

Full Mark

الفرعين : الأدبي ، والفندقي السياحي
الوحدة الرابعة : التكامل وتطبيقاته

إعداد الأستاذ : محمد العبدالات

مدرسة المجددون الدولية

مركز الحارون والعبدالات (أم نوارة)

مركز الحارون والعبدالات (الهاشمي)

مركز الإبداع الثقافي (طبربور)

مركز صناع النجاح (النزهة)



0781005059

التكامل غير المحدود

رمز التكامل : اقتران . د س

قواعد التكامل:

(١) ثابت . د س = نفس الثابت س + ج

الأمثلة : (١) ٥ . د س = ٥ س + ج

(٢) ٧ . د س = ٧ س + ج

(٣) ٣- . د س = ٣- س + ج

(٤) د س = س + ج

(٥) أ . د س = أ س + ج ، حيث أ ثابت

(٦) ب . د س = ب س + ج ، حيث ب ثابت

(٧) ٣ك . د س = ٣ك س + ج ، حيث ك ثابت

(٨) ١/٢ . د س = ١/٢ س + ج

(٢) ١+٥ . د س = ١+٥ س + ج

الأمثلة : (١) ١/٦ . د س = ١/٦ س + ج

(٢) ٤ . د س = ٤ س + ج

(٣) ١٠٠ . د س = ١٠٠ س + ج (القوة الموجبة بتزايد)

(٤) ٣- . د س = ٣- س + ج

(٥) ٧- . د س = ٧- س + ج

(٦) ٨- . د س = ٨- س + ج (القوة السالبة بتقل)

(٧) ٢ . د س = ٢ س + ج

(٨) ٥ . د س = ٥ س + ج

(٩) ١/٢ . د س = ١/٢ س + ج

(٣) عدد س . د س = عدد س + ج

الأمثلة : (١) ٥ . د س = ٥ س + ج

(٢) ٨ . د س = ٨ س + ج

(٣) ٦ . د س = ٦ س + ج

(٤) ٥ . د س = ٥ س + ج

(٤) التكامل يوزع على الجمع والطرح فقط

مثال ١ : (٥س + ٣س + ٥س + ٢س - ٣س) د س

= ٥س + ٣س + ٥س + ٢س - ٣س

مثال ٢ : (٢س + ٨س - ٣س) د س

= ٢س + ٨س - ٣س

$$(6) \left[5 \text{ جا } (3\text{س}) \text{ د س} = \frac{-5 \text{ جتا } (3\text{س})}{3} + \text{ج} \right]$$

$$(7) \left[4 \text{ جا } (7\text{س}) \text{ د س} = \frac{-4 \text{ جتا } (7\text{س})}{7} + \text{ج} \right]$$

$$(8) \left[(3-2) \text{ جا س} \text{ د س} = 3 \text{ جا س} + 2 \text{ س} + \text{ج} \right]$$

$$(9) \left[\frac{\text{جا س}}{3} \text{ د س} = \frac{\text{جتا س}}{3} + \text{ج} \right]$$

$$(10) \left[\frac{\text{جا ه س}}{3} \text{ د س} = \frac{\text{جتا ه س}}{5 \times 3} + \text{ج} = \frac{\text{جتا ه س}}{15} + \text{ج} \right]$$

$$(7) \left[\text{جا } (3\text{س} + \text{ب}) \text{ د س} = \frac{\text{جا } (3\text{س} + \text{ب})}{1} + \text{ج} \right]$$

$$(1) \left[\text{جتا } (5\text{س} + 2) \text{ د س} = \frac{\text{جا } (5\text{س} + 2)}{5} + \text{ج} \right]$$

$$(2) \left[\text{جتا } (3\text{س} - 2) \text{ د س} = \frac{\text{جا } (3\text{س} - 2)}{3} + \text{ج} \right]$$

$$(3) \left[\text{جتا } (4\text{س}) \text{ د س} = \frac{\text{جا } (4\text{س})}{4} + \text{ج} \right]$$

$$(4) \left[\text{جتا ه س} + \text{جا س} - 2\text{س} - 3\text{س}^2 \text{ د س} \right]$$

$$= \frac{\text{جا ه س}}{5} - \frac{\text{جتا س}}{2} + \frac{3\text{س}^3}{3} + \text{ج} =$$

$$= \frac{\text{جا ه س}}{5} - \frac{\text{جتا س}}{2} - 3\text{س}^2 + \text{ج} =$$

$$(5) \left[3 \text{ جتا س} \text{ د س} = \frac{3 \text{ جا س}}{2} + \text{ج} \right]$$

$$(6) \left[\text{جتا س} - 5\text{س}^6 + 2 \text{ د س} \right]$$

$$= \frac{\text{جتا س}}{1} - \frac{5\text{س}^7}{7} + 2\text{س} + \text{ج} =$$

$$(7) \left[(5 \text{ جتا س} - 7 \text{ جا س}) \text{ د س} \right]$$

$$= 5 \frac{\text{جا س}}{7} + \frac{\text{جتا س}}{2} + \text{ج} =$$

$$(8) \left[\frac{\text{جتا س}}{2} \text{ د س} = \frac{\text{جا س}}{2} + \text{ج} \right]$$

$$(5) \left[(3\text{س} + \text{ب}) \text{ د س} = \frac{(3\text{س} + \text{ب})^{1+1}}{1+1} + \text{ج} = \frac{(3\text{س} + \text{ب})^2}{2} + \text{ج} \right]$$

خطي داخل قوس

$$(1) \left[(3+5\text{س}) \text{ د س} = \frac{(3+5\text{س})^2}{2 \times 5} + \text{ج} \right]$$

$$(2) \left[(3\text{س} - 1) \text{ د س} = \frac{(3\text{س} - 1)^2}{2 \times 3} + \text{ج} \right]$$

$$(3) \left[(7\text{س} - 2) \text{ د س} = \frac{(7\text{س} - 2)^2}{2 \times 7} + \text{ج} \right]$$

$$(4) \left[(3\text{س} + 2) \text{ د س} = \frac{(3\text{س} + 2)^2}{2 \times 3} + \text{ج} \right]$$

$$(5) \left[(7\text{س} + 5) \text{ د س} = \frac{(7\text{س} + 5)^2}{2 \times 7} + \text{ج} \right]$$

$$(6) \left[(7\text{س} - 1) \text{ د س} = \frac{(7\text{س} - 1)^2}{2 \times 7} + \text{ج} \right]$$

$$(7) \left[(6\text{س} - 1) \text{ د س} = \frac{(6\text{س} - 1)^2}{2 \times 1} + \text{ج} \right]$$

$$(6) \left[\text{جا } (3\text{س} + \text{ب}) \text{ د س} = \frac{\text{جتا } (3\text{س} + \text{ب})}{1} + \text{ج} \right]$$

$$(1) \left[\text{جا } (2\text{س} - 2) \text{ د س} \right]$$

$$= \frac{\text{جتا } (2\text{س} - 2)}{2} + \text{ج} =$$

$$(2) \left[\text{جا } (6\text{س} + 1) \text{ د س} = \frac{\text{جتا } (6\text{س} + 1)}{6} + \text{ج} \right]$$

$$(3) \left[\text{جا } (5\text{س}) \text{ د س} = \frac{\text{جتا } (5\text{س})}{5} + \text{ج} \right]$$

$$(4) \left[\text{جا س} \text{ د س} = \frac{\text{جتا س}}{1} + \text{ج} = \text{جتا س} + \text{ج} \right]$$

$$(5) \left[(4\text{س} + \text{جا}) \text{ د س} = \frac{4\text{س}^2}{2} + \frac{\text{جتا } (5\text{س})}{5} + \text{ج} \right]$$

$$= 2\text{س}^2 + \frac{\text{جتا } (5\text{س})}{5} + \text{ج} =$$

$$(٨) \int (أس + ب) دس = \frac{ظا(أس + ب)}{١} + ج$$

الأمثلة : (١) $\int (١ + س) دس$

$$= \frac{ظا(١ + س)}{١} + ج$$

$$(٢) \int \sqrt{أس} دس$$

تجهيز $\int أس^{\frac{٢}{٣}} دس$

$$تكامل = \int أس^{\frac{٢}{٣}} دس = \int أس^{\frac{٥}{٣}} دس = \int أس^{\frac{٢+٢}{٣}} دس = \frac{س^{\frac{٥}{٣}+١}}{\frac{٥}{٣}+١} + ج = \frac{س^{\frac{٨}{٣}}}{\frac{٨}{٣}} + ج$$

