مكثف

النجوم

في

الرياضيات

النهايات والاتصال / الفرع العلمي

اعداد الاستاذ

إياد عماد عباد

0799366611

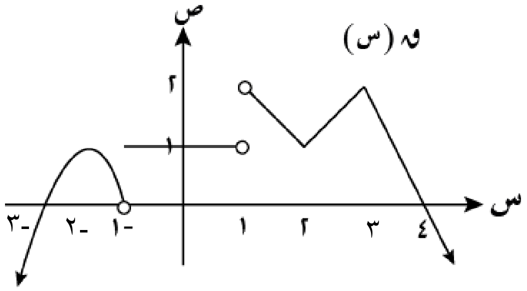
eyad emad abbad

eyad _ abbad

الوحدة الأولى : النهايات والاتصال :

مثال (١) :

معتمدا على الشكل ، اوجد ما يلي :



أ) مجموعة قيم (أ) حيث $\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)} = ١$

$\text{أ} = \{-٢ ، ٢ ، ٣\} \cup (-١ ، ١)$

ب) مجموعة قيم (ب) حيث $\underset{\text{س}\to\text{ب}^+}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)} = ١$

$\text{ب} = \{-٢ ، ٢ ، ٣\} \cup [-١ ، ١)$

ج) مجموعة قيم (جـ) حيث $\underset{\text{س}\to\text{جـ}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)} = \text{غ.م}$

$\text{جـ} = \{-١ ، ١\}$

د) مجموعة قيم (د) حيث $\underset{\text{س}\to\text{د}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ(س)} = ٠$

$\text{د} = \{٤ ، -٣\}$

مثال (٢) :

٨) اذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} + ٢ & ، \text{س} < ٢ \\ ٢\text{س} & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$

احسب $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ باستخدام الجدول

س	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢	١,٩	١,٥
ق(س)	٤,٢	٤,٠٢	٤,٠٠٢	٤	٦,٩	٣,٥

الحل :

من خلال الجدول

$\underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٤$ ، $\underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٤$

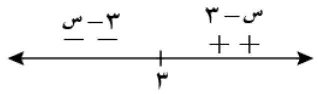
$\therefore \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٤$

مثال (٣) :

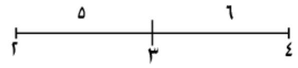
جد $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ |\text{س} - ٣|[\text{س} + ٣]$

الحل :

$|\text{س} - ٣|$



$[\text{س} + ٣]$



$\text{ق(س)} = \begin{cases} (٣ - \text{س}) \times ٥ & ، ٢ \le \text{س} < ٣ \\ (\text{س} - ٣) \times ٦ & ، ٣ \le \text{س} < ٤ \end{cases}$

$\underset{\text{س}\to ٣^+}{\text{نهـا}}\ (\text{س} - ٣)(٦) = ٠$ ، $\underset{\text{س}\to ٣^-}{\text{نهـا}}\ (٣ - \text{س}) \times ٥ = ٠$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ٠$

مثال (٤) :

١) اذا كـــــــــان $\text{ق(س)} = \begin{cases} ١ & ، |\text{س}| \le ١ \\ ٠ & ، |\text{س}| > ١ \end{cases}$

احسب $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

الحل :

$\text{ق(س)} = \begin{cases} ١ & ، -١ \le \text{س} \le ١ \\ ٠ & ، \text{س} > ١ \\ ٠ & ، \text{س} < -١ \end{cases}$

$\underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نهـا}}\ ٠ = ٠$ ، $\underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نهـا}}\ ١ = ١$

$\therefore \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$ غير موجودة

٢) اذا كـــان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}} & ، \text{س} > ٠ \\ \left[\dfrac{\text{س}}{٣} + ٢\right] & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$

احسب $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)}$

الحل :

$\underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نهـا}}\ \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}}{\text{س}} = ١$ ، $\underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نهـا}}\ ١ = ١$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = ١$ غير موجودة

مثال (٥) :

اذا كانت $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{س}^{٢} - ٩} = ٥$ ، احسب $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{س} - ٣}$

الحل :

$$\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{س} - ٣} = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{س} - ٣} \times \dfrac{\text{س} + ٣}{\text{س} + ٣}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{س}^{٢} - ٩} \times \text{س} + ٣ = ٥ \times ٦ = ٣٠$$

مثال (٦) :

