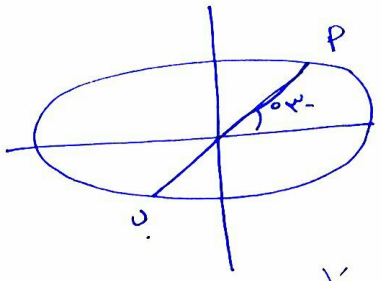
مثال :



الشكل يمثل قطع ناقص معادلته

$٤س^٢ + ٣ص^٢ = ٢٧$

جد طول أب

الحل : ميل الخط المستقيم = ظا الزاوية مع محور السينات

ميل أب = ظا ٣٠

ميل أب = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

معادلة أب وهو يمر بالنقطة (٠،٠)

الميل $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ هو

$ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٠ = \frac{١}{\sqrt{٣}}(س - ٠)$

المعادلة هي $\boxed{ص = \frac{١}{\sqrt{٣}} س}$ ← (١)

لتعيين قيمة ص عوضها في معادلة القطع

$٢س^٢ + ٣\left(\frac{١}{\sqrt{٣}} س\right)^٢ = ٢٧$

$٢س^٢ + \cancel{٣}\frac{س^٢}{\cancel{٣}} = ٢٧$

$٣س^٢ = ٢٧ \Leftarrow س^٢ = ٩ ، س = ٣$

$س = \pm ٣ \Leftarrow$ عوضها في (١) $ص = \frac{١}{\sqrt{٣}} \times \pm ٣$

$ص = \frac{٣}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٣} \cdot \sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \sqrt{٣}$

او $\frac{-٣}{\sqrt{٣}} = \frac{-\sqrt{٣}\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = -\sqrt{٣}$

$(٣ ، \sqrt{٣})$ ، $(-٣ ، -\sqrt{٣})$

أ ب

المسافة بين نقطتين

$\overline{أب} = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$\overline{أب} = \sqrt{(٣+٣)^٢ + (\sqrt{٣} + \sqrt{٣})^٢}$

$= \sqrt{٣٦ + ١٢} = \sqrt{٤٨}$

مثال قطع ناقص معادلته

$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{\frac{٣}{٤}أ^٢} = ١$ اثبت أنه

في هذا القطع يكون البعد بين رأسيه يساوي ضعف البعد بين بؤرتيه

الحل : $جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ = أ^٢ - \frac{٣}{٤}أ^٢$

$جـ^٢ = \frac{١}{٤}أ^٢ \Leftarrow جـ = \frac{١}{٢}أ$

$\Leftarrow أ = ٢جـ$

البعد بين الرأسين = ٢أ

البعد بين البؤرتين ٢جـ

$٢أ = ٢(٢جـ)$

$٢أ = ٢ \times$ البعد بين البؤرتين

مثال: $ك س^2 + ٥ ص^2 = ١٧$ تمثل معادلة قطع ناقص اثبت أن $ك = \frac{١٧}{ب^2 + جـ^2}$

الحل: $ك س^2 + ٥ ص^2 = ١٧ \div ١٧$

$$\frac{ك س^2}{١٧} + \frac{٥ ص^2}{١٧} = ١$$

$$\frac{س^2}{\frac{١٧}{ك}} + \frac{ص^2}{\frac{١٧}{٥}} = ١$$

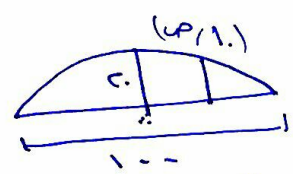
$$\Leftarrow أ^2 = \frac{١٧}{ك} \Leftarrow ك = \frac{١٧}{أ^2}$$

$$جـ^2 = أ^2 - ب^2 \Leftarrow أ^2 = جـ^2 + ب^2$$

$$ك = \frac{١٧}{جـ^2 + ب^2}$$

مثال: جسر مقوس على شكل نصف قطع ناقص طول قاعدته الافقية ١٠٠م واقصى ارتفاع له ٢٠م اوجد ارتفاع الجسر على بعد ١٠م من مركز القاعدة

الحل:



قطع ناقص $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

$٢أ = ١٠٠ \Leftarrow أ = ٥٠ \Leftarrow أ^2 = ٢٥٠٠$

$ب = ٢٠ \Leftarrow ب^2 = ٤٠٠$

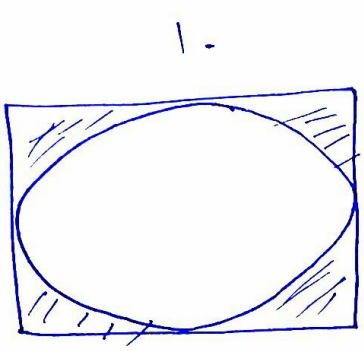
المعادلة $\frac{س^2}{٢٥٠٠} + \frac{ص^2}{٤٠٠} = ١$

النقطة (١٠، ص) تحققه $\Leftarrow$

$\frac{١٠٠}{٢٥٠٠} + \frac{ص^2}{٤٠٠} = ١ \Leftarrow \frac{ص^2}{٤٠٠} = ١ - \frac{١}{٢٥} = \frac{٢٤}{٢٥}$

$\frac{ص^2}{٤٠٠} = \frac{٢٤}{٢٥} \Leftarrow ص^2 = \frac{٢٤ \times ٤٠٠}{٢٥} = ٣٨٤$ $ص = \sqrt{٣٨٤}$

مثال:



الشكل يمثل قطع ناقص داخل مستطيل جد مساحة المنطقة المظللة

الحل: $٢أ = ١٠ \Leftarrow أ = ٥$

$٢ب = ٦ \Leftarrow ب = ٣$

مساحة القطع $= أ ب \pi$

$= ٥ \times ٣ \pi = ١٥ \pi$

مساحة المستطيل $= ٦ \times ١٠ = ٦٠$

مساحة المنطقة المظللة $= ٦٠ - ١٥ \pi$

مثال: $\frac{س^2}{ل - ٣} + \frac{ص^2}{٥ - ل} = ١$

اوجد قيمة ل التي تجعل المعادلة تمثل قطع ناقص

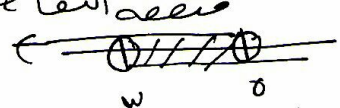
الحل: في القطع الناقص

معامل $س^2 > ٠$ ، معامل $ص^2 > ٠$

$ل - ٣ > ٠ \Leftarrow ل > ٣$

$٥ - ل > ٠$ $ل < ٥$

منطقة التقاطع



القيمة (٣، ٥) مفتوحة

اي عدد يحصل عليه من المقام مفتوح

مثال: تتحرك نقطة في المستوى الإحداثي و (س، ص) بحيث أن

س = ٥ + ٣ جاهـ ، ص = ٢ + ٤ جتاهـ

حيث هـ زاوية متغيرة جد معادلة الحمل الهندسي للنقطة و (س، ص) وحدد نوعه

الحل: س − ٥ = ٣ جاهـ

⇐ جاهـ = $\frac{س - ٥}{٣}$ ربع

جا²هـ = $\frac{(س - ٥)^٢}{٩}$

٤ جتاهـ = ص − ٢

جتاهـ = $\frac{(ص - ٢)}{٤}$

جتا²هـ = $\frac{(ص - ٢)^٢}{١٦}$

جا²هـ + جتا²هـ = ١

$\frac{(س - ٥)^٢}{٩} + \frac{(ص - ٢)^٢}{١٦} = ١$

قطع ناقص حادي

مثال: تتحرك النقطة و (س، ص) في المستوى بحيث أن س = أ (جتان − جان)

ص = ب (جتان + جان)

اثبت أن المعادلة الديكارتية هي قطع ناقص

الحل: $\frac{س}{أ}$ = جتان − جان ربع الطرفين

$\frac{س^٢}{أ^٢}$ = (جتان − جان)²

$\frac{س^٢}{أ^٢}$ = جتا²ن − ٢ جان جتان + جا²ن

$\boxed{\frac{س^٢}{أ^٢} = ١ - ٢ \text{ جان جتان}}$ ← (١)

$\frac{ص}{ب}$ = جتان + جان ربع

$\frac{ص^٢}{ب^٢}$ = (جتان + جان)²

$\frac{ص^٢}{ب^٢}$ = جتا²ن + ٢ جان جتان + جا²ن

$\boxed{\frac{ص^٢}{ب^٢} = ١ + ٢ \text{ جان جتان}}$ = (٢)

اجمع ١ + ٢

اضرب في $\frac{١}{٢}$ اقسم على ٢

$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ٢$

$\frac{س^٢}{٢أ^٢} + \frac{ص^٢}{٢ب^٢} = ١$

مثال: م، ن نقطتان ماديتان، النقطة م تدور على شكل قطع ناقص والنقطة ن في احدى بؤرتي هذا القطع فإذا كان طول المحور الاكبر يساوي ١٠ والاختلاف المركزي ٠,٣ اوجد

① اقصر مسافة بين النقطتين م و ن

② اطول مسافة بين النقطتين م و ن

الحل: ٢أ = ١٠ ⇐ $\boxed{\text{أ} = ٥}$

هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ ⇐ $\frac{٣}{١٠} = \frac{\text{جـ}}{٥}$

⇐ $\boxed{\text{جـ} = ١,٥}$

اقصر مسافة بين نقطة على منحنى القطع الناقص والبؤرة هي أ − جـ

٥ − ١,٥ = ٣,٥

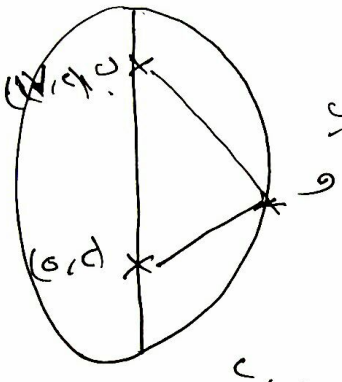
اطول مسافة بين نقطة على منحنى القطع الناقص والبؤرة هي أ + جـ