$$(٢) \int (٤س) دس = \frac{ظا(٤س)}{٤} + ج$$

$$(٣) \int (٣س^٢ + ٢س - ٥) دس$$

$$= \frac{ظا(٣س^٢)}{٣} + \frac{ظا(٢س)}{٢} + \frac{ظا(-٥س)}{١} + ج = س^٣ + س^٢ - ٥س + ج$$

$$(٣) \int \sqrt{س} دس$$

تجهيز $\int أس^{\frac{١}{٢}} دس$

$$تكامل = \int أس^{\frac{١}{٢}} دس = \int أس^{\frac{٣}{٢}} دس = \int أس^{\frac{٢+١}{٢}} دس = \frac{س^{\frac{٣}{٢}+١}}{\frac{٣}{٢}+١} + ج = \frac{س^{\frac{٥}{٢}}}{\frac{٥}{٢}} + ج$$

$$(٤) \int (٦س^٢ + ٥س) دس = \frac{ظا(٦س^٢)}{٦} + \frac{ظا(٥س)}{٥} + ج$$

$$(٥) \int \frac{أس^٢}{٢} دس = \frac{ظا(أس^٢)}{٢} + ج$$

$$(٤) \int (٣س^٢ + ٢س - ٣) دس$$

تجهيز $\int (س^{\frac{٥}{٢}} + ٢س - ٣) دس$

$$تكامل = \int (س^{\frac{٥}{٢}} + ٢س - ٣) دس = \frac{س^{\frac{٥}{٢}+١}}{\frac{٥}{٢}+١} + \frac{ظا(٢س)}{٢} - ٣س + ج = \frac{س^{\frac{٧}{٢}}}{\frac{٧}{٢}} + س^٢ - ٣س + ج$$

$$(٦) \int (س^٣ - ٣س + ٤س^٥) دس$$

$$= \frac{ظا(س^٣)}{٣} + \frac{ظا(-٣س)}{-٣} + \frac{ظا(٤س^٥)}{٥} + ج = \frac{س^٣}{٣} + س + \frac{٤س^٦}{٥} + ج$$

$$(٧) \int (٦س^٣ + ٣س^٥ + ٣س) دس$$

$$= \frac{ظا(٦س^٣)}{٦} + \frac{ظا(٣س^٥)}{٥} + \frac{ظا(٣س)}{٣} + ج = س^٣ + \frac{٣س^٦}{٥} + س + ج$$

المحرمات الخمسة :

(٢) محرمة الضرب

() ()

س ()

تجهيز ← تكامل

(١) محرمة الجذر $\sqrt[٢]{أس}$

تجهيز ← تكامل

الأمثلة : (١) $\int \sqrt[٣]{أس} دس$

تجهيز $\int أس^{\frac{٢}{٥}} دس$

$$تكامل = \int أس^{\frac{٢}{٥}} دس = \int أس^{\frac{٥+٢}{٥}} دس = \frac{س^{\frac{٧}{٥}+١}}{\frac{٧}{٥}+١} + ج = \frac{س^{\frac{١٢}{٥}}}{\frac{١٢}{٥}} + ج$$

الأمثلة : (١) جد $\int (٤س + ١) دس$

تجهيز $\int (٤س^٢ + ٣س) دس$

$$تكامل = \int (٤س^٢ + ٣س) دس = \frac{٤س^٣}{٣} + \frac{٣س^٢}{٢} + ج$$

$$= س^٣ + \frac{٣س^٢}{٢} + ج$$

(٢) جد $\int \frac{3}{s} ds$

تجهيز $= \int 3s^{-1} ds$

تكامل $= \int 3s^{-1} ds = 3 \ln |s| + C$

(٣) جد $\int \frac{8}{s^6} ds$

تجهيز $= \int 8s^{-6} ds$

تكامل $= \int \frac{8s^{-6}}{-5} ds = -\frac{8}{5} s^{-5} + C$

(٤) جد $\int \frac{ds}{s^5}$

تجهيز $= \int s^{-5} ds$

تكامل $= \int \frac{s^{-5}}{-4} ds = -\frac{1}{4} s^{-4} + C$

(٥) جد $\int \frac{3}{(s+5)^2} ds$

تجهيز $= \int 3(s+5)^{-2} ds$

تكامل $= \int \frac{3(s+5)^{-2}}{-1} ds = -3(s+5)^{-1} + C$

(٦) جد $\int \frac{2}{(1-5s)^8} ds$

تجهيز $= \int 2(1-5s)^{-8} ds$

تكامل $= \int \frac{2(1-5s)^{-8}}{-5} ds = -\frac{2}{5} (1-5s)^{-7} + C$

(٧) جد $\int \frac{3}{s^5(1-2s)} ds$

(٢) جد $\int 2s^2(3s^2+5)^2 ds$

تجهيز $= \int 2s^2(9s^4+30s^2+25) ds$

تكامل $= \int 2s^2(9s^4+30s^2+25) ds = \int (18s^6+60s^4+50s^2) ds$

$= 3s^7 + 12s^5 + \frac{25}{3}s^3 + C$

(٣) جد $\int (1+2s)(5+3s) ds$

تجهيز $= \int (5+3s+2s+6s^2) ds = \int (5+5s+6s^2) ds$

تكامل $= \int (5+5s+6s^2) ds = 5s + \frac{5}{2}s^2 + 2s^3 + C$

(٤) جد $\int (3+2s)(1-2s) ds$

(٣) محرمة القسمة

النوع الأول $\int \frac{\text{عدد}}{س قوة} ds$

تجهيز ← تكامل

الأمثلة: (١) $\int \frac{5}{s^4} ds$

تجهيز $= \int 5s^{-4} ds$

تكامل $= \int \frac{5s^{-4}}{-3} ds = -\frac{5}{3} s^{-3} + C$

$$(٤) \left[\frac{٤س^٣ + (٥س)^٢}{س^٢} \right] \text{ دس .}$$

$$\text{النوع الثاني :} \left[\frac{\text{أكثر من حد}}{\text{حد}} \right] \text{ دس .}$$

تجهيز ← تجهيز ← تكامل

$$\text{الأمثلة : (١)} \left[\frac{٥س^٤ + ٨س^٢ - ٣س^٣}{س} \right] \text{ دس .}$$

$$\text{تجهيز} = \left[\frac{٥س^٤}{س} - \frac{٣س^٣}{س} + \frac{٨س^٢}{س} \right] \text{ دس .}$$

$$\text{تجهيز} = \left[٥س^٣ - ٣س + ٨س \right] \text{ دس .}$$

$$\text{تكامل} = \frac{٥س^٤}{٤} - \frac{٣س^٣}{٣} + \frac{٨س^٢}{٢} + ج$$

$$(٥) \left[\frac{٦س^٥ + ٣س^٣ ج}{س^٣} \right] \text{ دس .}$$

$$(٢) \left[\frac{٦س^٤ + ٣س^٣ - ٥س^٥}{س^٢} \right] \text{ دس .}$$

$$\text{النوع الثالث :} \left[\frac{\text{أكثر من حد}}{\text{س - رقم}} \right] \text{ دس .}$$

تجهيز (تحليل و اختصار) ← تكامل

$$\text{الأمثلة : (١)} \left[\frac{٤س^٢ - ٤}{س - ٢} \right] \text{ دس ، } س \neq ٢$$

$$\text{تجهيز} = \left[\frac{(٢ - س)(٢ + س)}{س - ٢} \right] \text{ دس .}$$

$$\text{تكامل} = \frac{س^٢}{٢} + ٢س + ج$$

$$(٣) \left[\frac{٧س^٨ + ٥س^٣ - ٢}{س^٢} \right] \text{ دس .}$$

$$(٢) \left[\frac{٦س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٣} \right] \text{ دس ، } س \neq ٣$$

سؤال ٢: جد \int جتا هـ ظا هـ دس . دس

تجهيز \int ~~جتا هـ~~ $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ دس .

