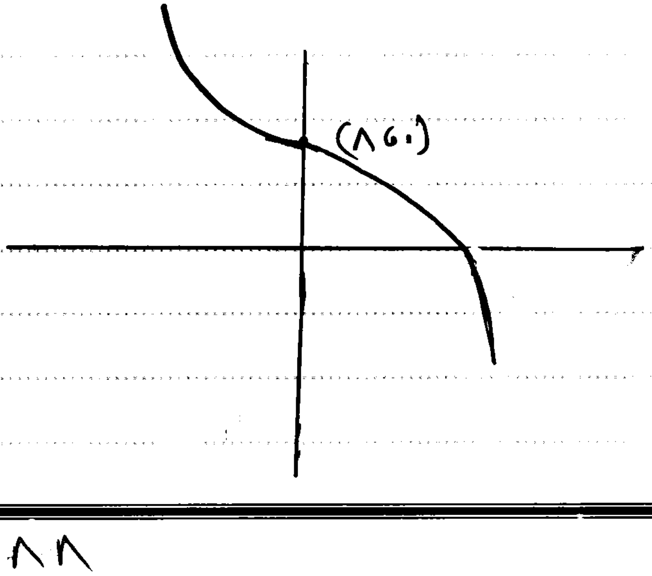
نجد نقطة تقاطعه مع الصادات

بوضع س = ٠ ، ← ص = − ٨



ارسم ص = ٨ − س^{٣}

س = ٠ ← ص = ٨



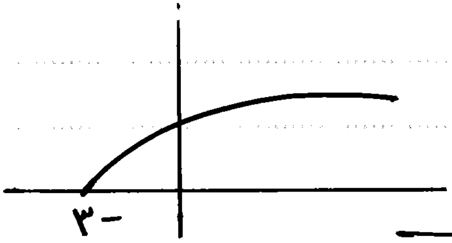
⑤ الجذر التربيعي

نحدد مجالة

① ص = $\sqrt{س+٣}$

س+٣ = ٠ ← س = −٣

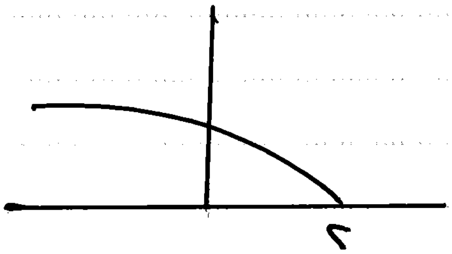
س ≥ −٣



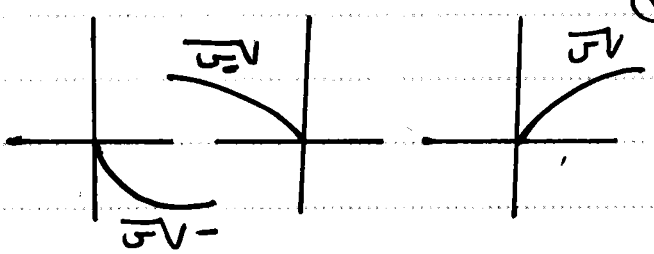
② ص = $\sqrt{٤-٢س}$

٤−٢س ≥ ٠ ، ٢ ≥ س

+++ ـــ٢ــ ---

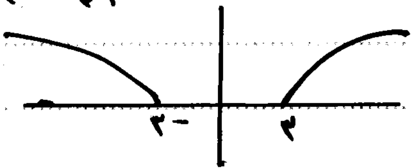


③



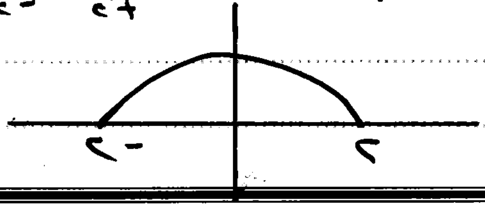
④ ص = $\sqrt{س^{٢}-٩}$

+++ ـــ٣-ـــ --- ـــ٣+ـــ +++



⑤ ص = $\sqrt{٤-س^{٢}}$

--- ـــ٢-ـــ +++ ـــ٢+ـــ ---



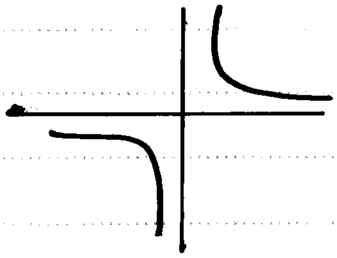
⑥ الاقتران النسبي

$$ص = \frac{م}{ب س + جـ} = \frac{ثابت}{خطي}$$

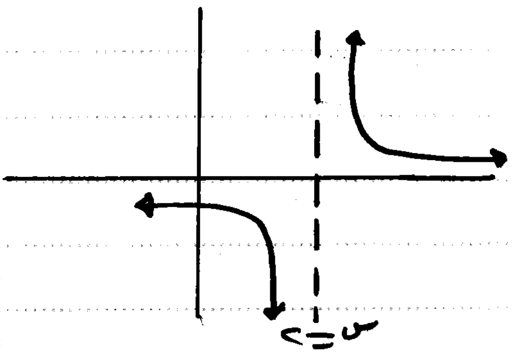
نجد صفر المقام فيكون هو خط المتقارب

مثال

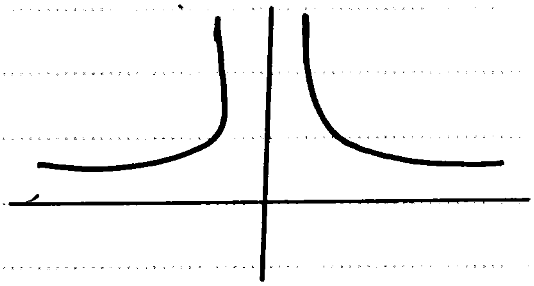
① $ص = \frac{١}{س}$ $س = ٠$ خط التقارب



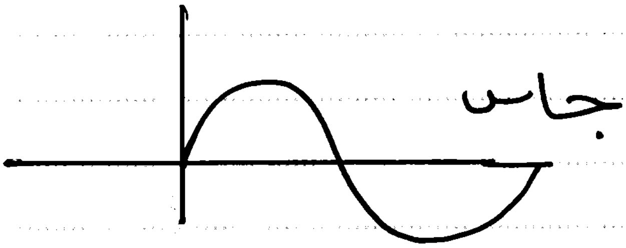
② $ص = \frac{١}{س - ٢} \Leftarrow س = ٢$

