

الرياضيات

التوجيهي الادبي والفندقي

الفصل الدراسي الثاني

التكامل وتطبيقاته

٢٠١٩

اعداد المعلم:

أحمد ابو موسى

٠٧٩٦٠٢٣٤٤٦

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٠٧٩٦٠٢٣٤٤٦

الدرس الاول : التكامل غير محدود

التكامل: هو ايجاد قاعدة الاقتران (u) الذي مشتقته $(f(u))$ ، ويرمز له (\int) .

- التكامل عكس المشتقة (اي ايجاد اصل الاقتران) .
- التفاضل والتكامل عمليتان متعاكستان .
- تطبق على الاقترانات المتصلة فقط .

الصورة العامة: اذا كان $u = f(x)$ $du = f'(x) dx$

$$\text{اذا: } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

مثال (١): اذا كان $u = (x^2 + 2x)$ $du = (2x + 2) dx$ جد؟؟؟

(أ) $u = (x)$:

الحل:

حسب الصورة العامة (المشتقة تلغي التكامل)

$$u = \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x} dx$$

$$\text{اذا: } u = (x^2 + 2x) = 2x + 2$$

(ب) $u = (1)$:

الحل:

$$u = (1) = (1) + (1) = 2 = 3$$

(تعويض مباشر في $u = (x)$)

مثال (٢): اذا كان $u = (x^3 - 2x^2 + 5)$ $du = (3x^2 - 4x) dx$

جد $u = (2)$ ؟؟؟

الحل:

$$\int \frac{3x^2 - 4x}{x^3 - 2x^2 + 5} dx$$

(نشق الطرفين وتذكر دائما ان المشتقة تلغي التكامل)

$$u = (x^3 - 2x^2 + 5) = 3x^2 - 4x$$

$$u = (2) = (2) = 2 - 10 = -8$$

(التعويض المباشر في $u = (x)$)

واجب (١): جد $\int \frac{v}{v} dx$ لكل مما يلي؟؟؟

$$(1) \int \frac{2x^3 + 2}{x^2 - 2} dx , \quad x \neq 2$$

حلك:

$$(2) \int \frac{1}{x(x+1)} dx$$

حلك:

واجب (٢): اذا كان $u = (x^2 + 5)$ $du = 2x dx$ ، $x \neq 0$

جد؟؟؟

(أ) $u = (x)$:

حلك:

(ب) $u = (2)$:

حلك:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٥٦٤٤٣٤٠٢٣٦٠٧٩٦٠

قواعد التكامل غير محدود

القاعدة الاولى $\int s^m = \frac{s^{m+1}}{m+1} + C$

حيث m : عدد ثابت ، C : ثابت التكامل

مثال (٣): جد كل من التكاملات الآتية ؟؟؟

(أ) $\int (s + 1) ds$

(هذه الصورة تعني ان الثابت m هو الواحد)

(ب) $\int \frac{1}{s^3} ds = \int s^{-3} ds$

(ج) $\int \pi s ds$

(π عدد وليس متغير)

واجب (٣): جد كل من التكاملات الآتية ؟؟؟

(أ) $\int \sqrt{s} ds$

حلك:

(ب) $\int 3s ds$

حلك:

(ج) $\int \frac{\pi}{2} ds$

حلك:

القاعدة الثانية $\int \frac{s^{m+1}}{s^{m+1}} ds = \int s^m ds$

$m \neq -1$ ، C : ثابت التكامل

مثال (٤): جد كل من التكاملات الآتية ؟؟؟

(أ) $\int s^2 ds$

الحل:

$$\int s^2 ds = \frac{s^{2+1}}{2+1} = \frac{s^3}{3} + C$$

(عند عدم وجود أس على المتغير يعني ان الأس هو الواحد)

(ب) $\int s^2 ds$

الحل:

$$\int s^3 ds = \frac{s^{3+1}}{3+1} = \frac{s^4}{4} + C$$

(ج) $\int s^{-2} ds$ ، $s \neq 0$

الحل:

$$\int \frac{1}{s^2} ds = \int s^{-2} ds = \frac{s^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{s} + C$$

مثال (٥): اذا كان (s) اقتران قابل للاشتقاق وكانت

$(s) = 2s + 6$ ، $(s) = 2$ ؛ جد ؟؟؟

(أ) (s)

الحل:

$$(s) = (s) = \frac{d}{ds} (2s + 6) = 2$$

$(s) = 2s + 6$ ، حيث C : ثابت التكامل

بما ان: $(s) = 2$ اذا $(s) = 2 + 6 + 0 = 8$

اذا $(s) = 2$ (تعويض بـ (s)) وعليه تصبح

$$2 = 2 + 6 + 0$$

القاعدة الخامسة

$$\left[\text{جاس } s = -\text{جتاس} + \text{ج} \right] \text{ : ثابت التكامل}$$

$$\left[\text{جتاس } s = \text{جاس} + \text{ج} \right] \text{ : ثابت التكامل}$$

$$\left[\text{قاس}^2 s = \text{ظاس} + \text{ج} \right] \text{ : ثابت التكامل}$$

خاصية: $\left[\text{و} (s) s = \text{و} (s) s \right]$ ؛
حيث و: عدد ثابت

خاصية: $\left[\text{و} (s) + \text{ه} (s) s \right]$
 $\left[\text{و} (s) s + \text{ه} (s) s \right] =$

مثال (٦): جد ناتج كل من التكاملات الاتية ؟؟؟
(أ) $\left[\text{ه}^s s \right]$

الحل:

$$\text{ه}^s + \text{ج} =$$

(ب) $\left[-\text{جاس } s \right]$

الحل:

$$- = \left[\text{جاس } s = \text{جتاس} + \text{ج} \right]$$

(- جاس يعني - 1 × جاس)

(ج) $\left[\frac{1}{2} \text{ه}^s s \right]$

الحل:

$$= \left[\frac{1}{2} \text{ه}^s s = \text{ه}^s + \text{ج} \right]$$

(ب) و (١)

الحل:

$$\text{و} (١) = (١)^2 + (١) ٦ + ٢ = ٩$$

(تعويض مباشر في و (س))

واجب (٤): جد كل من التكاملات الاتية ؟؟؟

(أ) $\left[\text{س}^{-٢} s \right]$ ، س ≠ ٠

حل:

(ب) $\left[\sqrt{s} s \right]$ ، س < ٠
 $\left(\sqrt{s} s = s^{\frac{1}{2}} s \right)$

حل:

(ج) $\left[\sqrt[3]{s} s \right]$

حل:

(لوا = ٠ ، ه = ١)

القاعدة الثالثة: $\left[\frac{1}{s} s = \text{لوا} + \text{ج} \right]$ ؛

ج: ثابت التكامل ، س ≠ ٠

القاعدة الرابعة: $\left[\text{ه}^s s = \text{ه}^s + \text{ج} \right]$ ؛

ج: ثابت التكامل

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٦٤٣٤٠٢٣٦٠٧٩٦٠

مثال (٧): جد ناتج التكاملات الآتية ؟؟؟

(أ) $\int (\pi^2 s + s^6) ds$

الحل:

$$\int (\pi^2 s + s^6) ds =$$

$$= \int \pi^2 s + s^6 ds = \frac{\pi^2 s^2}{2} + \frac{s^7}{7} + C$$

(ب) $\int (جاس - جئاس) ds$

الحل:

$$= \int (جاس - جئاس) ds =$$

(ج) $\int (س^3 - \frac{5}{س}) ds, س \neq 0$

الحل:

$$= \int (س^3 - \frac{5}{س}) ds = \frac{س^4}{4} - 5 \ln |س| + C$$

(د) $\int (\sqrt[3]{س} + \frac{6}{\sqrt{س}}) ds, س > 0$

$$\left(\frac{س \times 1}{ج \times ب} = \frac{1}{\frac{ج}{ب}} \right)$$

الحل:

(هـ) $\int \frac{س^7 + س^0}{س} ds, س \neq 0$

$$\left(\frac{ب}{ج} \pm \frac{1}{ج} = \frac{ب \pm 1}{ج} \right)$$

الحل:

(د) $\int \pi^2 جئاس ds$

الحل:

$$= \int \pi^2 جئاس ds = \frac{\pi^2 ج^2 س}{2} + C$$

واجب (٥): جد ناتج كل من التكاملات الآتية ؟؟؟

(أ) $\int \frac{6}{جئاس^2} ds$ (قاس) $= \frac{1}{جئاس}$

حلك:

(ب) $\int \frac{1}{هس} ds, س \neq 0$

حلك:

(ج) $\int \frac{2-}{س^0} ds, س \neq 0$

حلك:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٠٢٣٤٤٦٠٧٩٦٠

واجب (٦): جد ناتج كل من التكمالات الآتية ???

(أ) $\left[\frac{s^3 - s^2}{s} \right]$ ، $s \neq 0$

حلك:

(ز) $\left[\frac{6}{(قاس)} \right]$ s

حلك:

(ح) $\left[s(s^2 + s^3 + 1) \right]$ s

حلك:

(ب) $\left[(s+4)(s^2-2) \right]$ s (فك الاقواس بضربها اولاً)

حلك:

(ج) $\left[2جتاس + 4قاس^2 \right]$ s

حلك:

(د) $\left[4جاس - \frac{5}{جتاس^2} \right]$ s

حلك:

(هـ) $\left[جتاس طاس s \left(\frac{جاس}{جتاس} = طاس \right) \right]$

حلك:

(و) $\left[(s+1)^2 \right]$ s

حلك:

إذا كان: ت: التسارع ؛ ع: السرعة ؛ ف: المسافة

ن: الزمن ؛ ج: ثابت التكامل

$\left[\begin{array}{l} \text{ت} (ن) = ن s (ع) + ج \\ \text{ع} (ن) = ن s (ف) + ج \end{array} \right]$

$\left[\begin{array}{l} \text{ع} (ن) = ن s (ف) + ج \\ \text{ف} (ن) = ن s (ع) + ج \end{array} \right]$

مثال (٨): يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث ان سرعته

بعد (ن) ثانية تساوي $ع(ن) = ٦ن + ٢$ م/ث

؛ جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور

(٢) ث من بدأ الحركة علماً ان الموقع الابتدائي

للجسيم ف (٠) = ٢ م ???

الحل:

المطلوب هو حساب المسافة والمعلوم هو السرعة اذا:

$\left[\begin{array}{l} \text{ع} (ن) = ن s (ف) + ج \\ \text{ع} (٢) = ٢ s (٢) + ج \\ \text{ع} (٠) = ٠ s (٠) + ج \end{array} \right]$

(نجد قيمة (ج) باستعمال الموقع الابتدائي)

$٢ = ٢ s (٢) + ج \iff ٢ = ج + (٠)٢ + (٠)٣ = ف(٠)$

إذا $ف(ن) = ٦ن + ٢$

المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (٢) ثانية

من بدأ الحركة تعني ان (ن = ٢) اذا:

$ف(٢) = (٢)٣ + (٢)٢ + ٢ = ٢٨$

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابو موسى ٤٤٦ ٢٣٤ ٠٢٣٦٠٧٩٦

مثال (٩): اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $v = f(s)$ عند النقطة (s, v) يساوي $(2s + 4)$ ؛ فجد قاعدة الاقتران علما ان منحنى الاقتران $v = f(s)$ يمر بالنقطة $(1, 0)$ ؟؟؟

الحل:

قاعدة الاقتران $v = f(s)$ = ميل المماس

$$v = f(s) = 2s + 4$$

$$s = 1, v = 0$$

بما انه يمر بالنقطة $(1, 0)$ اذا :

$$0 = 2(1) + 4 + c \Rightarrow c = -6$$

$$v = 2s + 4 - 6 = 2s - 2$$

واجب (٩): اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران

$v = f(s)$ عند النقطة (s, v) يساوي

$$(3s^2 + 2s + 2) ; \text{ فجد قاعدة الاقتران علما ان}$$

منحنى الاقتران $v = f(s)$ يمر بالنقطة $(1, 6)$ ؟؟؟

حل:

واجب (٧): تتحرك نقطة في خط مستقيم بتسارع المعطى بالقاعدة الاتية : $v = 2 + t^2$ م/ث^٢؛ جد:

السرعة بعد الزمن مقداره $v = 2$ ثانية علما بان سرعه الابتدائية $v = 1$ م/ث؛ ثم جد سرعته بعد مرور ثانيتين؟؟؟

حل:

واجب (٨): يتحرك جسيم بتسارع ثابت (a) مقداره

$v = 8$ م/ث^٢ جد المسافة بعد مرور

$v = 2$ ثانية من الحركة علما ان سرعته

الابتدائية $v = 2$ م/ث وموقعه الابتدائي

$$f(2) = 0$$

حل:

ميل المماس للاقتران $v = f(s)$ يساوي $v = f(s)$

ميل المماس = قاعدة الاقتران



(شئوية ٢٠١٧؛ السؤال الاول (١))

$$\left[\frac{s^2 - s^{-1} + 1}{s} \right]_{s=???$$

الحل:

(شئوية ٢٠١٧ السؤال الثالث (أ))

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان سرعته بعد
(٧) ثانية تعطى بالعلاقة $v = (٧)٦ + (١ + ٧)^2$ م/ث؛
جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء
الحركة علما بان موقعه الابتدائي $f(٩) = (٠)٣$ ؟؟؟

الحل:

(شئوية ٢٠١٥، السؤال الاول (١))

$$\left[(٢١ - ٢١) + \frac{1}{s} \right]_{s=???$$

الحل:

واجب (١٠): اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران (٧)
عند اي نقطة (س،ص) يساوي
 $(٦ + س)(٤ + س)$ ؛ فجد قاعدة الاقتران
(٧) علما بان $(١)٨ =$ ؟؟؟

حل:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٤٣٠٢٣٠٧٩٦٠

(شتوية ٢٠١٦، السؤال الثالث (ب))

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان سرعته بعد
(٧) ثانية تعطى بالعلاقة $v = (٧)٦ = (٧)٦ + (١ + ٧)٢$ م/ث،
؛ فجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ثانيتين من بدء
الحركة، علما بان موقعه الابتدائي $f(٠) = (٨)٣$ ؟؟؟

الحل:

(شتوية ٢٠١٥، السؤال الثالث (ب))

اذا كان تسارع جسيم بعد مرور (٧) من الثواني يعطى
بالعلاقة $v = (٧)٦ = ٧٢$ م/ث^٢؛ فجد المسافة التي
يقطعها الجسيم بعد مرور (٧) ثانية من بدء الحركة علما
بان السرعة الابتدائية للجسيم $v(٠) = ٢$ م/ث وموقعه
الابتدائي $f(٠) = (١٢)٣$ ؟؟؟

الحل:

(صيفية ٢٠١٦، السؤال الاول (أ))

$$\left[\frac{1}{3s} + h^{-s} + \text{جتاس ظاس} \right] s \text{ ؟؟؟}$$

الحل:

(شتوية ٢٠١٦، السؤال الاول (أ))

$$\left[\frac{1}{4} s^2 + \frac{5}{s} - h^s \right] s \text{ ؟؟؟}$$

الحل:

(صيفية ٢٠١٦، السؤال الاول (ج))

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $v(s)$ عند
النقطة (s, v) يساوي $\left(\frac{s^3 - s^3}{s^3} \right)$ ؛ فجد قاعدة
الاقتران $v(s)$ علما بان منحنى الاقتران $v(s)$ يمر
بالنقطة $(-٦, ١)$ ؟؟؟

الحل:

(شتوية ٢٠١٦، السؤال الثالث (ج))

اذا كان $v = (s)٣ + s٢ = s٣ + s٢ + ١$
، وكان $v(١) = ٦$ ؛ فجد قيمة $v(٢)$ ؟؟؟

الحل:

الدرس الثاني : التكامل المحدود

$$\int_a^b v(t) dt = s - s_0 = v(t) - v(t_0) ; \text{ حيث ان:}$$

١: الحد السفلي للتكامل ، ب: الحد العلوي للتكامل

$$\text{ويرمز لـ } \int_a^b v(t) dt \text{ بـ } [v(t)]_a^b$$

❖ ملاحظة: لا نستخدم ثابت التكامل (ج) في التكامل المحدود

$$\text{القاعدة الاولى } \int_a^b c dt = c(s - t) ; \text{ حيث ج: ثابت}$$

$$\text{القاعدة الثانية } \int_a^b \frac{1+t}{1+t} dt = s - t$$

$$t \neq -1, t \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1+t}{1+t} = 1$$

مثال (١٠): جد ناتج كل من التكاملات الاتية:

$$\int_1^2 ds$$

الحل:

$$\int_1^2 ds = [s]_1^2 = 2 - 1 = 1$$

$$\int_1^2 \sqrt{5} ds$$

الحل:

(صيفي ٢٠١٦، السؤال الثالث (ب))

يتحرك جسيم على خط مستقيم حيث ان تسارعه (ت) بعد مرور (٧) ثانية يعطى بالقاعدة $t = 2 \text{ م/ث}^2$ ؛ فجد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور (٧) ثانية من بدء الحركة علما ان السرعة الابتدائية للجسيم $v(0) = 4 \text{ م/ث}$ ، وموقعه الابتدائي $s(0) = 6 \text{ م}???$

الحل:

(صيفي ٢٠١٦، السؤال الرابع (أ))

$$\int_1^2 \frac{1+s}{\sqrt{s}} ds ???$$

الحل:

(صيفي ٢٠١٥، السؤال الخامس (ب))

يتحرك جسيم على خط مستقيم بتسارع ثابت يعطى بالعلاقة $t = 6 \text{ سم/ث}^2$ ، $0 \leq t$ ؛ جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة، علما بان السرعة الابتدائية للجسيم $v(0) = 4 \text{ سم/ث}$ ، وموقعه الابتدائي $s(0) = 10 \text{ سم}???$

الحل:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٦٤٣٤٠٢٣٤٠٧٩٦٠

مثال (١١): إذا كان $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = 30$ جد قيمة (ن) ???

الحل:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = 30 = (1-3)n \quad (\text{تعويض})$$

$$\frac{30}{2} = \frac{2n}{2} \quad (\text{قسمة الطرفين على العدد (2)})$$

$$\text{ومنه } n = 15$$

واجب (١٢): إذا كان :

(أ) $\lim_{n \rightarrow \infty} 6n^2 = 14$ جد قيمة (ج) ???

الحل:

(ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = 6$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} n = 3$ ؛ فجد $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (n)$???

الحل:

(ج) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3$

الحل:

واجب (١١): جد ناتج كل من التكمالات الاتية ???

(أ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}$

الحل:

(ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}$

الحل:

(ج) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$

الحل:

الدرس الثالث : خصائص التكامل المحدود

الخواص الخطية

اولا $\int c \cdot f(x) dx = c \int f(x) dx$

ثانيا $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

مثال (١٢): جد ناتج كل من التكاملات الاتية ؟؟؟

أ) $\int_0^2 (x^3 - \frac{8}{x}) dx$

الحل:

$$\int_0^2 (x^3 - \frac{8}{x}) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 8 \ln|x| \right]_0^2 = \left(\frac{16}{4} - 8 \ln 2 \right) - \left(0 - 8 \ln 0 \right)$$

$$= \frac{16}{4} - 8 \ln 2 = 4 - 8 \ln 2$$

ب) $\int_1^3 \frac{x^2 - 3}{x} dx$

الحل:

ج) $\int_0^2 (x^2 + 2x + 3) dx = ?$

الحل:

د) $\int_0^1 (x^3 + 3x^2 + 3x + 3) dx$ هي مشتقة الاقتران ل (س) المعرف على الفترة [١,٠] ؛ جد قيمة $\int_0^1 (x - 1) dx$ ؟؟؟

الحل:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٦٤٣٤٠٢٣٠٧٩٦٠

$$(ج) \int_0^2 (s^2 + 5s - 7) ds$$

حلك:

$$(ج) \int_0^2 \pi^2 s^3 ds$$

الحل:

واجب (١٣): جد ناتج كل من التكاملات الاتية ???

$$(أ) \int_0^3 \frac{s^4 - 5s}{5s} ds$$

حلك:

$$\int_0^b f(s) ds = - \int_0^b f(s) ds \quad \text{ثالثا}$$

مثال (١٣): اذا كان $\int_0^6 f(s) ds = 36$ ؛ فجد

$$\int_0^4 f(s) ds \quad ???$$

الحل:

$$(ب) \int_0^2 (\sqrt{s} + 4e^s - \frac{3}{s}) ds$$

حلك:

رابعا: اذا كان (أ)، (ب)، (ج) اعداد حقيقية فان:

$$\int_0^b f(s) ds + \int_0^b f(s) ds = \int_0^b f(s) ds$$

$$\lim_{s \rightarrow 3} (s^2 - 4s) = 3$$

الحل:

واجب (١٤): اذا كان

$$\left. \begin{array}{l} 2 \geq s \geq 1, \quad s + 4 \\ s^2 + 2 > 2, \quad s \geq 3 \end{array} \right\} = (s)$$

$$\lim_{s \rightarrow 3} (s^2 - 4s) = ???$$

الحل:

خامسا: $\lim_{s \rightarrow 0} (s) = 0$ ؛ حيث: عددا حقيقيا

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s} + 4s^2 \right) = ???$$

الحل:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s} + 4s^2 \right) = 0$$

$$\text{مثال (١٤): اذا كان } \lim_{s \rightarrow 4} (s) = 4$$

$$\lim_{s \rightarrow 2} (s) = 6, \quad \text{جد } ???$$

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s) = 1$$

الحل:

$$\lim_{s \rightarrow 2} (s) + \lim_{s \rightarrow 2} (s) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 2} (s) - \lim_{s \rightarrow 2} (s) = 4 - 4 = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 2} (2s) = 6 = \lim_{s \rightarrow 2} (s)$$

$$\text{اذا } \lim_{s \rightarrow 3} (s) = 3 \text{ (بقسمة الطرفين على العدد ٢)}$$

$$\text{اذا: } \lim_{s \rightarrow 1} (s) = 3 + 4 - 4 = 3$$

$$\lim_{s \rightarrow 2} (s) = 2$$

الحل:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٤٣٤٠٢٣٦٠٧٩٦٠

$$(٢) \int_1^2 (٢س - ٦) دس = ٠ ؛ فجد قيمة (٢) ؟؟؟$$

حلك:

$$(٣) \int_1^4 ٢(٦ + (س)٧) دس = ١٠ ؛ جد ؟؟؟$$

$$(أ) \int_1^4 (س) دس$$

حلك:

$$(ب) \int_1^4 (س) دس$$

حلك:

واجب (١٥): اذا كان $\int_1^4 (س) دس = ٢$ ،

$$\int_1^4 \frac{ع(س)}{٤} دس = ٢$$

$$(أ) \int_1^4 (س) دس + ٥(س) دس$$

حلك:

$$(ب) \int_1^4 س + (س)٧ - ٣(س) دس$$

حلك:

واجب (١٦):

$$(١) \int_2^3 س^٢ دس = ٧ ؛ فجد قيمة (ب) ؟؟؟$$

حلك:



(شتوية ٢٠١٧، السؤال الاول (ب))

$$\text{اذا كان } \lim_{s \rightarrow 1^-} (s) = 2, \lim_{s \rightarrow 1^-} ((s) - 1) = 7$$

$$\text{، فجد } \lim_{s \rightarrow 1^-} ((s) - 6s^2) = ???$$

الحل:

(شتوية ٢٠١٥، السؤال الاول (ب))

$$\left. \begin{array}{l} s^2 + 1, \quad 1 - s \geq 3 > \\ 4s - 2, \quad 3 \geq s \geq 4 \end{array} \right\} = (s) \text{ اذا كان}$$

$$\text{؛ فجد } \lim_{s \rightarrow 1^-} ((s) - 4s^2) = ???$$

الحل:

(شتوية ٢٠١٧، السؤال الثاني (ج))

$$\text{اذا كان } (s) \text{ اقترانا متصلا وكان } (1) = 3, \lim_{s \rightarrow 1^-} ((s) - 2s) = 8 = (ج)$$

$$\text{فجد قيمة (قيم) الثابت (ج) } ???$$

الحل:

(شتوية ٢٠١٥، السؤال الثاني (ج))

$$\text{اذا كان } (s) \text{ متصلا وكان } (1) = 4, \lim_{s \rightarrow 1^-} ((s) - 6s) = 12 = (2)$$

$$\text{فجد قيمة (2) } ???$$

الحل:

(صيفي ٢٠١٥، السؤال الرابع (ب))

$$\text{اذا كان } \left[\begin{array}{l} 4 \\ 3 \end{array} \right] \text{ و } \left[\begin{array}{l} 8 \\ 6 \end{array} \right] \text{ و } \left[\begin{array}{l} 9 \\ 5 \end{array} \right] \text{ (س) } \text{ و } \left[\begin{array}{l} 8 \\ 6 \end{array} \right] \text{ و } \left[\begin{array}{l} 9 \\ 5 \end{array} \right] \text{ (س) } = 9 -$$

$$\text{؛ فجد } \left[\begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right] \text{ و } \left[\begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right] \text{ (س) } - \left[\begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right] \text{ (س) } = \text{؟؟؟}$$

الحل:

(شتوية ٢٠١٦، السؤال الاول (ب))

$$\text{اذا كان } \left[\begin{array}{l} 6 \\ 4 \end{array} \right] \text{ و } \left[\begin{array}{l} 6 \\ 4 \end{array} \right] \text{ (س) } = 6 -$$

$$\text{؛ فجد } \left[\begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right] \text{ و } \left[\begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right] \text{ (س) } + \left[\begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right] \text{ (س) } = \text{؟؟؟}$$

الحل:

(صيفية ٢٠١٦، السؤال الاول (ب))

$$\text{اذا كان } \left[\begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right] \text{ و } \left[\begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right] \text{ (س) } = 7 -$$

$$\text{؛ فجد } \left[\begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right] \text{ و } \left[\begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right] \text{ (س) } - \left[\begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right] \text{ (س) } = \text{؟؟؟}$$

الحل:

الدرس الرابع : التكامل بالتعويض

القاعدة

$$\int u^{\alpha} \cdot (a + bu) \, du$$

$$= \int u^{\alpha} \, du$$

؛ حيث $v = u$ ، $dv = du$ ، $u^{\alpha} = v^{\alpha}$

يستخدم التكامل بالتعويض عندما لا نستطيع استخدام قواعد التكامل مباشرة على الاقتران لإيجاد تكامله ويكون في الحالات الآتية:

أولاً: إيجاد تكامل حاصل ضرب اقترانين احدهما مشتقة للآخر:

مثال (١٦): جد ناتج كل من التكاملات الآتية:

$$(أ) \int (5 + 6x)(5 - 5x + 3x^2) \, dx$$

الحل:

$$(5 + 6x) \text{ مشتقة لـ } (5 - 5x + 3x^2)$$

نفرض ان:

$$5 - 5x + 3x^2 = v$$

$$\text{نشتق الطرفين} \quad dv = -5 + 6x \, dx$$

الان نستبدل في الاقتران :

$$\int (5 + 6x) \, dv = \int v \, dv$$

$$= \frac{1}{2} v^2 + C = \frac{1}{2} (5 - 5x + 3x^2)^2 + C$$

$$\int v \, dv = \frac{1}{2} v^2 + C$$

$$(ب) \int (s^2 + 2s) (s^3 + 3s^2 - 10) \, ds$$

(اخراج عامل مشترك)

الحل:

$$(ج) \int (s^3 - 5s) \, ds$$

(في التكامل المحدود لا تنسى تغيير حدود التكامل حسب الفرض)

الحل:

نفرض ان :

$$v = s^3 - 5s \quad \text{(نشتق الطرفين)}$$

$$3s^2 - 5 = dv$$

الان نجد حدود التكامل بعد الفرض:

$$\text{الحد السفلي} (s=0) \Rightarrow v = 0 - 0 = 0$$

$$\text{الحد العلوي} (s=2) \Rightarrow v = 8 - 10 = -2$$

وعليه :

$$\int_0^{-2} \frac{1}{3s^2 - 5} \, ds = \int_0^{-2} \frac{1}{v} \, dv$$

$$= \left[\frac{1}{-2} \ln |v| \right]_0^{-2} = \left[-\frac{1}{2} \ln |v| \right]_0^{-2}$$

$$= -\frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 0) = -\frac{1}{2} \ln 2$$

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٠٧٩٦٠٢٣٤٤٦

واجب (١٧): جد ناتج كل من التكاملات الآتية ???

$$(أ) \int \frac{s^2}{s^2 + 4} ds$$

حلك:

$$(ب) \int \frac{s + 6}{(s^2 + 5s + 6)^3} ds$$

حلك:

$$(ج) \int \sqrt[4]{(s+9)(s+4)} ds$$

حلك:

$$(د) \int \sqrt[3]{(1-2s)^2} \sqrt[4]{s} ds$$

حلك:

ثانياً - ايجاد تكامل اقتران مثلثي:

مثال (١٧): جد ناتج التكاملات الآتية ???

$$(أ) \int \frac{ds}{(s^2 + 1)(s + 2)}$$

الحل:

نفرض ان :

$$s^2 + 1 = v$$

$$(نشتق الطرفين) ds = \frac{1}{2} dv$$

نستبدل :

$$s^2 + 1 = v \Rightarrow ds = \frac{1}{2} dv$$

$$\int \frac{ds}{(s^2 + 1)(s + 2)} = \int \frac{\frac{1}{2} dv}{(v)(\frac{1}{2} dv + 2)}$$

$$\int \frac{1}{(v)(\frac{1}{2} dv + 2)} = \int \frac{2}{v(2 + \frac{1}{2} dv)}$$

$$= \int \frac{2}{v(4 + dv)} = \int \frac{2}{v(4 + dv)}$$

$$(ب) \int \frac{ds}{\left(\frac{s}{8}\right)^2}$$

الحل:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٣٤٠٢٣٤٠٧٩٦٠

واجب (١٨): جد ناتج كل من التكاملات الآتية ???

(أ) $\int_{\sqrt{s}}^{s+1} ds$

حلك:

(هـ) $\int_{\sqrt{s}}^{s^2} ds$

حلك:

(و) $\int_{\sqrt{s}}^{s^2} (s-3) ds$

حلك:

(ب) $\int_{\sqrt{s}}^{s^2+s^3} ds$ (لا تنسى تغيير حدود التكامل)

حلك:

مثال (١٨): إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران (٧)

عند النقطة (س، ص) يساوي (٤س + ٢) ^٣؛
اكتب قاعد الاقتران (٧) علما بأنه يمر
بالنقطة (٣، ٠) ???

الحل:

قاعدة الاقتران = (٧) = $\int_{\sqrt{s}}^{s^2} (4s+2) ds$

(ميل المماس يعني المشتقة)

نفرض ان:

$s^2 = 4s + 2$ (نشتق الطرفين)

$s^2 = 4s + 2 \Rightarrow s = \frac{1}{4} s$ و عليه:

$\frac{1}{4} s^2 = \frac{1}{4} (4s + 2) \Rightarrow s^2 = 4s + 2$

وبما انه يمر بالنقطة (٣، ٠) اذا:

$0 = s^2 = 4(3) + 2 \Rightarrow s = 3$

قاعدة الاقتران = $\int_{\sqrt{s}}^{s^2} (4s+2) ds$

(ج) $\int_{\sqrt{s}}^{\frac{1}{s^3}} ds$

حلك:

(د) $\int_{\sqrt{s}}^{s^2+s^3} ds$

حلك:



واجب (١٩):

أ) اذا علمت ان $v = (1) \text{ م}^2$ ، $v = (5) \text{ م}^2$ ؛ فجد قيمة

$$\left[\frac{v^2 + 3v}{v^3 + 3v^2 + 1} \right] \text{ م}^2 \text{ ؟؟؟}$$

حلك:

(شئوية ٢٠١٧، السؤال الاول، ٢ (ب))

$$\left[\frac{8s + 4}{(s^2 + s - 1)^3} \right] \text{ م}^2 \text{ ؟؟؟}$$

الحل:

(شئوية ٢٠١٥، السؤال الاول (٢))

$$\left[\frac{2s^2 (s^3 - 1)^2}{s^2} \right] \text{ م}^2 \text{ ؟؟؟}$$

الحل:

ب) اذا كان تسارع جسيم (ت) بعد (ن) من الثواني

$$\text{يعطى بالقاعدة : } t = (n) = 2(s^2 + 3) \text{ م}^2$$

جد سرعته ؟؟؟

حلك:

(شئوية ٢٠١٦، السؤال الاول (٢))

$$\left[\frac{6s - 8}{\sqrt[3]{9s^2 - 8s + 9}} \right] \text{ م}^2 \text{ ؟؟؟}$$

الحل:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٠٢٣٤٤٦٠٧٩٦٠

(شتوية ٢٠١٥، السؤال الاول (ج))

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران h (س) عند النقطة (س، ص) يساوي (h^{-3}) وكان المنحنى يمر بالنقطة $(3, 1)$ ؛ فجد قاعدة الاقتران ???

الحل:

(صيفي ٢٠١٦، السؤال الرابع (أ))

اذا كان $h(8) = 14$ ، $h(1) = -5$ ؛ فجد قيمة $\int_{-1}^2 (3s^2 - (s^3)) ds$???

الحل:

(شتوية ٢٠١٦، السؤال الاول (ج))

اذا كان $h(س) = \frac{1}{س+ه} + 8ه^2$ ، $ه^2 - ه \neq ٢$ ؛ فجد قاعدة الاقتران $h(ه)$ علما بان منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(٥, ٠)$???

الحل:

(شتوية ٢٠١٧، السؤال الاول (ج))

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $h(ه)$ عند نقطة (س، ص) يساوي $(4س^3 + \frac{1}{س+ه})$ ؛ فجد قاعدة الاقتران $h(ه)$ علما بان منحنى الاقتران h يمر بالنقطة $(٣, ٠)$???

الحل:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٦٤٣٤٠٢٣٠٧٩٦٠

(صيفية ٢٠١٦، السؤال الثاني (ب))

إذا كان h و s اقترانا وكان $h(2) = 9$ ، $h(1) = 5$ ،

$$h^2 + h^{s-1} = h(s) \quad ; \quad \text{ثابت } h \quad ; \quad \text{جد}$$

قيمة h بقيمة h ؟؟؟

الحل:

(صيفية ٢٠١٦، السؤال الاول (أ) ٢)

$$h^2 = \frac{s^2 + 4}{(s^2 + 3s + 4)}$$

الحل:

(صيفي ٢٠١٥، السؤال الرابع (ج))

إذا كان h و s اقترانا قابلا للاشتقاق وكانت

$$h(s) = \frac{3}{1+s} \quad ; \quad \text{حيث } s \neq -1 \quad , \quad \text{وكان منحنى}$$

الاقتران h يمر بالنقطة $(2,0)$ ؛ فجد قاعدة

الاقتران h ؟؟؟

الحل:

(صيفي ٢٠١٥، السؤال الاول (ج))

إذا كان h و s $h(s) = s - 1 = h^{s-1} + h$ ، وكان

$h(2) = 2$ ، $h(1) = 0$ ، فجد قيمة h (قيم) الثابت h ؟؟؟

الحل:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٠٢٣٤٤٦٠٧٩٦٠

الدرس الخامس : تطبيقات التكامل المحدود

من التطبيقات على التكامل المحدود ايجاد المساحات بالحالات الآتية:

اولا - المساحة المحصورة بين محور السينات والاقتران (١) والمستقيمين (س = ١، س = ٢) (ب)

مثال (١٩):

(أ) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران (١) و (س) = س + ٤ ومحور السينات والمستقيمين (س = ٠، س = ٢) ؟؟؟

الحل:

اولا: يجب ان نفحص اذا كانت المنطقة المحصورة المراد ايجاد مساحتها تقع اسفل او فوق محور السينات وذلك: نضع (س) = ٠

(ايجاد اصفار الاقتران)

س + ٤ = ٠ ⇐ س = -٤ بما ان س = -٤ لا تنتمي الى الفترة [٢، ٠] نأخذ اي نقطة ضمن الفترة مثل الواحد ونعوضه في الاقتران (١) و (١) = ١ + ٤ = ٥ (موجب) اذا :

تقع المنطقة المحصورة المراد حساب مساحتها فوق محور السينات.

ثانيا: تكون مساحة المنطقة المحصورة

$$= \int_0^2 (س) ds = \int_0^2 (س + ٤) ds$$

(حدود التكامل هي حدود الفترة المعطى)

$$= \left[\frac{١}{٢} س^٢ + ٤س \right]_0^2 = (٠) - (٨ + ٢) = ١٠$$

وحدات مربعة.