$$\text{تكامل} = \frac{-\text{جتا هـ}}{5} + \text{ج}$$

$$(3) \int \frac{s^3 + 8}{s^2 + 2} \text{ دس , } s \neq -2$$

$$\text{تجهيز} = \int \frac{(s+2)(s^2-2s+4)}{(s+2)} \text{ دس .}$$

$$\text{تكامل} = \frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} + 4s + \text{ج}$$

سؤال ٣: جد \int ٣ ظا س جتا س . دس

$$(4) \int \frac{s^2 + 2s - 15}{s - 3} \text{ دس , } s \neq 3$$

$$(5) \int \frac{s^3 + 64}{s + 4} \text{ دس , } s \neq -4$$

المحرمة ٥ : محرمة $\frac{\text{عدد}}{\text{جتا}^2 \text{س}}$

ارفع جتا^٢س للبسط وحولها لـ قاس^٢س

سؤال ١: جد \int جتا^٦س . دس

تجهيز \int ٦ قاس^٢س . دس

$$\text{تكامل} = 6 \text{ ظا س} + \text{ج}$$

المحرمة ٤ : محرمة ظا س

إذا شفت ظا س ← تذكر أن ظا س = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

سؤال ٢: جد \int جتا^٧س . دس

سؤال ١: جد \int جتا س ظا س . دس

تجهيز \int ~~جتا س~~ $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ دس .

$$\text{تكامل} = -\text{جتا س} + \text{ج}$$

سؤال ٣: $\int \frac{س^٢ + ٣س}{س} دس$

سؤال ٣: جد $\int \left(٨ + ٢س + \frac{٥}{س^٢} \right) دس$

سؤال ٤: $\int \sqrt{س + ١٠} دس$

* محرمات MIX *

بلش بالجذور بعدين بالضرب بعدين بالقسمة

سؤال ١: جد $\int \frac{٥}{س^٢} دس$

تجهيز الجذر = $\int \frac{٥}{س^٢} دس$

تجهيز القسمة = $\int ٥س^{-٢} دس$

تكامل

سؤال ٥: $\int \frac{١}{س + ٢} دس$

$$ج + \frac{س^{٢+٢-٣}}{٣+٢-٣} =$$

$$ج + \frac{س^١}{١} \times ٥ \times ٣ =$$

سؤال ٢: $\int \frac{س^٢ - ٥س}{س^٣} دس$

الأسئلة المقالية في التكامل غير المحدود

الحل	المطلوب	معطيات
(١) وزع التكامل على الطرفين (٢) تكامل قواعد محرمات (٣) نجد ج (من ق) عدد = رقم (٤) عوض ج (٥) Vip عوض قيمة س (إذا طلب ق) عدد	ق(س) قاعدة الاقتران ق(عدد)	ق(س)

سؤال ٤: إذا كان ق قابلاً للاشتقاق ، وكان
 $\bar{C}(s) = 3s^3 + 2s^2 + 3$ ، وكان ق (٠) = ٨ ، جد
 ق (١) ؟

سؤال ٥: إذا كان ق قابلاً للاشتقاق ، وكان
 $\bar{C}(s) = 3s(s+2)$ ، وكان ق (١) = ١٥ ، جد
 قاعدة الاقتران ق(س) ؟

سؤال ١: إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق ، وكان
 $\bar{C}(s) = 4s^3 + 2s^2 + 5$ ، وكان ق (٠) = ٨ ، جد
 قاعدة الاقتران ق(س) ؟

سؤال ٢: إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق ، وكان
 $\bar{C}(s) = 3s^3 + 2s^2 + 2$ ، وكان ق (١) = ٢٠ ، جد
 قاعدة الاقتران ق(س) ؟

سؤال ٦: إذا كان ق قابلاً للاشتقاق ، وكان
 $\bar{C}(s) = \frac{3s^3 + 6s^2 + 8s^4}{s}$ ، وكان
 ق (١) = ١٢ ، جد قاعدة الاقتران ق(س) ؟

سؤال ٣: إذا كان ق(س) قابلاً للاشتقاق ، وكان
 $\bar{C}(s) = 5 - 2s$ ، وكان ق (٢) = ٤ ، جد ق(٣) ؟

التكامل المحدود

$$\int_a^b u - v = \int_a^b u - \int_a^b v \quad \text{دس} = \int_a^b u = \int_a^b v - \int_a^b v$$

نفس التكامل غير المحدود بس بدل + \rightarrow بتحت قشاشة التكامل

مثال ١: $\int_1^2 3s^2 \cdot ds$

$$\int_1^2 \frac{3s^2}{s} =$$

$$= (\text{التعويض العلوي}) - (\text{التعويض السفلي})$$

$$7 = 1 - 8 = (3 \cdot 1) - (3 \cdot 2) =$$

سؤال ٨: إذا كان ل قابلا للاشتقاق ، وكان

$$\int_0^1 (s) = 4s^2 + 5s - 2s^4 ، \text{جد ل(١) - ل(٠)؟}$$

مثال ٢: $\int_2^5 2s \cdot ds$

$$\int_2^5 \frac{2s}{s} =$$

$$21 = 4 - 20 = (2 \cdot 2) - (2 \cdot 5) =$$

مثال ٣: $\int_1^3 (5 + 2s) \cdot ds$

مثال ٧ : $\int_1^6 2 \cdot x \, dx$

مثال ٤ : $\int_0^2 (3x^2 + 2x + 2) \cdot dx$

مثال ٨ : س ١ فرع ج ص ١٧١ من الكتاب

جد $\int_0^2 (3x^2 + 2x - 5x^4 + 7) \cdot dx$

مثال ٥ : $\int_0^1 (3 + 6x) \cdot dx$

(المحرمات مع التكامل المحدود)

مثال ٩ : جد $\int_0^1 \sqrt{x} \cdot dx$

مثال ٦ : $\int_{-1}^2 (3x^2 - 4) \cdot dx$

مثال ١٠ : $\int_0^1 (x^2 + \sqrt{x}) \cdot dx$

مثال ١٥ : $\int_{-2}^2 \frac{3}{s} \cdot ds$

مثال ١١ : جد $\int \frac{4}{s} \cdot ds$

مثال ١٦ : $\int \frac{6}{s} \cdot ds$

مثال ١٢ : $\int (2 + 3s) \cdot ds$

(قاعدة القوس مع التكامل المحدود) (أسئلة قوية)

مثال ١٣ : $\int (2 + 3s)(s + 4) \cdot ds$

مثال ١٧ : $\int (1 + 2s)^2 \cdot ds$

مثال ١٨ : $\int \frac{1}{1+s} \cdot ds$

مثال ١٤ : $\int \frac{1}{1-s} \cdot ds$

(قاعدة الملوخية)

نفس العدد

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} + C$$

$$\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 6 \right) dx = -\frac{1}{x} + \ln|x| + 6x + C$$

$$\int (4x - 1)^3 dx = \frac{(4x - 1)^4}{4} + C$$

$$\text{مثال ١٩ : } \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\text{مثال ٢٠ : } \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + C$$

ملاحظة: (المشتقة بتروح مع التكامل المحدود)

$$\text{مثال ١ : إذا كان } \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \text{ ، وكان } \int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} + C \text{ ، جد } \int \frac{1}{x^5} dx = ?$$

$$\text{مثال ٢ : إذا كان } \int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} + C \text{ ، وكان } \int \frac{1}{x^5} dx = -\frac{1}{4x^4} + C \text{ ، جد } \int \frac{1}{x^7} dx = ?$$

$$\text{مثال ٢١ : } \int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

الأسئلة المقالية في التكامل المحدود

المعطيات	المطلوب	الحل
\bar{c} (س) مع فترة [أ ، ب]	$c(b) - c(a)$	(١) وزع التكامل المحدود على الطرفين (٢) كامل الطرفين (٣) عوض حدود التكامل

مثال ٣ : إذا كان $\int_2^4 \bar{c}(s) \cdot ds = 25$ ، وكانت $c(4) = 8$ ، وكانت $c(2) = 3$ ، جد قيمة الثابت أ ؟