= ٥ + ١,٥ = ٦,٥

مثال: اوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتا ٥، ب١(٢، ١٧)، ب٢(٢، ٥) وقيمة محيط المثلث و ب١ ب٢ = ٣٦ حيث و نقطة على القطع الناقص

الحل:

القطع صادي



$$\frac{(\text{س}-\text{د})^2}{\text{ب}^2} + \frac{(\text{ص}-\text{هـ})^2}{\text{أ}^2} = ١$$

او

$$\frac{(\text{ص}-\text{هـ})^2}{\text{أ}^2} + \frac{(\text{س}-\text{د})^2}{\text{ب}^2} = ١$$

المركز بتوسط البؤرتين

$$\left(\frac{٢+٢}{٢}, \frac{١٧+٥}{٢}\right) = (٢، ١١)$$

٢جـ = ١٧ − ٥ = ١٢

٢جـ = ١٢ ⇐ $\boxed{\text{جـ} = ٦}$

محيط المثلث و ب١ ب٢ = ٢أ + ٢جـ

٣٦ = ٢أ + ١٢ ⇐ أ = ١٢

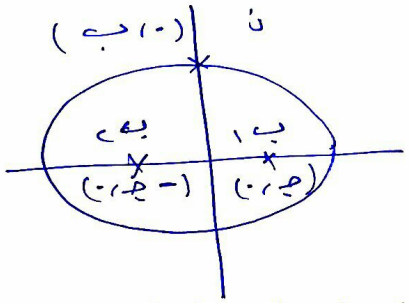
جـ² = أ² − ب² ⇐ ٣٦ = ١٤٤ − ب² ⇐ ب² = ١٠٨

$$\frac{(\text{س}-٢)^2}{١٠٨} + \frac{(\text{ص}-١١)^2}{١٤٤} = ١$$

مثال :

من القطع الناقص السابق أن

$جـ^2 = أ^2 - ب^2$



من تعريف القطع الناقص

$ن ب_1 + ن ب_2 = 2أ$

$\sqrt{(-جـ)^2 + (ب-٠)^2} + \sqrt{(٠+جـ)^2 + (ب-٠)^2} = 2أ$

$= \sqrt{جـ^2 + ب^2} + \sqrt{جـ^2 + ب^2} = 2أ$

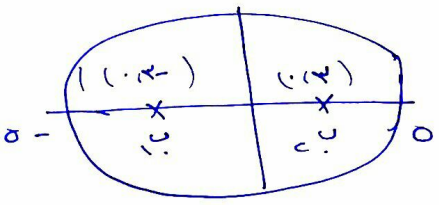
$2\sqrt{جـ^2 + ب^2} = 2أ$

$= أ = \sqrt{جـ^2 + ب^2}$ بربع الطرفين

$أ^2 = جـ^2 + ب^2$

$جـ^2 = أ^2 - ب^2$

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(\pm ٣، ٠)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $س = \pm ٥$



تقاطع المنحنى مع محور السينات عند $س = \pm ٥$

يمثل رأسي القطع

المركز = $(٠، ٠)$

الرأسان $(\pm ٥، ٠)$

$أ = ٥$ المسافة من المركز للرأس

$جـ = ٣$ المسافة من المركز للبؤرة

$جـ^2 = أ^2 - ب^2$

$٩ = ٢٥ - ب^2 \leftarrow ب^2 = ١٦$

القطع من

$\frac{س^2}{٢٥} + \frac{ص^2}{١٦} = ١$

مثال: جد معادلة القطع المخروطي الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره الاصغر $2\sqrt{27}$ واختلافه المركزي $\frac{1}{2}$

الحل: $\Leftarrow$ هـ $= \frac{1}{2} < 1$ قطع ناقص

$2ب = 2\sqrt{27} \Leftarrow \boxed{ب = \sqrt{27}}$

هـ $= \frac{جـ}{أ} = \frac{1}{2} \Leftarrow \boxed{أ = 2جـ}$ (1)

$جـ^2 = أ^2 - ب^2$

$جـ^2 = (2جـ)^2 - (\sqrt{27})^2$

$جـ^2 = 4جـ^2 - 27$

$-3جـ^2 = -27$

$جـ^2 = 9$

$\boxed{جـ = 3}$ عوضها في (1)

$أ = 2 \times 3 = \boxed{6 = أ}$

لا تستطيع التحديد ان كان القطع سيني او صادي لذلك هناك حلان

(1) $\frac{س^2}{36} + \frac{ص^2}{27} = 1$

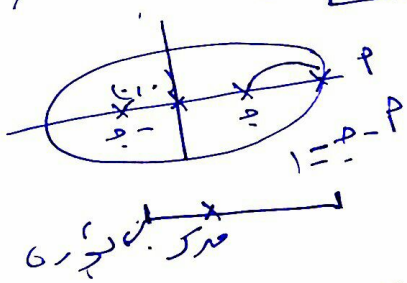
(2) $\frac{س^2}{27} + \frac{ص^2}{36} = 1$

مثال: جد معادلة القطع الناقص الذي مركز (٠،٠) ومحوره الاكبر يقع على محور السينات بحيث ان بعد الرأس عن البؤرة القريبة = 1 وبعده عن البؤرة البعيدة = 5

الحل: القطع سيني

$\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$

$\boxed{أ - جـ = 1}$ (1) بعد الرأس عن القريبة



من بؤرة للمركز = جـ

ومن المركز الى الرأس = أ

من البؤرة الى الرأس

= من البؤرة للمركز + من المركز للرأس

$\boxed{جـ + أ = 5}$ (2)

نجمع المعادلتين $\Leftarrow 2أ = 6 \Leftarrow أ = 3$

$\Leftarrow \boxed{جـ = 2}$

$جـ^2 = أ^2 - ب^2 \Leftarrow 4 = 9 - ب^2 \Leftarrow$

$ب^2 = 5$

المعادلة $\frac{س^2}{9} + \frac{ص^2}{5} = 1$

مثال: جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ويمر بالنقطة (١، ٢) واختلافه المركزي $\frac{٢}{٣}$ ومحوره الاكبر يقع على محور السينات

الحل: $هـ = \frac{٢}{أ} < ١$

$$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$$

يمر بالنقطة (١، ٢)

$$\left(\frac{١}{أ^٢} + \frac{٤}{ب^٢} = ١\right) أ^٢ ب^٢$$

$$\boxed{ب^٢ + ٤أ^٢ = أ^٢ ب^٢} \leftarrow (١)$$

$$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{٢}{٣} \Leftarrow ٣جـ = ٢أ$$

$$\Leftarrow \boxed{جـ = \frac{٢}{٣}أ}$$

$$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$$

$$\left(\frac{٢}{٣}أ\right)^٢ = أ^٢ - ب^٢$$

$$\frac{٤}{٩}أ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \Leftarrow \frac{٤}{٩}أ^٢ - \frac{٩أ^٢}{٩\times١} = -ب^٢$$

$$\frac{-٥أ^٢}{٩} = -ب^٢ \Leftarrow ب^٢ = \frac{٥}{٩}أ^٢$$

$$\boxed{ب^٢ = \frac{٥}{٩}أ^٢} \leftarrow (٢)$$ عوضها في (١)

$$\frac{٥}{٩}أ^٢ + \frac{٤\times٩أ^٢}{٩\times١} = أ^٢ \times \frac{٥}{٩}أ^٢$$

$$\frac{٤١}{٩}أ^٢ = \frac{٥}{٩}أ^٤$$

$$\frac{٤١أ^٢}{٩} - \frac{٥}{٩}أ^٤ = ٠$$

$$\frac{١}{٩}أ^٢(٤١ - ٥أ^٢) = ٠$$

$$أ^٢ = ٠ \Leftarrow أ = ٠$$ مرفوض مهمل

$$٥أ^٢ = ٤١ \Leftarrow \boxed{أ^٢ = \frac{٤١}{٥}}$$

عوض قيمة أ في (٢)

$$ب^٢ = \frac{٥}{٩} \times \frac{٤١}{٥}$$

$$\boxed{ب^٢ = \frac{٤١}{٩}}$$

المعادلة هي

$$\frac{س^٢}{\frac{٤١}{٥}} + \frac{ص^٢}{\frac{٤١}{٩}} = ١$$

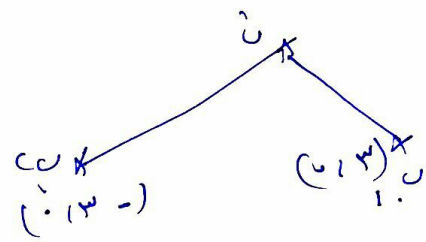
$$\frac{٥س^٢}{٤١} + \frac{٩ص^٢}{٤١} = ١$$

mq 0795598456

mq 0795598456

مثال: اذا كان ب١ (-٣، ٠)
ب٢ (٣، ٠) والنقطة ن (س، ص)
تتحرك في المنحنى بحيث ان
ن ب١ + ن ب٢ = ١٠ اكتب
معادلة المحل الهندسي للنقطة ن

الحل:



ن ب١ + ن ب٢ = ٢ أ = ١٠ ⇐ $\boxed{\text{أ} = ٥}$

ب١، ب٢ هما البؤرتان المسافة
بينهما = ٦ ⇐ ٢ جـ = ٦ ⇐ $\boxed{\text{جـ} = ٣}$

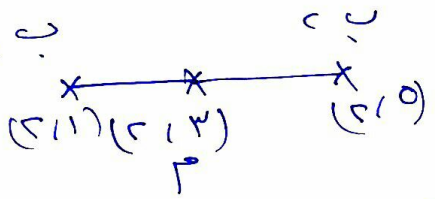
المركز بتوسط البؤرتين $\boxed{(٠، ٠)}$ مركز