(ب) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران (١) و (س) = ٨ ومحور السينات والمستقيمين (س = ١، س = ٢) ؟؟؟

الحل:

(ج) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران (١) و (س) = ٢ - س ومحور السينات والمستقيمين (س = ٠، س = ٢) ؟؟؟

الحل:

من المستقيمين نحدد الفترة وحدود التكامل بـ [٢، ٠]

$$= \int_0^2 (س) ds = \int_0^2 (٢ - س) ds$$

لذلك نأخذ نقطة ضمن الفترة مثل (١)

$$= (١) = ٢ - (١) = ١ = ١ - ٠ = ١$$

تقع المنطقة المحصورة المراد حساب مساحتها اسفل محور السينات وعليه تكون المساحة تساوي

$$= \left| \int_0^2 (س) ds \right| = \left| \int_0^2 (٢ - س) ds \right|$$

$$= \left| \int_0^2 [٢ - س] ds \right| = \left| (٠ - ٨ -) \right|$$

$$= |٨ -| = ٨ \text{ وحدات مربعة}$$

❑ لا يوجد ثابت التكامل (ج) في حساب المساحة لأنه تكامل محدود

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٥٦٤٤٦٠٢٣٤٠٧٩٦٠

واجب (٢٠):

أ) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران
 $١ = (س) = ٣س^٢$ ومحور السينات والمستقيمين
 $س = ١, ٣ = س$ ؟؟؟

حلك:

ب) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى
 الاقتران $١ = (س) = س^٣$

١) ومحور السينات والمستقيمين $س = ٣, س = ٢$ ؟؟؟

حلك:

٢) ومحور السينات والمستقيم $س = ١$ ؟؟؟

حلك:

د) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران
 $١ = (س) = ٢س - ٢$ ومحور السينات والمستقيمين
 $س = ١, س = ٣$ ؟؟؟

الحل:

حسب المستقيمين $س = ١, س = ٣$ تكون
 الفترة $[١, ٣]$

نجعل

$١ = (س) = ٢س - ٢ = ٠$ $\Leftarrow س = ١$
 تنتمي الى الفترة $[١, ٣]$ وعليه:
 تصبح الفترات $[١, ٣]$

الان نفحص اي من هذه الفترات يقع فوق او اسفل
 محور السينات، نأخذ من الفترة $[١, ٣]$ نقطة
 مثل $(س = ٠)$ ونعوضها في $١ = (س)$ وعليه
 $١ = (٠) = ٢(٠) - ٢ = -٢$ الاشارة سالبة اذا تقع
 هذه الفترة اسفل محور السينات الان نأخذ من الفترة
 $[٣, ١]$ نقطة مثل $(س = ٢)$ ونعوضها في
 $١ = (س)$ وعليه $١ = (٢) = ٢(٢) - ٢ = ٢$
 الاشارة موجبة اذا تقع هذه الفترة فوق محور
 السينات
 ومنه تكون مساحة المنطقة المحصورة تساوي

$$= \int_{١}^٣ (٢س - ٢) ds + \int_{١}^٣ (٢س - ٢) ds$$

$$= \int_{١}^٣ (٢س - ٢) ds + \int_{١}^٣ (٢س - ٢) ds$$

$$= \int_{١}^٣ [٢س - ٢] ds + \int_{١}^٣ [٢س - ٢] ds$$

$$= (١ - ٣) + |٣ - ١| =$$

$$= |٤ - ٤| + ٨ = ٨ \text{ وحدات مربعة}$$

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٠٧٩٦٠٢٣٤٤٦

٣) و (س) = $س^2 - ١٦$ ومحور السينات ???
 $(س - ٤)(س + ٤) = ١٦ - س^2$

حلك:

ج) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين
منحنى الاقتران :

١) و (س) = $س^2 - ٤$ ومحور السينات ???

حلك:

٤) و (س) = $س^3 + ٤س$ ومحور السينات ???
(اسحب عامل مشترك)

حلك:

٢) و (س) = $س^2 - ٦س + ٥$ ومحور السينات ???

حلك:

٥) و (س) = $٧ - ٧س^2$ ومحور السينات ???

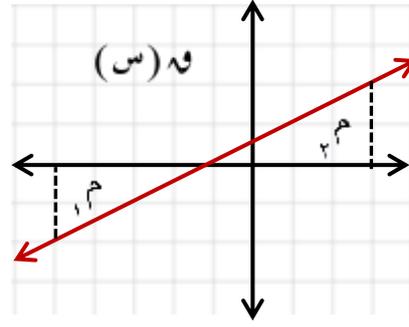
حلك:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٠٢٣٤٤٦٠٧٩٦٠

واجب (٢١):

بالاعتماد على الشكل المجاور



(ج) $\int_{0}^{2} s \, ds$

حلك:

إذا كان $\int_{2}^{3} (s) \, ds = 7$ وحدات مربعة

(٣ = ٤) وحدات مربعة ؛ جد ما يلي ؟؟؟

(أ) ٣

حلك:

(د) المساحة الكلية

حلك:

(ب) $\int_{2}^{0} (s) \, ds$

حلك:

(هـ) $\int_{0}^{2} (s) \, ds$

حلك:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٤٣٤٠٢٣٤٠٧٩٦٠

واجب (٢٢): جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيين الاقترانين

$$(أ) \quad و(س) = س^2 + ٦س، ه(س) = ٢س - ٤ \quad ؟؟؟$$

حلك:

$$(ب) \quad و(س) = س^2 + ٣، والمستقيم ص = ٤ \quad ؟؟؟$$

حلك:

ثانياً: المساحة المحصورة بين اقترانين (ه)، (و) (ه)

مثال (٢٠): جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيين الاقترانين و(س) = ٥ - ٦س، ه(س) = س^2 ؟؟؟

الحل:

يجب ان نجد حدود التكامل وذلك بـ:

$$و(س) = ه(س) \Leftrightarrow ٥ - ٦س = س^2$$

$$٠ = ٥ + ٦س - س^2$$

$$(س - ٥)(٥ - س) = ٠ \Leftrightarrow س = ٥، س = ١$$

اذا تصيح الفترة [٥،١] الان نأخذ عدد ضمن الفترة

[٥،١] مثل العدد (٢ = س) ونعوض في

$$الاقترانين و(٢) = ٦(٢) - ٥ = ٧،$$

$$ه(٢) = (٢)^2 = ٤$$

$$اذا: و(٢) < ه(٢) \Leftrightarrow و(س) < ه(س)$$

نجعل (و(س) - ه(س)) وعليه تكون مساحة

$$المنطقة المغلقة = \int_1^5 (و(س) - ه(س)) دس$$

$$\int_1^5 (٥ - ٦س - س^2) دس = \left[٥س - ٣س^2 - \frac{١}{٣}س^3 \right]_1^5$$

$$= \left(٥ \cdot ٥ - ٣ \cdot ٥^2 - \frac{١}{٣} \cdot ٥^3 \right) - \left(٥ \cdot ١ - ٣ \cdot ١^2 - \frac{١}{٣} \cdot ١^3 \right) =$$

$$= \left(٢٥ - ٧٥ - \frac{١٢٥}{٣} \right) - \left(٥ - ٣ - \frac{١}{٣} \right) =$$

$$= \frac{١}{٣} + ٢ + \frac{١٢٥}{٣} - ٥٠ =$$

$$= \frac{١٢٤}{٣} - \frac{١٥٦}{٣} = \frac{١٢٤}{٣} - ٥٢ =$$

$$= \frac{٣٢}{٣} \text{ وحدة مربعة.}$$



(شتوية ٢٠١٧، السؤال الثاني (أ))

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران

و (س) = س - س^٢ والمستقيم ص = ٢ - ؟؟؟

الحل:

(شتوية ٢٠١٥، السؤال الثاني (أ))

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى

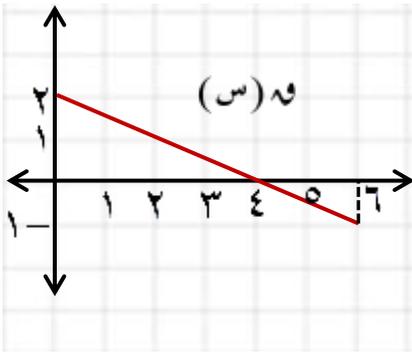
الاقترانيين و (س) = ٢ - س^٢ ، ه (س) = س ؟؟؟

الحل:

(شتوية ٢٠١٧، السؤال الثاني (ب))

اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران

و (س) المعروف على الفترة [٠، ٦] ؛ جد



و (س) = س ؟؟؟

الحل:

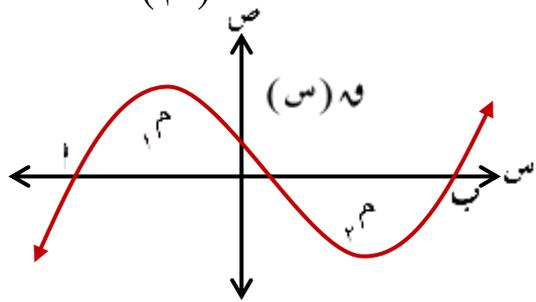
(شتوية ٢٠١٦، السؤال الثاني (ب))

يمثل الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين منحنى

الاقتران (و) ومحور السينات في الفترة [٠، ٢] فاذا

علمت ان مساحة م = ٦ وحدات مربعة

و (س) = س - ٤ ؛ فجد مساحة (م) ؟؟؟



الحل:

(صيفي ٢٠١٦، السؤال الثاني (أ))

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى

الاقترانيين و (س) = ٢س^٢ ، ل (س) = س^٢ + ٤ ؟؟؟

الحل:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٠٧٩٦٠٢٣٤٤٦

(صيفي ٢٠١٥، السؤال الاول (أ))

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران
 $h(s) = 3s^2 - 6s$ ومحور السينات في الفترة
 $[-1, 2]$ ؟؟؟

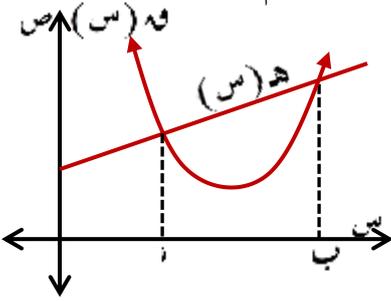
الحل:

(صيفية ٢٠١٦، السؤال الثاني (ج))

يمثل الشكل المجاور منحنىي الاقترانين $h(s)$ و $g(s)$ ، إذا علمت ان المساحة المغلقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين (٣) وحدات مربعة، وكان

$$\int_1^2 h(s) ds = 24, \text{ فجد } \int_1^2 g(s) ds \text{ ؟؟؟}$$

الحل:



(صيفي ٢٠١٥، السؤال الاول (ب))

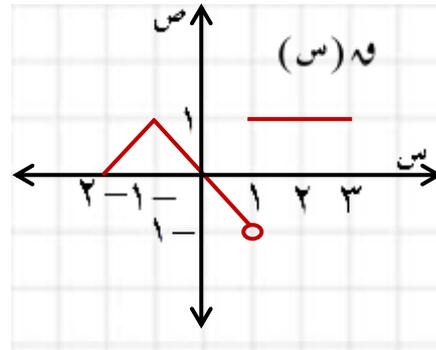
يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران $h(s)$ المعروف على الفترة $[-3, 2]$ ، اعتمد على الشكل لإيجاد قيمة $\int_{-2}^2 h(s) ds$ ؟؟؟

الحل:

(شتوية ٢٠١٦، السؤال الثاني (أ))

جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين $h(s) = 2s^2 - 2$ و $g(s) = 1 - 2s$ ،

الحل:



(ب) الايراد الكلي الناتج عن بيع (١٠) مقاعد

حلك:

الدرس السادس: تطبيقات اقتصادية، النمو والاضمحلال

اولا: تطبيقات اقتصادية

(أ) 

الايراد الكلي S (س): هو مجموع ما تحصل عليه مؤسسة ما من جراء بيع (س) وحدة من منتجاتها

الايراد الحدي S' (س): هو مشتقة الايراد الكلي S (س)

مثال (٢١): اذا كان الايراد الحدي لـ (س) من الوحدات

التي ينتجها مصنع هو

$$S' = 3s^2 + 4s + 5$$

فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع هذه الوحدات ؟؟؟

الحل:

$$S = \int (3s^2 + 4s + 5) ds$$

$$= s^3 + 2s^2 + 5s + C$$

$$= s^3 + 2s^2 + 5s + C$$

ثابت التكامل (ج) في اقتران الايراد الكلي يساوي

صفرا، لأنه عند بيع صفر وحدة يكون الايراد

$$S(0) = 0 \text{ وعليه:}$$

$$S = s^3 + 2s^2 + 5s$$

(ب) اقتران السعر والطلب (السعر - الطلب):