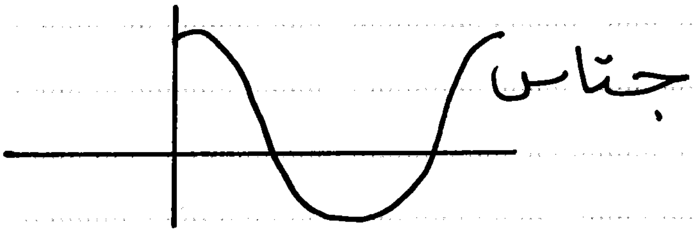


③ $ص = \frac{١}{س^٢}$

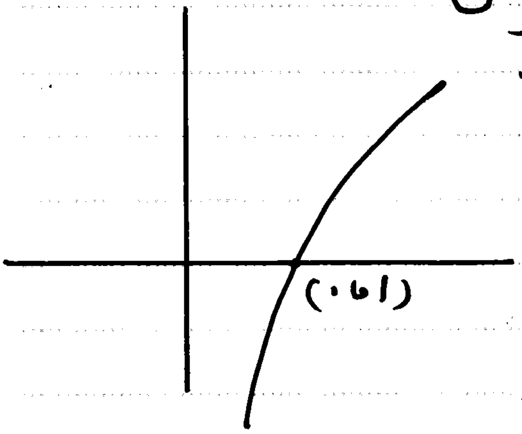


⑦ جاس ، جتاس

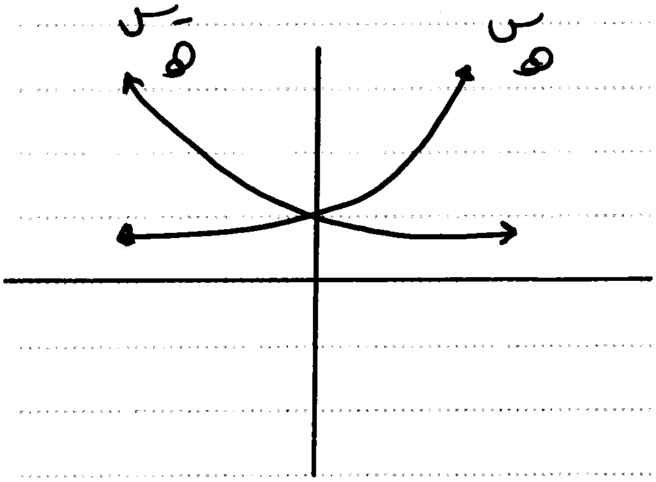




⑧ لوهـ س



⑨ $هـ^{س}$ ، $هـ^{-س}$



المساحة

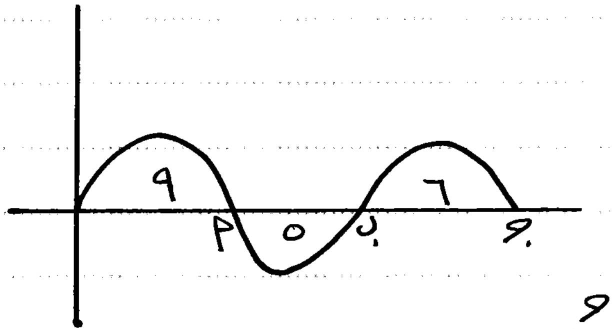
ملاحظات أولية

① المساحة قيمة موجبة دائماً بغض النظر عن موقع المنطقة

② يكون التكامل موجباً اذا وقع المنحنى فوق محور السينات

③ يكون التكامل سالباً اذا وقع المنحنى تحت محور السينات

مثال ①

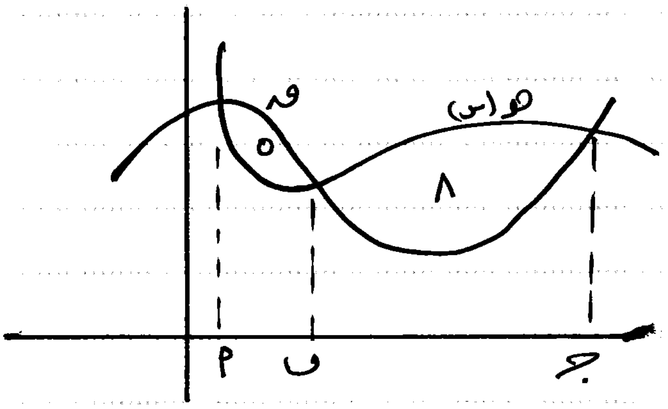


جد $\int^{\text{جـ}} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

$= \int^{\text{أ}} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

= ٩ − ٥ + ٦ = ١٠

مثال ②



جد $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} (\text{ق(س)} - \text{هـ(س)})\,\text{دس}$

$= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ق(س)} - \text{هـ(س)}) + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{هـ(س)} - \text{ق(س)}$

= ٥ + (−٨)

= −٣

الحالة الأولى

المساحة المحصورة بين منحنى ومحور السينات

طريقة الحل

① نساوي الأقتران بالصفر ونجد نقاط تقاطعه مع محور السينات فاذا كانت نقاط التقاطع بين المستقيمين تجزء التكامل ، واذا كانت خارج المستقيمين فانها تهمل

$$\text{المساحة (م)} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{ق(س)}|\,\text{ءس}$$

② محور السينات هو اقتران معادلته ص = ٠

س = أ ، س = ب هي الفترة [أ ، ب] وهي حدود التكامل

مثال ①

احسب المساحة المحصورة بين ق(س) = ٢س ، ومحور السينات والمستقيمان س = ١ ، س = ٢

الحل

$\text{٢س} = \text{٠} \;,\; \text{س} = \text{٠} \notin [\text{١}\,،\,\text{٢}]$ تهمل

$$\text{م} = \int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{٢س}\,.\,\text{ءس} = \text{س}^{\text{٢}}\Big]_{\text{١}}^{\text{٢}}$$

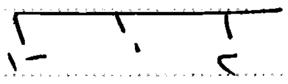
$$= |\text{٤} - \text{١}| = \text{٣}$$

مثال ②

جد المساحة المحصورة بين منحنى ق(س) = $\text{س}^{\text{٣}}$ ومحور السينات والمستقيمين س = -١ ، س = ٢

الحل

$\text{س}^{\text{٣}} = \text{٠} \longrightarrow \text{س} = \text{٠} \in [\text{-١}\,،\,\text{٢}]$



$$\text{م} = \int_{\text{-١}}^{\text{٠}} |\text{س}^{\text{٣}}|\,\text{ءس}$$

$$+ \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} |\text{س}^{\text{٣}}|\,\text{ءس}$$

$$= \int_{\text{-١}}^{\text{٠}} -\text{س}^{\text{٣}} + \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{س}^{\text{٣}}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{-\text{س}^{\text{٤}}}{\text{٤}}\Big]_{\text{-١}}^{\text{٠}} + \frac{\text{س}^{\text{٤}}}{\text{٤}}\Big]_{\text{٠}}^{\text{٢}} = +\frac{\text{١}}{\text{٤}} + \frac{\text{١٦}}{\text{٤}}$$

$$= \frac{\text{١٧}}{\text{٤}}$$

مثال ③

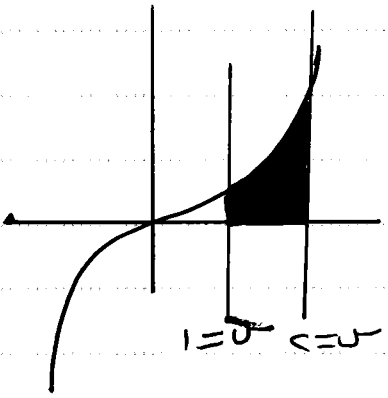
جد المساحة المحصورة بين منحنى ق(س) = س^٣ و محور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٢

الحل

$\text{س}^{٣} = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٠ \notin$ للفترة

$$\text{م} = \int_{١}^{٢} \text{س}^{٣} . \text{دس} = \left[\frac{\text{س}^{٤}}{٤}\right]_{١}^{٢}$$

$$= \frac{١٦}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{١٥}{٤}$$



مثال ④

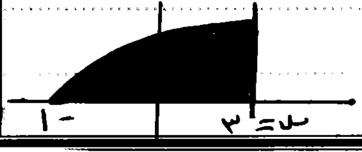
اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = $\sqrt{\text{س}+١}$ ومحور السينات والمستقيم س = ٣

الحل

$\text{س}+١ = ٠ \Leftarrow \text{س} = -١$

$$\text{م} = \int_{-١}^{٣} \sqrt{\text{س}+١}\ \text{دس} = \int_{-١}^{٣} (\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}} \text{دس}$$

$$= \frac{٢}{٣}(\text{س}+١)^{\frac{٣}{٢}}\Big]_{-١}^{٣} = \frac{١٦}{٣}$$



مثال ⑤

جد المساحة المحصورة بين منحنى ق(س) = س^٢+١ ومحوري السينات والصادات والمستقيم س = ٢

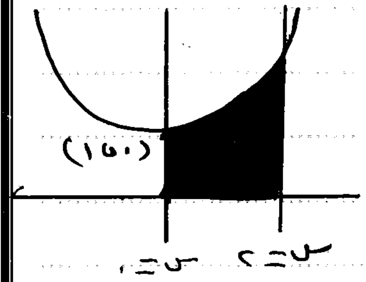
الحل

المستقيمان هما س = ٠ ، س = ٢
محور الصادات

$\text{س}^{٢}+١ \neq ٠$ لا يوجد نقاط تقاطع

$$\text{م} = \int_{٠}^{٢} (\text{س}^{٢}+١)\ \text{دس}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{س}\right]_{٠}^{٢} = \frac{١٤}{٣}$$



مثال ⑥

جد المساحة المحصورة بين منحنى ص = هـ^{٢س} ومحوري السينات والصادات والمستقيم س = ٢

الحل

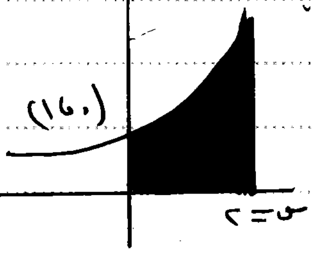
المستقيمين س = ٠ . س = ٢

$\text{هـ}^{٢\text{س}} \neq ٠$. لا تقطع محور السينات

$$\text{م} = \int_{٠}^{٢} |\text{هـ}^{٢\text{س}}|\ \text{دس} =$$

$$\frac{\text{هـ}^{٢\text{س}}}{٢}\Big]_{٠}^{٢}$$

$$= \frac{١}{٢}(\text{هـ}^{٤} - ١)$$

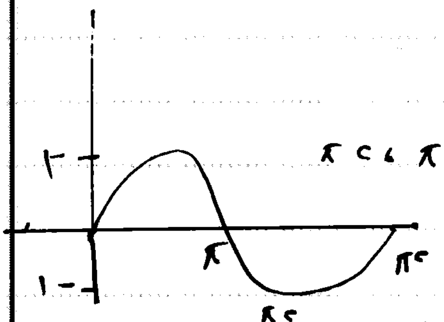


مثال ⑦

اذا كانت ق(س) = جاس ، س ∈ [٠، ٢π]
جد كلا مما يأتي

① مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات في الفترة [٠، ٢π]

② $\int_{٠}^{٢\pi}$ ق(س) دس .



