مكثف

النجوم

في

الرياضيات

تطبيقات التفاضل / الفرع العلمي

اعداد الاستاذ

إياد عماد عباد

0799366611

eyad emad abbad

eyad _ abbad

الوحدة الثالثة : تطبيقات التفاضل :

مثال (١) :

اكتب معادلة المماس لمنحنى $ق(س) = س^{٣} - ١$ عند تقاطع محور السينات

الحل :

يقطع السينات $\Leftarrow ص = ٠$

$س^{٣} - ١ = ٠ \Leftarrow س^{٣} = ١ \Leftarrow \boxed{س = ١}$

$ق(١) = (١)^{٣} - ١ = ٠ \quad (ص_{١})$

$ق'(س) = ٣س^{٢}$

$ق'(١) = ٣(١)^{٢} = ٣ \quad (م)$

$ص - ص_{١} = م(س - س_{١})$

معادلة المماس : $ص - ٠ = ٣(س - ١)$

مثال (٢) :

احسب النقاط التي على منحنى $ق(س) = س^{٣} - ٥س + ٦$ التي يكون المماس عندها يوازي المستقيم $ص - ٧س = ١١$

الحل :

$ص - ٧س = ١١ \Leftarrow ص = ١١ + ٧س$

يوازي $\Leftarrow ق' = ص'$

$٣س^{٢} - ٥ = ٧$

$٣س^{٢} = ١٢ \Leftarrow س^{٢} = ٤ \Leftarrow س = ٢ ، -٢$

$(٢، ق(٢)) \quad (٢، ٤)$

$(-٢، ق(-٢)) \quad (-٢، ٨)$

مثال (٣) :

اكتب معادلة المماس لمنحنى $(س + ص)^{٣} - ٥س + ٧ص = ١٠$ ، عند تقاطع مع المستقيم $س + ص = ٢$

الحل :

$س + ص = ٢ \Leftarrow ص = ٢ - س$

$(\cancel{س} + ٢ - \cancel{س})^{٣} - ٥س + ٧(٢ - س) = ١٠$

$٨ - ٥س + ١٤ - ٧س = ١٠ \Leftarrow \boxed{س = ١.}$

$\Leftarrow ص = ٢ - ١ = ١ \Leftarrow (١،١)$

نشتق : $٣(س + ص)^{٢}(١ + ص') - ٥ + ٧ص' = ٠$

نعوض : $٣(١ + ١)^{٢}(١ + ص') - ٥ + ٧ص' = ٠$

$\Leftarrow ص' = \frac{-٧}{١٩}$

معادلة المماس : $ص - ١ = \frac{-٧}{١٩}(س - ١)$

مثال (٤) :

بين ان لمنحنى $ق(س) = س^{٢} + ٨$ مماسين مرسومين من $(١،٥)$ خارجية التي لا تقع عليه

الحل :

نفرض التماس $(س،ص)$

$ق' = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} \Leftarrow ق' = \frac{ص - ٥}{س - ١}$

$\Leftarrow ٢س = \frac{س^{٢} + ٨ - ٥}{س - ١}$

$س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠$

$\Leftarrow (س - ٣)(س + ١) = ٠ \Leftarrow \boxed{س = ٣ ، -١}$

$\Leftarrow$ يوجد مماسان

$\Leftarrow$ النقاط $(٣،١٧) \quad (-١،٩)$

مثال (٥) :

١) اذا كان $ق(س) = س^{٢} + أس + أ$ ، فما قيمة (أ) اذا كان $ق(س)$ يمس السينات

الحل :

$ق' = ٠ \Leftarrow ٢س + أ = ٠ \Leftarrow \boxed{س = \frac{-أ}{٢}}$

$ق(\frac{-أ}{2}) = 0$

$(\frac{-أ}{2})^2 + أ(\frac{-أ}{2}) + أ = 0$

$\frac{أ^2}{4} - \frac{أ^2}{2} + أ = 0 \quad \times 4$

$أ^2 - 2أ^2 + 4أ = 0 \Leftarrow 4أ - أ^2 = 0$

$\Leftarrow أ(4 - أ) = 0 \Leftarrow أ = 0 ، 4$

٢) اذا كان المستقيم $ص = 2س$ يمس $ق = (س^2 - 2)(أس + ب)$ عند $س = 2$ ، فما قيم أ ، ب

الحل :

$ص(2) = ق(2)$	$ص'(2) = ق'(2)$
$4 = (4 - 2)(2أ + ب)$	$2 = (س^2 - 2)(أ) + (أس + ب)(2س)$
$4أ + 2ب = 4 \ldots (1)$	$2 = 2أ + 8أ + 4ب$
	$10أ + 4ب = 2 \ldots (2)$

بالحذف : $أ = -3$ ، $ب = 8$

٣) اوجد قيم (س) التي على منحنى $ق = س - جا2س$ التي يكون العمودي على المماس موازي لمحور الصادات لكل $س \in [0، 2\pi]$

الحل :

قاعدة :

العمودي يوازي الصادات ⟸ المماس يوازي السينات

$ق' = 0$

$1 - 2جتا2س = 0 \Leftarrow جتا2س = \frac{1}{2}$

$\frac{2س}{2} = \frac{60}{2} ، \frac{300}{2} ، \frac{420}{2} ، \frac{660}{2}$

$س = 30 ، 150 ، 210 ، 330 \in [0، 2\pi]$

٤) اذا كانت معادلة المماس لمنحنى ق(س) عندما $س = 2$ هي $ص + 3س = 11$ وكانت معادلة العمودي لمنحنى هـ(س) عندما $س = 2$ هي $5ص + 2س = 9$ وكانت $ل(س) = (ق \times هـ)(س)$ ، احسب $ل'(2)$