مثال ١ : س ٣ ص ١٧١ من الكتاب

إذا كان الاقتران ق معرفاً على الفترة [١ ، ٥] وكان

$$\bar{c}(s) = 2s + 1 ، \text{ جد قيمة } c(5) - c(1) ؟$$

مثال ٢ : إذا كان الاقتران ق معرفاً على الفترة

$$[2 ، 3] \text{ وكان } \bar{c}(s) = 2s - 1 ، \text{ جد قيمة}$$

$$c(3) - c(2) ؟$$

مثال ٤ : إذا كان $\int_1^7 \bar{c}(s) \cdot ds = 18$ ، وكانت $c(7) = 6$ ، وكانت $c(1) = 2$ ، جد قيمة الثابت ب ؟

مثال ٣ : إذا كان الاقتران ق معرفاً على الفترة [١ ، ٢]

$$\text{وكان } \bar{c}(s) = 3s^2 + 2 ، \text{ جد قيمة } c(2) - c(1) ؟$$

إيجاد المجاهيل في التكامل المحدود

النوع الأول: مجاهيل بدون s (س)

الحل : (١) كامل عادي

(٢) عوض حدود التكامل

(٣) إذا طلعت معادلة تربيعية طويلة :

← أنقل كل إشي على الطرف اليمين

← تحليل أو عامل مشترك

مثال ٤: إذا كان $\int_1^3 s^2 ds = 124$ ، جد قيمة الثابت a ؟مثال ١: إذا كان $\int_2^4 s ds = 20$ ، جد قيمة الثابت m ؟مثال ٥: إذا كان $\int_1^3 s ds = 10$ ، جد قيمة الثابت b ؟مثال ٢: إذا كان $\int_2^4 s ds = 16$ ، جد قيمة الثابت n ؟مثال ٦: إذا كان $\int_1^2 s ds = 20$ ، جد قيمة الثابت a ؟مثال ٣: إذا كان $\int_1^2 s ds = 9$ ، جد قيمة الثابت b ؟مثال ٧: إذا كان $\int_1^2 (s+2) ds = 0$ ، جد قيمة الثابت a ؟

النوع الثاني: مجاهيل مع ق(س)

الحل: (١) الحد العلوي = الحد السفلي

(٢) إذا طلعت معادلة تربيعية طويلة :

أنقل كل اشي عند التربيع

إما تحليل أو عامل مشترك

مثال ٨: إذا كان $\int_2^1 (2s + 5) ds = 0$ ، جد قيمة
الثابت أ ؟

مثال ١: إذا كان $\int_2^{10} (s) ds = 0$ ، جد قيمة الثابت أ ؟

مثال ٢: إذا كان $\int_4^{31-12} (s) ds = 0$ ، جد قيمة
الثابت أ ؟

مثال ٩: إذا كان $\int_1^6 (2s - 1) ds = 6$ ، جد قيمة
الثابت ل ؟

مثال ٣: إذا كان $\int_2^{1+2} (s) ds = 0$ ، جد قيمة الثابت م ؟

مثال ١٠: إذا كان $\int_1^b (2s - 1) ds = 0$ ، جد قيمة
الثابت ب ؟

مثال ٤: إذا كان $\int_{-1}^{10+7} (s) ds = 0$ ، جد قيمة الثابت م ؟

مثال ٨: إذا كان $\int_{1+2}^{4-2} u(s) ds = 0$ ، جد قيمة الثابت ؟

مثال ٥: إذا كان $\int_{8+2}^{2-4} u(s) ds = 0$ ، جد قيمة الثابت ؟

العلاقة بين المشتقة والتكامل غير المحدود

المعطيات	المطلوب	الحل
تكامل غير محدود	مشتقة	(١) اشتق الطرفين (٢) المشتقة بتروح مع التكامل (٣) تأكد من الوصول للمطلوب (٤) بعض الأسئلة تحتاج إلى اشتقاق مرة أخرى (٥) عوض قيمة س إن وجدت

مثال ٦: إذا كان $\int_{3}^{12+2} u(s) ds = 0$ ، جد قيمة الثابت ؟

مثال ١: إذا كان $\int_{\frac{5}{s}}^{(4s^2 - 3s)} u(s) ds = 0$ ، جد $\frac{5}{s}$ عندما $s = 2$.

مثال ٧: إذا كان $\int_{7+2}^{2} u(s) ds = 0$ ، جد قيمة الثابت ؟

مثال ٢: إذا كان $\int_{\frac{5}{s}}^{(1+5s)} u(s) ds = 0$ ، جد $\frac{5}{s}$ عندما $s = 1$.

مثال ٣: إذا كان $\int_{\frac{5}{s}}^{(1-6s)} u(s) ds = 0$ ، جد $\frac{5}{s}$ عندما $s = 2$.

مثال ٤: إذا كان $u = (s^3 + 5)^2$ ، جد $\frac{du}{ds}$.

مثال ١٠: إذا كان $u = (s^2 - 5)^3$ ، جد $\frac{du}{ds}$.

مثال ٥: إذا كان $u = (3s - 5)^2$ ، جد $\frac{du}{ds}$.

العلاقة بين المشتقة والتكامل المحدود

المعطيات	المطلوب	الحل
تكامل محدود	اشتقاق	الجواب صفر

(مهم) مثال ٦: إذا كان $u = (5s^2 + 2)^3$ ، جد $\frac{du}{ds}$.

مثال ١: إذا كان $u = (5s^2 + 5)^3$ ، جد $\frac{du}{ds}$.

مثال ٧: إذا كان

$u = (s^3 - 2s^2 + 5s - 5)^3$ ، جد $\frac{du}{ds}$.

مثال ٢: إذا كان $u = (2s^2 - 2)^3$ ، جد $\frac{du}{ds}$.

مثال ٨: (مهم جداً : ٢٠١٨ صيفي) إذا كان

$u = (s^3 - 2s^2 + 5s - 5)^3$ ، جد $\frac{du}{ds}$.

مثال ٣: إذا كان $u = (1 + 3s^2)^2$ ، جد $\frac{du}{ds}$.

مثال ٩: إذا كان $u = (s^3 + s^2 + 5)^3$ ، جد $\frac{du}{ds}$.

مثال ٤: إذا كان $u = (s^2 + 5)^3$ ، جد $\frac{du}{ds}$.

مثال ٢: إذا كان $\int_1^y \frac{u(s)}{2} ds = 5$ ، $\int_1^y 2h(s) ds = 6$

جد $\int_1^y ((s)h - (s)u) ds$

* خصائص التكامل المحدود *

الخاصية ١ : العكسية (خاصية القلب) :