الحل

① جاس = ٠ ، س = π ، ٢π

م = $\int_{٠}^{٢\pi}$ |ق(س)| دس = $\int_{٠}^{٢\pi}$ |جاس| دس

= $\int_{٠}^{\pi}$ جاس دس + $\int_{\pi}^{٢\pi}$ −جاس دس

= −جتاس $]_{٠}^{\pi}$ + جتاس $]_{\pi}^{٢\pi}$

= (−جتا(π) + جتا(الصفر)) +
(جتا(٢π) − جتا π)

= ١ + ١ + ١ + ١ = ٤ وحدة مساحة

② $\int_{٠}^{٢\pi}$ ق(س) دس = $\int_{٠}^{٢\pi}$ جاس دس

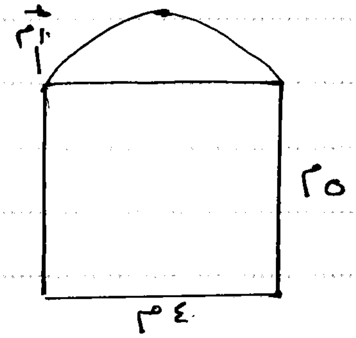
= − جتاس $]_{٠}^{٢\pi}$

= (− جتا(٢π) + جتا(٠))

= −١ + ١ = صفر

مثال ⑧

الشكل المجاور يمثل المدخل الجنوبي لوزارة التربية والتعليم وهو على شكل مستطيل يعلوه قوس على شكل قطع مكافئ؛ جد مساحة واجهة هذا المدخل :-



الحل

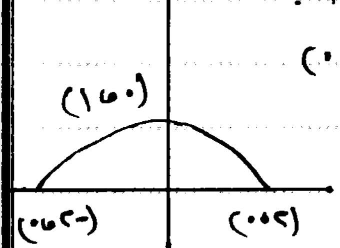
مساحة المستطيل

= ٥ × ٤ = ٢٠ م²

ولإيجاد معادلة القطع المكافئ (التربيعي)

ق(س) = م س² + ب س + جـ

النقاط (٠، ١)، (٢، ٠)
(−٢، ٠) تقع على منحناه



(٠، ١) ← جـ = ١

(٢، ٠) ← ٠ = ٤م + ٢ب + ١

(−٢، ٠) ← ٠ = ٤م − ٢ب + ١　بالجمع

⇐ ٨م = −٢ ← م = $-\frac{١}{٤}$

بالتعويض في الأولى ٠ = −١ + ٢ب + ١

ق(س) = $-\frac{١}{٤}$ س² + ١　　ب = صفر

م = $\int_{-٢}^{٢}$ |١ − $\frac{١}{٤}$ س²| دس + ٢٠

س − $\frac{١}{١٢}$ س³ $]_{-٢}^{٢}$ + ٢٠

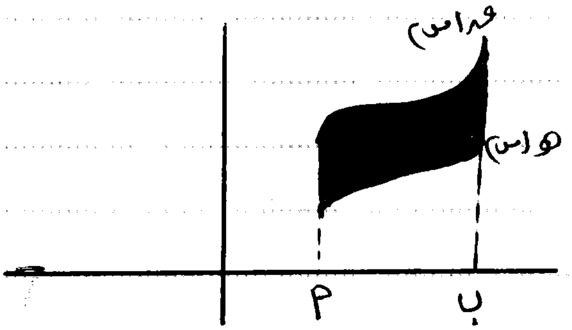
= (٢ − $\frac{٨}{١٢}$) − (−٢ + $\frac{٨}{١٢}$) + ٢٠

= ٢ − $\frac{٨}{١٢}$ + ٢ − $\frac{٨}{١٢}$ = ٤ − $\frac{١٦}{١٢}$ + ٢٠

= $\frac{٣٢}{١٢}$ + ٢٠

الحالة الثانية

المساحة المحصورة بين اقترانين



المساحة بين ق(س) ، هـ(س) والمستقيمين س = أ ، س = ب

$$م = \int_{أ}^{ب} \left| ق(س) - هـ(س) \right| . ءس$$

خطوات الحل

① نحدد الأقترانات والاعمدة (المستقيمات)

② نساوي الاقترانين ببعضهما لايجاد نقاط التقاطع ق(س) = هـ(س)

③ نرسم الأعمدة ثم الأقترانات

④ نحدد المنطقة المشتركة بينهما.

⑤ نجري التكامل.

مثال ①

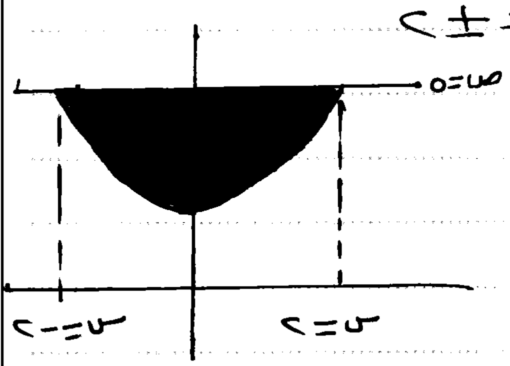
جد المساحة المحصورة بين ق(س) = $س^٢ + ١$ والمستقيم ص = ٥

الحل

نجد نقط التقاطع

$س^٢ + ١ = ٥ \Leftarrow س^٢ = ٤$

$س = \pm ٢$



$$م = \int_{-٢}^{٢} (٥ - س^٢ - ١) \, ءس$$

$$= \int_{-٢}^{٢} (٤ - س^٢) \, ءس$$

$$= \left[٤ - \frac{س^٣}{٣} \right]_{-٢}^{٢} = \frac{٣٢}{٣}$$

مثال ②

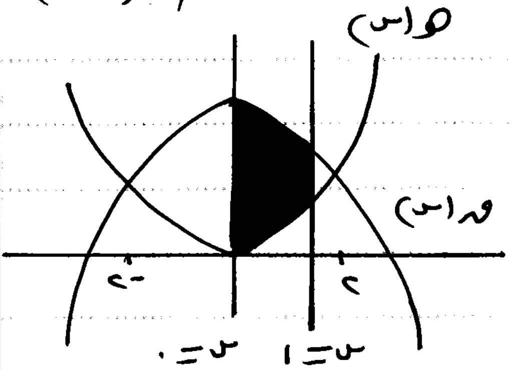
جد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = ٨ − س² ، هـ(س) = س² والمستقيمين س = ٠ ، س = ١

الحل

$٨ - س^{٢} = س^{٢} \leftarrow ٢س^{٢} = ٨$

$س^{٢} = ٤ \leftarrow س = \pm ٢$

$\not\ni (٠،١)$



$$م = \int_{٠}^{١} |٨ - س^{٢} - س^{٢}| \, ءس$$

$$= \int_{٠}^{١} |٨ - ٢س^{٢}| \, ءس = \int_{٠}^{١} (٨ - ٢س^{٢}) \, ءس$$

$$= ٨س - \frac{٢}{٣}س^{٣} \Big]_{٠}^{١} = \frac{٢٢}{٣}$$

مثال ③

اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين ص − س³ = ٠ ، $\frac{ص}{س} = ٤$

الحل

نرتب الاقترانين

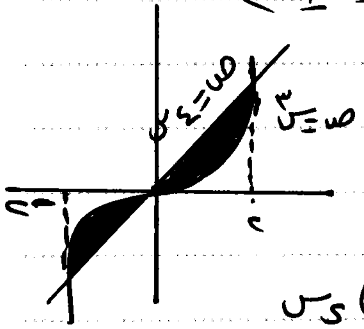
ص = س³ ، ص = ٤س

نجد نقط التقاطع

$س^{٣} = ٤س \Leftarrow س^{٣} - ٤س = ٠$

$س(س^{٢} - ٤) = ٠ \Leftarrow$

$س = ٠ \quad س = \pm ٢$



$$م = \int_{-٢}^{٠} (س^{٣} - ٤س) \, ءس + \int_{٠}^{٢} (٤س - س^{٣}) \, ءس$$

$$= ٤ + ٤ = ٨$$

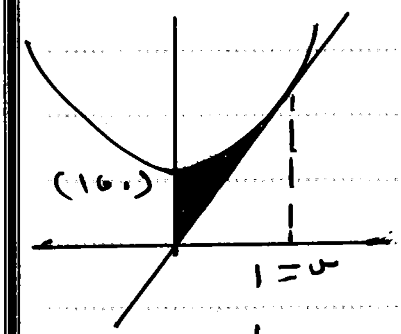
مثال ④

جد المساحة المحصورة بين ق(س) = س² + ١ ، والمستقيم هـ(س) = ٢س ومحور الصادات

الحل

$س^{٢} + ١ = ٢س \Leftarrow س^{٢} - ٢س + ١ = ٠$

$(س - ١)(س - ١) = ٠ \Leftarrow س = ١$



$$م = \int_{٠}^{١} |س^{٢} + ١ - ٢س| \, ءس$$

$$= \int_{٠}^{١} |س^{٢} - ٢س + ١| \, ءس$$

$$= \frac{س^{٣}}{٣} - س^{٢} + س \Big]_{٠}^{١}$$

$$\frac{١}{٣} - ١ + ١ = \frac{١}{٣}$$

مثال ⑤

جد مساحة المنطقة المظللة بين $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}$