اذا كان E : السعر، فتكون العلاقة بين السعر والطلب

$$E = f(p) \text{ (س)}$$

(العلاقة عكسية بين السعر والطلب)

عند $s > 1$ فان التوفير بالسعر يكون

$$E - E_1 \text{ حيث } E_1 \text{ عدد وحدات الطلب ومنه:}$$

التوفير الكلي للمستهلك تسمى فائض المستهلك (ف_{هـ})

$$F_H = \int_{E_1}^E f(p) dp$$

$$F_H = \int_{E_1}^E f(p) dp$$

واجب (٢٣): اذا كان اقتران الايراد الحدي لبيع (س)

مقعد للأطفال التي ينتجها مصنع هو

$$S' = 6s^2 - 4s + 8 \text{ دينار ؛ فجد؟؟؟}$$

(أ) الايراد الكلي الناتج عن بيع هذه المقاعد

حلك:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٣٤٠٢٣٤٠٧٩٦٠

وعليه فائض المستهلك

$$F_1 = (P_1 - P_2) \times Q_1$$

$$F_1 = (20 - 50) \times 15 = -225$$

$$F_2 = (50 - 20) \times 30 = 900$$

$$F_2 - F_1 = 900 - (-225) = 1125 \text{ دينار}$$

واجب (٢٤): إذا كان $E = P_1 = P_2 = 8 - \frac{P_1}{4}$ يمثل

اقتران (السعر - الطلب)؛ حيث (ع) السعر بالدينار، (س) عدد الوحدات المنتجة، وكان السعر ثابتا عند $E = 6$ ؛ فجد قيمة فائض المستهلك؟؟؟

حلك:

ج) اقتران السعر والعرض (السعر - العرض)

إذا كان ع: السعر، فتكون العلاقة بين السعر والعرض

تعطى بالاقتران $E = H(P)$

(العلاقة طردية بين السعر والعرض)

عند $S > S_1$ فان المكسب في السعر

= المكسب الكلي للمنتج = فائض المنتج (ف_٢)

$$F_2 = (P_2 - P_1) \times Q_2$$

أي انه يكون السعر (ع) اقترانا في (س)

حيث S_1 : عدد وحدات العرض ومنه:

$$F_2 = (P_2 - P_1) \times Q_2$$

$$F_2 = (P_2 - P_1) \times Q_2$$

E_1 (سعر التوازن) = $\{P_1 = P_2\}$

S_1 (كمية التوازن بين العرض والطلب) = عدد الوحدات

مثال (٢٢): إذا كانت $E = P_1 = P_2 = 20 - 2S$

يمثل اقتران (السعر - الطلب)؛ حيث (ع)

السعر بالدينار، (س) عدد الوحدات المنتجة

، وكان السعر ثابتا عند $E = 20$ ؛ فجد

قيمة فائض المستهلك؟؟؟

الحل:

$E = 20$ (سعر التوازن = 20) نجد من خلاله

قيمة S_1 (القيمة التي يكون عندها سعر التوازن)

التي تقابل E_1 من الاقتران $E = P_1 = P_2$ أي انه:

$$E = P_1 = P_2 = 20 \Rightarrow 20 = 20 - 2S_1$$

$$\Rightarrow S_1 = 0$$

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٠٧٩٦٠٢٣٤٤٦

مثال (٢٤): إذا كان اقتران (السعر — الطلب) لمنتج

معين هو $E = H(S)$ و $H(S) = 54 - 4S$ وكان
اقتران (السعر — العرض) لهذا المنتج هو
 $E = H(S) = 9 + 10S$ ؛ فجد؟؟؟

(أ) كمية التوازن
(ب) سعر التوازن

(ج) فائض المستهلك عند سعر التوازن

(د) فائض المنتج عند سعر التوازن

الحل:

(أ) نجد كمية التوازن S من $H(S) = H(S)$
ومنه $54 - 4S = 9 + 10S$
إذا: $45 = 10S \Rightarrow S = 3$

(كمية التوازن هي الكمية التي يكون عندها سعر التوازن)

(ب) لإيجاد سعر التوازن (E) نعوض (S)

في أي من الاقترانين

$$E = 54 - 4(3) = 42 = E = 9 + 10(3)$$

(ج) $F = H(S) - S \times E = 54 - 3 \times 42$

$$= 54 - 126 = -72$$

$$= 54 - 126 = -72$$

$$= 54 - 126 = -72$$

(د) $F = S \times E - H(S) = 3 \times 42 - 54$

$$= 126 - 54 = 72$$

$$= 126 - 54 = 72$$

مثال (٢٣): إذا كان اقتران (السعر — الطلب) لمنتج

معين هو $E = H(S) = 9 + 4S$ ، حيث
(E) السعر بالدينار، (S) عدد القطع
المنتجة، وكان السعر ثابتاً عند $E = 29$
دينار؛ فجد فائض المنتج؟؟؟

الحل:

نجد (S) باستعمال (E) حسب العلاقة

المعطاة $29 = 9 + 4S \Rightarrow S = 5$ إذا:

$$F = S \times E - H(S) = 5 \times 29 - 29$$

$$= 145 - 29 = 116$$

$$= 145 - 29 = 116$$

$$= 145 - 29 = 116$$

واجب (٢٥): إذا كان اقتران (السعر — العرض) لمنتج

معين هو $E = H(S) = 10 + 6S^2$ ؛
حيث (E) السعر بالدينار، (S) عدد
القطع المنتجة، وكان السعر ثابتاً عند
 $E = 206$ دينار؛ فجد فائض المنتج؟؟؟

حل:

$$= 206 - 10 = 196$$

ثانيا: النمو والاضمحلال

إذا كان: $ص = ع(٧) = ع \times ه٧$ ، حيث
 ٧ : ثابت ، ٧ : الزمن ، $ع$: القيمة الابتدائية ،
 $ه٧$: العدد النيبيري (٧,٢)

☒ إذا كان $٧ < ٠$ ، فإن قيمة $ع(٧)$ تزداد بازدياد قيمة
 $ع(٧)$ ، وعندئذ تكون المعادلة $ص = ع(٧)$ معادلة
 نمو، ويسمى (٧) معامل النمو.

☒ إذا كان $٧ > ٠$ ، فإن قيمة $ع(٧)$ تتناقص بمرور
 الزمن ، وعندئذ تكون المعادلة $ص = ع(٧)$ معادلة
 للاضمحلال (التلاشي) ، ويسمى (٧) معامل
 الاضمحلال.

مثال(٢٥): إذا كان النمو السكاني في إحدى البلدان
 يخضع لقانون النمو، وكان عدد سكان البلدة
 عام (٢٠٠٠) قد بلغ (٤٠٠٠) نسمة،
 وإذا كان عدد السكان يزداد بشكل منتظم
 بمعدل ٥٪ سنويا ؛ جد عدد سكان البلدة عام
 (٢٠٢٠) ؟؟؟

الحل:

عدد سكان $ع(٧) = ع \times ه٧$ ، حيث:
 $ع = ٤٠٠٠$ ، $٧ = ٢٠$ ، $٧ = ٥\%$ ومنه
 $ع(١٥) = ٤٠٠٠ \times ه٢٠ = ٤٠٠٠ \times ٢٠$
 $= ١٠٨٠٠$ نسمة.

واجب(٢٦): إذا كان اقتران (السعر – الطلب)

لمنتج معين هو $ع = ٧(س) = ٣٢ - ٣س$
 وكان اقتران (السعر – العرض) لهذا المنتج
 هو $ع = ه(س) = ٣س + ١٢$ ؛ فجد ؟؟؟

(أ) كمية التوازن

حلك:

(ب) سعر التوازن

حلك:

(ج) فائض المستهلك عند سعر التوازن

حلك:

(د) فائض المنتج عند سعر التوازن

حلك:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٦٤٣٤٠٢٣٤٠٧٩٦٠

واجب (٢٨): يتناقص ثمن باخرة بمرور الزمن وبشكل منتظم ، ويخضع لقانون الاضمحلال ، فاذا كان ثمنها الاصيلي (٧٦٠٠٠٠٠) دينار، ومعدل التناقص في ثمنها يساوي (١٠٪) سنويا، جد ثمنها بعدد مرور (٢٠) سنة ؟؟؟

حلك:

واجب (٢٧): يعطي بنك ربعا مركبا مستمرا للمستثمرين لديه بحيث تحسب جملة المبلغ الناتجة عن استثمار مبلغ معين حسب قانون النمو، فاذا كانت نسبة الربح التي يقدمها البنك (٨٪) سنويا، ووضع مبلغ (١٦٠٠) دينار في البنك، جد جملة المبلغ والربح الناتج بعد مرور (٢٥) عاما ؟؟؟

حلك:

واجب (٢٩): يصب مصنع للأملاح ملحه في برك ، وتزداد كمية الاملاح حسب قانون النمو، فاذا زادت كمية الاملاح من (٢) طن الى (٦) طن خلال (٤) ساعات ؛ جد كمية الاملاح بعد مرور (٢) ساعات ؟؟؟

حلك:

مثال (٢٦): تتحلل مادة مشعة بشكل منتظم بمرور الزمن ويخضع تحللها لقانون الاضمحلال ، اذا كان معدل التناقص لهذه المادة يبلغ (٠,٠٨) سنويا ؛ فجد الكمية المتبقية من المادة بعد مرور (٢٠٠٠) سنة ، علما بان كتلة المادة الاصلية تبلغ (١٠٠) غراما ؟؟؟

الحل:

$$ع(٨) = ع \cdot ه \times ٨ ؛ ع = ١٠٠ \text{ غرام ،}$$

$$ع(٢٠٠٠) = ١٠٠ \cdot ه^{٢٠٠٠ \times ٠,٠٨}$$

$$١٠٠ \cdot ه^{١٦} = ١٠٠ \cdot \frac{١}{(٢,٧)^{١٦}}$$

$$\frac{١٠٠}{٧٩٧٦٦٤٤,٣١} =$$

$$= ٠,٠٠٠٠١٢٥٣٧ \text{ غراما.}$$

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٠٢٣٤٤٦٠٧٩٦٠

واجب (٣٢): يزيد سعر الارض بمرور الزمن ، ويخضع هذه الزيادة لقانون النمو، فاذا اشترى خالد قطعة ارض بمبلغ (٢٥٠٠٠) دينار، وبعد (٣) سنوات اصبح سعرها (٢٨٠٠٠) دينار ؛ فجد سعر الارض بعد مرور (٦) سنة ؟؟؟

حلك:

واجب (٣٠): يذوب الملح في الماء بمعدل يتناسب مع كمية الملح المتبقية، وبذلك يخضع لقانون الاضمحلال، اذا وضع (٣٠) كغ ملح في الماء فذاب نصفه بعد نصف ساعة؛ جد كمية الملح المتبقية بعد مرور $\left(\frac{٣}{٤}\right)$ الساعة ؟؟؟

حلك:

واجب (٣٣): اذا كان تكاثر البكتيريا يخضع لقانون النمو، واذا كان عدد البكتيريا يزداد بشكل منتظم يبلغ (٣٥٠) % في الساعة ؛ فجد عدد البكتيريا بعد مرور نصف ساعة ، اذا كان عددها الاصلي يبلغ (٨٠٠٠) ؟؟؟

حلك:

واجب (٣١): يتناقص ثمن عقار بمرور الزمن وبشكل منتظم ، ويخضع هذا التناقص لقانون الاضمحلال ، فاذا كان ثمن عقار (٣٦٠٠٠) دينار، وكان معدل التناقص يساوي (٤) % سنويا ؛ فجد ثمن العقار بعد مرور (١٢) سنة ؟؟؟

حلك:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٤٣٤٠٢٣٦٠٧٩٦٠

(د) فائض المنتج عند سعر التوازن

حلّك:

واجب (٣٤): إذا كان اقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين هو $ع = ٩ - (س)$ و $٨ - س^٢$ ، واقتران (السعر - العرض) لهذا المنتج هو $ع = ٩ - (س)$ و $٨ + س^٢$ ؛ فجد ؟؟؟

(أ) كمية التوازن

حلّك:

(ب) سعر التوازن

حلّك:

واجب (٣٥): إذا كان اقتران الإيراد الحدي لبيع أجهزة الحاسوب المحمولة هو

$\bar{S} (س) = ٦٠ - س^٢ - ٨س + ٢٠$ دينار ؛ فجد الإيراد الكلي الناتج عن بيع (١٠) أجهزة ؟؟؟

حلّك:

(ج) فائض المستهلك عند سعر التوازن

حلّك:



(صيفية ٢٠١٦، السؤال الثالث (أ))

إذا كان اقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين هو
 $E = (S) = 48 - 4S$ ، حيث (E) السعر بالدينار،
 (S) عدد القطع المنتجة، وكان السعر ثابتا عند
 $E = 28$ دينار، فجد فائض المستهلك عند سعر
 التوازن ???