جد قيمة النهايات الآتية :

١) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - ٢\text{س}}{\text{س}^{٤} - ١٦} = \dfrac{٠}{٠}$

الحل :

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}(\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢)}{\text{س}^{٤} - ١٦}$$

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١)}{(\text{س}^{٢} - ٤)(\text{س}^{٢} + ٤)}$$

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}\,\cancel{(\text{س} - ٢)}\,(\text{س} + ١)}{\cancel{(\text{س} - ٢)}\,(\text{س} + ٢)(\text{س}^{٢} + ٤)}$$

$$= \dfrac{٢(٢ + ١)}{٤ \times (٤ + ٤)} = \dfrac{٦}{٣٢}$$

٢) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\text{س}^{٣} - ٣\text{س} - ١٠}{\text{س}^{٢} - ٤} = \dfrac{٠}{٠}$

الحل :

نستخدم القسمة التركيبية :

$٢\text{س}^{٣} - ٣\text{س} - ١٠$ بالقسمة على $\text{س} - ٢$

	س^{٣}	س^{٢}	س	ثابت
	٢	٠	-٣	-١٠
$\boxed{٢}$		٤	٨	١٠
	٢	٤	٥	٠

$$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(\text{س} - ٢)}\,(٢\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٥)}{\cancel{(\text{س} - ٢)}\,(\text{س} + ٢)} = \dfrac{٢١}{٤}$$

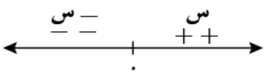
٣) $\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - [\text{س}]}{\text{س}^{٢} - |\text{س}|}$

الحل :

$[\text{س}] \Leftarrow \text{ل} = ١$ ، $\text{س} = ٠$

$[\text{س}] = \{١$ ، $١ \le \text{س} < ٢$

$|\text{س}| = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٠$



$$\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٢} - \text{س}}$$

$$\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\cancel{(\text{س} - ١)}\,(\text{س} + ١)}{\text{س}\,\cancel{(\text{س} - ١)}} = ٢$$

مثال (٧) :

١٦) اذا كانت $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{|\text{س} + أ| - ٢}{\text{س} - ١} = -١$ ، فما قيمة (أ)

الحل :

بما ان التعويض بالمقام يساوي صفر فإن البسط يساوي صفر

$|\text{س} + أ| - ٢ = ٠ \Leftarrow |\text{س} + أ| = ٢$

اما : $١ + أ = ٢ \Leftarrow أ = ١$

او : $١ + أ = -٢ \Leftarrow أ = -٣$

حالة (١) : $أ = ١$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{|\text{س} + ١| - ٢}{\text{س} - ١}$$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} + ١ - ٢}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - ١}{\text{س} - ١} = ١ \text{ مرفوضة}$$

حالة (٢) : $أ = -٣$

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{|\text{س} - ٣| - ٢}{\text{س} - ١}$$

$$\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \frac{٣ - س - ٢}{س - ١} = \underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \frac{١ - س}{س - ١} = -١ \Leftarrow أ = -٣$$

مثال (٨) :

جد قيمة النهايات الآتية :

١) $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٩^{س} - ٤ \times ٣^{س+١} + ٢٧}{٣^{س} - ٣}$

الحل :

نفرض : ص $= ٣^{س}$ ، س $\to ١$ ، ص $\to ٣$

$$\underset{ص\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{ص^{٢} - ١٢ص + ٢٧}{ص - ٣}$$

$$\underset{ص\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(ص - ٩)\cancel{(ص - ٣)}}{\cancel{ص - ٣}} = -٦$$

٢) $\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} + ١٢}{س^{٢} - ٤} - \dfrac{س + ٢}{س - ٢}$

الحل :

$$\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ١٢}{س^{٢} - ٤} - \frac{س + ٢}{س - ٢} \times \frac{س + ٢}{س + ٢}$$

$$\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ١٢ - (س + ٢)^{٢}}{س^{٢} - ٤}$$

$$\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{س^{٢}} + ١٢ - \cancel{س^{٢}} - ٤س + ٤}{س^{٢} - ٤}$$

$$\underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٨ - ٤س}{س^{٢} - ٤} = \underset{س\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٤\overset{-١}{\cancel{(٢ - س)}}}{(س + ٢)\cancel{(س - ٢)}} = -١$$