$\text{هـ}(\text{س}) = ٢ - \text{س}$ والمستقيم $\text{س} = ٤$

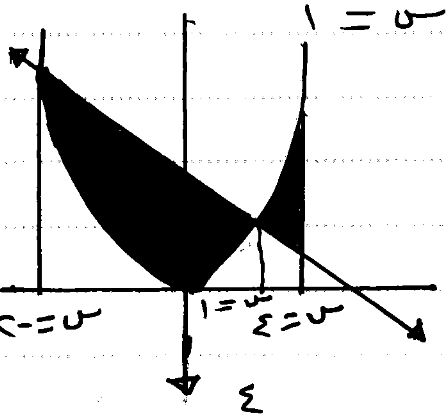
الحل

$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})$

$\text{س}^{٢} = ٢ - \text{س} \Leftarrow \text{س}^{٢} + \text{س} - ٢ = ٠$

$(\text{س} + ٢)(\text{س} - ١) = ٠$

$\text{س} = -٢ \quad \text{س} = ١$



$$\text{م} = \int_{-٢}^{١} (٢ - \text{س} - \text{س}^{٢}) + \int_{١}^{٤} (\text{س}^{٢} - ٢ + \text{س})\,\text{دس}$$

$$= \frac{٩}{٢} + \frac{١٢٣}{٦} = ٢٥$$

مثال ⑥

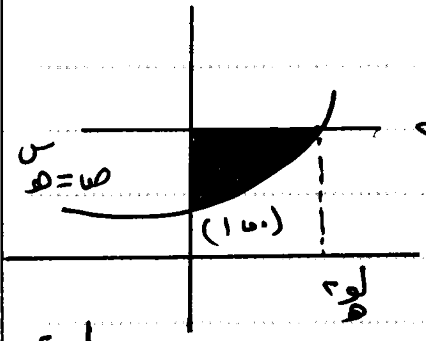
جد المساحة المحصورة بين منحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$ والمستقيم $\text{ص} = ٢$ ومحور الصادات

الحل

$\text{هـ}^{\text{س}} = ٢ \longrightarrow \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^{\text{س}} = \text{لو}_{\text{هـ}}٢$

$\longrightarrow \text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}}٢$

محور الصادات $\text{س} = ٠$



$$\text{م} = \int_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٢} |\text{هـ}^{\text{س}} - ٢|$$

$$= \int_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٢} (٢ - \text{هـ}^{\text{س}})\,\text{دس} = ٢\text{س} - \text{هـ}^{\text{س}} \Big]_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٢}$$

$$= (٢\text{لو}_{\text{هـ}}٢ - \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٢}) - (٠ - \text{هـ}^{٠})$$

$$= ٢\text{لو}_{\text{هـ}}٢ - ٢ + ١ = ٢\text{لو}_{\text{هـ}}٢ - ١$$

مثال ⑦

جد المساحة المحصورة بين منحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}$ والمنحنى $\text{س}^{٢} = ٤\text{ص}$

الحل

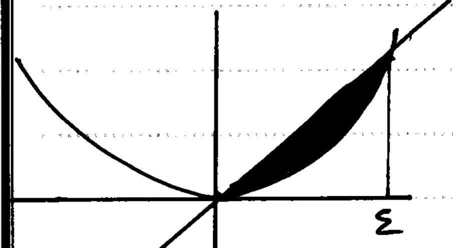
$\text{س}^{٢} = ٤\text{ص} \longrightarrow \text{ص} = \frac{١}{٤}\text{س}^{٢}$

نجد نقط التقاطع $\frac{١}{٤}\text{س}^{٢} = \text{س}$

$\longrightarrow \frac{١}{٤}\text{س}^{٢} - \text{س} = ٠$

$\text{س}(\frac{١}{٤}\text{س} - ١) = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٠$

$\text{س} = ٤$



$$\text{م} = \int_{٠}^{٤} |\text{س} - \frac{١}{٤}\text{س}^{٢}|\,\text{دس}$$

$$= \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \frac{\text{س}^{٣}}{١٢} \Big]_{٠}^{٤}$$

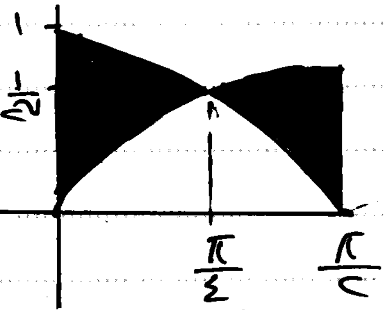
$$= (٨ - \frac{٦٤}{١٢}) - ٠ = ٨ - \frac{١٦}{٣}$$

$$= \frac{٢٤}{٣} - \frac{١٦}{٣} = \frac{٨}{٣}$$

مثال ⑧

جد المساحة المحصورة بين
ق(س) = حاس ، هـ(س) = جتاس
س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

الحل



حاس = جتاس
⇐ س = $\frac{\pi}{٤}$

$$\text{م} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (\text{جتاس} - \text{حاس}) + \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \text{حاس} - \text{جتاس}$$

$$= \Big[\text{حاس} + \text{جتاس}\Big]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} + \Big[-\text{جتاس} - \text{حاس}\Big]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{٢}} - ١ + \frac{٢}{\sqrt{٢}} - ١$$

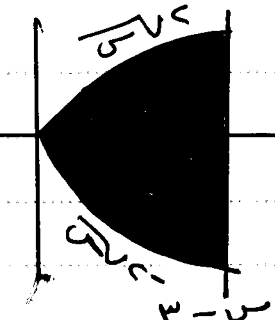
$$= \frac{٤}{\sqrt{٢}} - ٢$$

مثال ⑨

جد المساحة المحصورة بين منحنى القطع المكافئ: ص٢ = ٤س والمستقيم س = ٣

الحل

نجعل ص موضوع القانون
$\text{ص}^٢ = ٤\text{س} \Leftarrow \text{ص} = \pm ٢\sqrt{\text{س}}$
$\text{ص} = ٢\sqrt{\text{س}}$ ، $\text{ص} = -٢\sqrt{\text{س}}$
نقطة التقاطع $٢\sqrt{\text{س}} = -٢\sqrt{\text{س}}$
$٤\sqrt{\text{س}} = ٠ \quad \text{س} = ٠$



$$\text{م} = \int_{٠}^{٣} \left|٢\sqrt{\text{س}} + ٢\sqrt{\text{س}}\right|$$

$$= \int_{٠}^{٣} \left|٤\sqrt{\text{س}}\right| \text{دس}$$

$$= \int_{٠}^{٣} ٤\,\text{س}^{\frac{١}{٢}}\,\text{دس} = ٤ \times \frac{٢}{٣}\,\text{س}^{\frac{٣}{٢}}\Big]_{٠}^{٣}$$

$$= \frac{٨}{٣}\sqrt{\text{س}^٣}\Big]_{٠}^{٣} = \frac{٨}{٣}\sqrt{٢٧} ..$$

مثال ⑩

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ص = جتاس والقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (٠ ، ١) ، ($\frac{\pi}{٢}$ ، ٠)

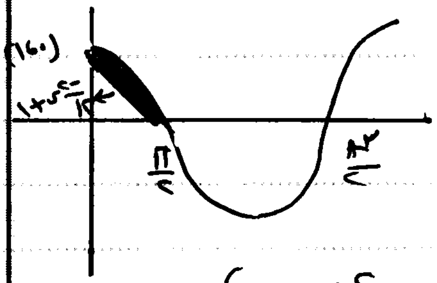
الحل

نجد معادلة القطعة المستقيمة
$$\text{ص} - \text{ص}_١ = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} (\text{س} - \text{س}_١)$$
$$\text{ص} - ١ = \frac{-١}{\frac{\pi}{٢}} (\text{س} - ٠)$$
$$\text{ص} - ١ = \frac{-٢}{\pi}\text{س} \Leftarrow$$
$$\text{ص} = \frac{-٢}{\pi}\text{س} + ١$$
نجد نقطة التقاطع جتاس = $\frac{-٢}{\pi}$س + ١
هذه المسألة صعبة في الحل لذلك نرسم

س	٠	$\frac{\pi}{٢}$	π	٣π	٢π
جتاس	١	٠	١-	٠	١

$\text{ص} = \frac{-٢}{\pi}\text{س} + ١$ س = ٠ ⇐ ص = ١
ص = ٠ س = $\frac{\pi}{٢}$

← يتبع الحل



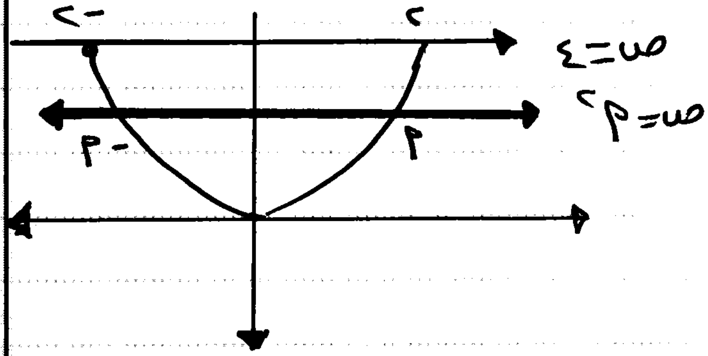
$$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (جتا س + \frac{٢}{\pi}س - ١)\, ءس$$

$$= \left[جا س + \frac{١}{\pi}س^٢ - س \right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$$= ١ - \frac{\pi}{٤}$$

مثال ⑪

اذا كان ق(س) = س² ، هـ(س) = ٤ وكان المستقيم ص = م² يقسم المساحه المحصوره بين ق(س) ، هـ(س) الى قسمين متساوين جد قيمة م؟