الحل:

(شتوية ٢٠١٥، السؤال الثاني (ب))

إذا كان اقتران (السعر - العرض) لمنتج معين هو
 $E = H = (S) = 10 + 2S$ ، حيث (E) السعر
 بالدينار، (S) عدد القطع المنتجة ، وكان السعر ثابتا
 عند $E = 34$ دينار ؛ فجد فائض المنتج ???

الحل:

(شتوية ٢٠١٥، السؤال الثالث، (أ))

إذا كان اقتران الايراد الحدي لبيع (S) من القطع من
 منتج معين هو $S = (S) = 60 - 2S - 18S + 20$
 دينار؛ فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع (5) قطع ???

الحل:

(صيفي ٢٠١٥، السؤال الخامس (أ))

إذا كان اقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين هو
 $E = H = (S) = 36 - 2S$ ، وكان اقتران (السعر -
 العرض) لهذا المنتج هو $E = H = (S) = 3S + 16$ ؛
 فجد فائض المستهلك عند سعر التوازن ???

الحل:

(شتوية ٢٠١٦، السؤال الثالث (أ))

إذا كان اقتران (السعر - العرض) لمنتج معين هو
 $E = H = (S) = 15 + 5S$ ؛ حيث (E) السعر
 بالدينار، (S) عدد القطع المنتجة ، وكان سعر ثابتا عند
 $E = 45$ دينار ???

الحل:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٤٤٣٠٢٣٠٧٩٦٠

ج) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران v (س) عند النقطة (س، ص) يساوي $\left(\frac{1}{3} - 2\right)$ وكان المنحنى يمر بالنقطة $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ ؛ فجد قاعدة الاقتران v (س) ؟؟؟ (٤ علامات)

الحل:

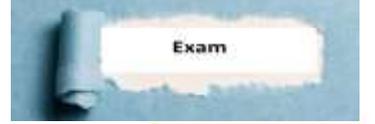
السؤال الثاني (١٤ علامة):

أ) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران v (س) $= 1 - s^2$ والمستقيم $v = 3 - s$ ؟؟؟ (٦ علامات)

الحل:

ب) اذا كان اقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين هو $E = v(s) = 6 - 2s$ ، حيث (ع) السعر بالدنانير، (س) عدد القطع المنتجة وكان السعر ثابتا عند $E = 10$ دنانير؛ فجد فائض المستهلك ؟؟؟ (٤ علامات)

الحل:



(صيفية ٢٠١٤)

السؤال الاول (١٧ علامة):

أ) جد التكاملات الاتية (٨ علامة) ؟؟؟

$$(1) \int \left(3s^2 + \frac{5}{s} - \text{جاس} \right) ds$$

الحل:

$$(2) \int \frac{1 - s}{1 + s^2 - 5s} ds$$

الحل:

ب) اذا كان $\int_0^1 v(s) ds = 6$ ، $\int_0^1 v(s) ds = 10$ ؛ فجد $\int_0^1 (v(s) + 2) ds$ ؟؟؟ (٥ علامات)

الحل:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٤٣٠٢٣٠٧٩٦٠

(شتوية ٢٠١٤)

السؤال الاول (١٧ علامة):

(أ) جد التكاملات الآتية ؟؟؟

$$(1) \int (2\sqrt{x} + 3x^2) dx$$

الحل:

$$(2) \int x^2 \ln(x-1) dx$$

الحل:

$$(ب) اذا كان \int_{-1}^6 (3x^2 - (x-2)) dx = 10 ،$$

$$\int_{-1}^2 (x-3) dx = 14 ؛ فجد \int_{-1}^2 (x-3) dx ؟؟؟$$

(٤ علامات)

الحل:

(ج) اذا كان (ج) عددا ثابتا وكان $12 = (ج) ،$

$$و (٠) = 8 ، \int_{0}^{\infty} (e^{-x} - (x-1)) dx = 0 ؛$$

(٤ علامات)

فجد قيمة $e^{-\infty} ؟؟؟$

الحل:

السؤال الثالث (١٥ علامة):

(أ) اذا كان الايراد الحدي لبيع (س) لعبة من لعب

$$\text{الاطفال هو } S(x) = 6x^2 - 4x + 2 \text{ دينار؛}$$

فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع (١٠) لعب ؟؟؟

(٤ علامات)

الحل:

(ب) يتحرك حسم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد

$$(v) \text{ ثانية تعطى بالعلاقة } v = (v) = 6(2+v) \text{ م/ث}$$

؛ جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور ثانيين

من بدء الحركة. علما ان موقعه الابتدائي

(٥ علامات)

$$f(0) = 50 ؟؟؟$$

الحل:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٦٤٣٤٦٠٢٣٤٦٠٧٩٦٠

ج) اذا كان اقتران (السعر — الطلب) لمنتج معين هو
 $E = 6 - 3S$ ، وكان اقتران
 (السعر — العرض) لهذا المنتج هو
 $E = 5S$ ؛ فجد فائض المنتج عند سعر
 التوازن ؟؟؟ (٦ علامات)

الحل:

ج) اذا كانت $Q = 6 - \frac{1}{S+H}$ ؛ فجد
 قاعدة الاقتران (H) علما بان النقطة (١٠٠) تقع
 على منحنى الاقتران (H) ؟؟؟ (٤ علامات)

الحل:

السؤال الثاني (١٧ علامة):

أ) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنيني
 الاقترانين $Q = S^2$ ، $H = 3 + 2S$ ؟؟؟

(٧ علامات)

الحل:

السؤال الثالث (١٤ علامة):

يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث تكون سرعته (ع)
 معطاة بالعلاقة $E = 4 + 6M$ ؛ فجد
 المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (٣) ثواني من
 بدء الحركة علما بان الموقع الابتدائي للجسيم
 ف (٠) = ١٠ م ؟؟؟ (٤ علامات)

الحل:

ب) اذا كان الايراد الحدي لبيع (س) من الثلاجات يعطى
 بالاقتران $R = 60 - 2S - 30S$ ؛ فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع (٤) ثلاجات ؟؟؟

(٤ علامات)

الحل:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٤٤٣٠٢٣٠٧٩٦٠

(شتوية، ٢٠١٣)

السؤال الاول (٢٠ علامة):

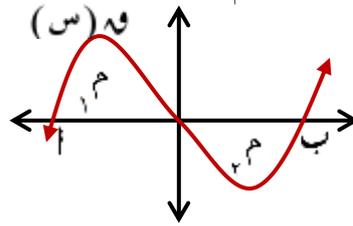
(١) اذا كان $\sin^{-1} x = 1$ ، $\cos^{-1} x = 3$ ، فان

$\int_1^3 \sin^{-1} x \cos^{-1} x dx$ ؟؟؟

الحل:

(٢) يبين الشكل المجاور المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $\sin^{-1} x$ و $\cos^{-1} x$ ومحور السينات في الفترة $[1/2, 1]$ ، اذا علمت ان $\int_1^2 \sin^{-1} x dx = 9$ وحدات مربعة ،

$\int_1^2 \cos^{-1} x dx = 4$ وحدات مربعة ؛ فان $\int_1^2 \sin^{-1} x \cos^{-1} x dx$ ؟؟؟



الحل:

(٣) $\int_1^2 \sin^{-1} x \cos^{-1} x dx$ يساوي ؟؟؟

الحل:

(٤) $\int_1^2 \sqrt{\sin^{-1} x} dx$ يساوي ؟؟؟

الحل:

السؤال الثاني (٤٤ علامة):

(أ) جد التكاملات الاتية:

(١) $\int_1^2 (x^2 + 3x - 3) dx$ (٣ علامات)

الحل:

(٢) $\int_1^2 \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 3x - 2} dx$ (٥ علامات)

الحل:

(ب) اذا كان $\int_1^2 \sin^{-1} x dx = 6$ ، $\int_1^2 \cos^{-1} x dx = 4$

؛ فجد $\int_1^2 (\sin^{-1} x + \cos^{-1} x) dx$ ؟؟؟

(٦ علامات)

الحل:

السؤال الثالث (١٦ علامة):

(أ) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنىي
الاقترانين $هـ (س) = س^2 - س$ ،
 $هـ (س) = ٢س$ ؟؟؟ (٦ علامات)

الحل:

(ب) اذا كان اقتران (السعر - العرض) لمنتج معين هو
 $ع = هـ (س) = ١٢ + ٤س$ ، حيث (ع) السعر
بالدينار، (س) عدد القطع المنتجة وكان السعر
ثابتا عند $ع = ٣٢$ ديناراً ؛ فجد فائض المنتج ؟؟؟

الحل:

(٥ علامات)

(ج) يتحرك جسيم في خط مستقيم بتسارع ثابت (ت)
مقداره $ت (٧) = ٨ م/ث^٢$ ؛ جد المسافة التي
يقطعها الجسيم بعد مرور (٧) ثانية من بدء
الحركة علما بان سرعته الابتدائية للجسيم
 $ع (٠) = ٢ م/ث$ وموضعه الابتدائي
 $ف (٠) = ١٠ م$ ؟؟؟ (٥ علامات)

الحل:

(صيفية ٢٠١٣)

السؤال الاول (٢٠ علامة):

(١) اذا كان $٣ \sqrt[٢]{س} = ٦ - س$ ؛ فان قيمة الثابت (ج)
تساوي ؟؟؟

الحل:

(٢) اذا كان $٧ (س) = (س + ٢) (٥س)$ ؛ فان
 $٧ (١ -)$ تساوي ؟؟؟

الحل:

(٣) يتحرك جسيم على خط مستقيم بتسارع ثابت
 $ت (٧) = ٦ م/ث^٢$ ، اذا كانت السرعة الابتدائية
للجسيم $ع (٠) = ٨ م/ث$ ؛ فان سرعة الجسيم بعد
(٧) ثانية تعطى بالعلاقة ؟؟؟

الحل:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٠٢٣٤٠٧٩٦٠

السؤال الثالث (١٦ علامة):

(أ) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران v (س) عند النقطة (س، ص) يساوي $(3s^2 - 1)$ ؛ فجد قاعدة الاقتران v (س) ، علما بان منحنى الاقتران v يمر بالنقطة $(2, 4)$ ؟؟؟ (٥ علامات)

الحل:

$$(٤) \left[\frac{3}{2} s \text{ يساوي } ??? \right]$$

الحل:

السؤال الثاني (١٥ علامة):

(أ) جد التكاملات الاتية (٩ علامات)

$$(١) \left[\int (h^3 - \frac{5}{s} + 2s^2) ds \text{ ؟؟؟} \right]$$

الحل:

(ب) اذا كان $E = v$ (س) $= 2 - 3s$ يمثل اقتران (السعر - الطلب) حيث (ع) السعر بالدينار، (س) عدد الوحدات المنتجة ، وكان السعر ثابتا عند $E = 30$ ؛ جد قيمة فائض المستهلك ؟؟؟

(٥ علامات)

الحل:

$$(٢) \left[\int \sqrt{2s^2 + 3} ds \text{ ؟؟؟} \right]$$

الحل:

(ج) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران v (س) $= s^2 - 4s$ و محور السينات ؟؟؟

(٦ علامات)

الحل:

$$(ب) \text{ اذا كان } \int_1^6 v(s) ds = 8, \int_1^3 v(s) ds = 10$$

$$\text{؛ فجد } \int_3^6 (v(s) + 2s) ds \text{ ؟؟؟ (٦ علامات)}$$

الحل:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٣٤٠٢٣٤٠٧٩٦٠

(صيفية ٢٠١٢)

السؤال الاول (٢٠ علامة):

(١) اذا كان $f(s) = 3s$ ، فان $f(s)$ تساوي ???

الحل:

(٢) اذا كان $f(s) = 10s$ ، فان قيمة

$f(s)$ تساوي ???