جـ² = أ² − ب² ⇐ ٩ = ٢٥ − ب²

ب² = ١٦

$$\frac{\text{س}^2}{٢٥} + \frac{\text{ص}^2}{١٦} = ١$$

مثال: اوجد معادلة القطع الناقص الذي
مركزه (٣، ٢) وبؤرتاه (١، ٢) (٥، ٢)
وطول محوره الاكبر (٦) أمثال البعد البؤري



القطع سيني $\frac{(\text{س} - \text{ء})^2}{\text{أ}^2} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^2}{\text{ب}^2} = ١$

٢ جـ = ٥ − ١ = ٤ ⇐ $\boxed{\text{جـ} = ٢}$

$\boxed{\text{جـ}^2 = ٤}$

المحور الاكبر = ٦ × ٢ جـ

٢ أ = ١٢ جـ

أ = ٦ جـ ⇐ $\boxed{\text{أ} = ١٢}$

جـ² = أ² − ب²

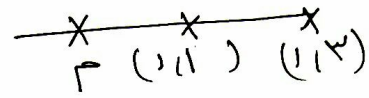
٤ = ١٤٤ − ب² ⇐ ب² = ١٤٠

$$\frac{(\text{س} - ٣)^2}{١٤٤} + \frac{(\text{ص} - ٢)^2}{١٤٠} = ١$$

مثال :

قطع مخروطي اختلافه المركزي $\frac{2}{3}$ وأحد رأسيه (٣ ، ١) والبؤرة القريبة من هذا الرأس هي (١ ، ١) حد معادلته

الحل :



قطع سيني $\frac{(س - د)^2}{أ^2} + \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = 1$

بعد الرأس عن البؤرة القريبة

$أ - جـ = ٣ - ١$

$\boxed{أ - جـ = ٢}$ ①

$\frac{جـ}{أ} = \frac{2}{3} \Leftarrow ٢أ = ٣جـ$

$\boxed{أ = \frac{3}{2} جـ}$ عوضها في ①

$\frac{3}{2} جـ - جـ = ٢$

$\frac{1}{2} جـ = ٢ \Leftarrow \boxed{جـ = ٤}$

عوض جـ في ① $\Leftarrow$

$أ - ٤ = ٢ \Leftarrow \boxed{أ = ٦}$

$جـ^2 = أ^2 - ب^2 \Leftarrow$

$١٦ = ٣٦ - ب^2 \Leftarrow \boxed{ب^2 = -٢٠}$

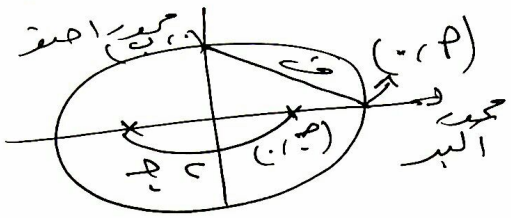
البؤرة (د + جـ ، هـ)

(د + ٤ ، ١)

$د + ٤ = ١$

$د = -٣$ مركز (-٣ ، ١)

مثال : اذا كان البعدين بؤرتي قطع ناقص يساوي نصف البعدين طرفي محورية الاكبر والاصغر فما قيمة الاختلاف المركزي



$٢جـ = \frac{1}{2} ف \Leftarrow ف = ٤جـ$

فيثاغورس

$ف^2 = ب^2 + أ^2 \Leftarrow$

$(٤جـ)^2 = ب^2 + أ^2$

$\boxed{٤جـ = \sqrt{أ^2 + ب^2}}$ ربع

$١٦جـ^2 = أ^2 + ب^2$

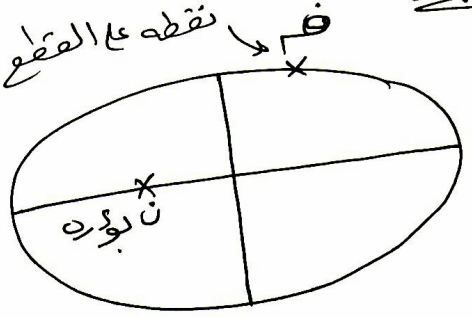
$+ جـ^2 = أ^2 - ب^2 \Leftarrow$ قاعدة القطع الناقص

$١٧جـ^2 = ٢أ^2$

$\Leftarrow جـ^2 = \frac{٢أ^2}{١٧} \Leftarrow جـ = \sqrt{\frac{٢}{١٧}} أ$

$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{\frac{٢}{١٧}} أ}{أ} = \sqrt{\frac{٢}{١٧}}$

mq 0795598456
mq 0795598456



اقصر مسافه بين نقطه تقع على محيط القطع الناقص والبؤره

هي م - جـ

mq
0795598456

اطول مسافه بين نقطه على محيط القطع الناقص والبؤره

هي م + جـ

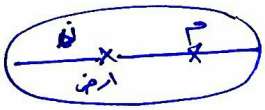
مثال على سؤال القمر والارض

العمر على القطع الناقص والارض عند البؤره

اثبت ان الاختلاف المركزي = $\frac{م-ن}{م+ن}$

بين ان اطول مسافه بين الارض والقمر = ٢م

واقصر مسافه ن



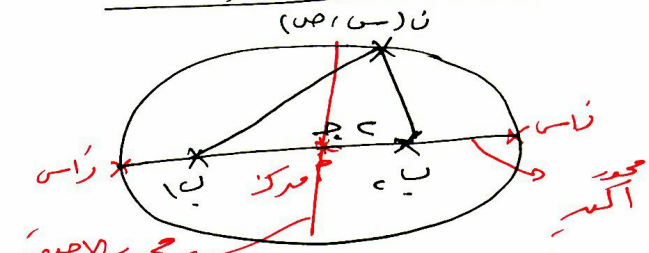
الحل: م + ن = ٢أ

م - ن = ٢جـ

أ = $\frac{م+ن}{٢}$ ، جـ = $\frac{م-ن}{٢}$

هـ = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{\frac{م-ن}{٢}}{\frac{م+ن}{٢}}$ = $\frac{م-ن}{م+ن}$

ملاحظات على القطع الناقص



ن ب١ + ن ب٢ = ٢ P

محيط المثلث ن ب١ ب٢ = ٢ P + ٢ جـ

* الرأسين والبؤرتين تقعان على المحور الأكبر دائماً .

* P = بعد الرأس عن المركز

* ب = بعد طرف المحور الأصغر عن المركز

* جـ = بعد البؤرة عن المركز

* طول المحور الأكبر = ٢ P

* طول المحور الأصغر = ٢ ب

* البعد البؤري = ٢ جـ

وهو المسافة بين البؤرتين

* الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{P}$ ، ١

لأن جـ < P

* معادلة المحور الأكبر تعاكس معادلة المحور الأصغر

* P > ب

$$جـ^2 = P^2 - ب^2$$

* بعد الرأس عن البؤرة القريبة منه هو (P - جـ) وهو يمثل أقصر مسافة بين النقطة ن (س، ص) والبؤرة

* المركز ينصف البؤرتين

* المركز ينصف الرأسين

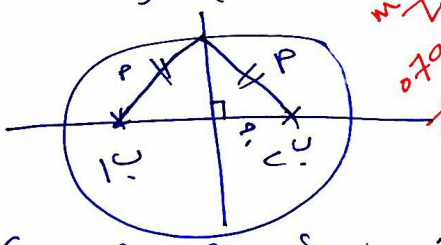
* المركز ينصف طرفي المحور الأصغر

* نجد المركز حسب القاعدة

منتصف قطعة مستقيمة هو

$$\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2}\right)$$

* الدائرة حالة خاصة من القطع الناقص عندما P = ب تكون الدائرة قطع ناقص طول محوره الأكبر = طول محوره الأصغر



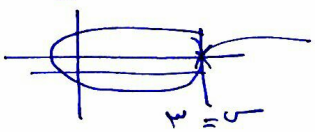
فيثاغورس $P^2 = ب^2 + جـ^2 \Leftarrow جـ^2 = P^2 - ب^2$

* مساحة القطع الناقص هي

π P ب

* تقاطع المحور الأكبر مع منحنى القطع عند

س = عدد ⇐ تشكل نقطة الرأس



mg 0795598456

ش١ وزاره شتوية ٢٠١٤

لمعادلة القطع الناقص $\frac{(س - ل)^2}{أ^2} + \frac{(ص - ك)^2}{ب^2} = 1$

اثبت ان $ب^2 = أ^2 (1 - هـ^2)$ حيث هـ الاختلاف المركزي

الحل: $هـ = \frac{جـ}{أ} \Leftarrow جـ = هـ أ$

$جـ^2 = هـ^2 أ^2$

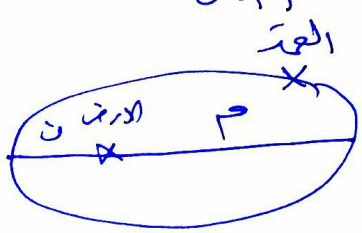
$جـ^2 = أ^2 - ب^2$

$أ^2 - ب^2 = هـ^2 أ^2$

$\Leftarrow ب^2 = أ^2 - هـ^2 أ^2$

$= أ^2 (1 - هـ^2)$

(١١) يدور القمر حول الارض في مدار على شكل قطع ناقص حيث تقع الارض في احدى بؤرتي المدار اذا كانت اطول مسافه بين الارض والقمر تساوي م كم واقصر مسافه ن كم كما في الشكل اثبت ان الاختلاف المركزي يساوي $\frac{م - ن}{م + ن}$