إذا كان $\int_1^0 (s) ds = 3$ ، جد $\int_0^1 (s) ds$ ؟

الحل: $\int_1^0 (s) ds = -3$

إذا كان $\int_1^6 (s) ds = -5$ ، جد $\int_6^1 (s) ds$ ؟

الحل: $\int_1^6 (s) ds = 5$

مثال ٣: إذا كان $\int_1^3 5u(s) ds = 20$ ،

جد $\int_1^3 ((s)h + (s)u + 2s) ds$ ؟

إذا السؤال معطينا أكثر من تكامل والسؤال فيه حدين تكامل فقط

$\div \leftarrow \times$

الحل: (١) جهز المعطيات $\div \leftarrow \times$

$\pm \leftarrow$ وزع التكامل وكامل

(٢) وزع التكامل على المطلوب

(٣) عوض في المطلوب

مثال ١: إذا كان $\int_1^3 2u(s) ds = 10$ ، $\int_1^3 3h(s) ds = 12$

جد $\int_1^3 ((s)h + (s)u) ds$

مثال ٤: إذا كان $\int_1^4 3u(s) ds = 15$ ،

جد $\int_1^4 \frac{h(s)}{2} ds = 1$ ، $\int_1^4 ((s)h + (s)u + 3h + 5) ds$ ؟

أسئلة ضع دائرة على الخصائص

مثال ١ : إذا كان $\int_1^3 (س) س.س = ٥$ ، فإن

$$\int_1^3 (س) س.س = ؟$$

(أ) - ١٠ (ب) ٥ (ج) - ٥ (د) ١٠

مثال ٢ : إذا كان $\int_1^4 (س) س.س = ١٠$ ، فإن

$$\int_1^4 (س) س.س = ؟$$

(أ) ٥ (ب) - ٥ (ج) ١٠ (د) - ١٠

مثال ٣ : إذا كان $\int_1^2 (س) س.س = ٢$ ، فإن

$$\int_1^2 (س) س.س = ؟$$

(أ) ٥ (ب) - ٥ (ج) ٢ (د) - ٢

مثال ٤ : إذا كان $\int_1^4 (س) س.س = ١٢$ ، فإن

$$\int_1^4 (س) س.س = ؟$$

(أ) ١٨ (ب) ١٢ (ج) - ١٢ (د) - ١٨

مثال ٥ : إذا كان $\int_1^3 (س) س.س = ٢$ ، فإن

$$\int_1^3 (س) س.س = ؟$$

(أ) - ٨ (ب) ٨ (ج) ٢ (د) - ٦

مثال ٦: وزارة ٢٠١٨ شتوي س ١ ج ٦ علامات

إذا كان $\int_1^4 (س) س.س = ٣$ ، $\int_1^4 (س) س.س = ٥$ ، جد

$$\int_1^4 (٢ل(س) + ٢س + ه(س)) س.س = ؟$$

مثال ٧: إذا كان $\int_1^3 (س) س.س = ١٠$ ،جد $\int_1^3 (ه(س) + ٢س) س.س = ٢٠$ ،

$$\int_1^3 (ل(س) + ه(س)) س.س = ؟$$

مثال ٨: إذا كان $\int_1^2 (س) س.س = ١٥$ ،جد $\int_1^2 (٣ + (س) ه - (س) ل) س.س = ؟$

الخاصية ٢: خاصية الإضافة (خاصية المزرع)
شكل السؤال: في ٣ تكاملات و ٣ حدود مختلفة
الحل:

$$\div \leftarrow \times$$

$$\times \leftarrow \div$$

$$\pm \leftarrow \text{وزع التكامل وكامل}$$

(٢) وزع التكامل على المطلوب

(٣) امزغ المطلوب

$$\begin{array}{c} \times \\ \text{علوي} \\ \text{سفلي} \end{array} \left[\begin{array}{c} \times \\ \text{س} \\ \text{س} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \times \\ \text{س} \\ \text{س} \end{array} \right] \times$$

مثال ١: إذا كان $\int_1^3 (س) \cdot س^2 = ١٠$ ،

جد $\int_1^3 (س) \cdot س^3 = ١٢$ ؟

مثال ٢: إذا كان $\int_1^7 (س) \cdot س^3 = ١$ ، $\int_1^7 (س) \cdot س^4 = ٦$ ،
جد $\int_1^7 (س) \cdot س^5 = ؟$

وزارة ٢٠١٩ س ٢ أ) ٣ علامات

مثال ٣: إذا كان $\int_2^3 (س) \cdot س = ٤$ ، $\int_2^3 (س) \cdot س^2 = ٦$ ،
جد $\int_2^3 (س) \cdot س^3 = ؟$

مثال ٤: إذا كان $\int_1^2 (س) \cdot س^2 = ١٠$ ،

جد $\int_1^2 (س) \cdot س^3 = ٣$ ؟

مثال ٥: إذا كان $\int_1^4 (س) \cdot س = ٥$ ، $\int_1^4 (س) \cdot س^2 = ٢$ ،
جد $\int_1^4 (س) \cdot س^3 = ؟$

مثال ٦: إذا كان $\int_1^2 (س) \cdot (س + ٢) = ٢٠$ ،
جد $\int_1^2 (س) \cdot س = ١٠$ ؟

مثال ٧: إذا كان $\int_1^2 (س) \cdot س = ١٠$ ، $\int_1^2 (س) \cdot س^2 = ١$ ،
جد $\int_1^2 (س) \cdot (س + ٤) = ؟$

مثال ٨: إذا كان $\int_1^3 (س) \cdot (س + ٥) = ٢٠$ ،
جد $\int_1^3 (س) \cdot س = ٢$ ؟

مثال ٩: إذا كانت $\int_1^2 (س) \cdot س^2 = ٣$ ،
جد $\int_1^2 (س) \cdot (س + ٢) = ؟$

التكامل بالتعويض

مثال ٢: جد $\int \frac{3s^2 + 2}{s^5} ds$

تذكر أن: $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$

مثال ١: $\int \frac{5 + 2s^2}{2 \times 4} ds = \frac{3}{2} \int (5 + 2s^2) ds$

مثال ٢: $\int \frac{5(1 - s^2)}{6 \times 8} ds = \frac{5}{48} \int (1 - s^2) ds$

مثال ٣: جد $\int \frac{(1 - s^2)(5 + s - 2s^3)}{s^6} ds$

مثال ٣: $\int \frac{(2 + s^4)}{4 \times 5} ds = \frac{1}{20} \int (2 + s^4) ds$

الحالة ١:

إذا كانت $\int \text{سينات} \times (\text{مش خطي}) ds$

تكامل بالتعويض

الحل: طالق بـ ٣

ص = الي جوا القوس

$\frac{ص}{س} = \frac{\text{المشتقة}}{س}$

$\frac{ص}{\text{المشتقة}} = س$

المس المسألة لمستين

اختصر

كامل

مثال ٤: جد $\int \frac{21(2s^2 + 3s)(4 + 2s^3)}{s^5} ds$

مثال ١: جد $\int \frac{(2 - 5s + 2s^2)(5 + s^2)}{s^6} ds$

مثال ٥: جد $\int \frac{2s^2(2 + 3s)^2}{s^8} ds$

$$\text{مثال ١٠: جد } \int \frac{2+s^2}{5+s^2+s^3} ds$$

$$\text{مثال ٦: جد } \int (1+s^2) \sqrt{s^2+s+5} ds$$

$$\text{مثال ٧: جد } \int (2-s^2) \sqrt{(s^2-2s+1)^3} ds$$

$$\text{مثال ١١: جد } \int \frac{2-s^2}{5+s^2-s^3} ds$$

$$\text{مثال ٨: جد } \int \frac{2-s^2}{(5+s^2-s^3)^3} ds$$

$$\text{مثال ١٢: جد } \int \frac{s^2-3}{(s^3-2s)^2} ds$$

$$\text{مثال ٩: جد } \int \frac{2+s^3}{(1-s^2+s^4)^2} ds$$

مثال ٣: جد $\int 8s \cos(s-1) ds$

الحالة ٢: تذكر أن $\int \cos(u) du = \sin(u) + C$

مثال ١: $\int \cos(s+2) ds = \sin(s+2) + C$

مثال ٢: $\int 5 \cos(s+2) ds = 5 \sin(s+2) + C$

إذا كان: \int سينات جا (مش خطي) ds .

تكامل بالتعويض

الحل : طالق بـ ٣

ص = زاوية

$$\frac{ص}{س} = \text{مشتقة}$$

$$\frac{ص}{\text{المشتقة}} = س$$

المس المسألة لمستين

اختصر

كامل

الحالة ٣: تذكر أن $\int \cos(u) du = \sin(u) + C$

مثال ١: $\int \cos(s+2) ds = \sin(s+2) + C$

مثال ٢: $\int 3 \cos(s-6) ds = 3 \sin(s-6) + C$

إذا كان: \int سينات جتا (مش خطي) ds .