٣) $\underset{س\to ٤}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{١}{\sqrt{س^{٢} - ٣س}} - \dfrac{١}{٢}\right)\left(\dfrac{٢}{س^{٢} - ١٦}\right)$

الحل :

$$\underset{س\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{٢ - \sqrt{س^{٢} - ٣س}}{٢\sqrt{س^{٢} - ٣س}} \times \left(\frac{٢}{س^{٢} - ١٦}\right)$$

$$\underset{س\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{٢ - \sqrt{س^{٢} - ٣س}}{٢\sqrt{س^{٢} - ٣س}} \times \frac{٢ + \sqrt{س^{٢} - ٣س}}{٢ + \sqrt{س^{٢} - ٣س}} \times \left(\frac{٢}{س^{٢} - ١٦}\right)$$

$$\underset{س\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{٤ - س^{٢} + ٣س}{٢\sqrt{س^{٢} - ٣س}\left(٢ + \sqrt{س^{٢} - ٣س}\right)} \times \frac{٢}{س^{٢} - ١٦}$$

$$\underset{س\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{-\cancel{(س - ٤)}(س + ١)}{٨\cancel{(س - ٤)}(س + ٤)} = \frac{-٥}{٦٤}$$

٤) $\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{١}{\sqrt[٣]{س}} - ١\right)\left(\dfrac{١}{س - ١}\right)$

الحل :

$$\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{\sqrt[٣]{س}} - \frac{١}{١}\right)\left(\frac{١}{س - ١}\right)$$

$$\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{١ - \sqrt[٣]{س}}{\sqrt[٣]{س}}\right)\left(\frac{١}{س - ١}\right) \times \frac{١ + \sqrt[٣]{س} + (\sqrt[٣]{س})^{٢}}{١ + \sqrt[٣]{س} + (\sqrt[٣]{س})^{٢}}$$

$$\underset{س\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\overset{-١}{\cancel{١ - س}}}{\sqrt[٣]{س}} \times \frac{١}{\cancel{س - ١}} \times \frac{١}{٣} = \frac{-١}{٣}$$

٥) $\underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س^{٢} - ١} + \sqrt{س} - ١}{\sqrt{س - ١}}$

الحل :

$$\underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س^{٢} - ١}}{\sqrt{س - ١}} + \underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س} - ١}{\sqrt{س - ١}} \times \frac{\sqrt{س} + ١}{\sqrt{س} + ١}$$

$$\underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{(س - ١)(س + ١)}}{\sqrt{س - ١}} + \underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{س - ١}{\sqrt{س - ١}\left(\sqrt{س} + ١\right)} \times \frac{\sqrt{س - ١}}{\sqrt{س - ١}}$$

$$\underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{\sqrt{س - ١}}\sqrt{س + ١}}{\cancel{\sqrt{س - ١}}} + \underset{س\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(س - ١)}\left(\sqrt{س - ١}\right)}{\cancel{(س - ١)}\left(\sqrt{س} + ١\right)}$$

$$= \sqrt{٢} + ٠ = \sqrt{٢}$$

٦) $\underset{س\to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ٢)^{٢}\sqrt{س} - ٧٢}{س - ٤}$

الحل :

نضيف ونطرح : $(س + ٢)^{٢}\sqrt{س} = ٣٦\sqrt{س}$

$$\underset{س\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)^{٢}\sqrt{س} - ٣٦\sqrt{س}}{س - ٤} + \underset{س\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{٣٦\sqrt{س} - ٧٢}{س - ٤}$$

$$\lim_{س \to ٤} \frac{\left(\sqrt{س}(س+٢)^٢ - ٣٦\right)}{س - ٤} + ٣٦ \lim_{س \to ٤} \left(\frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س}} \right)$$

$$\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س}\left(\cancel{(س+٢-٦)}\,(س+٢-٦)\right)}{\cancel{س-٤}} + \lim_{س \to ٤} \frac{٣٦\,\cancel{(س-٤)}}{\cancel{(س-٤)}\,(٢)}$$

$$\lim_{س \to ٤} \sqrt{س}\,(س+٨) + \frac{٣٦}{٤}$$

$$= ٢(١٢) + ٩ = ٢٤ + ٩ = ٣٣$$

---

٧) $\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt{٧ + \sqrt[٣]{س}} - ٣}{س - ٨}$