الحل: $أ - جـ = ن$

$أ + جـ = م$

$2أ = ن + م$

بالجمع $أ = \frac{ن + م}{2}$

$2جـ = م - ن \Leftarrow جـ = \frac{م - ن}{2}$

$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{\frac{م - ن}{2}}{\frac{م + ن}{2}} = \frac{م - ن}{م + ن}$

س٨ جد طول نصف قطر الدائرة التي مساحتها تساوي مساحة القطع الناقص

$$\frac{س^2}{81} + \frac{ص^2}{16} = 1$$

الحل: أ = ٩ ، ب = ٤

مساحة القطع الناقص = أ ب π ⟸ ٩ × ٤ π = ٣٦ π

مساحة الدائرة = ط نق² = π نق²

٣٦ π = π نق² ⟸ نق² = ٣٦

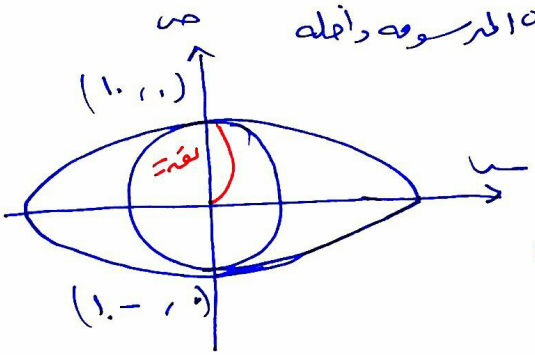
نق = ٦

س٩ وزارة شتوية ٢٠١٤

يمثل الشكل دائرة وقطع ناقص مشتركين في المركز (٠،٠) اذا كانت مساحة القطع الناقص تساوي مثلي مساحة الدائرة المرسومة داخله

جد ① الاختلاف المركزي للقطع الناقص

② معادلة القطع الناقص



الحل: مساحة القطع = ٢ × مساحة الدائرة

أ ب $\cancel{\pi}$ = ٢ $\cancel{\pi}$ نق²

أ ب = ٢ × ١٠٠ ⟸ أ ب = ٢٠٠ ⟸ ب = ١٠

أ × ١٠ = ٢٠٠ ⟸ $\boxed{أ = ٢٠}$

جـ² = أ² − ب² ⟸ ٤٠٠ − ١٠٠ = ٣٠٠ ⟸ جـ = $\sqrt{٣٠٠}$ = ١٠$\sqrt{٣}$

① هـ = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{\sqrt{٣٠٠}}{٢٠}$ = $\frac{١٠\sqrt{٣}}{٢٠}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

② $\frac{س^2}{٤٠٠} + \frac{ص^2}{١٠٠} = ١$

س٦ تحرك النقطة و(س ، ص) حيث تتحدد موقعها بالمعادلتين

س = ٥ + ٣ جا هـ ، ص = ٢ + ٢ جتا هـ بين أن النقطة و تتحرك على منحنى قطع ناقص ثم جد بعده البؤري

الحل :

س = ٥ + ٣ جا هـ

٣ جا هـ = س − ٥

جا هـ = $\frac{س - ٥}{٣}$

جا^٢ هـ = $\frac{(س - ٥)^٢}{٩}$

ص = ٢ + ٢ جتا هـ

٢ جتا هـ = ص − ٢

جتا هـ = $\frac{ص - ٢}{٢}$

جتا^٢ هـ = $\frac{(ص - ٢)^٢}{٤}$

جا^٢ هـ + جتا^٢ هـ = ١

$$\frac{(س - ٥)^٢}{٩} + \frac{(ص - ٢)^٢}{٤} = ١$$

قطع ناقص سيني أ^٢ = ٩ ، ب^٢ = ٤ ، جـ^٢ = أ^٢ − ب^٢

جـ^٢ = ٥ ⇐ جـ = $\sqrt{٥}$

البعد البؤري = ٢ جـ = ٢$\sqrt{٥}$

س/ وزارة ٢٠١٠ شتوية

قطع ناقص مساحته ٤٠ π ورأساه (±٨ ، ٠) جد معادلته

مساحة القطع الناقص أ ب π = ٤٠ π ⇐ $\boxed{أ ب = -٤٠}$

مركز القطع الناقص = $\left(\frac{٨ + -٨}{٢} ، \frac{٠ + ٠}{٢}\right)$ = (٠ ، ٠) ⇐ أ = ٨

٨ × ب = ٤٠ ⇐ $\boxed{ب = ٥}$ القطع سيني

$$\frac{س^٢}{٦٤} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$$

س٦ ت

السؤال الرابع

حد معادلة القطع الناقص مركزه (١،١) واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $(ص-١)^٢ - ١٢س = ٠$ وطول محوره الاصغر = (١٠) وحدات

الحل:

الحل: البداية من القطع المكافئ

$(ص-١)^٢ = ١٢س$ ، $٤جـ = ١٢ \Leftarrow جـ = ٣$

الرأس (٠،١) ، البؤرة = (٣+٠،١) = (٣،١)

بؤرة القطع الناقص هي (٣،١)

طول الاصغر = ٢ب = ١٠ ⇐ $\boxed{ب = ٥}$

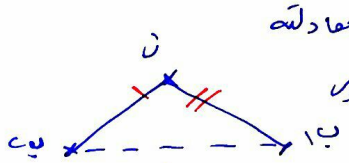
القطع سيني لان المقطع الصادي في المركز والبؤرة تاتي نفسه

$جـ = ٣ - ١ = ٢$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \Leftarrow أ^٢ = ٤ + ٢٥ = \boxed{٢٩ = أ^٢}$

$$\frac{(س-١)^٢}{٢٩} + \frac{(ص-١)^٢}{٢٥} = ١$$

س/ قطع ناقص بؤرتاه (٤،٠) (-٤،٠) ن(س،ص) تقع على منحنى القطع حيث ان محيط المثلث ن ب١ ب٢ = يساوي ٢٤ حد معادلته



من تعريف القطع الناقص للنقطة ن(س،ص) تتحرك في المستوى حيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين ب١، ب٢ يساوي مقداراً ثابتاً ٢أ

$٢أ + ٢جـ = ٢٤ \Leftarrow أ + جـ = ١٢$

$٢جـ = |٤ - -٤| = ٨ \Leftarrow جـ = ٤ \Leftarrow \boxed{أ = ٨}$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \Leftarrow ١٦ = ٦٤ - ب^٢ \Leftarrow ب^٢ = ٤٨$

المركز منتصف المسافة بين البؤرتين $\left(\frac{٤+-٤}{٢}، \frac{٠+٠}{٢}\right) = (٠،٠)$ القطع سيني

$$\frac{س^٢}{٦٤} + \frac{ص^٢}{٤٨} = ١$$

(٢١)

السؤال الثالث — وزاره شتوية ٢٠١٠

٣٥٨

جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه مركز الدائره التي معادلتها

$(٢س - ٦)^٢ + (٢ص - ٤)^٢ = ٣٦$ وطول محوره الاصغر

يساوي طول قطر هذه الدائره ومعادلة محوره الاصغر $س = -١$

الحل: $(٢(س - ٣))^٢ + (٢(ص - ٢))^٢ = ٣٦$

$٤(س - ٣)^٢ + ٤(ص - ٢)^٢ = ٣٦$

$(س - ٣)^٢ = (ص - ٢)^٢ = ٩ \leftarrow ن = ٩ \Leftarrow ر = ٣ =$ نصف القطر

مركز الدائره = احدى البؤرتين $\boxed{(٣ ، ٢)}$ بؤره

قطر الدائره = ٢ب = ٦ ⇐ ب = ٣

المركز يقع على المحور الاصغر الذي معادلته $س = -١$ مركز $\boxed{(-١ ، هـ)}$ ء

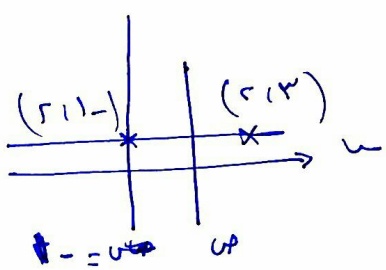
جـ المسافه بين المركز والبؤره = $|٣ - -١| = \boxed{٤ = جـ}$

البؤره والمركز يقعان على نفس المحور

بؤره (٣ ، ٢)

القطع سيني ⇐ ⇐ هـ = ٢

المركز (-١ ، ٢)



$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$

$١٦ = أ^٢ - ٩ \Leftarrow أ^٢ = ٢٥$

$$\frac{(س + ١)^٢}{٢٥} + \frac{(ص - ٢)^٢}{٩} = ١$$

هـ) جد معادلة القطع وزاره صيف ٢٠١١

$(٢ص+٤)^٢ + (٣-س)^٢ = ٦٤$

الحل: $(٢(ص+٢))^٢ + (-١(س-٣))^٢ = ٦٤$

$\frac{٤(ص+٢)^٢}{٦٤} + \frac{(س-٣)^٢}{٦٤} = \frac{٦٤}{٦٤}$

$\frac{(ص+٢)^٢}{١٦} + \frac{(س-٣)^٢}{٦٤} = ١$

قطع سيني مركز $(٣ ، -٢)$

$أ = ٨ ، ب = ٤$

$جـ^٢ = ٤٨ \Leftarrow جـ = \sqrt{٤٨}$

البؤرتان $(٣ \pm \sqrt{٤٨} ، -٢)$

الرأسان $(٣ \pm ٨ ، -٢)$

$(١١ ، -٢)$ $(-٥ ، -٢)$

طول الأكبر $= ٢ \times ٨ = ١٦$

طول الأصغر $= ٢ \times ٤ = ٨$

$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{٤٨}}{٨}$

و) $(٤س^٢ + ٣ص^٢ = \frac{٤}{٣}) \div \frac{٤}{٣} \Leftarrow$

$\frac{٤س^٢}{\frac{٤}{٣}} + \frac{٣ص^٢}{\frac{٤}{٣}} = ١ \Leftarrow \frac{س^٢}{\frac{١}{٣}} + \frac{ص^٢}{\frac{٤}{٩}} = ١ ،$