تكامل بالتعويض

الحل : طالق بـ ٣

ص = زاوية

$$\frac{ص}{س} = \text{مشتقة}$$

$$\frac{ص}{\text{المشتقة}} = س$$

المس المسألة لمستين

اختصر

كامل

مثال ١: جد $\int 6s \cos(s+2) ds$

مثال ١: جد $\int 3s^2 \cos(s+3) ds$

مثال ٢: جد $\int (4s^3 + 2) \cos(s+2) ds$

مثال ١: جد $\int 2s(5+s^2) ds$

مثال ٢: جد $\int (5+s^2) \cos s ds$

مثال ٣: جد $\int 6s \sin s(1-s^2) ds$

مثال ٢: جد $\int 4s(5-2s^2) ds$

الحالة ٤: تذكر أن

$$\int \frac{\text{ظا}(b+s)}{a+s} ds =$$

مثال ١: $\int \frac{\text{ظا}(5-s)}{5} ds = \int (1-s) ds$

مثال ٢: $\int \frac{5 \text{ظا}(3-2s)}{2} ds = \int (3-2s) ds$

مثال ٣: $\int \frac{2 \text{ظا}(6-s^3)}{3-s} ds = \int (6-s^3) ds$

إذا كان: \int سينات قاء (مش خطي) ds

تكامل بالتعويض

الحل : طالق ب ٣

ص = زاوية

$\frac{ص}{س} =$ مشتقة

$\frac{ص}{\text{المشتقة}} = س$

المس المسألة لمستين

اختصر

كامل

الحالة ٦: إذا ما طلع معك اختصار يكون السؤال فيه عامل مشترك

مثال ١: جد $\int (٤س + ١٠) \text{جتا} (س^٢ + ٥س) \text{د.س}$

الحالة ٥: تذكر أن: $\frac{\text{عدد}}{\text{جتا}^٢ س} = \text{عدد قاس}^٢ س$

(من المحرمات)

إذا كان: $\int \frac{\text{سينات}}{\text{جتا}^٢ (مش خطي)} \text{د.س}$

تكامل بالتعويض

(١) استخدم المحرمة

(٢) نفس خطوات الحالة ٤ من التكامل بالتعويض

مثال ٢: جد $\int (٨س + ١٥) \text{قا} (٣س^٢ + ٥س) \text{د.س}$

مثال ١: جد $\int \frac{٣ - س^٢}{(\text{جتا}^٢ (س^٣ - ٢س))} \text{د.س}$

مثال ٣: جد $\int (١٠س + ١) (س^٢ + ٢س + ١) \text{د.س}^٤$

مثال ٢: جد $\int \frac{س^٦}{(\text{جتا}^٢ (٥س^٢ + ٣س))} \text{د.س}$

مثال ٣: جد $\int \frac{١ - س^٤}{(\text{جتا}^٢ (س^٢ - ٢س))} \text{د.س}$

الحالة ٧: التكامل بالتعويض المحدود

مثال ١: جد $\int (١ + ٢س) (س^٢ + ٢س) \text{د.س}$

مثال ٤: جد $\int \frac{س^٦}{(\text{جتا}^٢ (٥س^٢ + ٣س))} \text{د.س}$

مثال ٢: إذا كانت $u(2) = 6$ ، $u(5) = 10$ جد

$$\int_1^2 u(x) dx$$

مثال ٢: جد

$$\int_1^2 (4x - 2x^2)(2x^3 - 2x^2) dx$$

الحالة ٩:

سينات u (مش خطي) dx

مثال ٣: سؤال من الكتاب : جد

$$\int_1^4 \sqrt{x^2 + 9} dx$$

مثال ١: إذا كان $u(x) = 3x - 3$ ، جد

$$\int_1^2 u(x) dx$$

الحالة ٨:

سينات u (مش خطي) dx

مثال ١: إذا كانت $u(8) = 10$ ، $u(27) = 10$ جد

$$\int_2^3 u(x) dx$$

مثال ٢: إذا كان $u(x) = 3x - 3$ ، جد

$$\int_1^2 u(x) dx$$

تطبيقات هندسية

مثال ٣ : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران

ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي :

$(٤س^٣ + ٢س^٢)$ وأن منحناه يمر بالنقطة $(-١ ، ١٥)$

جد ق(١) ؟

تذكر أن النقطة $(أ ، ب) \iff ق(أ) = ب$

النقطة $(٢ ، ٥) \iff ق(٢) = ٥$

النقطة $(٣- ، ٨) \iff ق(٣-) = ٨$

النقطة $(٠ ، ٢) \iff ق(٠) = ٢$

المعطيات	المطلوب	الحل
ميل المماس	ق(س) قاعدة الاقتران	(١) ميل المماس = ق(س)
	ق(عدد)	(٢) وزع التكامل على الطرفين كامل (٣) كامل
		<ul style="list-style-type: none"> قواعد التكامل المحرمات تكامل بالتعويض
		(٤) نجد جـ من النقطة ق(عدد) = رقم
		(٥) عوض جـ
		(٦) Vip عوض قيمة س إذا طلب ق(عدد)

مثال ٤ : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران

ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي :

$٢٥(٢س + ٥)$ وأن منحناه يمر بالنقطة $(٠ ، ١٠)$

جد قاعدة الاقتران ق(س) ؟

مثال ١ : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران

ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي :

$(٣س^٣ + ٢س^٢ + ٣)$ وأن منحناه يمر بالنقطة $(٠ ، ٢)$

جد قاعدة الاقتران ق(س) ؟

مثال ٥ : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران

ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي :

$٦(١ - س)$ وأن منحناه يمر بالنقطة $(١ ، ٢٠)$

جد ق(٢) ؟

مثال ٢ : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران

ص = ق(س) عند النقطة (س ، ص) يساوي :

$(٦س^٢ + ٢س + ٢)$ وأن منحناه يمر بالنقطة $(٠ ، ٢٠)$

جد قاعدة الاقتران ق(س) ؟

مثال ٩ : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران
 $v = c(س)$ عند النقطة (س ، ص) يساوي:
 $(س^2 + \frac{1}{س})$ علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (١ ، ٥)
 جد قاعدة الاقتران ق(س)؟

مثال ٦ : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران
 $v = c(س)$ عند النقطة (س ، ص) يساوي :
 $س(س^2 + ٢)$ وأن منحناه يمر بالنقطة (٢ ، ٢٥) جد
 ق(س)؟

مثال ٧ : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران
 $v = c(س)$ عند النقطة (س ، ص) يعطى بالعلاقة
 $\bar{c}(س) = س^2(س^3 - ٤)$ علماً بأن منحناه يمر بالنقطة
 (٠ ، ٣) جد ق(س)؟

مثال ١٠ : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران
 $v = c(س)$ عند النقطة (س ، ص) يعطى بالعلاقة:
 $\bar{c}(س) = \frac{س^2}{٨ + س^2}$ علماً بأن منحناه يمر بالنقطة
 (٠ ، ٤) جد قاعدة الاقتران ق(س)؟

مثال ٨ : س ٥ / ص ١٨٨ من الكتاب
 إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ه يعطى بالقاعدة
 $\bar{h}(س) = \frac{س^2(س^5 - ٢)}{س}$ ، س $\neq ٠$ ، فجد ه (٢) ، علماً بأن
 منحنى الاقتران ه يمر بالنقطة (١- ، ٥) .

تطبيقات فيزيائية

ت ← ع ← ف

مثال ٢: يتحرك جسيم على خط مستقيم ، ويعطى تسارعه بالعلاقة $t(ن) = (٥ + ٥٢ + ٢٣)٢$ حيث ن الزمن بالثواني ، جد سرعة الجسيم بعد ثانية واحدة من بدء الحركة علماً بأن $ع(٠) = ٢٠$ م/ث .

ت (ن) تسارع م / ث^٢
ع (ن) السرعة اللحظية م / ث
ف (ن) المسافة م
النوع الأول :

المعطيات	المطلوب	الحل
ت (ن) تسارع	سرعة ع (ن)	(١) وزع التكامل على الطرفين (٢) كامل الطرفين • قواعد التكامل • المحرمات (٣) نجد ج من $ع(٠) =$ رقم (٤) عوض ج (٥) عوض الزمن (إن وجد) بعد ثانيتين بعد ٣ ثواني بعد ثانية واحدة ...

مثال ٣: يتحرك جسيم على خط مستقيم ، ويعطى تسارعه بالعلاقة $t(ن) = (٢ + ٥٢)٦$ حيث ن الزمن بالثواني ، جد سرعة الجسيم بعد ثانية واحدة من بدء الحركة علماً بأن $ع(٠) = ١٦$ م/ث .

مثال ٤: يتحرك جسيم وفق العلاقة:
 $t(ن) = (٥٢ + ٥٣)١ + ٢$ ، حيث ن الزمن بالثواني ، جد سرعة الجسيم بعد ثانية واحدة من بدء الحركة علماً بأن $ع(٠) = ١٠$ م/ث .

مثال ١: يتحرك جسيم على خط مستقيم ، ويعطى تسارعه بالعلاقة $t(ن) = (٤ + ٥٢)٢$ حيث ن الزمن بالثواني ، جد سرعة الجسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة علماً بأن سرعته الابتدائية $ع(٠) = ١٠$ م/ث .