الحل :

$$\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt{٧ + \sqrt[٣]{س}} - ٣}{س - ٨} \times \frac{\sqrt{٧ + \sqrt[٣]{س}} + ٣}{\sqrt{٧ + \sqrt[٣]{س}} + ٣}$$

$$\lim_{س \to ٨} \frac{٧ + \sqrt[٣]{س} - ٩}{(س - ٨)\left(\sqrt{٧ + \sqrt[٣]{س}} + ٣\right)}$$

$$\lim_{س \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{(س - ٨)\left(\sqrt{٧ + \sqrt[٣]{س}} + ٣\right)} \times \frac{\left(\sqrt[٣]{س}\right)^٢ + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤}{\left(\sqrt[٣]{س}\right)^٢ + ٢\sqrt[٣]{س} + ٤}$$

$$\lim_{س \to ٨} \frac{س - ٨}{(س - ٨)(٣ + ٣)(٤ + ٤ + ٤)} = \frac{١}{٧٢}$$

مثال (٩) :

١) اذا كانت $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ + أس + ب}{س - ٥} = ٨$ ، فما قيم أ ، ب

الحل :

بما أن المقام يساوي صفر فإن البسط يساوي صفر

$٢٥ + ٥أ + ب = ٨ \Leftarrow ب = ٥أ - ٢٥$

$$\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ + أس - ٥أ - ٢٥}{س - ٥} = ٨$$

$$\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٢٥}{س - ٥} + \lim_{س \to ٥} \frac{أ\,\cancel{(س - ٥)}}{\cancel{س - ٥}} = ٨$$

$$\lim_{س \to ٥} س + ٥ + أ = ٨$$

$\Leftarrow ١٠ + أ = ٨ \Leftarrow \boxed{أ = -٢}$

$ب = -٥أ - ٢٥ = -٥ \times -٢ - ٢٥$

$\Leftarrow \boxed{ب = -١٥}$

---

٢) اذا كانت $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س^٢ + أس + ب}$ غير موجودة ، فما قيم أ ، ب

الحل :

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + أس + ب}{س - ٣} = ٠$$

بما ان البسط يساوي صفر

$\Leftarrow \lim_{س \to ٣} س^٢ + أس + ب = ٠$

$\Leftarrow أ^٢ + ٣أ + ب = ٠ \Leftarrow ب = -٣أ - ٩$

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + أس - ٣أ - ٩}{س - ٣} = ٠$$

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} + أ \lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س - ٣} = ٠$$

$\lim_{س \to ٣} س + ٣ + أ = ٠ \Leftarrow \boxed{أ = -٦}$

$ب = -٣أ - ٩ \Leftarrow \boxed{ب = ٩}$

---

٣) اذا كانت أ ، ب $\in$ ح وكانت

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^٣ - أس + ٣}{س - ١} & ، \quad س > ١ \\ ب س - ٥ & ، \quad س < ١ \end{cases}$$

فما قيم أ ، ب التي تجعل $\lim_{س \to ١} ق(س)$ موجودة

الحل :

$\lim_{س \to ١^+} ق(س)$ موجودة

وبما ان المقام يساوي صفر فإن البسط يساوي صفر

$$\lim_{س \to ١^+} س^٣ - أس + ٣ = ٠$$

$١ - أ + ٣ = ٠ \Leftarrow \boxed{أ = ٤}$

$$\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهـا}} \frac{س^٣ - م\,س + ٣}{س - ١}$$ قسمة تركيبية

$$\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(س - ١)}(س^٢ + س - ٣)}{\cancel{س - ١}} = ١ + ١ - ٣ = -١$$

$$\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهـا}} ب\,س - ٥ = ب \times ١ - ٥ = -١ \Leftarrow \boxed{ب = ٤}$$

مثال (١٠) :

٢٤) اذا كانت $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{ق(س) - ٩}{س - ٣} = ١٤$ ، احسب

$$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{ق(س) - س^٢}{س - ٣}$$

الحل :

نضيف ونطرح (٩) :

$$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{ق(س) - س^٢ + ٩ - ٩}{س - ٣}$$

$$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{ق(س) - ٩}{س - ٣} + \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{٩ - س^٢}{س - ٣}$$

$$١٤ + \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{(٣ + س)\overset{-١}{\cancel{(٣ - س)}}}{\cancel{س - ٣}} = ١٤ + (-٦) = ٨$$

مثال (١١) :