القطع صادي $أ = \frac{٢}{٣} ، ب = \frac{١}{\sqrt{٣}} ، جـ^٢ = \frac{٤}{٩} - \frac{١ \times ٣}{٣ \times ٣} = \frac{١}{٩} \Leftarrow جـ = \frac{١}{٣}$

المركز $(٠ ، ٠)$ ، البؤرتان $(٠ ، \pm \frac{١}{٣})$ ، الرأسان $(٠ ، \pm \frac{٢}{٣})$

طول الأكبر $= ٢ \times \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٣}$

طول الأصغر $= ٢ \times \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{\frac{١}{٣}}{\frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٢}$

(١٩)

(ب) $\frac{(س-٤)^2}{٥٥} + \frac{(ص+١)^2}{١٨} = ١$

الحل: قطع ناقص $أ = ٩$ ، $ب = ٥$

المركز $(٤، -١)$

$جـ^2 = ١٨ - ٥٥ = ٥٦$

$جـ = \sqrt{٥٦}$

البؤرتان $(٤، -١ \pm \sqrt{٥٦})$

الرأسان $(٤، -١ \pm ٩)$

$(٤، ٨)$ ، $(٤، -١٠)$

طول الأكبر ١٨

$=$ الأصغر ١٠

الاختلاف المركزي $هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{٥٦}}{٩}$

(ج) $س^2 + ٤ص^2 = ١٠٠ \div ١٠٠$

$\frac{س^2}{١٠٠} + \frac{ص^2}{٢٥} = ١$

قطع ناقص مركز $(٠، ٠)$

$أ = ١٠$ ، $ب = ٥$

$جـ^2 = ١٠٠ - ٢٥ = ٧٥$

$جـ = \sqrt{٧٥}$

الرأسان $(\pm ١٠، ٠)$

البؤرتان $(\pm \sqrt{٧٥}، ٠)$

طول المحور الأكبر $= ٢٠$

$=$ $=$ الأصغر $= ١٠$

الاختلاف المركزي $هـ = \frac{\sqrt{٧٥}}{١٠}$

(د) $س^2 + ٦ص^2 + ٤ص = ٦س - ٧$

$س^2 - ٦س + ٦ص^2 + ٤ص = -٧$

$(س-٣)^2 + ٦(ص^2 + \frac{٤}{٦}ص) = -٧ + ٩$

$(س-٣)^2 + ٦(ص+١)^2 = ٢ + ٦ \div ٦$

$\frac{(س-٣)^2}{٦} + \frac{(ص+١)^2}{١} = ١$

مركز $(٣، -١)$ شبه

$أ = ٦$ ، $ب = ١$

$جـ^2 = ٦ - ١ = ٥$ $\Rightarrow$ $جـ = \sqrt{٥}$

البؤرتان $(٣ \pm \sqrt{٥}، -١)$

الرأسان $(٣ \pm \sqrt{٦}، -١)$

$(٥، -١)$ $(١، -١)$

طول الأكبر $= ٤$

طول الأصغر $= ٢\sqrt{٥}$

$هـ = \frac{\sqrt{٥}}{٢}$

(ز) نهايتا محوره الاصغر (± ٣ ، ٠) ويمر بالنقطة (٢ ، ٣)

الحل : ٢ب = ٦ ⇐ ب = ٣ ⇐ $\left(\frac{٣+-٣}{٢} ، \frac{٠+٠}{٢}\right)$

المركز منتصف المسافة = (٠ ، ٠)

$$\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{أ^٢} = ١$$

يمر بالنقطة (٢ ، ٣) ⇐ $\frac{٤}{٩} + \frac{٩}{أ^٢} = ١$

$$\frac{٤أ^٢ + ٨١}{٩أ^٢} = ١ \Leftarrow ٤أ^٢ + ٨١ = ٩أ^٢$$

$$٩أ^٢ - ٤أ^٢ - ٨١ = ٠ \Leftarrow ٥أ^٢ = ٨١$$

$$أ^٢ = \frac{٨١}{٥}$$

المعادلة هي $\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{\frac{٨١}{٥}} = ١$

السؤال الثاني : جد عناصر القطع

(أ) $\frac{س^٢}{١٤٤} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$

الحل ← قطع سيني أ = ١٢ ، ب = ٥

جـ² = ١٤٤ − ٢٥ = ١١٩ ، جـ = $\sqrt{١١٩}$

المركز (٠ ، ٠)

الرأسان (± ١٢ ، ٠)

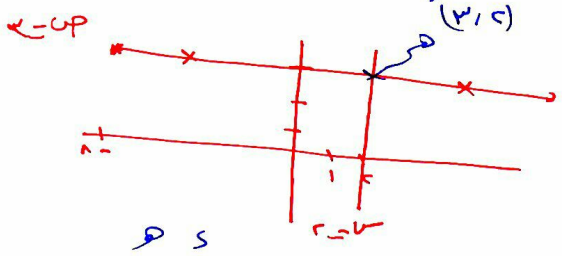
البؤرتان (± $\sqrt{١١٩}$ ، ٠)

طول الأكبر = ٢ × ١٢ = ٢٤

طول الاصغر = ٢ × ٥ = ١٠

الاختلاف المركزي هو = $\frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{١١٩}}{١٢}$

(هـ) يمر بالنقطة (-٨، ٣) ويقع مركزه على المستقيم س = ٢ وبؤرتاه تقعان على المستقيم ص = ٣ واختلافه المركزي ٦ و ٠



قطع ناقص سيني

$$\frac{(س - د)^2}{أ^2} + \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = ١$$

المركز هو نقطة تقاطع المستقيم س = ٢ مع المستقيم ص = ٣ ⇐ المركز (٢، ٣) (د، هـ)

النقطة (-٨، ٣) مع الرأس

المسافة من الرأس الى المركز = أ ⇐ ٢ - -٨ = $\boxed{١٠ = أ}$

الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ}$ ⇐ $\frac{٦}{١٠} = \frac{جـ}{١٠}$ ⇐ $\boxed{جـ = ٦}$

جـ² = أ² - ب² ⇐ ب² = أ² - جـ²

ب² = ١٠٠ - ٣٦ = $\boxed{٦٤ = ب^2}$

المعادلة هي

$$\frac{(س - ٢)^2}{١٠٠} + \frac{(ص - ٣)^2}{٦٤} = ١$$

(و) رأساه (٢، ٠)، (-٨، ٠) طول محوره الاصغر يساوي (٤) أمثال المسافة بين احد رأسيه والبؤرة القريبة من ذلك الرأس

الحل: المركز منتصف المسافة بين الرأسين = $\left(\frac{٢ - ٨}{٢}، \frac{٠ + ٠}{٢}\right)$ = (-٣، ٠) (د، هـ)

المسافة بين الرأسين ٢أ = |-٨ - ٢| = ١٠ ⇐ $\boxed{أ = ٥}$

طول محوره الاصغر = (٤) امثال المسافة بين احد رأسيه والبؤرة القريبة.

٢ب = ٤ (أ - جـ)

ب = ٢ (أ - جـ) ⇐ ب = ٢ (٥ - جـ) ⇐ $\boxed{ب = ١٠ - ٢جـ}$

جـ² = أ² - ب² ⇐ جـ² = ٢٥ - (١٠ - ٢جـ)² ⇐ جـ² = ٢٥ - ١٠٠ + ٤٠جـ - ٤جـ²

٥جـ² - ٤٠جـ + ٧٥ = ٠ ÷ ٥ ⇐ جـ² - ٨جـ + ١٥ = (جـ - ٣)(جـ - ٥)

جـ = ٣ ، جـ = ٥ مرفوضة لأن أ = ٥ ⇐ ب = ٢(٥ - ٣) = ٤

$$\frac{(س + ٣)^2}{٢٥} + \frac{ص^2}{١٦} = ١$$

(١٦)

(٥) مركزه نقطة الاصل ومحوره الاكبر يوازي محور السينات ويمر معناه بالنقطة (١، ٣) واختلافه المركزي ٠.٥

الحل: محوره الاكبر يوازي محور السينات ⇐ $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$

اختلافه المركزي = هـ = $\frac{جـ}{أ} = \frac{١}{٢}$ ⇐ $\boxed{جـ = \frac{١}{٢} أ}$

يمر بالنقطة $(١، ٣)_{س، ص}$ ⇐ $\frac{١}{أ^2} + \frac{٩}{ب^2} = ١$ وحد مقامات

$\frac{ب^2 + ٩أ^2}{أ^2 ب^2} = ١$ ⇐ $\boxed{أ^2 ب^2 = ب^2 + ٩أ^2}$ ← (١)

⇐ $جـ^2 = أ^2 - ب^2$ ، $جـ = \frac{١}{٢} أ$

$\frac{١}{٤} أ^2 = أ^2 - ب^2$ ⇐ $ب^2 = \underset{١}{أ^2} - \frac{١}{٤} أ^2$ وحد مقامات

$\boxed{ب^2 = \frac{٣}{٤} أ^2}$ عوضها في (١)