الحل :

$ل'(2) = ق(2) \times هـ'(2) + هـ(2) \times ق'(2)$

حيث

$ص = 11 - 3س$	$5ص = 9 - 2س$
$ص(2) = 11 - 6$	$ص = \frac{9}{5} - \frac{2}{5}س$
$= 5 = ق(2)$	$ص' = \frac{-2}{5}$ عمودي
$ص' = -3$	$هـ = \frac{5}{2}$
$ق'(2) = -3$	$ص(2) = 1 \Leftarrow هـ(2) = 1$

$\Leftarrow ل'(2) = 5 \times \frac{5}{2} + 1 \times -3 = \frac{19}{2}$

مثال (٦) :

١) احسب مساحة المثلث المكون من مماس المنحنى $ص = \frac{1}{س}$ عند $(أ ، \frac{1}{أ})$ والمحاور

الحل :

$م_1 = \frac{-1}{س^2} = \frac{-1}{أ^2}$	$(س ، 0) \quad (أ ، \frac{1}{أ})$
	$م_2 = \frac{\frac{1}{أ} - 0}{أ - س}$

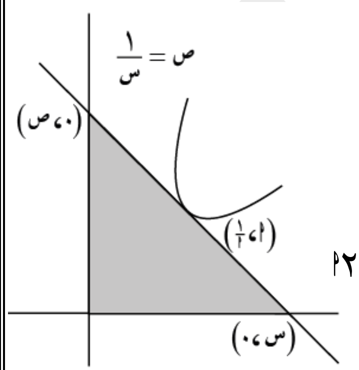
$م_1 = م_2$

$\frac{-1}{أ^2} = \frac{\frac{1}{أ}}{أ - س}$

$-أ + س = \frac{1}{أ} \times أ^2$

$-أ + س = أ \Leftarrow س = 2أ$

$(أ ، \frac{1}{أ}) \quad (0 ، ص)$



$\Leftarrow$ م$_٢$ = $\frac{\text{ص} - \frac{١}{أ}}{٠ - أ}$

$\frac{-١}{أ^٢} = \frac{\text{ص} - \frac{١}{أ}}{-أ}$ $\Leftarrow$ ص $- \frac{١}{أ} = \frac{-١}{أ^٢} \times -أ$ $\Leftarrow$ $\boxed{\text{ص} = \frac{٢}{أ}}$

المساحة $= \frac{١}{٢}$ س × ص $= \frac{١}{٢} \times ٢أ \times \frac{٢}{أ} = \boxed{٢}$

٢) اوجد النقاط التي يكون عندها المماس لمنحنى العلاقة ٩س^٢ + ١٦ص^٢ = ٥٢ موازيا للمستقيم ٩س − ٨ص = ١

الحل :

ميل الماس = ميل المستقيم

٩س − ٨ص = ١ $\Leftarrow$ ص $= \frac{٩}{٨}$س $- \frac{١}{٨}$ $\Leftarrow$ ص$' = \frac{٩}{٨}$

٩س^٢ + ١٦ص^٢ = ٥٢ $\Leftarrow$ ١٨س + ٣٢ص ص$'$ = ٠

$\Leftarrow$ ص$' = \frac{-٩\text{س}}{١٦\text{ص}}$

ص$'$ = ص$'$

$\frac{-٩\text{س}}{١٦\text{ص}} = \frac{٩}{٨}$ $\Leftarrow$ +س = −٢ص

لكن : ٩س^٢ + ١٦ص^٢ = ٥٢

٩(−٢ص)^٢ + ١٦ص^٢ = ٥٢

٣٦ص^٢ + ١٦ص^٢ = ٥٢

ص^٢ = ١ $\Leftarrow$ ص = ±١

ص = ١ $\Leftarrow$ س = −٢ ، ص = −١ $\Leftarrow$ س = ٢

النقاط (−٢،١) (٢،−١)

٣) عين قيم (جـ) في ق(س) = جـس^٢ اذا كانت زاوية ميل المماس لمنحنى ق عندما س = ١ هي (٤٥°)

الحل :

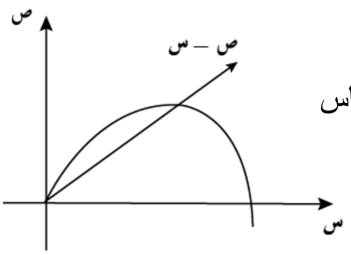
الميل = ظاهـ = ق$'$

ق$'$(١) = ظا٤٥ = ١

٢جـس = ١ $\Leftarrow$ ٢جـ × ١ = ١ $\Leftarrow$ جـ = $\frac{١}{٢}$

٤) من الشكل المجاور ، احسب قياس الزاوية المحصورة بين ص = س ومماس منحنى الاقتران ق = $\sqrt{٣}$س − س^٢ عند (٠،٠)

الحل :



نجد الزاوية التي يكونها المماس مع الاتجاه الموجب للسينات

ق$'$ = $\sqrt{٣}$ − ٢س

ميل المماس ق$'$(٠) = $\sqrt{٣}$ $\Leftarrow$ المماس يكون زاوية (٦٠)

نجد الان الزاوية التي يكونها المستقيم ص = س مع الاتجاه الموجب للسينات

ص$'$ = ١ $\Leftarrow$ الزاوية التي ظلها (١) هي (٤٥)