٢٩) اثبت ان : $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[ن]{١ + س + س^٢} - ١}{س + س^٢} = \frac{١}{ن}$

الحل :

نفرض : ص $= \sqrt[ن]{١ + س + س^٢}$

س $\leftarrow ٠$ ، ص $\leftarrow ١$

$$ص = ١ + س + س^٢ \Leftarrow ص^ن - ١ = س + س^٢$$

$$\Leftarrow \underset{ص \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{ص - ١}{ص^ن - ١} = \frac{١}{ن}$$

مثال (١٢) :

جد قيمة النهايات الاتية :

١) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} ٣س^٢ \,قتا٣س \,ظتا٢س \,قا٥س$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} ٣س^٢ \times س \times \frac{١}{جا٣س} \times \frac{١}{ظا٢س} \times \frac{١}{جتا٥س}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣س}{جا٣س} \times \frac{س}{ظا٢س} \times \frac{١}{جتا٥س}$$

$$= \frac{٣}{٣} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٥} = \frac{١}{٢}$$

٢) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{جتا٢س + س^٢ - جتا^٢س}{٢س^٢}$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢جتا^٢س - ١ + س^٢ - جتا^٢س}{٢س^٢}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{جتا^٢س - ١ + س^٢}{٢س^٢}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{-جا^٢س}{٢س^٢} + \frac{س^٢}{٢س^٢} = \frac{-١}{١} \times \frac{١}{١} + \frac{١}{٢} = ٠$$

٣) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{جاس^٣ - ١}{س - ١}$

$$= \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\frac{جاس^٣ - ١}{س^٣ - ١}}{\frac{س - ١}{س^٣ - ١}}$$

$$= \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{١}{\frac{\cancel{س - ١}}{\cancel{(س - ١)}(س^٢ + س + ١)}} = ٣$$

٤) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - قاس}{ظا^٢س}$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - قاس}{قا^٢س - ١}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\overset{-١}{\cancel{١ - قاس}}}{\cancel{(قاس - ١)}(قاس + ١)} = \frac{-١}{٢}$$

$قا^٢س = ١ + ظا^٢س$

$ظا^٢س = قا^٢س - ١$

٥) $$\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{س جتاس} - \text{س جتا٣س}}{\text{س}^{٢}\ \text{جا٢س}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\cancel{\text{س}}\left(\text{جتاس} - \text{جتا٣س}\right)}{\text{س}^{\cancel{٢}}\ \text{جا٢س}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{-\cancel{٢}\ \text{جا٢س جا} -\text{س}}{\text{س} \times \cancel{٢}\ \text{جاس جتاس}}$$

$$= -١ \times -٢ \times \frac{١}{\text{جتاس}} = ٢$$

٦) $$\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{ظاس} - \text{جاس}}{\text{س}^{٣}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} - \frac{\text{جاس}}{١}}{\text{س}^{٣}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جاس} - \text{جاس جتاس}}{\text{جتاس} \times \text{س}^{٣}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جاس}\left(١ - \text{جتاس}\right)}{\text{جتاس} \times \text{س}^{٣}} \times \frac{١ + \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جاس} \times \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتاس} \times \text{س}^{٣} \times \left(١ + \text{جتاس}\right)} = \frac{١}{٢}$$

٧) $$\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\sqrt{١ - \text{جتاس}}}{\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\sqrt{١ - \text{جتاس}}}{\text{س}} \times \frac{\sqrt{١ + \text{جتاس}}}{\sqrt{١ + \text{جتاس}}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\sqrt{١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}}}{\left(\text{س}\right)\left(\sqrt{١ + \text{جتاس}}\right)}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\left|\text{جاس}\right|}{\left(\text{س}\right)\left(\sqrt{٢}\right)}$$

$$\lim_{\text{س}\to ٠^{+}} \frac{\text{جاس}}{\left(\text{س}\right)\left(\sqrt{٢}\right)} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \text{ ، } \lim_{\text{س}\to ٠^{-}} \frac{-\text{جاس}}{\left(\text{س}\right)\left(\sqrt{٢}\right)} = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\sqrt{١ - \text{جتاس}}}{\text{س}} \text{ غير موجودة}$$