مثال ٥: واجب بيتي H.W

تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث أن تسارعها $t(ن) = (٢٠ - ٥١)٢$ ، حيث ن الزمن بالثواني ، جد سرعتها بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة علماً بأن $ع(٠) = ٣$ م/ث .

النوع الثاني :

المعطيات	المطلوب	الحل
ع (ن) سرعة	مسافة موقع ف (ن)	(١) وزع التكامل على الطرفين (٢) كامل الطرفين • قواعد التكامل • المحرمات (٣) نجد ج من ف (٠) = رقم (٤) عوض ج (٥) عوض الزمن (إن وجد) بعد ثابنتين بعد ٣ ثواني بعد ثانية واحدة ...

مثال ٣: س ٢ من الكتاب ص ١٩٢

تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث إن سرعتها بعد مرور ن ثانية من بدء حركتها تعطى بالعلاقة :
ع (ن) = (٨ + ٤ن) / ٢ ت . جد موقع النقطة المادية بعد مرور أربع ثوان من بدء حركتها، علماً بأن موقعها الابتدائي ف (٠) = ٢٢ .

مثال ٤: إذا كانت سرعة جسيم تعطى بالعلاقة

ع (ن) = (٤٨ - ٥٢ن) / ٢ ت . جد موقع الجسيم بعد مرور ثانية واحدة إذا كان موقعه الابتدائي ف (٠) = ٢٣ .

مثال ١: يتحرك جسيم وتعطى سرعته بالعلاقة

ع (ن) = (٥ + ٥٢ن) / ٢ ت حيث ن الزمن بالثواني ، جد موقع الجسيم بعد مرور ثلاث ثوان من بدء الحركة علماً بأن موقعه الابتدائي ف (٠) = ٢٣ .

مثال ٥: إذا كانت سرعة الجسيم تعطى بالعلاقة

ع (ن) = (٢ + ٥٣ن) / ٢ ت . جد موقع الجسيم بعد مرور ثابنتين من بدء الحركة علماً بأن موقعه الابتدائي ف (٠) = ٢٧ .

مثال ٢: مثال ١ من الكتاب ص ١٨٩

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث انطلق من الموقع الابتدائي ف (٠) = ٢٤ . إذا كانت سرعته بعد مرور ن ثانية تعطى بالعلاقة: ع (ن) = (٢٦ + ٥٢ن - ٦) / ٢ ت .
جد موقعه بعد مرور ثلاث ثوان من بدء الحركة.

مثال ٦: س ١ / ص ١٩٢ من الكتاب

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد مرور ن ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة:
ع (ن) = (٢١٢ - ٥٢ن) / ٢ ت . جد القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة.

النوع الثالث: مهم جداً (تف)

مثال ٣ : تدریب ٢ / ص ١٩١
يتحرك جسيم على خط مستقيم بتسارع ثابت مقداره
ت(ن) = ٢٦/ت^٢ ، إذا كانت سرعته الابتدائية
ع(٠) = ٢٢/ت ، وموقعه الابتدائي ف(٠) = ٢٥ جد
موقع الجسيم بعد مرور ثانية من بدء الحركة .

المعطيات	المطلوب	الحل
ت (ن) تسارع	مسافة أو موقع الجسيم ف(ن)	(١) وزع التكامل على الطرفين (٢) كامل الطرفين • قواعد التكامل • المحرمات (٣) نجد ج من المعطيات (٤) عوض ج
		كمان مرة يا غالي (٥) عوض الزمن (إن وجد) في المسافة

مثال ١ : يتحرك جسيم بتسارع :

ت(ن) = (٥٢ + ٢) / ت^٢ ، حيث ن الزمن بالثواني ،
جد موقع الجسيم بعد ٣ ثواني ، علماً بأن سرعته
الابتدائية ع(٠) = ٢١/ت ، وموقعه الابتدائي
ف(٠) = ٢٢ .

مثال ٤ : س ٢ من الكتاب ص ١٩٢

تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم، بتسارع مقداره
ت(ن) = ٢١(ن - ١) / ت^٢ حيث ن الزمن بالثواني.
فإذا كانت سرعتها الابتدائية ع(٠) = ٢٣/ت ، وموقعها
الابتدائي ف(٠) = ٢٢ ، جد موقع النقطة المادية بعد
مرور ثانييتين من بدء الحركة.

مثال ٢ : تدریب ٢ / ص ١٩١

يتحرك جسيم على خط مستقيم بتسارع ثابت مقداره
ت(ن) = ٢١ / ت^٢ ، إذا كانت سرعته الابتدائية
ع(٠) = ٢٥/ت ، وموقعه الابتدائي ف(٠) = ٢٣ جد
موقع الجسيم بعد مرور ٣ ثوان من بدء الحركة .

المساحات

أفكار الدرس :

- (١) اقتران ومحور السينات
- (٢) اقتران ومحور السينات و فترة
- (٣) إيجاد المساحة عن طريق الرسم
- (٤) التكلفة

الفكرة الأولى :

اقتران ومحور السينات فقط

$$(١) \text{ ق (س) = ٠}$$

- (٢) نجد قيم س
- تحليل
- عامل مشترك

(٣) قانون المساحة

$$\text{المساحة} = \int_a^b f(x) dx = \text{م} \quad | \text{ ق (س) } | \text{ د س}$$

(٤) عوض في القانون وكامل

(٥) رش القيمة المطلقة على كل المسألة

مثال ١ : جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين

$$\text{منحنى الاقتران ص = ق (س) = ٣س}^٢ - ٦س$$

ومحور السينات

مثال ٢ : جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين
منحنى الاقتران ص = ق (س) = ٣س^٢ - ١٢س
ومحور السينات؟

مثال ٣ : جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين
منحنى الاقتران ص = ق (س) = ٤س^٢ - ٤
السينات؟

مثال ٤ : جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين
منحنى الاقتران ص = ق (س) = ٦س^٢ - ٦س
ومحور السينات؟

مثال ٥ : س ٣ / ب / ص ٢٠٠ من الكتاب : جد مساحة
المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران
ص = ق (س) = ٤س^٣ - ١٢س^٢ ومحور السينات؟

مثال ٦ : تدريب ٢ ص ١٩٨

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$ص = ق (س) = س^2 - ٢س - ٣ ، ومحور السينات$$

الفكرة الثانية :

اقتران ومحور السينات وفترة أو مستقيمان $س = أ$ ، $س = ب$.

طريقة الحل :

$$(١) ق (س) = ٠$$

$$(٢) نجد قيم س$$

سريع

تحليل

عامل مشترك

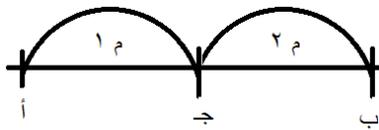
(٣) قبول أو رفض قيم س حسب الفترة [أ ، ب]

الحالة ١: رفض جميع قيم س

$$\bullet \text{ قانون المساحة} = \int_a^b |ق(س)| \cdot دس$$

• عوض في القانون وكامل

الحالة ٢ : قبول أحد قيم س



$$\text{نجد } ١ \text{ م} = \int_a^c |ق(س)| \cdot دس$$

$$\text{نجد } ٢ \text{ م} = \int_c^b |ق(س)| \cdot دس$$

ثم نجد المساحة الكلية = ١ م + ٢ م

مثال ١: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى $ص = ق (س) = س^2 - ٦س$ ومحور السينات والمستقيمان $س = ٠$ ، $س = ٢$.

مثال ٥: مثال ١ ص ١٩٥ جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران : ق (س) = $2س + ٤$ ومحور السينات، والمستقيمان $س = ١$ ، $س = ٤$.

مثال ٢: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى $ص = ق (س) = ٨ - ٢س$ ومحور السينات والمستقيمان $س = ١$ ، $س = ٣$.

مثال ٣: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى $ص = ق (س) = ١٠ - ٢س$ ومحور السينات في الفترة $[٢, ٠]$.

مثال ٦: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = $٣س^٢ - ١٢س$ ومحور السينات، والمستقيمين على الفترة $[٢, ٠]$.

مثال ٤: جد المساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى $ص = ق (س) = ١٢$ ومحور السينات في الفترة $[٢, ١-]$.

مثال ٧: جد المساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى $ص = ق (س) = ٦ - ٢س$ ومحور السينات في الفترة $[٤, ١]$.