نجد المساحه بين ق(س) = س² ، هـ(س) = ٤

س² = ٤ ، س = ± ٢

$$م = \int_{-٢}^{٢} (٤ - س^٢)\, ءس = \left[٤س - \frac{س^٣}{٣} \right]_{-٢}^{٢}$$

$$= (٨ - \frac{٨}{٣}) - (-٨ + \frac{٨}{٣}) = \frac{٣٢}{٣}$$

نصف المساحه بين ق ، هـ

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{٣٢}{٣} = \frac{١٦}{٣}$$

المساحة المحصوره بين ق(س) = س² ، ص = م² تساوي $\frac{١٦}{٣}$

نجد نقطة التقاطع

س² = م² ⟸ س = ± م

$$م = \int_{-م}^{م} (م^٢ - س^٢)\, ءس = \frac{١٦}{٣}$$

$$\left[م^٢س - \frac{س^٣}{٣} \right]_{-م}^{م} = \frac{١٦}{٣}$$

$$(م^٣ - \frac{م^٣}{٣}) - (-م^٣ + \frac{م^٣}{٣}) = \frac{١٦}{٣}$$

$$٢م^٣ - \frac{٢م^٣}{٣} = \frac{١٦}{٣}$$

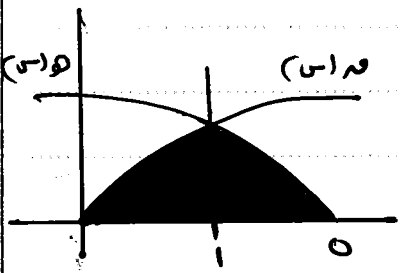
$$٦م^٣ - ٢م^٣ = ١٦$$

$$٤م^٣ = ١٦ \leftarrow م^٣ = ٤ \leftarrow \boxed{م = \sqrt[٣]{٤}}$$

مثال ⑫

جد مساحة المنطقة المحصوره بين ق(س) = ٢√س ، هـ(س) = √(٥ − س) ومحور السينات

الحل



$٢\sqrt{س} = \sqrt{٥ - س}$

بالتربيع

٤س = ٥ − س

٥س = ٥ ← س = ١

$$م = \int_{٠}^{١} ٢\sqrt{س}\, ءس + \int_{١}^{٥} \sqrt{٥ - س}\, ءس$$

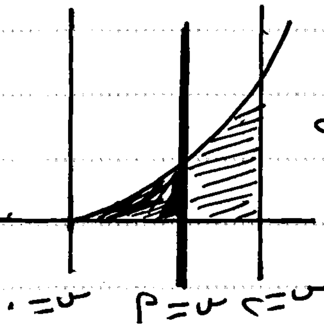
$$= \int_{٠}^{١} ٢س^{\frac{١}{٢}}\, ءس + \int_{١}^{٥} (٥ - س)^{\frac{١}{٢}}\, ءس$$

$$= \left[٢ \times \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{١} + \left[\frac{-٢}{٣}(٥ - س)^{\frac{٣}{٢}} \right]_{١}^{٥}$$

$$= \frac{٤}{٣} + \frac{١٦}{٣} = \frac{٢٠}{٣}$$

مثال ⑬

جد قيمة أ بحيث ان المستقيم $\text{س} = \text{أ}$ لقسم المساحه المحصوره بين المنحنى $\text{س} = \sqrt{\text{ص}}$ والمستقيم $\text{س} = ٢$ ومحور السينات الى قسمين متساوين



الحل

$\text{س} = \sqrt{\text{ص}} \Rightarrow \text{ص} = \text{س}^{٢}$

$\text{س} \geq ٠$

نريد ان نجد قيمة أ التي تجعل المستقيم $\text{س} = \text{أ}$ لقسم المساحه المظلله الى قسمين متساويين

$$\int_{٠}^{\text{أ}} (\text{س}^{٢} - ٠)\,\text{ءس} = \frac{١}{٢} \int_{٠}^{٢} (\text{س}^{٢} - ٠)\,\text{ءس}$$

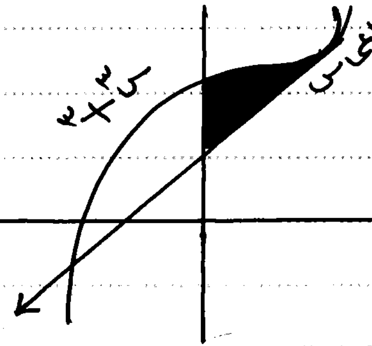
$$\left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣}\right]_{٠}^{\text{أ}} = \frac{١}{٢} \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣}\right]_{٠}^{٢}$$

$$\frac{\text{أ}^{٣}}{٣} = \frac{١}{٦} \times ٨ \Rightarrow \text{أ}^{٣} = ٤$$

$$\Rightarrow \text{أ} = \sqrt[٣]{٤}$$

مثال ⑭

جد مساحة المنطقة المحصوره بين منحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٣$ ومماس المنحنى عند النقطة (١، ٤) ومحور الصادات الواقعه في الربع الأول



نجد معادلة المماس $\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢}$

ميل المماس $= ٣(١)^{٢} = ٣ = \text{ق}'(١)$

معادلة المماس هي $\text{ص} - ٤ = ٣(\text{س} - ١)$

$\text{ص} = ٣\text{س} + ١$

$$\text{م} = \int_{٠}^{١} (\text{س}^{٣} + ٣ - ٣\text{س} - ١)\,\text{ءس}$$

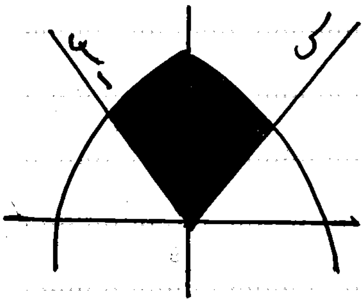
$$= \int_{٠}^{١} \text{س}^{٣} - ٣\text{س} + ٢\,\text{ءس}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^{٤}}{٤} - \frac{٣\text{س}^{٢}}{٢} + ٢\text{س}\right]_{٠}^{١} = \frac{٣}{٤}$$

مثال ⑮

جد مساحة المنطقة المحصوره بين $\text{ص} = |\text{س}|$ ، $\text{ص} = ٢ - \text{س}^{٢}$

الحل



① س ، $٢ - \text{س}^{٢}$

$\text{س} = ٢ - \text{س}^{٢}$

$\Rightarrow \text{س}^{٢} + \text{س} - ٢ = ٠$

$(\text{س} + ٢)(\text{س} - ١) = ٠$

$\text{س} = -٢$ ، $\text{س} = ١$

② $-\text{س}$ ، $٢ - \text{س}^{٢}$

$-\text{س} = ٢ - \text{س}^{٢} \Rightarrow \text{س}^{٢} - \text{س} - ٢ = ٠$

$(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١) = ٠ \quad \text{س} = ٢$

$\text{س} = -١$

$$\text{م} = \int_{-١}^{٠} (٢ - \text{س}^{٢} + \text{س})\,\text{ءس} + \int_{٠}^{١} (٢ - \text{س}^{٢} - \text{س})\,\text{ءس}$$

$$= \frac{٧}{٦} + \frac{٧}{٦} = \frac{١٤}{٦} = \frac{٧}{٣}$$

الحالة الثالثه

المساحة المحصورة بين ثلاثة اقترانات

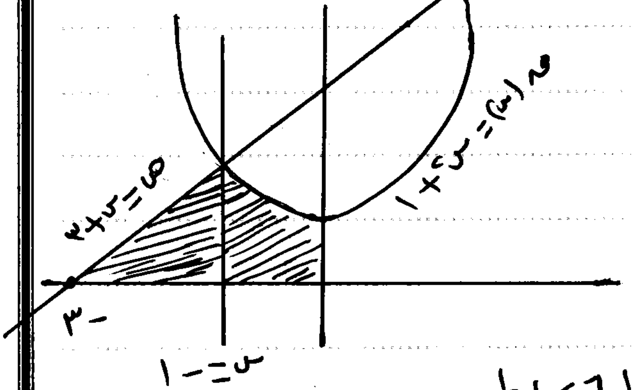
خطوات الحل

① نرسم منحنى الاقترانات ونحدد المنطقة المطلوبه والرسم هنا إجباري

② نجد الاحداثي السيني لنقاط التقاطع بين كل اقترانين وذلك بمساواتها ببعض

③ اقامة اعمدة من نقاط التقاطع على المنطقه المطلوبه لتجزئتها

④ نجد المساحة لكل منطقه



نجد نقط التقاطع

① $س^{٢} + ١ = س + ٣$

$س^{٢} - س - ٢ = ٠$ $(س - ٢)(س + ١) = ٠$

$س = ٢$ $س = -١$

② $س + ٣ = ٠ \Leftarrow س = -٣$

$م = \int_{-٣}^{-١} (س + ٣) \, ءس$

$+ \int_{-١}^{٠} (س^{٢} + ١ - ٠) \, ءس$

$\left[\frac{س^{٢}}{٢} + ٣س\right]_{-٣}^{-١} + \left[\frac{س^{٣}}{٣} + س\right]_{-١}^{٠} = \frac{٤}{٢} + \frac{٤}{٣}$

مثال ①

جد مساحة المنطقة المحصوره بين منحنى ق(س) = س٢ + ١ والمستقيم ص = س + ٣ ومحوري السينات والصادات