$\Leftarrow$ الزاوية بين المماس والمستقيم ص = س هي ٦٠ − ٤٥ = ١٥

٥) اثبت ان المماسين المرسومين لمنحنى العلاقتين ٤س^٢ + ٩ص^٢ = ٤٥ ، س^٢ − ٤ص^٢ = ٥ عند نقطة تقاطع المنحنيين في الربع الاول متعامدين

الحل :

س^٢ = ٥ + ٤ص^٢

٤(٥ + ٤ص^٢) + ٩ص^٢ = ٤٥

٢٠ + ٢٥ص^٢ = ٤٥ $\Leftarrow$ ص^٢ = ١ $\Leftarrow$ ص = ±١

$\Leftarrow$ س^٢ = ٥ + ٤ = ٩ $\Leftarrow$ س = ±٣

$\Leftarrow$ التماس (٣،١) بالربع الاول

الان نشتق كل منحنى لمعرفة ميل المماسين

س^٢ − ٤ص^٢ = ٥

٢س − ٨ص ص$'$ = ٠

ميل عند (٣،١) =

ص$' = \frac{٣}{٤}$

٤س^٢ + ٩ص^٢ = ٤٥

٨س + ١٨ص ص$'$ = ٠

ميل عند (٣،١) =

٢٤ + ١٨ص$'$ = ٠

ص$' = \frac{-٤}{٣}$

$\text{م}_1 \times \text{م}_2 = \frac{٣}{٤} \times \frac{-٤}{٣} = -١$ متعامدين

٦) اذا كان $\text{ق} = \frac{\text{هـ}^{٢}(\text{س}) + \text{س}}{\text{ل}(\text{س})}$ وكان يوجد مماس مشترك افقي للاقترانين هـ ، ل عند $(٣،٤)$ ، احسب $\text{ق}'(٣)$

الحل :

مماس افقي مشترك عند $(٣،٤)$

$$\Leftarrow \begin{cases} \text{هـ}(٣) = \text{ل}(٣) = ٤ \\ \text{هـ}'(٣) = \text{ل}'(٣) = ٠ \end{cases}$$

$$\text{ق}' = \frac{(٢\text{هـهـ}' + ١)(\text{ل}) - \text{ل}' \times (\text{هـ}^{٢} + \text{س})}{(\text{ل})^{٢}}$$

$$\text{ق}'(٣) = \frac{(٠ + ١)\text{ل}(٣) - ٠}{((\text{ل}(٣))^{٢}} = \frac{٤}{١٦}$$

٧) اوجد قيمة كل من أ ، ب ، جـ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + \text{أس} + \text{ب}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{جـس} - \text{س}^{٢}$ اذا كان المنحنيان يمس بعضهما البعض عند النقطة $(١،٠)$

الحل :

المنحنيان يمس بعضهما البعض عند النقطة $(١،٠)$

$\Leftarrow \text{ق}(١) = ٠ \text{ ، } \text{هـ}(١) = ٠$

$\Leftarrow \text{هـ}(١) = \text{جـ} - ١ = ٠ \Leftarrow \text{جـ} = ١$

$\text{ق}(١) = ٠ \Leftarrow ١ + \text{أ} + \text{ب} = ٠ \Leftarrow \text{أ} + \text{ب} = -١ \ldots (١)$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س} + \text{أ}$

$\text{هـ}'(\text{س}) = \text{جـ} - ٢\text{س} = ١ - ٢\text{س}$

لكن $\text{ق}'(١) = \text{هـ}'(١)$

$٢ + \text{أ} = ١ - ٢ \Leftarrow ٢ + \text{أ} = -١ \Leftarrow \text{أ} = -٣$

بالتعويض في $(١) \Leftarrow \text{أ} + \text{ب} = -١$

$-٣ + \text{ب} = -١ \Leftarrow \text{ب} = ٢$

٨) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} \times \text{ل}'(٢\text{س})$ وكانت $\text{ص} = \frac{٤٨ - \text{س}}{٥}$ تمثل معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق عندما $\text{س} = ٣$ ، اوجد $\text{ل}''(٦)$

الحل :

$$\text{ق}(٣) = \frac{٤٨ - ٣}{٥} = ٩$$

$$\text{ص}' = \frac{-١}{٥} \Leftarrow \text{ق}'(٣) = ٥$$

$$\Leftarrow \text{ل}'(٢\text{س}) = \frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{س}}$$

$$\Leftarrow \text{ل}''(٢\text{س}) \times ٢ = \frac{\text{س}\,\text{ق}'(\text{س}) - ١ \times \text{ق}(\text{س})}{\text{س}^{٢}}$$

عندما $\text{س} = ٣$

$$\Leftarrow ٢\text{ل}''(٦) = \frac{٣ \times ٥ - ٩ \times ١}{٩} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣} \Leftarrow \text{ل}''(٦) = \frac{١}{٣}$$

مثال (٧) :

١) قذف جسيم للأعلى عن سطح الارض فإذا كانت المسافة المقطوعة تعطى بالعلاقة : $\text{ف} = ٩٦\text{ن} - ١٦\text{ن}^{٢}$ حيث (ن) الزمن بالثواني ، (ف) بالقدم ، احسب ما يلي :

أ) سرعة الجسيم بعد ثانية واحدة من بدء الحركة

ب) متى يصل الجسيم لأقصى ارتفاع

ج) المسافة التي يقطعها الجسيم حتى يعود للأرض

الحل :