$\left(أ^2 \times \frac{٣}{٤} أ^2 = \frac{٣}{٤} أ^2 + ٩ أ^2 \right) \times ٤$

$٣ أ^4 = ٣ أ^2 + ٣٦ أ^2$

$٣ أ^4 = ٣٩ أ^2$ ÷ ٣

$أ^4 - ١٣ أ^2 = ٠$

$أ^2 (أ^2 - ١٣) = ٠$ | $أ^2 - ١٣ = ٠$

$أ^2 = ٠$ ⇐ $أ = ٠$ | $أ^2 = ١٣$

$أ = \pm \sqrt{٣}$

$\boxed{أ = \sqrt{١٣}}$

$ب^2 = \frac{٣}{٤} \times ١٣ = \boxed{\frac{٣٩}{٤} = ب^2}$

المعادلة هي $\frac{س^2}{١٣} + \frac{ص^2}{\frac{٣٩}{٤}} = ١$

ج) مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه تقعان على محور السينات وبعده البؤري ٦

الفرق بين طولي محوريه = ٢ وحده

الحل : ٢جـ = ٦ ⟸ جـ = ٣

الفرق بين طولي محورية

٢أ − ٢ب = ٢ ⟸

طول الأكبر = ٢أ

طول الاصغر = ٢ب

الفرق ٢أ − ٢ب = ٢

$\boxed{\text{أ} - \text{ب} = ١}$

أ = ب + ١

جـ² = أ² − ب²

٩ = (ب + ١)² − ب²

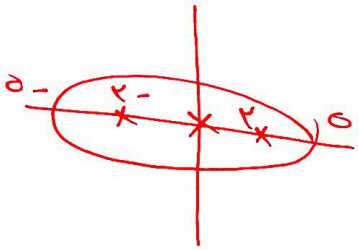
٩ = ~~ب²~~ + ٢ب + ١ − ~~ب²~~

٨ = ٢ب ⟸ $\boxed{\text{ب} = ٤}$

أ = ب + ١ = ٥

مركز (٠،٠)

$\frac{\text{س}^2}{٢٥} + \frac{\text{ص}^2}{١٦} = ١$



تمارين ومسائل القطع الناقص - ٣٥٨

① جد معادلة القطع الناقص ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي

(أ) رأساه النقطتان (٤ ، ١) (-٢ ، ١) وطول محوره الاصغر ٤ وحدات

المركز منتصف المسافة بين الرأسان $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

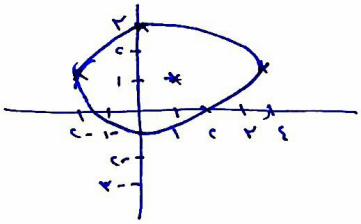
$\left(\frac{٤ - ٢}{٢} ، \frac{١ + ١}{٢}\right) = (١ ، ١)$

أ = المسافة من المركز الى احد الرأسين = ٤ - ١ = ٣

ب ⇐ طول المحور الاصغر ٢ب = ٤ ⇐ ب = ٢

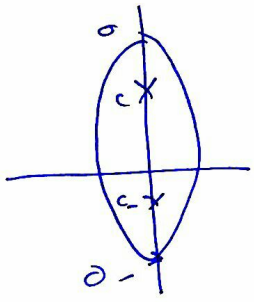
المعادلة هي

$$\frac{(س - ١)^٢}{٩} + \frac{(ص - ١)^٢}{٤} = ١$$



(ب) بؤرتان (٠ ، ±٢) ، رأسان (٠ ، ±٥)

الحل: المركز $\left(\frac{٠ + ٠}{٢} ، \frac{٢ + -٢}{٢}\right) = (٠ ، ٠)$



أ = ٥ مسافة من المركز الى احد الرأسين

جـ = ٢ مسافة من المركز الى احد البؤرتين

$أ^٢ = ب^٢ + جـ^٢ \Leftarrow ب^٢ = ٢٥ - ٤ = ٢١$

$$\frac{ص^٢}{٢٥} + \frac{س^٢}{٢٦} = ١$$

تدريب ٦ ص ٣٥٦ قطع ناقص معادلته $٤س^٢ + ٣ص^٢ + ١٦س = ١٧٦$

جد ① مركز ② الرأسين ③ البؤرتين ④ الاختلاف المركزي

الحل: $٤س^٢ + ١٦س + ٣ص^٢ = ١٧٦$

$٤(س^٢ + ٤س) + ٣ص^٢ = ١٧٦$

$٤(س^٢ + ٤س + ٤) + ٣ص^٢ = ١٧٦ + ١٦$

$\frac{٤(س+٢)^٢}{١٩٢} + \frac{٣ص^٢}{١٩٢} = \frac{١٩٢}{١٩٢}$ ← لازم يكون 1

$\frac{(س+٢)^٢}{٤٨} + \frac{ص^٢}{٦٤} = ١$

$ج^٢ = ٦٤ \Leftarrow ج = ٨$

$ب^٢ = ٤٨ \Leftarrow ب = ٤\sqrt{٣}$

$ج^٢ = ا^٢ - ب^٢$

$= ٦٤ - ٤٨ = ١٦$

$\therefore ا = ٤$

المركز $(-٢، ٠)$

الرأسان $(-٢، \pm ٨)$

البؤرتان $(-٢، \pm ٤)$

الاختلاف المركزي

$هـ = \frac{ج}{ا} = \frac{٤}{٨} = ٠.٥$

مساحة القطع الناقص الذي معادلته $\frac{س^٢}{ا^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

$= ا ب \pi$

مثال ٥ ص ٣٥٧ جد مساحة القطع الناقص الذي معادلته $\frac{س^٢}{١٢١} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

الحل: $ا = ١١، \quad ب = ٣$

$م = ا ب \pi = ١١ \times ٣ \times \frac{٢٢}{٧} = \frac{٧٢٦}{٧}$ وحدة مساحة

مثال 5 / ٣٥٦ حدد عناصر القطع الناقص الذي معادلته

$س^2 + ١٠ص^2 - ٦س - ٤٠ص - ١١ = ٠$

الحل: $س^2 - ٦س + ١٠ص^2 - ٤٠ص = ١١$

$ك^2 - ٦س + ١٠(ص^2 - ٤ص) = ١١$

اكمال مربع س و اكمال مربع ص

$س^2 - ٦س + ٩ + ١٠(ص^2 - ٤ص + ٤) = ١١ + ٩ + ٤٠$

$(س-٣)^2 + ١٠(ص-٢)^2 = ٦٠$ دائماً يجب ان يساوي ١

نقسم على ٦٠

$\frac{(س-٣)^2}{٦٠} + \frac{١٠(ص-٢)^2}{٦٠} = ١$

$\frac{(س-٣)^2}{٦٠} + \frac{(ص-٢)^2}{٦} = ١$

$أ^2 = ٦٠ \Rightarrow أ = \sqrt{٦٠}$

$ب^2 = ٦ \Rightarrow ب = \sqrt{٦}$

$أ^2 = ب^2 + جـ^2$

$٦٠ = ٦ + جـ^2$

$جـ^2 = ٥٤$

$جـ = \sqrt{٥٤} = \sqrt{٩ \times ٦} = ٣\sqrt{٦}$

المركز $(٣، ٢)$ البعد البؤري $= ٢جـ = ٢ \times ٣\sqrt{٦}$

البؤرتان $(ك \pm جـ، هـ) = (٣ \pm ٣\sqrt{٦}، ٢)$،

الرأسان $(ك \pm أ، هـ) = (٣ \pm \sqrt{٦٠}، ٢)$ طول المحور الأكبر $٢أ = ٢\sqrt{٦٠}$

طرفا المرافقة $= (ك، هـ \pm ب) = (٣، ٢ \pm \sqrt{٦})$

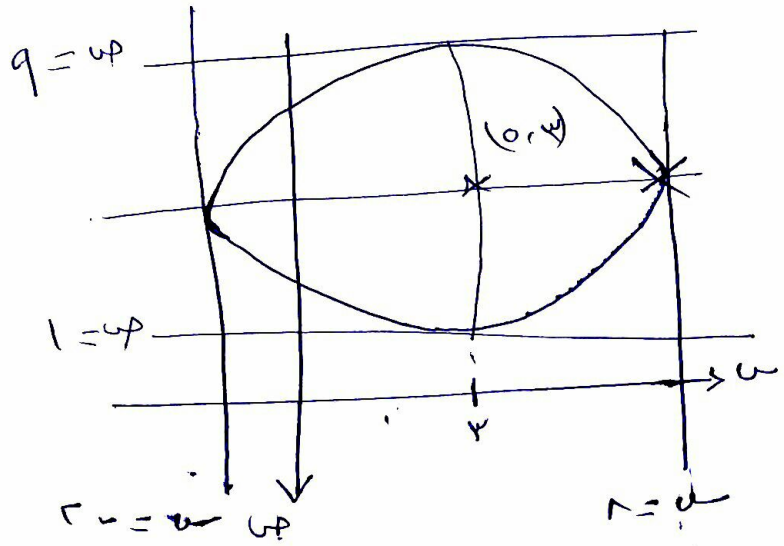
طول $\overline{ب ب} = ٢\sqrt{٦}$

(١١)

تدريب ٥

حد معادلة القطع الناقص الذي يمس المستقيمات

س = ٨ ، س = -٢ ، ص = ٩ ، ص = ١



٢أ = ١٠

أ = ٥

-٢ + ٥ = ٣ سين المركز

٩ - ١ = ٨

٢ب = ٨

ب = ٤

١ + ٤ = ٥ صادر المركز

مركز (٣، ٥)