الحل

$ق(س) = س^{٢} + ١$ ، $ص = س + ٣$

$ص = ٠$

الرسم اجباري

مثال ②

جد المساحة المحصوره بين $ص = س^{٣}$ ، $ص - س = ٦$ ، $٢ص + س = ٠$

الحل

نجد نقط التقاطع

$ص - س = ٦ \longrightarrow ص = س + ٦$

$٢ص = -س \longrightarrow ص = -\frac{١}{٢}س$

① $س + ٦ = -\frac{١}{٢}س \Leftarrow ٣س = -١٢$

$\boxed{س = -٤}$ ← يتبع الحل

② $س^٣$ مع $ص = س + ٦$

$س^٢ = س + ٦ \leftarrow س^٣ - س - ٦ = ٠$

بالقسمة التركيبية (تجريب)

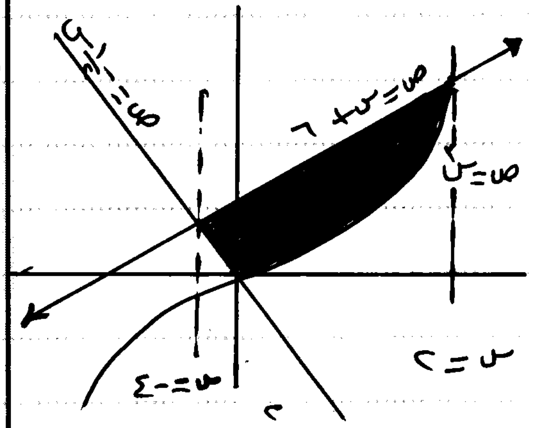
$س = ٢$

③ $س^٣$ مع $-\frac{١}{٢}س$

$س^٣ = -\frac{١}{٢}س \leftarrow س^٢ + \frac{١}{٢}س = ٠$

$س(س^٢ + \frac{١}{٢}) = ٠ \quad س = ٠$

نرسم



$$م = \int_{-٤}^{٠} (س + ٦ + \frac{١}{٢}س) + \int_{٠}^{٢} (س + ٦ - س^٣) دس$$

$$= ١٢ + ١٠ = ٢٢$$

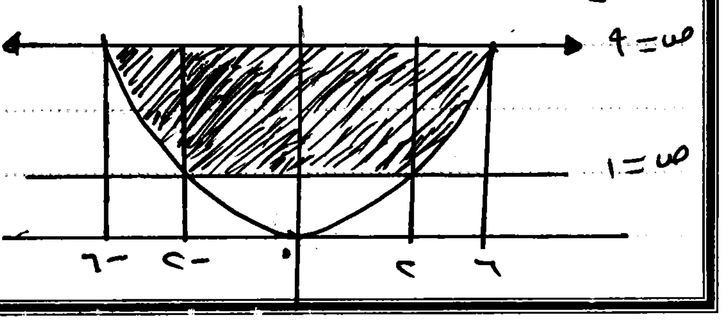
مثال ③

جد المساحة المحصورة بين $ق(س) = \frac{١}{٤}س^٢$ والمستقيمين $ص = ١$ ، $ص = ٢$

الحل

① $\frac{١}{٤}س^٢ = ١ \leftarrow س^٢ = ٤ ، س = \pm ٢$

② $\frac{١}{٤}س^٢ = ٩ \leftarrow س^٢ = ٣٦ \quad س = \pm ٦$



$$م = \int_{-٦}^{-٢} (٩ - \frac{١}{٤}س^٢) + \int_{-٢}^{٢} (٩ - ١) دس +$$
$$+ \int_{٢}^{٦} (٩ - \frac{١}{٤}س^٢)$$

$$= \frac{٥٦}{٣} + ٣٢ + \frac{٥٦}{٣}$$

$$= \frac{١١٢}{٣} + ٣٢$$

مثال ④

جد المساحة المحصورة بين $ص = س^٢ - ٤$ والمستقيمات $ص = ٢س + ٤$ ، $ص = ٠$ ، $س = ٠$ والواقعة في الربع الأول

الحل

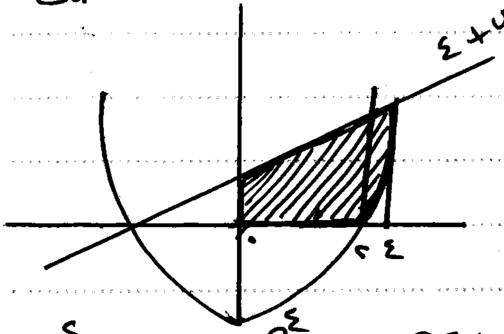
① $س^٢ - ٤$ مع محور السينات

$س^٢ - ٤ = ٠ \quad س = \pm ٢$

② $ص = س^٢ - ٤$ مع $ص = ٢س + ٤$

$\Leftarrow س^٢ - ٤ = ٢س + ٤ \leftarrow س^٢ - ٢س - ٨ = ٠$

$(س - ٤)(س + ٢) = ٠ \quad س = ٤ ، س = -٢$ تهمل



$$م = \int_{٠}^{٢} (٢س + ٤) دس + \int_{٢}^{٤} ٢س + ٤ - س^٢ + ٤$$

$$= \int_{٠}^{٢} (٢س + ٤) دس + \int_{٢}^{٤} -س^٢ + ٢س + ٨$$

$$\left[س^٢ + ٤س\right]_{٠}^{٢} \quad \left[-\frac{س^٣}{٣} + س^٢ + ٨س\right]_{٢}^{٤}$$

أكمل الحل ——— ؟؟

مثال ⑤

جد مساحة المنطقة الواقعة فوق محور السينات والمحددة بالمنحنيات $\text{ص}^{٢} = ٤\text{س}$ ، $٣\text{ص} = ٨ - ٢\text{س}$ ومحور السينات

الحل

$\text{ص}^{٢} = ٤\text{س} \Rightarrow \text{ص} = \pm ٢\sqrt{\text{س}}$

$٣\text{ص} = ٨ - ٢\text{س} \Rightarrow \text{ص} = \frac{٨ - ٢\text{س}}{٣}$

① تقاطع $\text{ص} = ٢\sqrt{\text{س}}$ مع $\text{ص} = \frac{٨ - ٢\text{س}}{٣}$

$٢\sqrt{\text{س}} = \frac{٨ - ٢\text{س}}{٣} \Rightarrow ٦\sqrt{\text{س}} = ٨ - ٢\text{س}$

$\Rightarrow ٣\sqrt{\text{س}} = ٤ - \text{س}$ بالتربيع

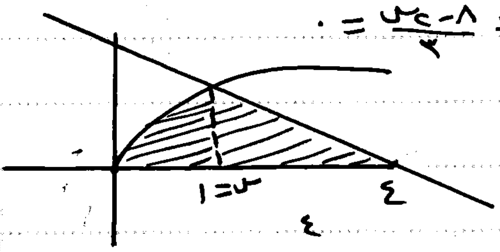
$٩\text{س} = ١٦ - ٨\text{س} + \text{س}^{٢}$

$\rightarrow \text{س}^{٢} - ١٧\text{س} + ١٦ = ٠$

$(\text{س} - ١٦)(\text{س} - ١) = ٠ \Rightarrow \text{س} = ١٦$ تهمل ، $\text{س} = ١$

② تقاطع $\text{ص} = \frac{٨ - ٢\text{س}}{٣} = ٠$

$\text{س} = ٤$



$\text{م} = \int_{٠}^{١} ٢\sqrt{\text{س}} + \int_{١}^{٤} \frac{٨ - ٢\text{س}}{٣} \, \text{ءس}$

مثال ⑥

جد المساحة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س} - ٢|$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ١٠ - \text{س}^{٢}$ ومحور الصادات والواقعة في الربع الأول

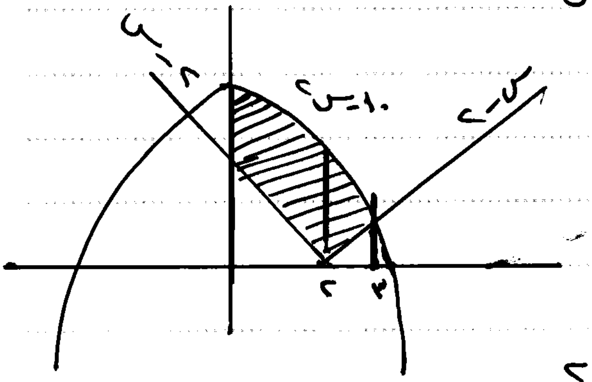
الحل

تقاطع $\text{هـ}(\text{س}) = ١٠ - \text{س}^{٢}$ مع $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} - ٢$ (الربع الأول)

$١٠ - \text{س}^{٢} = \text{س} - ٢ \Rightarrow$

$\text{س}^{٢} + \text{س} - ١٢ = ٠ \quad (\text{س} + ٤)(\text{س} - ٣) = ٠$

$\text{س} = -٤$ تهمل ، $\text{س} = ٣$ الربع الأول فقط



$\text{م} = \int_{٠}^{٢} (١٠ - \text{س}^{٢} - ٢ + \text{س}) \, \text{ءس}$

$+ \int_{٢}^{٣} (١٠ - \text{س}^{٢} - \text{س} + ٢) \, \text{ءس}$

--- أكمل التكامل

مثال ⑦

جد مساحة المنطقة المحصورة بين $\text{ق}(\text{س}) = ١ - ٣\text{س}^{٢}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = ٢\text{س}$ والمستقيم $\text{ص} = ٢$ ومحور الصادات