أ) $\text{ف} = ٩٦\text{ن} - ١٦\text{ن}^{٢}$

$\text{ع} = \text{ف}' = ٩٦ - ٣٢\text{ن}$

$\text{ت} = \text{ع}' = -٣٢\text{ن}$

$\Leftarrow \text{ع}(١) = ٩٦ - ٣٢ \times ١ = ٩٦ - ٣٢ = ٦٤$ قدم / ث

ب) يصل الجسيم لأقصى ارتفاع عندما $\text{ع} = ٠$

$\Leftarrow \text{ع} = ٠ \Leftarrow ٩٦ - ٣٢\text{ن} = ٠$

$\Leftarrow ٣٢\text{ن} = ٩٦ \Leftarrow \text{ن} = ٣$ ثواني

ج) المسافة التي يقطعها حتى يصل الارض = ٢ × مسافة اقصى ارتفاع

∴ اقصى ارتفاع

$\text{ف}(٣) = ٩٦ \times ٣ - ١٦ \times ٣^{٢} = ١٤٤$ قدم

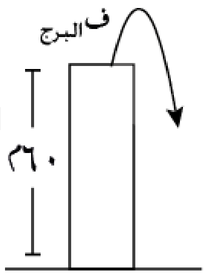
∴ المسافة التي يقطعها حتى يعود للأرض

$= ١٤٤ \times ٢ = ٢٨٨$ قدم

---

٢) قذف جسيم من سطح برج ارتفاعه (٦٠) متر حسب العلاقة : $\text{ف} = ١١\text{ن} - \text{ن}^{٢}$ ، احسب سرعة الجسيم وهو على ارتفاع (٩٠) متر من سطح الارض

الحل :



$\text{ف}_{\text{البرج}} = -\text{ن}^{٢} + ١١\text{ن}$

$\text{ف}_{\text{الارض}} = -\text{ن}^{٢} + ١١\text{ن} + ٦٠$

$\text{ع} = -٢\text{ن} + ١١ \quad ، \quad \text{ت} = -٢$

$\text{ف} = ٩٠\text{م} \Leftarrow -\text{ن}^{٢} + ١١\text{ن} + ٦٠ = ٩٠$

اضرب المعادلة بـ $(-١) \Leftarrow \text{ن}^{٢} - ١١\text{ن} + ٣٠ = ٠$

$\Leftarrow (\text{ن} - ٦)(\text{ن} - ٥) = ٠ \Leftarrow \text{ن} = ٦ \text{ ، } \text{ن} = ٥$

$\text{ع}|_{\text{ن}=٦} = -٢ \times ٦ + ١١ = -١\text{م/ث}$ (هابط)

$\text{ع}|_{\text{ن}=٥} = -١٠ + ١١ = ١\text{م/ث}$ (صاعد)

---

٣) يتحرك جسيم حسب العلاقة : $\text{ف} = \text{جا}^{٤}\text{ن}$ ، احسب التسارع عندما تنعدم السرعة لأول مرة من بدء الحركة

الحل :

$\text{ع} = ٤\text{جا}^{٣}\text{ن جتان} = ٠$

$٤\text{جا}^{٣}\text{ن} = ٠$	$\text{جتان} = ٠$
$\text{جان} = ٠$	$\text{ن} = \frac{\pi}{٢} \text{ ، } \frac{٣\pi}{٢}$
$\text{ن} = ٠ \text{ ، } \pi \text{ ، } ٢\pi$	

$\text{ن} = \frac{\pi}{٢}$

$\text{ت} = ٤\text{جا}^{٣}\text{ن} \times -\text{جان} + \text{جتان} \times ١٢\text{جا}^{٢}\text{ن جتان}$

$= -٤\text{جا}^{٤}\text{ن} + ١٢\text{جا}^{٢}\text{ن جتا}^{٢}\text{ن}$

$\text{ت}(\frac{\pi}{٢}) = -٤ \times ١ + ١٢ \times ١ \times ٠ = -٤$

---

٤) من سطح بناية اسقط جسيم حسب العلاقة : $\text{ف}_{١} = ٥\text{ن}^{٢}$ وبعد ثانية قذف جسيم اخر رأسيا للأسفل من نفس المكان $\text{ف}_{٢} = ١٥\text{ن} + ٥\text{ن}^{٢}$ فوصل الجسمان الارض معا ، احسب سرعة كل من الجسيمين لحظة وصول الارض وما ارتفاع البناية

الحل :

اذا احتاج الجسيم الثاني (ن) ثانية فان الاول : (ن + ١)

$\text{ف}_{١}(\text{ن}+١) = \text{ف}_{٢}(\text{ن})$

$٥(\text{ن}+١)^{٢} = ١٥\text{ن} + ٥\text{ن}^{٢}$

$٥\text{ن}^{٢} + ١٠\text{ن} + ٥ = ١٥\text{ن} + ٥\text{ن}^{٢}$

$٥\text{ن} = ٥ \Leftarrow \text{ن} = ١$

$\text{ف}_{١}(٢) = ٥ \times ٤ = ٢٠$

$\text{ف}_{٢}(١) = ١٥ \times ١ + ٥ \times ١ = ٢٠$ ⇐ ارتفاع البناية = ٢٠

$\text{ع}_{١} = ١٠\text{ن} \Leftarrow \text{ع}_{١}(٢) = ٢ \times ١٠ = ٢٠$

$\text{ع}_{٢} = ١٥ + ١٠\text{ن} \Leftarrow ١٥ + ١٠ \times ١ = ٢٥$

---

٥) يتحرك جسمان بحيث $\text{ع}^{٢} = \text{ف}^{٣}$ ، احسب التسارع عندما السرعة تساوي ٨م / ث

الحل :