أ² = ب² + جـ²

٢٥ - ١٦ = جـ² = ٩

المعادلة هي

$$\frac{(س-٣)^2}{٢٥} + \frac{(ص-٥)^2}{١٦} = ١$$

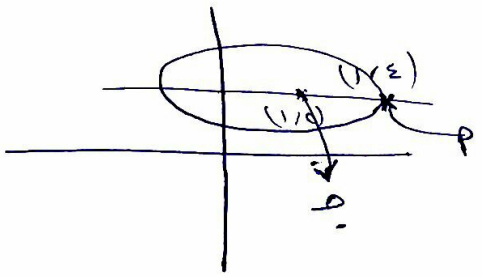
الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص هي

أ س² + ب ص² + جـ س + د ص + هـ = ٠

أ ، ب ، جـ ∈ ح

أ × ب > ٠ ، أ ≠ ب

تدريب ٤ جد معادلة القطع الناقص احد رؤوسه (٤، ١) والبؤرة القريبة (٢، ١) اختلافه المركزي ٥ و٠



الحل: القطع سيني

$$\frac{(س - د)^2}{أ^2} + \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = ١$$

$$\boxed{أ - جـ = ٢}$$

$$هـ = \frac{جـ}{أ} \Leftarrow ٥ و٠ = \frac{جـ}{أ} \Leftarrow \frac{جـ}{٥ و٠} = \frac{٥ و أ}{٥ و٠}$$

$$\boxed{أ = ٢ جـ}$$

$$٢ جـ - جـ = ٢$$

$$\boxed{جـ = ٢} \Leftarrow \boxed{أ = ٤}$$

$$أ^2 = ب^2 + جـ^2 \Leftarrow ١٦ - ٤ = ١٢ = ب^2$$

الرأس $(د + أ ، هـ)$ هـ = ١ لان الحركة على محور يوازي محور س

$$(د + ٤ ، ١) = (٤ ، ١) \qquad هـ = ١$$

$$د + ٤ = ٤ \Leftarrow \boxed{د = ٠} \qquad \text{المركز } (٠ ، ١)$$

$$\frac{س^2}{١٦} + \frac{ص^2}{١٢} = ١$$

مثال ٤ جد عناصر ومعادلة القطع الناقص الذي رأساه هما (٠،٥) (٠،-٥) واختلافه المركزي ٨ و.

الحل: القطع سيني

المركز = $\left(\frac{٥+-٥}{٢} ، \frac{٠+٠}{٢}\right) = (٠،٠)$

أ = ٥

هـ = $\frac{جـ}{أ}$ ⇐ $\frac{٨}{١٠} = \frac{جـ}{٥}$ ⇐ $\boxed{جـ = ٤}$

أ² = ب² + جـ² ⇐ ٢٥ − ١٦ = ب² = ٩

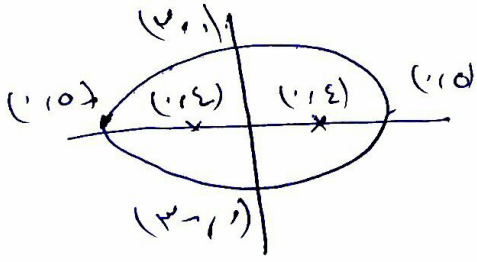
(١) * المركز (٠،٠)

(٢) الرأسان (±٥،٠) طول الأكبر = ٢أ = ١٠ (٣)

(٤) البؤرتان (±٤،٠) البعد البؤري ٢جـ = ٨ (٥)

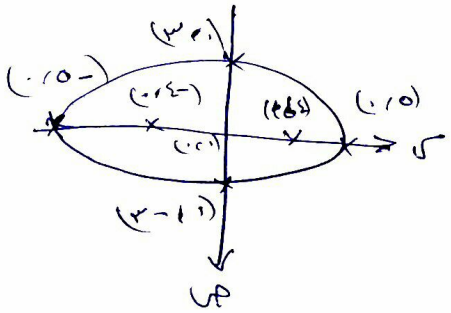
(٦) المحور الأصغر (٠،±٣) طوله ٢ب = ٦ (٧)

(٨) المعادلة هي $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$



تدريب ٣ / ٣٥٤ جد عناصر القطع الناقص الذي معادلته

$\frac{س^2}{25} + \frac{ص^2}{9} = 1$ ثم ارسم شكلا تقريبيا.



الحل : القطع سيني المركز (٠،٠)

$أ^2 = 25 \Leftarrow أ = 5$

$ب^2 = 9 \Leftarrow ب = 3$

$ج^2 = أ^2 - ب^2 \Leftarrow ج^2 = 16 \Leftarrow ج = 4$

الرأسان (٥،٠) (-٥،٠)

طول المحور الأكبر $= 2أ = 10$

البؤرتان = (٤،٠) (-٤،٠)

البعد البؤري $= 2ج = 8$

طرفا المحور الأصغر (٠،٣) (٠،-٣)

طول $\overline{ب ب} = 6$

مثال ٣
٣ ، ٣

جد عناصر القطع الناقص الذي معادلته

$$\frac{(س+١)^٢}{١٦} + \frac{(ص-٢)^٢}{٢٥} = ١$$

الحل : القطع صادي لان ٢٥ = أ² الكبيرة مع المتغير ص

أ² = ٢٥ ⇐ أ = ٥

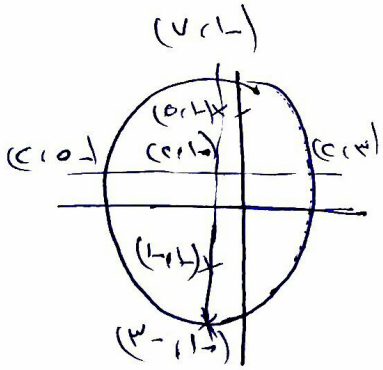
ب² = ١٦ ⇐ ب = ٤

جـ² = أ² − ب² ⇐ جـ² = ٩ ⇐ جـ = ٣

① مركز (د ، هـ) = (−١ ، ٢)

② بؤرتان (د ، هـ ± جـ) = (−١ ، −١)
(−١ ، ٥)

③ رأسان (د ، هـ ± أ) = (−١ ، ٧)
(−١ ، −٣)



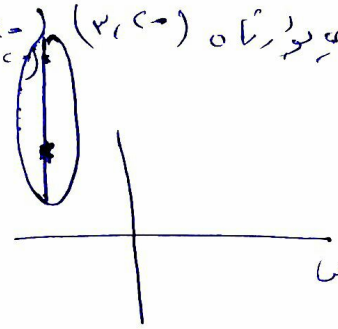
④ المحور الأكبر يوازي محور الصادات
معادلته س = −١ ، طوله ٢أ = ١٠

⑤ محور الاصغر يوازي محور السينات
معادلته ص = ٢ طوله ٢ب = ٨
طرفي الاصغر (٣ ، ٢) (−٥ ، ٢)

(٦)

تدريب ٢ / ٣٥٣

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (-٢، ٣) (-٢، ٩) وطول محوره الأكبر ١٢



الحل: القطع صادي لأن التعرف البؤرتين في الإحداثي الصادي

٢جـ = ٦ ⟸ جـ = ٣

المركز (-٢، ٦)

المركز في المنتصف بين البؤرتين المسافة كاملة ٦ وحدات

٢أ = ١٢ ⟸ أ = ٦

أ² = ب² + جـ²

٣٦ = ب² + ٩

ب² = ٢٧

$$\frac{(\text{ص} - ٦)^2}{٣٦} + \frac{(\text{س} + ٢)^2}{٢٧} = ١$$

(٥)

جد معادلة القطع الناقص

بؤرتان (٤ ، ١) ، (٠ ، ١) ويتقاطع منحناه مع المحور

الأكبر عند س = ٢ + √٥

الحل : التعرف البؤرتين في الإحداثي السيني ⇐ القطع مسمى

$$\frac{(س - د)^2}{أ^2} + \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = ١$$

البعد بين البؤرتين = ٢ جـ ⇐ ٢ جـ = ٤ ⇐ $\boxed{جـ = ٢}$

المركز هو منتصف المسافة بين البؤرتين منتصف نقطة منتصف

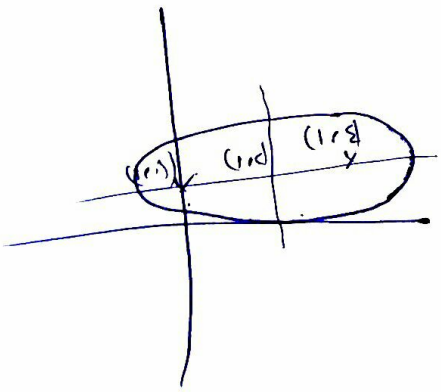
$(\overset{د}{٢} ، \overset{هـ}{١})$ $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

يتقاطع مع المحور الأكبر عند النقطة س = ٢ + √٥ ⇐ (٢ + √٥ ، ١)

المسافة من المركز الى الرأس = أ

$$|٢ - (٢ + \sqrt{٥})| = \boxed{\sqrt{٥} = أ}$$

$$أ^2 = ب^2 + جـ^2$$



$$٥ = ب^2 + ٤ \Leftarrow ب^2 = ١$$

المعادلة هي

$$\frac{(س - ٢)^2}{٥} + \frac{(ص - ١)^2}{١} = ١$$

تدريب ١ ٣٥٠

جد معادلة القطع الناقص مركزه نقطة الاصل ومحوره الاصغر يوازي محور الصادات وطوله يساوي ٤ واحدى بؤرتيه النقطة (-٣، ٠)

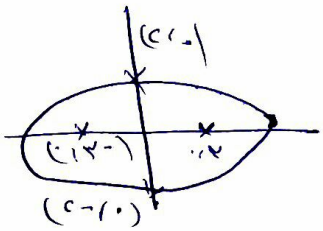
مركز (د، هـ) = (٠، ٠)