الحل

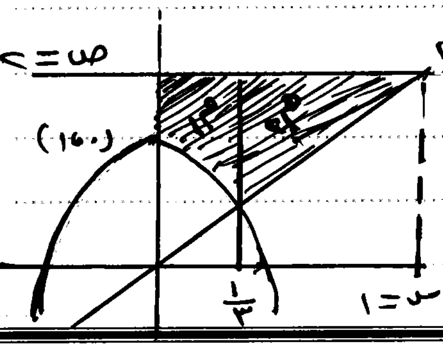
تقاطع ق(س) مع هـ(س)

$١ - ٣\text{س}^{٢} = ٢\text{س} \Rightarrow ٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١ = ٠$

$(٣\text{س} - ١)(\text{س} + ١) = ٠ \rightarrow \text{س} = -١$ ، $\text{س} = \frac{١}{٣}$

تقاطع هـ(س) مع ص = ٢

$٢\text{س} = ٢ \Rightarrow \text{س} = ١$



$\text{م} = \int_{٠}^{\frac{١}{٣}} (٢ - ١ + ٣\text{س}^{٢})$

$+ \int_{\frac{١}{٣}}^{١} ٢ - ٢\text{س}$

أكمل الحل؟

مثال ⑧

جد المساحة المحصورة بين ق(س) = س
هـ(س) = $\frac{١}{س}$ ، ل(س) = ٣

الحل

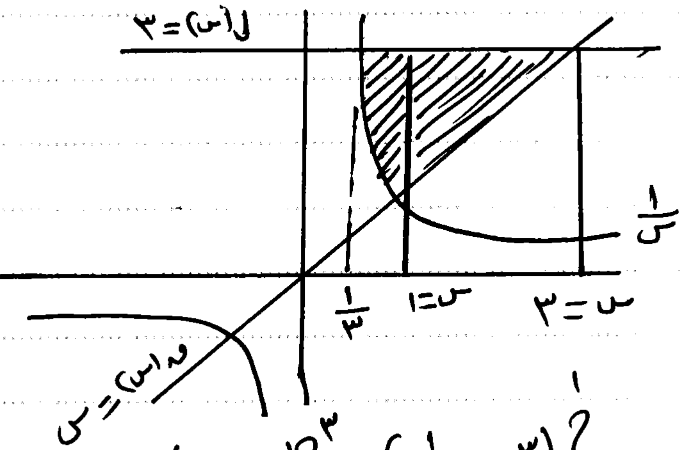
تقاطع هـ(س) مع ق(س)

$س = \frac{١}{س} \rightarrow س^٢ = ١ \quad س = \pm ١$

تقاطع هـ(س) مع ل(س)

$\frac{١}{س} = ٣ \longrightarrow س = \frac{١}{٣}$

تقاطع ق(س) مع ل(س) ← س = ٣

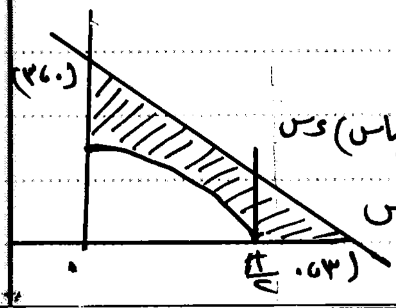


$$م = \int_{\frac{١}{٣}}^{١} (٣ - \frac{١}{س}) + \int_{١}^{٣} (٣ - س)\, دس$$

مثال ⑨

جد المساحة المحصورة بين ق(س) = جتاس
س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] والمستقيم ص = ٣ − س
ومحوري السينات والصادات

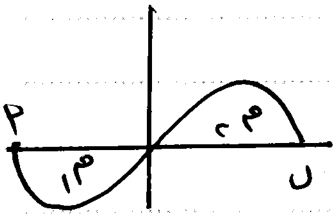
الحل



$$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (٣ - س - جتاس)\, دس + \int_{\frac{\pi}{٢}}^{٣} (٣ - س)\, دس$$

مثال ⑩

في الشكل المجاور اذا كانت مساحة المنطقة م١ تساوي ٩ وحدات مربعة ومساحة المنطقة م٢ تساوي ٤ وحدات مربعة



(أ) اوجد $\int_{م}^{ن} ق(س)\, دس$

(ب) جد مساحة المنطقة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات = ح [م ، ن]

الحل

(أ) $\int_{م}^{ن} ق(س)\, دس = \int_{م}^{٠} ق(س)\, دس + \int_{٠}^{ن} ق(س)\, دس$

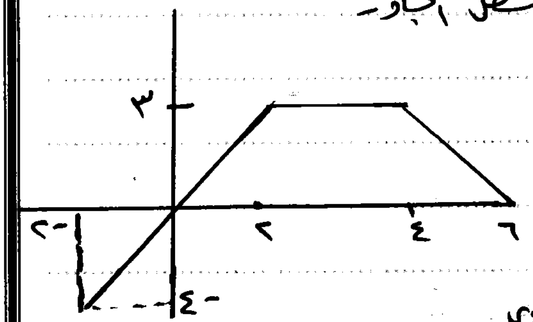
$= -٩ + ٤ = -٥$

(ب) م = م١ + م٢ = ٩ + ٤ = ١٣

مثال ⑪

اعتمد على الشكل المجاور

اوجد ما يلي



(أ) $\int_{-٢}^{٦} ق(س)\, دس$

الحل = مساحة شبه المنحرف + مساحة المثلث

$= \frac{١}{٢}(٢ + ٦)\, ٣ + \frac{١}{٢} \times ٢ \times ٤ = ١٦$

$\int_{-٢}^{٦} ق(س)\, دس = \overset{١٢ + ٤}{-٤ + ١٢} = ٨$

(ب) المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور السينات في الفترة [−٢ ، ٦] = ٤ + ١٢ = ١٦

ورقة عمل

① اوجد المساحة المحصورة بين
$ق(س) = -\frac{١}{٥}س + ٧$ ، $هـ(س) = |س - ١|$

② ما مساحة المنطقة المحصورة بين
$ق(س) = س^٣ + س^٢$ ، $هـ(س) = س^٣ + ١$

③ اوجد المساحة المحصورة بين
$ص = جاس$ ، $ص = ٢$ ، $س = \pi$

④ اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين
منحنى الاقتران $ق(س) = ٤ - س^٢$
ومحور الصادات والمستقيمين
$ص = س - ٢$ ، $ص = ٦ - س$

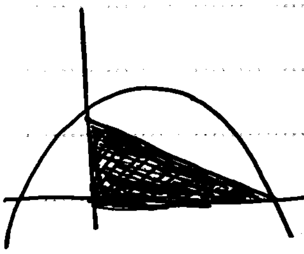
⑤ استخدم فكرة التكامل في
حساب مساحة المثلث الذي
رؤوسه
(١ ، ٠) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٣)

⑥ اوجد المساحة المحصورة بين
$ق(س) = \frac{١}{س + ٢}$
والمستقيم $س + ٦ص = ٥$

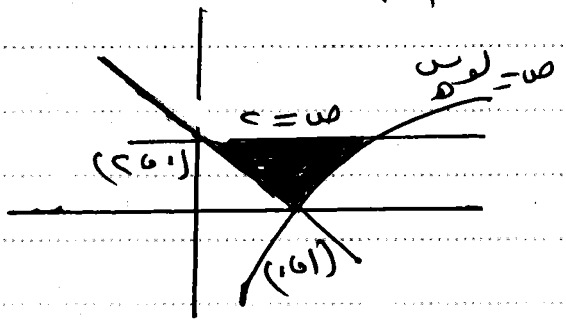
⑦ اوجد المساحة المحصورة بين $ص = \sqrt{س}$
$ص + س = ٠$ ، $ص - ٢ = ٠$

⑧ اوجد المساحة المحصورة بين
$ق(س) = لو_{هـ} س$ ومحور الصادات ومحور
السينات والمستقيم $ص = ٢$

⑨ معتمداً الرسم المجاور اذا كان
$ق(س) = (١ + س)(جـ - س)$ وكانت
مساحة المثلث تساوي (٨) وحدات
فجد المساحة المحصورة بين ق(س) ومحور
السينات =



⑩ اوجد مساحة المنطقة المظللة
في الشكل المجاور



اجابات ورقة العمل

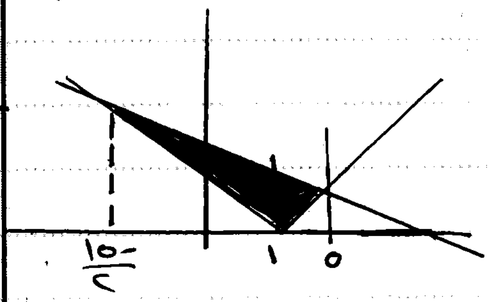
①

ق(س) = هـ(س)