$\text{ع}^{٢} = \text{ف}^{٣} \Leftarrow ٢\text{ع ع}' = ٣\text{ف}^{٢}\text{ف}'$

$\Leftarrow ٢\cancel{\text{ع}}\text{ت} = ٣\text{ف}^{٢}\cancel{\text{ع}}$

$\text{ت} = \frac{٣\text{ف}^{٢}}{٢}$	عندما ع = ٨
$= \frac{٣ \times ١٦}{٢} = ٢٤$	$(٨)^{٢} = \text{ف}^{٣}$
	$٦٤ = \text{ف}^{٣} \Leftarrow \text{ف} = ٤$

٦) اذا كانت $\text{ع} = \text{ا}\sqrt{\text{ف}}$ ، $\text{ا} > ٠$ وكان تسارع الجسيم يساوي ٨م / ث^{٢} ، فما قيمة (ا)

الحل :

$$\text{ع} = \frac{\text{ا} \times \text{ف}'}{٢\sqrt{\text{ف}}} \quad ، \quad \text{ت} = \frac{\text{ا} \times \text{ع}}{٢\sqrt{\text{ف}}}$$

$$٨ = \frac{\text{ا} \times \text{ا}\cancel{\sqrt{\text{ف}}}}{٢\cancel{\sqrt{\text{ف}}}} \Leftarrow ١٦ = \text{ا}^{٢} \Leftarrow \text{ا} = ٤$$

٧) اسقط جسيم من ارتفاع ١٠٠م حيث $\text{ف}_{١} = ٥\text{ن}^{٢}$ وفي الوقت نفسه قذف جسيم للاعلى $\text{ف}_{٢} = ٥٠\text{ن} - ٥\text{ن}^{٢}$ ، اوجد سرعة كل من الجسيمين عندما يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الارض

الحل :

$$\text{ف}_{١} + \text{ف}_{٢} = ١٠٠$$

$$٥\text{ن}^{٢} + ٥٠\text{ن} - ٥\text{ن}^{٢} = ١٠٠ \Leftarrow ٥٠\text{ن} = ١٠٠ \Leftarrow \text{ن} = ٢$$

سرعة الجسيم الاول : $\text{ع}_{١} = \text{ف}_{١}'(\text{ن}) = ١٠\text{ن}$

$$\Leftarrow \text{ف}_{١}'(٢) = ١٠ \times ٢ = ٢٠\text{م / ث}$$

سرعة الجسيم الثاني : $\text{ع}_{٢} = \text{ف}_{٢}'(\text{ن}) = ٥٠ - ١٠\text{ن}$

$$\Leftarrow \text{ف}_{٢}'(٢) = ٥٠ - (١٠ \times ٢) = ٣٠\text{م / ث}$$

٨) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان بعده عن نقطة ثابتة بالأمتار بعد (ن) ثانية من بدء حركته يعطى وفقا للاقتران : $\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^{٣}$ ، فإذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية $[٠، \text{ا}]$ تساوي سرعته اللحظية عندما ن = ٢ ، جد قيمة (ا)

الحل :

$$\text{ع} = \text{ف}' = ٣\text{ن}^{٢} \Leftarrow \text{ع}(٢) = ١٢$$

$$\text{السرعة المتوسطة} = \frac{\text{ف}(\text{ا}) - \text{ف}(٠)}{\text{ا} - ٠} = \frac{\text{ا}^{٣} - ٠}{\text{ا}} = ١٢$$

$$\text{ا}^{٣} = ١٢\text{ا} \Leftarrow \text{ا}^{٣} - ١٢\text{ا} = ٠$$

$$\Leftarrow \text{ا}(\text{ا}^{٢} - ١٢) = ٠ \Leftarrow \text{ا} = ٠ ، \sqrt{١٢} ، -\sqrt{١٢}$$

نأخذ $\text{ا} = \sqrt{١٢}$

٩) من نقطة على ارتفاع (٨٠) متر من سطح الارض قذف جسيم رأسيا الى اعلى وفق اقتران المسافة $\text{ف}(\text{ن}) = ٦٤\text{ن} - ١٦\text{ن}^{٢}$ ، جد :

أ) اقصى ارتفاع يصل اليه الجسيم

ب) الزمن الذي بعده يعود الى نقطة القذف

ج) الزمن الذي بعده يعود الى سطح الارض

د) متى تصبح سرعة الجسيم ٤٠م / ث

هـ) مجموعة القيم $\text{ن} \geq ٠$ التي تكون عندها $\text{ع}(\text{ن}) > ٠$

الحل :

$$\text{ف} = ٦٤\text{ن} - ١٦\text{ن}^{٢}$$

أ) $\text{ع} = \text{ف}' = ٦٤ - ٣٢\text{ن} = ٠ \Leftarrow \text{ن} = ٢$

اقصى ارتفاع من نقطة القذف

$$\text{ف}(٢) = ٦٤ \times ٢ - ١٦ \times ٤ = ١٢٨ - ٦٤ = ٦٤$$

عن سطح الارض يكون اقصى ارتفاع هو

$$٦٤ + ٨٠ = ١٤٤\text{م}$$

ب) $\text{ف} = ٠ \Leftarrow ٦٤\text{ن} - ١٦\text{ن}^{٢} = ٠$

$$\Leftarrow ١٦\text{ن}(٤ - \text{ن}) = ٠ \Leftarrow \text{ن} = ٠ \quad ، \quad \text{ن} = ٤ \checkmark$$