مثال ١١: جد المساحة المنطقية المغلقة المحصورة بين
منحنى $v = c(3s - 2)$ ومحور السينات
في الفترة $[0, 3]$.

مثال ٨: جد المساحة المنطقية المغلقة المحصورة بين
منحنى $v = c(4 - 2s)$ ومحور السينات
في الفترة $[0, 3]$.

مثال ٩: جد المساحة المنطقية المغلقة المحصورة بين
منحنى $v = c(4s^3)$ ومحور السينات في
الفترة $[-1, 1]$.

مثال ١٢:
واجب بيتي H.W س ١٠ ص ٢١٧ من أسئلة الوحدة:
جد المساحة المنطقية المغلقة المحصورة بين منحنى $v = c(3s^2 - 27)$ ومحور السينات في الفترة
 $[-4, 0]$.

مثال ١٠: جد المساحة المنطقية المغلقة المحصورة بين
منحنى $v = c(3s^2 - 6s)$ ومحور
السينات في الفترة $[1, 3]$.

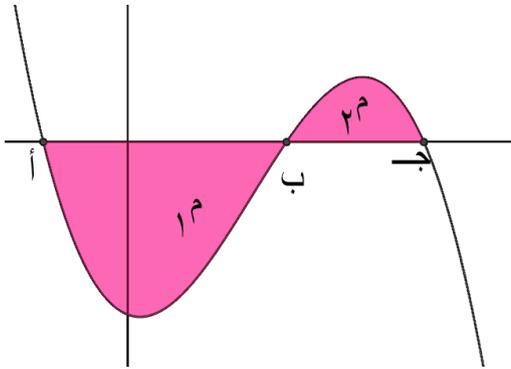
سؤال ٤: إذا علمت أن $1\text{ م} = 8$ ، $2\text{ م} = 5$ ، جد:

(١) $\int_1^2 (س) . دس$ أ ب

(٢) $\int_2^1 (س) . دس$ أ ب

(٣) $\int_1^2 (س) . دس$ أ ب

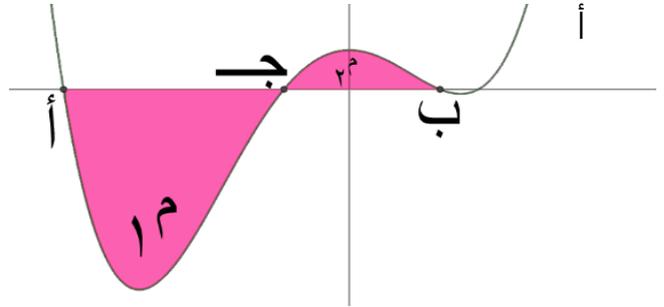
(٤) مساحة المنطقة المحصورة بين ومحور السينات في [أ ، ج]



المساحة عن طريق الرسم

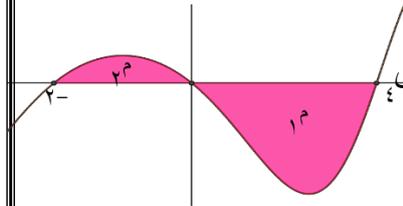
سؤال ١: إذا علمت أن $1\text{ م} = 7$ ، $2\text{ م} = 4$

جد $\int_1^2 (س) . دس$ أ ب



سؤال ٢: إذا علمت أن $1\text{ م} = 11$ ، $2\text{ م} = 6$

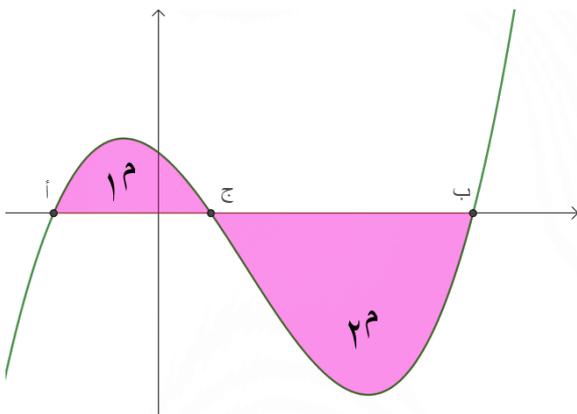
جد $\int_2^1 (س) . دس$ أ ب



سؤال ٥: يمثل الشكل المجاور المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات في الفترة

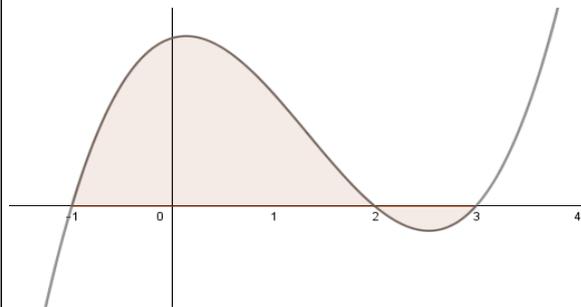
[أ ، ب] ، إذا علمت أن $1\text{ م} = 6$ ،

$\int_1^2 (س) . دس = 4-$ ، جد ٢ م أ ب



سؤال ٣: إذا علمت أن $\int_1^2 (س) . دس = 10$ ،

جد $\int_2^3 (س) . دس = 3-$ ، مساحة المنطقة المظلمة أ ب



فكرة حساب التكلفة

سؤال بداية درس المساحة من الكتاب ص ١٩٣

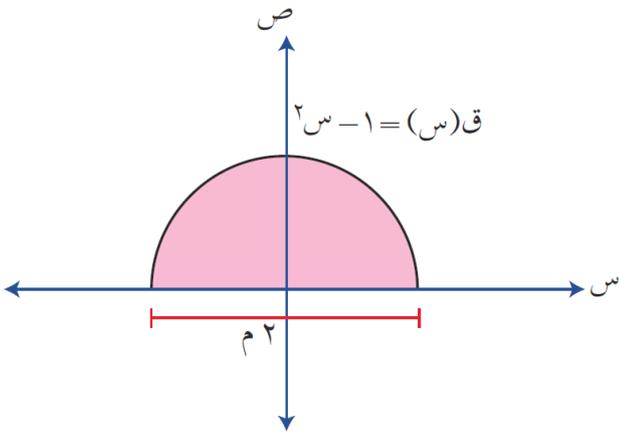
يمثل الشكل (٤-١) نافذة طول قاعدتها ٢ م،

محصورة بمنحنى الاقتران $ص = ق(س) = ١ - س^٢$

إذا أردنا وضع زجاج على النافذة، وكانت

تكلفة المتر المربع الواحد منه خمسة دنانير، فما

التكلفة الكلية لزجاج النافذة؟



وزارة ٢٠١٩ الامتحان العام

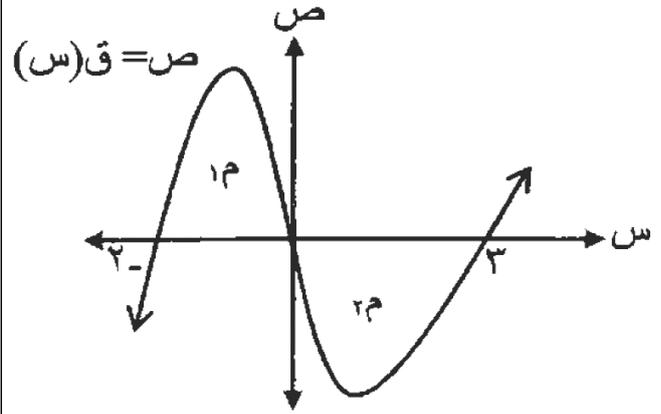
معتمدا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران

ص = ق(س)، إذا علمت أن مساحة المنطقة م ١

تساوي (٣) وحدات مربعة، مساحة المنطقة م ٢ تساوي

(٤) وحدات مربعة، فأجب عن الفقرتين ١، ٢،

الآتيتين:



(١) قيمة $\int_{-2}^3 (س) \cdot س \cdot س$ تساوي :

- (أ) ٧ (ب) ١ (ج) ١- (د) ٧-

(٢) قيمة $\int_{-3}^3 |س| \cdot س$ تساوي :

- (أ) ٧ (ب) ١ (ج) ٨ (د) ٩