$-\frac{1}{5}س + ٧ = |س - ١|$

① $-\frac{1}{5}س + ٧ = س - ١ \Rightarrow س = ٥$

② $-\frac{1}{5}س + ٧ = -س + ١ \Rightarrow س = -\frac{15}{2}$



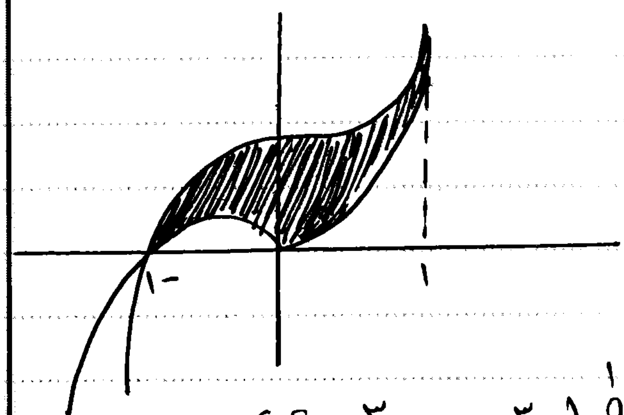
$م = \int_{-\frac{15}{2}}^{1} -\frac{1}{5}س + ٧ - (١ - س)\, دس$

$+ \int_{1}^{5} (-\frac{1}{5}س + ٧ - س + ١)\, دس$

---

② $س^3 + س^2 = س^3 + ١ \rightarrow س^2 = ١$

$س = \pm ١$

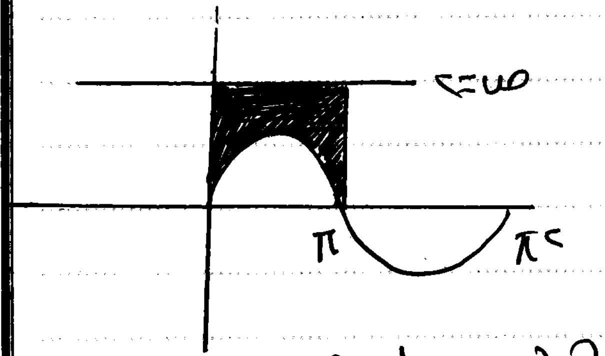


$م = \int_{-1}^{1} (س^3 + ١ - س^3 - س^2)\, دس$

$= \int_{-1}^{1} (١ - س^2)\, دس$

---

③



$م = \int_{0}^{\pi} (٢ - جاس)\, دس$

---

④

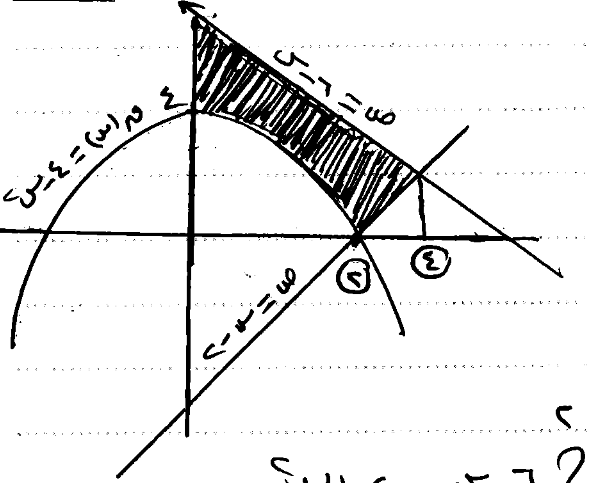
① $٤ - س^2 = س - ٢ \rightarrow س^2 + س - ٦ = ٠$

$(س + ٣)(س - ٢) = ٠$ $\boxed{س = -٣ ، س = ٢}$

② $٤ - س^2 = ٦ - س \rightarrow س^2 - س + ٢ = ٠$

لايحل لايوجد نقط تقاطع

③ $س - ٢ = ٦ - س \rightarrow ٢س = ٨ \rightarrow \boxed{س = ٤}$

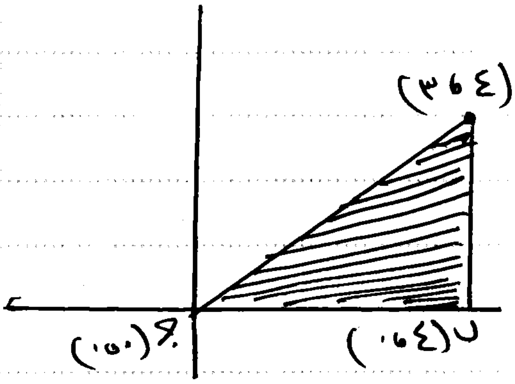


$م = \int_{0}^{2} ٦ - س - ٤ + س^2$

$+ \int_{2}^{4} ٦ - س - س + ٢$

$= \int_{0}^{2} (٢ - س + س^2)\, دس + \int_{2}^{4} ٨ - ٢س$

⑤



معادلة المستقيم أ جـ هي

ص − ٠ = $\frac{٣}{٤}$ (س − ٠)

ص = $\frac{٣}{٤}$ س

$م = \int_{٠}^{٤} \frac{٣}{٤} س \, ءس = \frac{٣}{٤} \frac{س^٢}{٢} \Big]_{٠}^{٤}$

$= \frac{٣}{٨} \times ١٦ = ٦$

للتأكد مساحة المثلث = $\frac{١}{٢} \times ٤ \times ٣ = ٦$

---

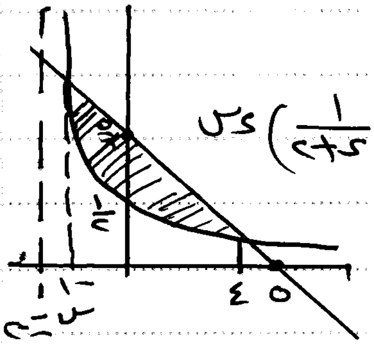
⑥ ص = $\frac{٥ - س}{٦}$

$\frac{١}{س + ٢} = \frac{٥ - س}{٦}$ ← ٦ = (س + ٢)(٥ − س)

٦ = ٥س − س^٢ + ١٠ − ٢س ⟸

س^٢ − ٣س − ٤ = ٠   (س − ٤)(س + ١) = ٠

س = ٤ ، س = −١



$م = \int_{-١}^{٤} \left(\frac{٥}{٦} - \frac{س}{٦} - \frac{١}{س+٢}\right) ءس$

---

⑦ ص١ = $\sqrt{س}$ ، ص٢ = −س   ص٣ = ٢

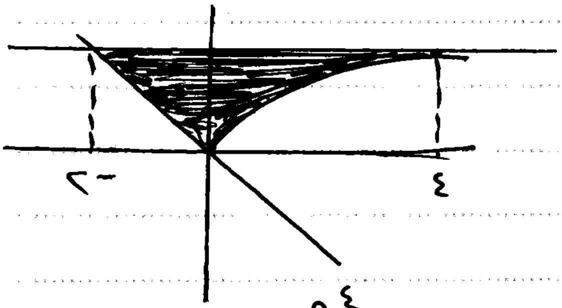
① ص١ = ص٢ ⟸ $\sqrt{س}$ = −س   بالتربيع

س = س^٢ س^٢ − س = ٠

س(س − ١) = ٠   س = ٠   س = ١ ✗ مرفوض

② ص١ = ص٣ $\sqrt{س}$ = ٢ ⟸ $\boxed{س = ٤}$

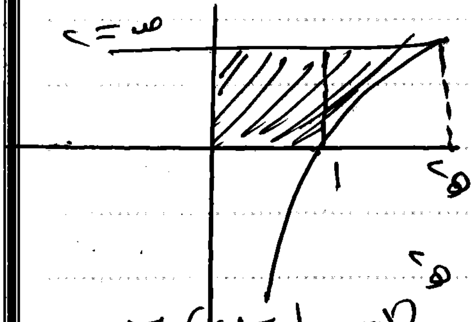
③ ص٢ = ص٣ ⟸ $\boxed{س = -٢}$



$م = \int_{-٢}^{٠} (٢ + س) ءس + \int_{٠}^{٤} (٢ - \sqrt{س}) ءس$

---

⑧ لو$_{هـ}$ س = ٢ ⟸ س = هـ^٢



$م = \int_{٠}^{١} ٢ ءس + \int_{١}^{هـ^٢} (٢ - لو_{هـ} س) ءس$

---

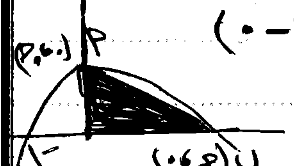
⑨ ق(٠) = (١ + ٠)(جـ − ٠)

ق(٠) = جـ

⟸ النقطة أ(٠ ، جـ)

(١ + س)(جـ − س) = ٠ ⟸

س = −١   س = جـ



نجد معادلة المستقيم أب   ص − ٠ = −١(س − جـ)

ص = −س + جـ $\int_{٠}^{جـ} (-س + جـ) ءس = ٨$
نجد جـ

⟸ $\boxed{جـ = ٤}$

$م = \int_{-١}^{٤} (١ + س)(٤ - س) ءس$

تمت بحمد الله

امنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

ناجح الجمزاوي

٠٧٩٥٦٥٦٨٨١

دعواتكم لوالدي بالرحمة والمغفرة