ج) $\text{ف عن الارض} = ٦٤\text{ن} - ١٦\text{ن}^{٢} + ٨٠$

وعندما يصل سطح الارض تكون ف = ٠

$$٦٤\text{ن} - ١٦\text{ن}^{٢} + ٨٠ = ٠$$

$$١٦\text{ن}^{٢} - ٦٤\text{ن} - ٨٠ = ٠ \quad \div ١٦$$

$$\text{ن}^{٢} - ٤\text{ن} - ٥ = ٠ \Leftarrow (\text{ن} - ٥)(\text{ن} + ١) = ٠$$

$$\Leftarrow \text{ن} = ٥ \quad ، \quad \text{ن} = -١ \text{ ، نأخذ } \text{ن} = ٥$$

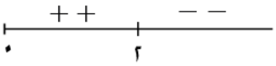
د) ع = ٦٤ − ٣٢ن = ٤٠ ⇐ ٦٤ − ٤٠ = ٣٢ن

٢٤ = ٣٢ن ⇐ ن = ٢٤/٣٢ = ٣/٤

هـ) ندرس اشارة (ع)

ع = ٦٤ − ٣٢ن = ٠ ⇐ ن = ٢

ع > ٠ في [٠، ٢)



١٠) قذفت كرة من قمة برج ارتفاعه ١٠٠م حسب العلاقة ف(ن) = أن − ٥ن² حيث أ > ٠ وكانت سرعة الكرة عند ملامستها الارض هي ٦٠م/ث ، اوجد قيمة الثابت (أ)

الحل :

ف(ن) = أن − ٥ن²

عند ملامستها سطح الارض ⇐ ف(ن) + ١٠٠ = ٠

⇐ أن − ٥ن² + ١٠٠ = ٠ ......(١)

ف′(ن) = أ − ١٠ن ⇐ أ − ١٠ن = −٦٠

⇐ ن = (+٦٠ + أ)/١٠

عوض قيمة (ن) في (١)

أ((٦٠ + أ)/١٠) − ٥((٦٠ + أ)/١٠)² + ١٠٠ = ٠

١٢٠أ + ٢أ² − ٣٦٠٠ − ١٢٠أ − أ² + ٢٠٠٠ = ٠

أ² − ١٦٠٠ = ٠ ⇐ أ = ±٤٠

لكن أ > ٠ ⇐ أ = ٤٠

مثال (٨) :

اذا كانت ق = √(س³ − ٣س) ، ما القيم الحرجة على [−٢، ٢]

الحل :

ق′ = (٣س² − ٣)/(٢ × √(س³ − ٣س))

البسط :

٣س² − ٣ = ٠

⇐ س = ١، −١

المقام :

س³ − ٣س = ٠

س(س² − ٣) = ٠

س = ٠، √٣، −√٣

القيم الحرجة : {−٢، ٢، ١، −١، ٠، −√٣، √٣}

مثال (٩) :

اوجد فترات التزايد والتناقص لكل مما يلي:

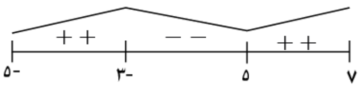
١) ق = س³/٣ − س² − ١٥س − ١٢ ، س ∈ [−٥، ٧]

الحل :

ق′ = س² − ٢س − ١٥ = ٠

(س − ٥)(س + ٣) = ٠ ⇐ س = ٥، −٣

متناقص [−٣، ٥]



متزايد [−٥، −٣]، [٥، ٧]

٢) ق = جتاس لكل [٠، ٢π]

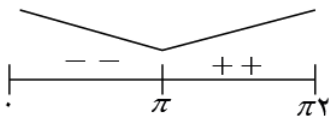
الحل :

ق′ = −جاس = ٠ ⇐ جاس = ٠

⇐ س = π، ٢π

القيم الحرجة : {٠، π، ٢π}

متزايد على [π، ٢π]



متناقص [٠، π]

٣) ق(س) = س − |س − ٣| ، س ∈ [−٢، ٦]

الحل :

٣ − س = ٠ ⇐ س = ٣

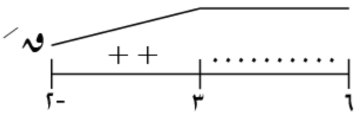
ق(س) = س − { ٣ − س ، −٢ ≤ س < ٣
س − ٣ ، ٣ ≤ س ≤ ٦ }

= { −٣ + ٢س ، −٢ ≤ س < ٣
    ٣ ، ٣ ≤ س ≤ ٦ }

ق'(س) = { ٢ ، −٢ < س < ٣
    ٠ ، ٣ < س < ٦ }

متزايد على [−٢ ، ٣]

ثابت [٣ ، ٦]



مثال (١٠) :

اذا كان ق متزايد على (ع) ، (هـ) متناقص على (ع) وكان ل(س) = ٧ق(س) − ٢هـ^{٣}(س) ، بين ان (ل) متزايد على (ع)

الحل :

ل' = ٧ق' − ٦هـ^{٢}(س) × هـ'(س)

ق' > ٠ ⟸ ٧ق' > ٠

هـ^{٢} > ٠ لانه مربع

هـ' < ٠ لانه متناقص

هـ^{٢} × هـ' < ٠ ⟸ −٦هـ^{٢} × هـ' > ٠

⟸ ل' = موجب + موجب = موجب ⟸ ل متزايد

مثال (١١) :

احسب القيم القصوى لكل مما يلي :

١) ق(س) = (س^{٣} − ٩س)$^{\frac{١}{٣}}$

الحل :

ق'(س) = $\frac{١}{٣}$ (س^{٣} − ٩س)$^{\frac{-٢}{٣}}$ (٣س^{٢} − ٩)