٨) $$\lim_{\text{س}\to \frac{\pi}{٣}} \frac{\text{جتا}\frac{٣}{٢}\text{س}}{٣\text{س} - \pi}$$

$$= \lim_{\text{س}\to \frac{\pi}{٣}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{٣}{٢}\text{س}\right)}{٣\text{س} - \pi}$$

$$= \lim_{\text{س}\to \frac{\pi}{٣}} \frac{\text{جا}\frac{١}{٢}\left(\pi - ٣\text{س}\right)}{٣\text{س} - \pi} = \frac{-١}{٢}$$

٩) $$\lim_{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٤} + \text{س}\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \left(\frac{\pi}{٤} + \text{س}\right)\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to \frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٤} - \text{س}\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}} = -١$$

١٠) $$\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{جتا}\frac{\text{س}}{٣}}{\text{س} - ٢}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{\text{س}}\right)}{\text{س} - ٢}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{\text{س}}\right)}{\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{\text{س}}}}{\frac{\text{س} - ٢}{\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{\text{س}}}} = \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{١}{\frac{\text{س} - ٢}{\frac{\pi\text{س} - ٢\pi}{٢\text{س}}}}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٢} ١ \times \frac{\frac{\pi\text{س} - ٢\pi}{٢\text{س}}}{\text{س} - ٢}$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٢} ١ \times \frac{\frac{\pi\cancel{\left(\text{س} - ٢\right)}}{٢\text{س}}}{\cancel{\text{س} - ٢}} = \frac{\pi}{٤}$$

١١) $\underset{س\to ٣\pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جاس}}{\frac{س}{٣}-\pi}$

نفرض : $ص = \frac{س}{٣} - \pi \Leftarrow س = ص + ٣\pi$

$\Leftarrow \frac{س}{٣} - \pi = \frac{ص}{٣}$

$س \to ٣\pi$ ، $ص \to ٠$

$= \underset{ص\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(ص + ٣\pi)}{\frac{ص}{٣}}$

$= \underset{ص\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\left(\text{جاص جتا}\cancel{٣\pi} + \text{جتاص جا}\cancel{٣\pi}\right)}{\frac{ص}{٣}}$

$= \underset{ص\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{-\text{جاص}}{\frac{ص}{٣}} = -٣$

١٢) $\underset{س\to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢}\,\text{جتاس} + \pi^{٢}}{س - \pi}$

نضيف ونطرح : $\pi^{٢}$ جتاس

$= \underset{س\to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢}\,\text{جتاس} + \pi^{٢}\,\text{جتاس}}{س - \pi} + \underset{س\to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\pi^{٢}\,\text{جتاس} + \pi^{٢}\,\text{جتاس}}{س - \pi}$

$= \underset{س\to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتاس}\left(س^{٢} - \pi^{٢}\right)}{س - \pi} + \underset{س\to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\pi^{٢}\,\text{جتاس} + ١}{س - \pi}$

$= \underset{س\to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتاس}\cancel{(س - \pi)}(س + \pi)}{\cancel{س - \pi}} + \underset{س\to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\pi^{٢}\left(\text{جتاس} + ١\right)}{س - \pi} \times \dfrac{\text{جتاس} - ١}{\text{جتاس} - ١}$

$= \text{جتا}\pi\,(٢\pi) + \underset{س\to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\pi^{٢}\,\text{جتا}^{٢}س - ١}{(س - \pi)\left(\text{جتاس} - ١\right)}$

$= -٢\pi + \underset{س\to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\pi^{٢}\left(-\text{جا}^{٢}س\right)}{(س - \pi)(-٢)}$

$= -٢\pi + \underset{س\to \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\pi^{٢}\left(-\text{جا}(\pi - س)\,\text{جا}(\pi - س)\right)}{(س - \pi)(-٢)}$

$= -٢\pi + \pi^{٢} \times ٠ = -٢\pi$

مثال (١٣) :

٢) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}^{٢}س}{س^{٢}} & ، \quad س < ٠ \\ [س + ١] & ، \quad س = ٠ \\ \dfrac{|س|}{س} & ، \quad س > ٠ \end{cases}$

ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٠

الحل :

$ق(٠) = [٠ + ١] = ١$

$\underset{س\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \dfrac{|س|}{س} = \dfrac{س}{س} = ١$ ، $\underset{س\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{٢}س}{س^{٢}} = ١$

$\underset{س\to ٠}{\text{نهـا}}\, ق(س) = ١$

$ق(٠) = \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}}\, ق(س)$

$\therefore$ ق(س) متصل عندما س = ١

مثال (١٤) :