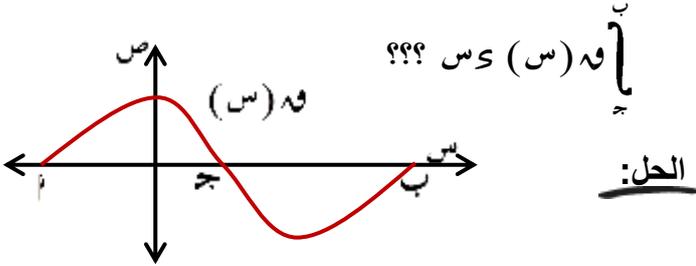
الحل:

(٣) قيمة $f(s) = s$ تساوي ???

الحل:

(٤) معتمدا الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران $f(s)$ المعروف في الفترة $[a, b]$ ، اذا علمت ان مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(s)$ ومحور السينات تساوي (٤) وحدة

مربعة وكان $f(s) = 6$ ؛ فما قيمة



الحل:

(٥) $f(s) = \frac{1}{s}$ ، $s \neq 0$ يساوي ???

الحل:

السؤال الثاني (١٤ علامة):

(أ) جد التكاملات الاتية:

(١) $\int \left(12 + s^2 - \frac{3s^2}{3} \right) ds$ (٤ علامات) ???

الحل:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٠٢٣٤٤٦٠٧٩٦٠

(ب) يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث تكون سرعته معطاة بالعلاقة $v = (8 + 6t) \text{ م/ث}$ ؛ جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (t) ثانية من بدء الحركة، علما بان موقع الابتدائي للجسيم $f(0) = 3 \text{ م}$ ؟؟؟ (٣ علامات)

الحل:

$$(٢) \int_0^t (8 + 6t) dt = 8t + 3t^2 \text{ م} \text{ ؟؟؟ (٥ علامات)}$$

الحل:

(ب) اذا كان $\int_0^t (8 + 6t) dt = 12$ ؛
فجد قيمة $\int_0^t (8 + 6t) dt = 7$ ؟؟؟ (٥ علامات)

الحل:

(ج) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $v = (3 + 6t)$ ومحور السينات في الفترة $[0, 3]$ ؟؟؟ (٤ علامات)

الحل:

السؤال الثالث (١٢ علامة):

(أ) اذا كان الايراد الحدي لبيع (x) لعبة من لعب الاطفال التي ينتجها احد المصانع هو $\bar{R}(x) = 3x^2 - 8x + 5$ دينار ؛ فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع هذه اللعبة ؟؟؟

(٥ علامات)

الحل:

(شتوية ٢٠١٢)

السؤال الاول (٢٠ علامة):

(١) $\sqrt[3]{s} \leq s$ ، $s < 0$. يساوي؟؟؟

الحل:

(٢) $(-جاس + ١) \leq s$ يساوي؟؟؟

الحل:

(٣) اذا علمت ان $f(s)$ متصل ، وكان $f(1) = 3$ ، $f(2) = 1$ ، فان

$f(s) \leq s$ يساوي؟؟؟

الحل:

(٤) اذا كان $f(s) \leq s = 10$ ،

فان $(2s + f(s)) \leq s$ ، يساوي؟؟؟

الحل:

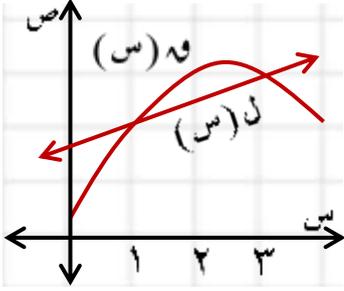
(٥) الشكل المجاور يمثل منحنىي الاقترانين $f(s)$ ،

$g(s)$ ، اذا علمت ان $f(2) = g(3) = 12$ ،

$g(1) = 4$ ، فما مساحة المنطقة المغلقة

المحصورة بين منحنىي الاقترانين في الفترة $[1, 3]$ بالوحدات المربعة؟؟؟

الحل:



السؤال الثاني (علامة):

(أ) جد التكاملات الآتية:

(١) $\int (s^{-٥} + \frac{2}{s} + s^{-٥}) ds$ ، $s \neq 0$ ،؟؟؟

(٤ علامات)

الحل:

(٢) $\int \frac{3 + s^2}{(s^3 + s^2)^2} ds$ ،؟؟؟ (٥ علامات)

الحل:

(شتوية ٢٠١١)

السؤال الاول (١٦ علامة):

$$(١) \int_1^3 x^3 dx \text{ يساوي } ???$$

الحل:

$$(٣) \int_1^3 \frac{1}{x} dx \text{ يساوي } ???$$

الحل:

$$(٤) \text{ اذا كان } \int_1^2 x^2 dx = (س) \text{ ، فان } \int_1^2 x dx = (س)$$

يساوي ???

الحل:

$$(ب) \text{ اذا كان } \int_1^3 x^2 dx = ٦ ، \int_1^3 x^3 dx = ٢ -$$

$$\int_1^3 (٥ + (س)) dx \text{ فجد } (٥ علامات) \text{ ؟؟؟}$$

الحل:

السؤال الثالث (١٢ علامة):

(أ) اذا كان تسارع جسيم (ت) بعد مرور (٧) من الثواني يعطى بالعلاقة $v = 8t^2$ م/ث^٢ ؛ جد السرعة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (٧) ثانية من بدء الحركة، علما بان السرعة الابتدائية للجسيم $v = 3$ م/ث ؟؟؟ (٥ علامات)

الحل:

(ب) اذا كان اقتران (السعر - الطلب) لمنتج معين هو $ع = ٧٠ - ٤س$ وكان اقتران (السعر - العرض) لهذا المنتج هو $ع = ١٠ + ٦س$ ؛ فجد فائض المستهلك عند سعر التوازن ؟؟؟ (٧ علامات)

الحل:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٠٢٣٤٤٦٠٧٩٦٠

السؤال الثالث (١٦ علامة):

(أ) إذا كان اقتران (السعر - العرض) لمنتج معين هو
 $E = 9 - (S)$ و $S = 11 + 2S$ حيث (ع) السعر
 بالدينار، (س) عدد القطع المنتجة، وان السعر ثابت
 عند $E = 21$ دينار؛ فجد فائض المنتج؟؟؟

(٧ علامات)

الحل:

(ب) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى
 الاقتران $E = 9 - (S)$ و $S = 1 + 2S$ ومحور السينات
 والمستقيمين $S = 0$ ، $S = 2$ ؟؟؟ (٥ علامات)

الحل:

(ج) إذا كان $E = 7 - S$ و $S = 11 + 2S$ ؛ فجد قيمة الثابت (٢)؟؟؟

(٤ علامات)

الحل:

السؤال الثاني (١٥ علامة):

(أ) جد التكاملات الآتية:

$$(1) \int (1 + \sqrt{S}) dS \quad (5 \text{ علامات})$$

الحل:

$$(2) \int \frac{1 + 2S^3}{(S^2 + S + 3)^2} dS \quad (5 \text{ علامات})$$

الحل:

(ب) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $E = 9 - (S)$ عند
 النقطة (س، ص) يساوي (هـ S^3)؛ فاكتب قاعدة
 الاقتران (و) علما بأنه يمر بالنقطة (١٠، ٠)؟؟؟

(٥ علامات)

الحل:

(صيفية ٢٠١١)

السؤال الاول (١٦ علامة):

(١) اذا كان $f(s) = (s^2 + 3s)$ و $g(s) = 2s$ ؛ فان $f^{-1}(g(s))$ تساوي ؟؟؟

الحل:

(٤) اذا كان اقتران (السعر — الطلب) لمنتج معين هو $E = f(s) = 2s - 1$ ، وكان اقتران (السعر — العرض) لهذا المنتج هو $E = g(s) = s + 2$ ، فان كمية التوازن (s) هي ؟؟؟

الحل:

السؤال الثاني (١٧ علامة):

(أ) جد كلا من التكاملات الآتية:

(١) $\int (s^2 + \frac{3}{s}) ds$ ، $s \neq 0$ ؟؟؟ (٣ علامات)

الحل:

(٢) اذا كان $f^{-1}(g(s)) = 5$ ،

$\int_3^6 f^{-1}(g(s)) ds = 9$ ؛ فان $\int_3^6 f^{-1}(g(s)) ds$ يساوي ؟؟؟

الحل:

(٢) $\int_2^6 \sqrt{3s - 6} ds$ ؟؟؟

(٥ علامات)

الحل:

(ب) اذا كان $f^{-1}(g(s)) = \frac{f(s)}{2}$ و $g(s) = 6$ ؛ فجد

قيمة $\int_3^6 (3s^2 + 3f(s)) ds$ ؟؟؟

(٥ علامات)

الحل:

(٣) اذا كان $f^{-1}(2) = 5$ ، و $f^{-1}(1) = 2$ ، فان قيمة

$\int_1^5 f^{-1}(s) ds$ يساوي ؟؟؟

الحل:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٣٤٤٦٠٢٣٤٤٦٠٧٩٦٠

(شئوية ٢٠١٠)

السؤال الاول (١٦ علامة):

(١) اذا كان $v = \lim_{s \rightarrow 0} (s)$ فان $\frac{v}{s}$ تساوي ???

الحل:

(٢) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s}$ يساوي ???

الحل:

(٣) اذا علمت ان $\lim_{s \rightarrow 0} (s) = \frac{3}{4}$ ،

فان $\lim_{s \rightarrow 0} (s)$ يساوي ???

الحل:

(٤) اذا علمت ان $\lim_{s \rightarrow 0} (s) = 5$ ،

فان $\lim_{s \rightarrow 0} (2 - (s))$ يساوي ???

الحل:

(ج) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران w (س) عند نقطة (س، ص) يساوي $(4s^3 - 6s)$ ؛ فجد قاعدة الاقتران w علما بان منحنى الاقتران w يمر بالنقطة (٥، ٢) ??? (٤ علامات)

الحل:

السؤال الثالث (١٦ علامة):

(أ) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران w (س) = $s^2 - 1$ والمستقيم $v = 3$???

(٧ علامات)

الحل:

(ب) اذا كان النمو السكاني في منطقة ما ، يخضع لقانون النمو والاضمحلال ، وكان عدد سكان هذه المنطقة عام (٢٠٠٠) م قد بلغ (٢٧٠٠٠) نسمة ، اذا كان عدد السكان يزداد بشكل منتظم بمعدل (٤ %) سنويا ؛ فكم كان عدد سكان هذه المنطقة عام (١٩٧٥) م ??? (٤ علامات)

الحل:

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٠٢٣٤٤٦٠٧٩٦٠

السؤال الثالث (١٧ علامة):

(أ) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $y = (x-6)^2 - 2$ ومحور السينات في الفترة $[0, 4]$ ؟؟؟ (٥ علامات)

الحل:

(ب) اذا كان الايراد الحدي لبيع (س) قطعة من منتج ما يعطى بالاقتران $R = 3x^2 - 4x + 3$ ؛ فجد الايراد الكلي الناتج عن بيع (٥) قطع من هذا المنتج ؟؟؟ (٤ علامات)

الحل:

(ج) يعطي بنك ربحا مستمرا للمستثمرين لديه ، بحيث تحسب جملة المبلغ الناتجة عن استثمار مبلغ معين حسب قانون النمو. فاذا كانت نسبة الربح التي يقدمها البنك (٤%) سنويا ووضع مبلغ (٣٠٠٠) دينار في البنك ؛ جد جملة المبلغ بعد مرور (٢٥) سنة ؟؟؟ (٤ علامات)

الحل:

السؤال الثاني (١٦ علامة):

(أ) جد $\int (h^3 + 3h^2 + 4h) dh$ ؟؟؟ (٤ علامات)

الحل:

(ب) جد $\int \frac{1+x^2}{1-x^2+x^3} dx$ ؟؟؟ (٦ علامات)

الحل:

(ج) اذا كان $y = (x-2)^2 - 2$ ، $1 \leq x \leq 2$ ؛ $y = 2 + x^2$ ، $2 \leq x \leq 4$ ؛

فاحسب $\int_1^4 y dx$ ؟؟؟ (٦ علامات)

الحل:

إجابات الدورة (صيفية ٢٠١٤)