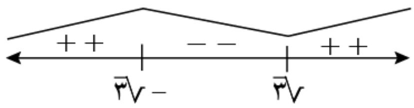
= $\frac{٣س^{٢} - ٩}{٣(س^{٣} - ٩س)^{\frac{٢}{٣}}}$ = $\frac{٣س^{٢} - ٩}{٣\sqrt[٣]{(س^{٣} - ٩س)^{٢}}}$

البسط :
٣س^{٢} − ٩ = ٠
⟸ س = ±$\sqrt{٣}$

المقام :
س^{٣} − ٩س = ٠
س(س^{٢} − ٩) = ٠
س = ٠ ، ٣ ، −٣

القيم الحرجة {±$\sqrt{٣}$ ، ±٣ ، ٠}

لان المقام موجب ندرس اشارة البسط



متزايد (−∞ ، −$\sqrt{٣}$] [$\sqrt{٣}$ ، ∞)

متناقص [−$\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$]

س = −$\sqrt{٣}$ عظمى محلية

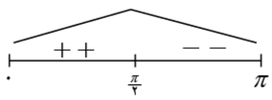
س = $\sqrt{٣}$ صغرى محلية

٢) ق(س) = سجاس + جتاس ، س ∈ [٠ ، π]

الحل :

ق'(س) = سجتاس + $\cancel{\text{جاس}}$ − $\cancel{\text{جاس}}$ = ٠

سجتاس = ٠ ⟸ س = ٠ ، $\frac{π}{٢}$



ق($\frac{π}{٢}$) = $\frac{π}{٢}$ + ٠ = $\frac{π}{٢}$ عظمى مطلقة

ق(٠) = ٠ + ١ = ١ صغرى

ق(π) = ٠ + (−١) = −١ صغرى مطلقة

مثال (١٢) :

جد قيم كل من الثابتين أ ، ب التي تجعل للاقتران ق(س) = س^{٣} + أس^{٢} + بس نقطتين حرجتين عند س = −١ ، س = ٢

الحل :

ق'(س) = ٣س^{٢} + ٢أس + ب

ق'(−١) = ٣ − ٢أ + ب = ٠

⟸ −٢أ + ب = −٣ ......(١)

ق'(٢) = ١٢ + ٤أ + ب = ٠

⟸ ٤أ + ب = −١٢ ......(٢)

بالطرح : ٦أ = −٩ ⟸ أ = $\frac{-٩}{٦}$ = $\frac{-٣}{٢}$

بالتعويض : −٢ × $\frac{-٣}{٢}$ + ب = −٣

٣ + ب = −٣ ⟸ ب = −٦

مثال (١٣) :

اوجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف لكل مما يلي :

١) $\text{ق} = ٢\text{جتاس} + \frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س}$ على $[٠ ، ٢\pi]$

الحل :

$\text{ق}' = -٢\text{جاس} + \frac{١}{٢} \times ٢\text{جتا}٢\text{س}$

$\text{ق}'' = -٢\text{جتاس} - ٢\text{جا}٢\text{س} = ٠$

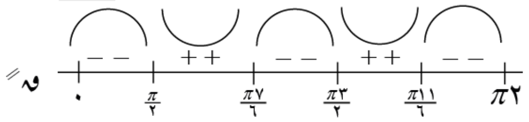
$\text{ق}'' = -٢\text{جتاس} - ٢(٢\text{جاس جتاس}) = ٠$

$-٢\text{جتاس}(١ + ٢\text{جاس}) = ٠$

$-٢\text{جتاس} = ٠ \Leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}$

$١ + ٢\text{جاس} = ٠ \Leftarrow \text{جاس} = \frac{-١}{٢}$

$\Leftarrow \text{س} = \frac{٧\pi}{٦} ، \frac{١١\pi}{٦}$



نقاط الانعطاف :

$(\frac{\pi}{٢} ، ٠)(\frac{٧\pi}{٦} ، \frac{-٣\sqrt{٣}}{٤})(\frac{٣\pi}{٢} ، ٠)(\frac{١١\pi}{٦} ، \frac{٣\sqrt{٣}}{٤})$

٢) $\text{ق} = \text{س} + \frac{٤}{\text{س}}$

الحل :

ق غير متصل عندما $\text{س} = ٠$

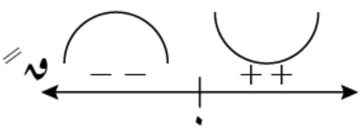
$\text{ق}' = ١ - \frac{٤}{\text{س}^٢}$

$\text{ق}'' = \frac{٤ \times ٢\text{س}}{\text{س}^٤} = \frac{٨}{\text{س}^٣}$

$\text{ق}''$ غير موجودة عندما $\text{س} = ٠$

مقعر للأسفل $(-\infty ، ٠)$

مقعر للأعلى $(٠ ، \infty)$

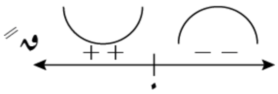


٣) $\text{ق} = \text{س}^{\frac{٣}{٥}}$

الحل :

$\text{ق}' = \frac{٣}{٥}\text{س}^{\frac{-٢}{٥}} \Leftarrow \text{ق}'' = \frac{-٦}{٢٥}\text{س}^{\frac{-٧}{٥}} = \frac{-٦}{٢٥\text{س}^{\frac{٧}{٥}}}$

$\text{ق}''$ غير موجودة عندما $\text{س} = ٠$



نقطة الانعطاف : $(٠ ، ٠)$

٤) $\text{ق} = \text{س}^٢ + \frac{١٢٨}{\text{س}}$ ، فما القيم القصوى باستخدام المشتقة الثانية