٢ب = ٤ ⟸ ب = ٢

جـ = ٣ = أ² = ب² + جـ²

أ² = ٩ + ٤ = ١٣

$$\frac{س^2}{١٣} + \frac{ص^2}{٤} = ١$$



مثال ٢ ٣٥١

جد معادلة القطع الناقص مركزه (٢، ٣) احدى بؤرتيه (٢، -١) طول محوره الاصغر = ٦

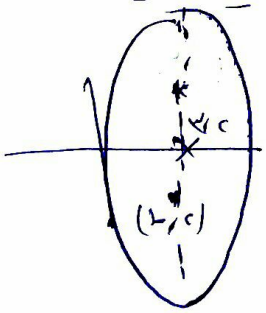
الحل: جـ = | المسافة بين المركز والبؤرة | = | -١ - ٣ | = ٤

طول الاصغر ٢ب = ٦ ⟸ ب = ٣

أ² = ب² + جـ² = ١٦ + ٩ = ٢٥

القطع صادي لان المحور موازي لمحور الصادات

$$\frac{(ص - ٣)^2}{٢٥} + \frac{(س - ٢)^2}{٩} = ١$$



ملاحظات على القطع الناقص

① الاختلاف المركزي هو $\text{هـ} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\text{بعد البؤرة عن المركز}}{\text{بعد الرأس عن المركز}}$

$\text{هـ} < ١$ لأن $\text{جـ} < \text{أ}$

② في القطع الناقص $\text{أ}^٢ = \text{ب}^٢ + \text{جـ}^٢$

③ تحكم على القطع سيني او صادي بناءاً على المتغير المرتبط مع $\text{أ}^٢$ الكبرى

④ يمكن كتابة معادلات القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل

١) $\text{أ}^٢\text{ص}^٢ + \text{ب}^٢\text{س}^٢ = \text{أ}^٢\text{ب}^٢$ ← ناقص سيني

٢) $\text{أ}^٢\text{س}^٢ + \text{ب}^٢\text{ص}^٢ = \text{أ}^٢\text{ب}^٢$ ← ناقص صادي

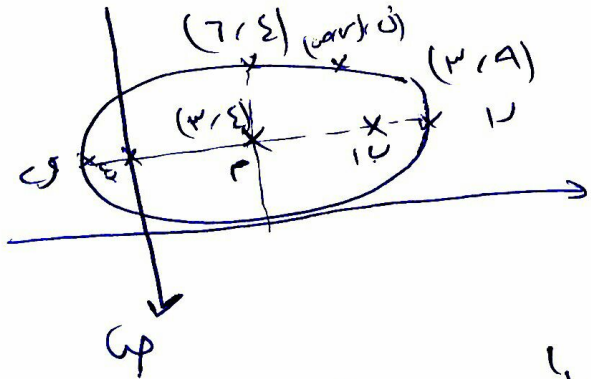
مثال ٣٤٩ : جد معادلة القطع الناقص

الحل : القطع سيني

أ = المسافة من المركز الى الرأس

$٩ - ٤ = ٥$

$\boxed{\text{أ} = ٥}$

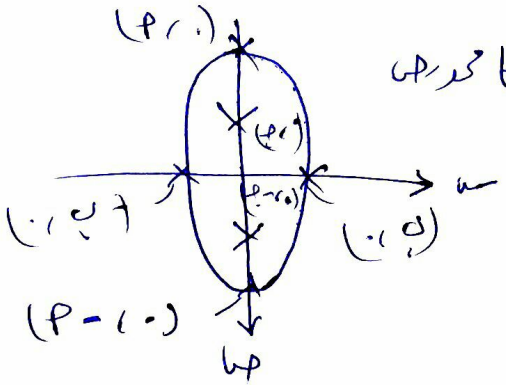


ب من المركز الى الرأس الاصغر

$٦ - ٣ = \boxed{٣ = \text{ب}}$

$$\frac{(\text{س} - ٤)^٢}{٢٥} + \frac{(\text{ص} - ٣)^٢}{٩} = ١$$

(c)



المركز (٠، ٠)

القطع رأسي ∴ الرأسان والبؤرتان على محور ص

الرأسان (٠، ± ٢ب)

طول المحور الأكبر = ٢ب

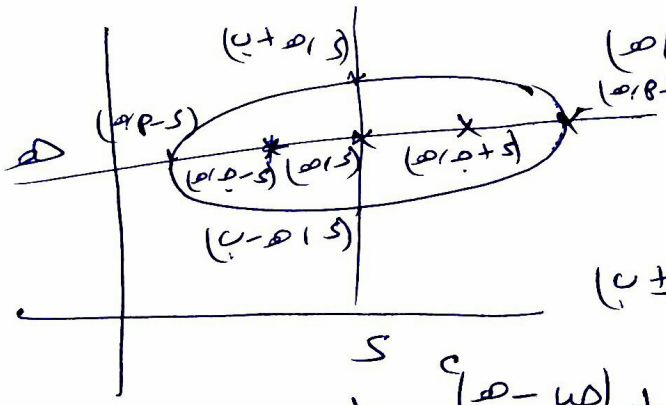
رأسا المحور الأصغر (± أ، ٠)

طول = ٢أ

البؤرتان (٠، ± جـ)

البعد البؤري = جـ

المعادلة هي $\frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} = 1$



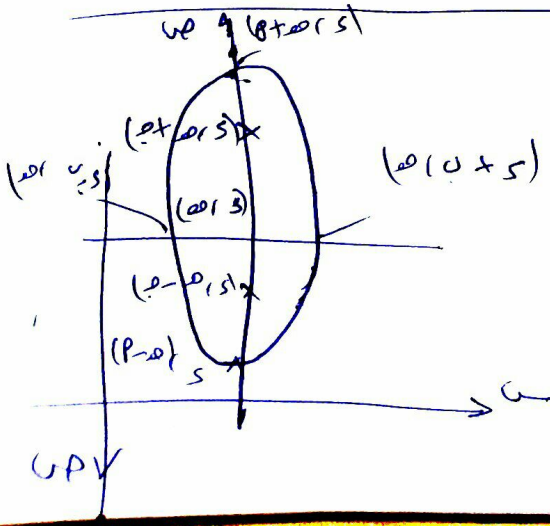
القطع سنر المركز (ك، هـ)

الرأسان (ك ± ٢أ، هـ)

البؤرتان (ك ± جـ، هـ)

رأسا المحور الأصغر ك، (هـ ± ب)

المعادلة هي $\frac{(\text{س} - \text{ك})^2}{\text{أ}^2} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^2}{\text{ب}^2} = 1$



المركز (ك، هـ) القطع رأسي

الرأسان (ك، هـ ± ٢ب)

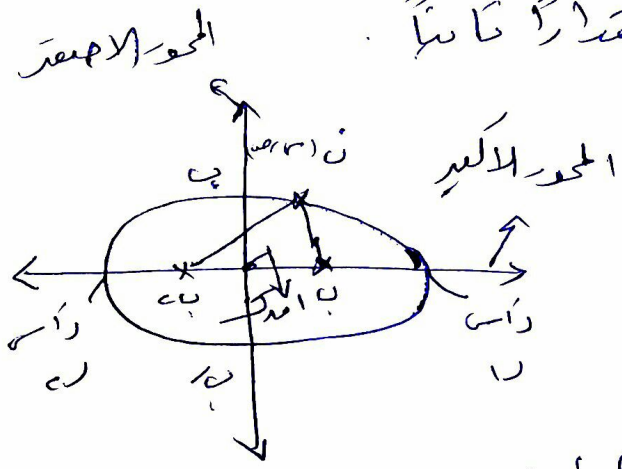
البؤرتان (ك، هـ ± جـ)

رأسا المحور الأصغر (ك ± ب، هـ)

المعادلة هي $\frac{(\text{ص} - \text{هـ})^2}{\text{ب}^2} + \frac{(\text{س} - \text{ك})^2}{\text{أ}^2} = 1$

القطع الناقص

هو المحل الهندسي للنقطة ن (س، ص) التي تتحرك في المستوى الاحداثي بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين ب١، ب٢ ((البؤرتان)) يساوي مقداراً ثابتاً.



ر١، ر٢ رأسي القطع

البعد بينهما = طول المحور الاكبر = ٢م

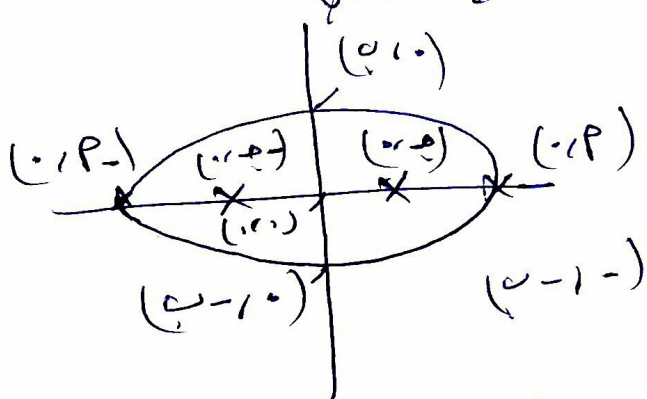
ب ب٢ المحور الاصغر وطوله = ٢ب

المسافة بين ب١، ب٢ = البعد البؤري = ٢جـ

المركز (٠، ٠) القطع سيني

الرأسان (م، ٠) (-م، ٠)

طول المحور الاكبر = ٢م



رأسي المحور الاصغر (٠، ب) (-، -ب)

طوله = ٢ب

البؤرتان (جـ، ٠) (-جـ، ٠) البعد البؤري = ٢جـ

القطع سيني تعني ان الرأسين والبؤرتين على محور السينات

المعادلة $\frac{س^2}{م^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$