١) $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}^{٢}أس}{س^{٢}} & ، \quad س \neq ٠ \\ ٤س^{٢} + ٢أ^{٣} & ، \quad س = ٠ \end{cases}$

وكان ق(س) متصل عندما س = ٠ ، فما قيمة (أ)

الحل :

$ق(٠) = \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}}\, ق(س)$

$٤(٠)^{٢} + ٢أ^{٣} = \underset{س\to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{٢}أس}{س^{٢}}$

$٢أ^{٣} = أ^{٢} \Leftarrow ٢أ^{٣} - أ^{٢} = ٠$

$\Leftarrow أ^{٢}(٢أ - ١) = ٠ \Leftarrow \boxed{أ = ٠ \text{ ، } أ = \frac{١}{٢}}$

٢) اذا كان $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{٢س} + ٨}{\text{س}^٢ + \text{ب س} + ١}$ ، فما قيم (ب) بحيث يكون متصل على (ح)

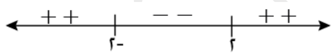
الحل :

يجب ان يكون المقام ≠ صفر ، يعني المميز < صفر

$\text{ب}^٢ - ٤\text{أجـ} < ٠$

$\text{ب}^٢ - ٤\times١\times١ < ٠ \Leftarrow \text{ب}^٢ - ٤ < ٠$

قيم ب ∈ (−٢،٢)



مثال (١٥) :

اذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{٢س}^٢ - \text{ب}}{\text{س} - ٢} & \text{، س} < ٢ \\ \text{أس+جـ} & \text{، } ٢ \le \text{س} < ٤ \\ \text{٦س} & \text{، س} \ge ٤ \end{cases}$

وكان ق(س) متصل على (ح) ، فما قيم أ ، ب ، جـ

الحل :

بما ان الاقتران متصل فإذاً $\text{نهـا}_{\text{س}\to ٢^-} \text{ق(س)}$ موجودة

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٢^-} \dfrac{\text{٢س}^٢ - \text{ب}}{\text{س} - ٢}$ موجودة

المقام يساوي صفر فإن البسط يساوي صفر

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٢^-} \text{٢س}^٢ - \text{ب} = ٠ \Leftarrow \boxed{\text{ب} = ٨}$

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٢^+} \text{ق(س)} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٢^-} \text{ق(س)}$

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٢^+} \text{أس+جـ} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٢^-} \dfrac{\text{٢س}^٢ - ٨}{\text{س} - ٢}$

$\text{٢أ+جـ} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٢^-} \dfrac{٢(\text{س}^٢ - ٤)}{\text{س} - ٢}$

$\text{٢أ+جـ} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٢^-} \dfrac{٢\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س} + ٢)}{\cancel{\text{س} - ٢}}$

$\text{٢أ+جـ} = ٨ \quad ......(١)$

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٤^+} \text{ق(س)} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٤^-} \text{ق(س)}$

$\text{نهـا}_{\text{س}\to ٤^+} \text{٦س} = \text{نهـا}_{\text{س}\to ٤^-} \text{أس+جـ}$

$٢٤ = \text{٤أ+جـ} \quad ......(٢)$

بحل المعادلتين (١) و (٢) :

$\boxed{\text{أ} = ٨}$ ، $\boxed{\text{جـ} = -٨}$

مثال (١٦) :

١) اذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} |٢ - \text{س}| & \text{، س} < \text{أ} \\ [\text{س} + ٥] & \text{، س} \ge \text{أ} \end{cases}$

وكان ق(س) متصل عندما س = أ ، فما قيمة (أ) بحيث أ ∈ ص

الحل :

$\text{نهـا}_{\text{س}\to \text{أ}^+} \text{ق(س)} = \text{نهـا}_{\text{س}\to \text{أ}^-} \text{ق(س)}$

$\text{نهـا}_{\text{س}\to \text{أ}^+} |٢ - \text{س}| = \text{نهـا}_{\text{س}\to \text{أ}^-} [\text{س} + ٥]$

$|٢ - \text{أ}| = \text{أ} - ١ + ٥$

$|٢ - \text{أ}| = \text{أ} + ٤$

اما : $٢ - \text{أ} = \text{أ} + ٤ \Leftarrow -٢ = \text{٢أ} \Leftarrow \text{أ} = -١$