الحل :

$\text{ق}' = ٢\text{س} - \frac{١٢٨}{\text{س}^٢} = ٠$

$٢\text{س} = \frac{١٢٨}{\text{س}^٢} \Leftarrow \text{س}^٣ = ٦٤ \Leftarrow \text{س} = ٤$

$\text{ق}'' = ٢ + \frac{١٢٨ \times ٢\text{س}}{\text{س}^٤} \Leftarrow \text{ق}''(٤) = ٦ > ٠$

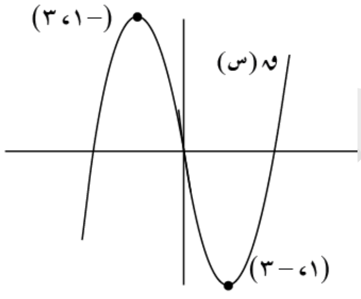
$\Leftarrow$ صغرى محلية عندما $\text{س} = ٤$ وهي

$\text{ق}(٤) = ١٦ + ٣٢ = ٤٨$

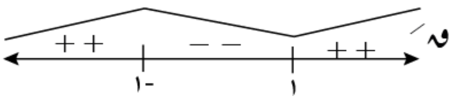
مثال (١٤) :

١) الرسم المجاور يمثل ق كثير حدود

اوجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى وفترات التقعر ونقاط الانعطاف



الحل :



متزايد في $(-\infty ، -١] [١ ، \infty)$

متناقص $[-١ ، ١]$

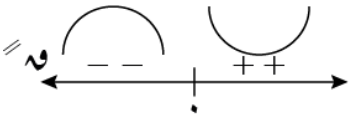
$\text{ق}(-١) = ٣$ قيمة عظمى محلية

ق(١) = −٣ قيمة صغرى محلية

مقعر للاسفل (∞،٠]

مقعر للاعلى [٠،∞)

نقطة الانعطاف (٠،٠)

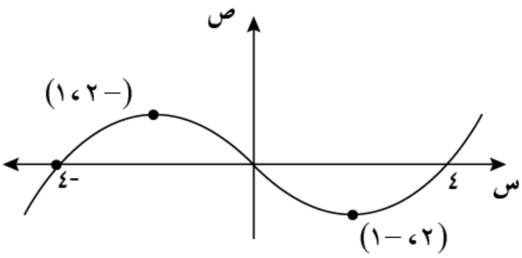


٢) الشكل المجاور يمثل ق′(س)

أ) ما القيم الحرجة

ب) اوجد فترات التزايد والتناقص

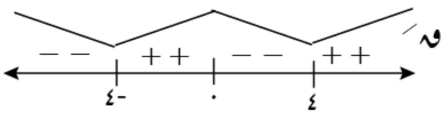
ج) فترات التقعر للأعلى وللأسفل



الحل :

أ) القيم الحرجة

{−٤،٠،٤}



ب) متزايد في [−٤،٠] ، [٤،∞)

متناقص (−∞،−٤] ، [٠،٤]

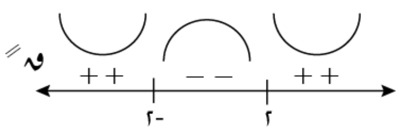
ق(−٤) قيمة صغرى محلية

ق(٤) قيمة صغرى محلية

ق(٠) قيمة عظمى محلية

ج) مقعر للاسفل

[−٢،٢]



مقعر للأعلى (−∞،−٢] ، [٢،∞)

نقاط الانعطاف (٢،ق(٢)) ، (−٢،ق(−٢))

زوايا الانعطاف :

ظاهـ$_1$ = ق′(−٢) = ١ ⟸ هـ$_1$ = ٤٥

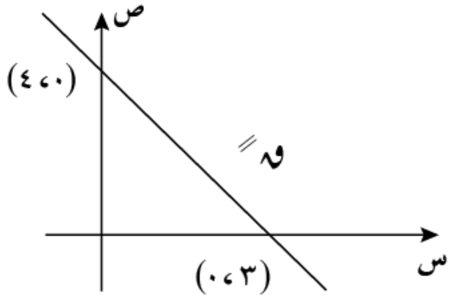
ظاهـ$_2$ = ق′(٢) = −١ ⟸ هـ$_2$ = ١٣٥

٣) الرسم المجاور يمثل منحنى ق″(س) ، جد :

أ) فترات التقعر ونقاط الانعطاف

ب) اوجد ق‴(٢)

ج) اذا كانت س = ١ ، س = ٥ ، فما القيم الحرجة والقيم القصوى وفترات التزايد والتناقص



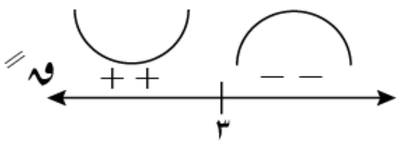
الحل :

أ) مقعر لاعلى

(−∞،٣]

مقعر للاسفل

[٣،∞)



نقاط الانعطاف (٣،ق(٣))

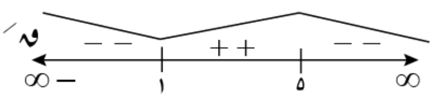
ب) ق‴ = ميل ق″ = $\frac{٤-٠}{٠-٣}$ = $\frac{-٤}{٣}$

ج) ق′(١) = ٠

ق″(١) = موجبة ⟸ صغرى محلية عندما س = ١

ق′(٥) = ٠

ق″(٥) = سالبة ⟸ عظمى محلية عندما س = ٥



متزايد في [١،٥]

متناقص (−∞،١] ، [٥،∞)