او : $٢ - \text{أ} = -\text{أ} - ٤ \Leftarrow ٦ = -\text{أ} + \text{أ} \Leftarrow ٦ = ٠$ ✗

٢) اذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^٣ + ٤ & \text{، س} < ٢ \\ \text{٥س} & \text{، س} \ge ٢ \end{cases}$

وكان $\text{هـ(س)} = \begin{cases} \text{س}^٢ & \text{، س} < ٢ \\ \text{س}^٢ + ٢ & \text{، س} \ge ٢ \end{cases}$

وكان ل(س) = ق(س) + هـ(س) ، ابحث في الاتصال عندما س = ٢

الحل :

نلاحظ ان ق(س) غير متصل عندما س = ٢ لأن

$\text{ق}(٢) \ne \text{نهـا}_{\text{س}\to ٢} \text{ق(س)}$

عندها ننفذ العملية الحسابية (الجمع) :

$$\text{ل} = \text{ق} + \text{هـ} = \begin{cases} \text{س}^{٣} + ٤ + \text{س}^{٢} &، \text{س} < ٢ \\ ٥\text{س} + \text{س}^{٢} + ٢ &، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$$

$$\text{ل} = \text{ق} + \text{هـ} = \begin{cases} \text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٤ &، \text{س} < ٢ \\ \text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٢ &، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$$

$\text{ل}(٢) = ١٦$

$\lim_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{ل}(\text{س}) = ١٦$ ، $\lim_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{ل}(\text{س}) = ١٦$

$\therefore$ ل(س) متصل عندما $\text{س} = ٢$

مثال (١٧) :

١) اذا كـــــــــان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٣} - ٦٤}{\text{س} - ٤} &، \text{س} \leq ٣ \\ ٤ - \text{س} &، \text{س} > ٣ \end{cases}$$

ابحث في اتصال ق(س) على مجاله

الحل :

اولا : القواعد :

ق(س) متصل على $(-\infty، ٣)$ لأنه على صورة اقتران نسبي معرف على مجاله

ق(س) متصل على $(٣، \infty)$ لأنه كثير حدود

ثانيا : التحول :

$\text{س} = ٣ \Leftarrow \text{ق}(٣) = ٣٧$

$\lim_{\text{س} \to ٣^{+}} \text{ق}(\text{س}) = ١$ ، $\lim_{\text{س} \to ٣^{-}} \text{ق}(\text{س}) = ٣٧$

$\therefore \lim_{\text{س} \to ٣} \text{ق}(\text{س})$ غير موجودة

$\therefore$ ق(س) غير متصل عند $\text{س} = ٣$

ثالثا : الاطراف :

لا يوجد

رابعاً : النتيجة النهائية :

ق(س) متصل على $ح - \{٣\}$

٢) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = |٣\text{س} - ٩|$ ، ابحث في اتصال ق(س) على $[١، ٥]$

الحل :

نعيد التعريف :

$٣\text{س} - ٩ = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٣$

-- (١ ، ٣) ++ (٣ ، ٥)

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٩ - ٣\text{س} &، ١ \leq \text{س} < ٣ \\ ٣\text{س} - ٩ &، ٣ \leq \text{س} \leq ٥ \end{cases}$$

اولا : القواعد :

ق(س) متصل على $(١، ٣)$ لأنه كثير حدود

ق(س) متصل على $(٣، ٥)$ لأنه كثير حدود

ثانيا : التحول :

$\text{س} = ٣ \Leftarrow \text{ق}(٣) = ٠$

$\lim_{\text{س} \to ٣^{+}} ٣\text{س} - ٩ = ٠$ ، $\lim_{\text{س} \to ٣^{-}} ٩ - ٣\text{س} = ٠$

$\therefore \lim_{\text{س} \to ٣} \text{ق}(\text{س}) = ٠$

$\therefore$ ق(س) متصل عند $\text{س} = ٣$

ثالثا : الاطراف :

$\text{س} = ١$	$\text{س} = ٥$
$\text{ق}(١) = ٦$	$\text{ق}(٥) = ٦$
$\lim_{\text{س} \to ١^{+}} ٩ - ٣\text{س} = ٦$	$\lim_{\text{س} \to ٥^{-}} ٣\text{س} - ٩ = ٦$
ق متصل من اليمين	ق متصل من اليسار

رابعاً : النتيجة النهائية :

ق(س) متصل على $[١، ٥]$