السؤال الاول (أ):

$$(1) \left[(3s^2 + \frac{5}{s} - 3s) \right]$$

$$= 3s^3 + 5s^2 + |s| + 3s + 3$$

(٢) نفرض $v = 5s^2 - s + 1$ ومنه

$$\frac{v}{s} = 5s - 1 \Rightarrow \frac{v}{1-s} = 5s$$

$$\left[\frac{v}{1-s} \times \frac{1-s}{\sqrt{v}} \right] = 5s \frac{1-s}{1+s-2s^2}$$

$$\left[\frac{1}{2} v + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} v$$

$$= 2(5s^2 - s + 1) + \frac{1}{2}$$

السؤال الاول (ب):

$$6 = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{(s)}{2} \right)$$

$$\left[\frac{1}{2} (s) - 1 \right] = 2 \times 1 - 6 = 6$$

$$\left[\frac{1}{2} (s) - 1 \right] = 8 \Rightarrow \left[\frac{1}{2} (s) - 1 \right] = 16$$

$$\left[\frac{1}{2} (s^2 + (s)) \right] = \left[\frac{1}{2} (s^2 + s) \right]$$

$$= \left[\frac{1}{2} (s) - 1 \right] + \left[\frac{1}{2} (s) - 1 \right] = 61 = 55 + 10 - 16 =$$

$$f = \left[\frac{1}{2} (s) - 1 \right] = \left[\frac{1}{2} (s) - 1 \right]$$

$$= \left[\frac{1}{2} (s) - 1 \right] = \left[\frac{1}{2} (s) - 1 \right]$$

$$= 90 = 36 \times \frac{5}{2} - 180 =$$

السؤال الثالث (أ):

$$f(n) = \left[\frac{1}{2} (n) \right] = \left[\frac{1}{2} (n) \right]$$

$$= 10 = \left[\frac{1}{2} (n) \right] = \left[\frac{1}{2} (n) \right]$$

$$f(n) = \left[\frac{1}{2} (n) \right] = \left[\frac{1}{2} (n) \right]$$

$$f(3) = \left[\frac{1}{2} (n) \right] = \left[\frac{1}{2} (n) \right]$$

السؤال الاول (ج):

$$f(s) = 2 - \frac{1}{s},$$

$$f(s) = \left[f(s) \right] = 2s + \frac{1}{s} + s^2 = s^2 + 2s + \frac{1}{s}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \leftarrow 1 = 1 + 2 + 1 = 4 \leftarrow 2 = 2, \text{ اذا:}$$

$$f(s) = 2 - \frac{1}{s}$$

السؤال الثاني (ج):

$$0 = \left[f(s) - h(s) \right] = s \left[f(s) - h(s) \right]$$

$$0 = 1 + (0) - h - (ج) h$$

$$5 = h - 12 \leftarrow 0 = 1 + 8 - h - 12 \leftarrow 5 = h$$

السؤال الثالث (أ):

$$s \left[f(s) \right] = s \left[f(s) \right]$$

$$= \left[(s^2 - 2s + 2) \right] = s^2 - 2s + 2$$

$$s(1.0) = (1.0)^2 - 2(1.0) + 2 = 1.0 \times 2 + 2 = 1.82 \text{ دينار}$$

السؤال الثالث (ب):

$$f(v) = \left[f(v) \right] = v \left[f(v) \right]$$

$$= \left[(v^2 + 4v + 4) \right] = v^2 + 4v + 4$$

$$= \left(\frac{1}{3} + 4 + 4 \right) = \frac{1}{3} + 8 + 4 = \frac{17}{3}$$

$$= \frac{1}{3} + 4 + 4 = \frac{17}{3}$$

$$f(0) = 5 \leftarrow 5 = 5, \text{ اذا:}$$

$$f(v) = \frac{1}{3} + 4 + 4 = \frac{17}{3}$$

$$f(2) = 5 + 2 \times 4 + 4 \times 2 + 8 \times 2 = 117$$

السؤال الثاني (ب):

وجد قيمة s التي يقابل e من الاقتران $f(s) = e$

$$10 = 16 - s, s \leftarrow 3 = 3, \text{ اذا:}$$

$$f(s) = \left[f(s) \right] = s \left[f(s) \right] = s \times e$$

$$= \left[(16 - s) \right] = 3 \times 10 = 30$$

$$= \left[(16 - s) \right] = 30 - 9 - 48 = 30 - 9 = 9 \text{ دينار.}$$

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٠٧٩٦٠٢٣٤٤٦

إجابات الدورة (شتوية ٢٠١٣)

السؤال الاول:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤
الاجابة	د	ج	ب	ب

السؤال الثالث(أ):

$$٧(س) = (س)هـ$$

$$س^٢ - س = س^٢ = س^٢ \Leftarrow س^٢ = س^٢ - س^٢ = س^٢ - س^٢ = ٠$$

$$\Leftarrow س(س - ٣) = ٠ \Leftarrow س = ٠, س = ٣$$

$$٤ = س^٢ - س(س - ٢) = س^٢ - (س^٢ - ٢س) = ٢س$$

$$٤ = س^٢ - س(س - ٢) = س^٢ - (س^٢ - ٢س) = ٢س$$

$$٤ = ٩ - \frac{٢٧}{٢} = ٩ - \frac{٢٧}{٢} = ٩ - ١٣.٥ = -٤.٥$$

وحدة مربعة

السؤال الثالث(ب):

نجد قيمة (س) عند ع = ٣٢ من العلاقة المعطاة

$$٥ = س + ١٢ \Leftarrow س = ٣٢ - ١٢ = ٢٠$$

$$٤ = س - ١ \Leftarrow س = ٥$$

$$٥ = س + ١٢ \Leftarrow س = ٣٢ - ١٢ = ٢٠$$

$$١٦٠ = (٢س + ١٢) - ١٦٠ = ٢س + ١٢ - ١٦٠ = ٢س - ١٤٨$$

$$١٦٠ = (٥٠ + ٦٠) - ١٦٠ = ١١٠ - ١٦٠ = -٥٠$$

دينار

السؤال الثالث(ج):

$$٨س = س(٨) = س(٨)$$

$$٨س = س(٨) = س(٨) \Leftarrow س = ٨$$

$$٨س = س(٨) = س(٨)$$

$$٨س = س(٨) = س(٨)$$

$$١٠ = س + ٢ \Leftarrow س = ٨$$

$$١٠ = س + ٢ \Leftarrow س = ٨$$

السؤال الثاني(أ):

$$(١) \quad ١ = س^٢ + ٣س - ٤ = س^٢ + ٣س - ٤$$

$$٢س^٢ + ٣س + ٣ = ٤س^٢ + ٣س + ٣$$

$$(٢) \quad ١ + ٤س = ٣س^٢ - ٤س + ١$$

$$\frac{٤س}{٤س} = \frac{٣س^٢ - ٤س + ١}{٤س} \Leftarrow ٤س = ٣س^٢ - ٤س + ١$$

$$\frac{٤س}{٤س} = \frac{٣س^٢ - ٤س + ١}{٤س} \Leftarrow ٤س = ٣س^٢ - ٤س + ١$$

$$\frac{٤س}{٤س} = \frac{٣س^٢ - ٤س + ١}{٤س} \Leftarrow ٤س = ٣س^٢ - ٤س + ١$$

$$٤س = ٣س^٢ - ٤س + ١ \Leftarrow ٨س = ٣س^٢ + ١$$

السؤال الثاني(ب):

$$\frac{٨}{٢} = س^٢ - ٤س = س^٢ - ٤س$$

$$\frac{٨}{٢} = س^٢ - ٤س = س^٢ - ٤س$$

$$\frac{٨}{٢} = س^٢ - ٤س = س^٢ - ٤س$$

$$\frac{٨}{٢} = (٢ - \frac{٢٥}{٢}) - ١٠ = ٢ - \frac{٢٥}{٢} - ١٠ = -\frac{٢٥}{٢} - ٨ = -\frac{٤١}{٢}$$

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٥٦٤٤٣٤٥٦٠٧٩٦٠

إجابات الدورة (صيفية ٢٠١٣)

السؤال الاول:

رقم السؤال	١	٢	٣	٤
الاجابة	١-	٤-	٨+٧٦=(٧)٤	س+٣

السؤال الثاني(أ):

$$(1) \left[\left(\frac{5}{s} - \frac{5}{s} + \frac{5}{s} \right) \right] \leq s$$

$$\frac{1}{2} \frac{5}{s} - \frac{5}{s} \leq |s| + \frac{5}{s} + s$$

$$(2) \left[\frac{2}{s} \sqrt{s^2 + 3} \right] \leq s$$

$$\text{نفرض } s = 2 + 3$$

$$\frac{2}{s} \leq s \leq \frac{2}{s} \leq \frac{2}{s}$$

$$\left[\frac{2}{s} \sqrt{s^2 + 3} \right] \leq s$$

$$\left[\frac{2}{s} \sqrt{s^2 + 3} \right] \leq s$$

$$\frac{2}{3} (3 + 2) \leq s$$

السؤال الثاني(ب):

$$\left[\frac{2}{s} \sqrt{s^2 + 3} \right] \leq s \leq \frac{2}{s} \sqrt{s^2 + 3}$$

$$\left[\frac{2}{s} \sqrt{s^2 + 3} \right] + \frac{2}{s} \sqrt{s^2 + 3} = \frac{2}{s} \sqrt{s^2 + 3}$$

$$3 = 8 + 5 =$$

$$\left[\frac{2}{s} \sqrt{s^2 + 3} \right] \leq s$$

$$\left[\frac{2}{s} \sqrt{s^2 + 3} \right] + \frac{2}{s} \sqrt{s^2 + 3} = \frac{2}{s} \sqrt{s^2 + 3}$$

$$30 = 27 + 3 = (9 - 36) + 3 = \left[\frac{2}{s} \sqrt{s^2 + 3} \right] + 3 =$$

السؤال الثالث(أ):

$$\frac{1}{s} = \text{ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة } (s, s)$$

$$\frac{1}{s} = (s^3 - 1)^{-2}$$

$$\frac{1}{s} = (s^3 - 1)^{-2} \Rightarrow \frac{1}{s} = \frac{1}{(s^3 - 1)^2}$$

$$\frac{1}{s} = s^3 - 1 \Rightarrow s^3 - s = 1$$

$$\frac{1}{s} = 2 - 8 = -6 \Rightarrow s = -\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{s} = 6 - 2 = 4 \Rightarrow s = \frac{1}{4}$$

$$\text{اذا: } \frac{1}{s} = s^3 - s = 2 - 3 = -1$$

السؤال الثالث(ب):

$$\text{عندما } s = 30 \text{ نجد قيمة } (s, s) \text{ التي تقابل } (1, 1)$$

$$\text{من الاقتران } s = 30 \Rightarrow s^3 - 42 = 30$$

$$\frac{1}{s} = \frac{30 - 42}{3} = \frac{-12}{3} = -4$$

$$\text{فائض المستهلك (ف) = } \frac{1}{s} (s^3 - s) = \frac{1}{s} (s^3 - s) = s^2 - 1$$

$$\frac{1}{s} (s^3 - 42) = 30 \times 4 - s = 120 - s$$

$$120 - \frac{1}{s} (s^3 - 42) = 120 - \frac{1}{s} (s^3 - 42)$$

$$120 - 24 - 168 = 144 - 168 = -24$$

إجابات الدورة (صيفية ٢٠١٢)

السؤال الاول:

٥	٤	٣	٢	١	رقم السؤال
ب	ج	ج	د	ب	الاجابة

السؤال الثاني (أ):

$$(1) \left[12 + s^2 - \frac{s^3}{3} \right]_{s=0}^{s=4} = \frac{1}{3} \left[3s^2 + 2s^3 - \frac{s^4}{4} \right]_{s=0}^{s=4} = \frac{1}{3} \left[48 + 128 - \frac{256}{4} \right] = \frac{1}{3} [48 + 128 - 64] = \frac{112}{3}$$

$$(2) \left[\frac{6 - s^2}{9 + s^2} \right]_{s=0}^{s=3} \text{ نفرض:}$$

$$v = \frac{6 - s^2}{9 + s^2} \iff 6 - s^2 = v(9 + s^2) \iff 6 - s^2 = 9v + vs^2$$

$$\text{ومنه: } vs^2 = 6 - 9v - s^2 \iff s^2(1 + v) = 6 - 9v$$

$$\left[\frac{6 - 9v}{1 + v} \right]_{v=0}^{v=1/3} = \left[\frac{6 - 9v}{1 + v} \right]_{v=0}^{v=1/3} = \frac{6 - 9 \cdot \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4/3} = \frac{9}{4}$$

$$\left[\frac{6 - 9v}{1 + v} \right]_{v=0}^{v=1/3} = \frac{6 - 9 \cdot \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4/3} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{9}{4} = \frac{9}{4} \iff \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

السؤال الثاني (ب):

$$\left[\frac{7 - (s)}{3} \right]_{s=0}^{s=9} = \left[\frac{7 - (s)}{3} \right]_{s=0}^{s=9} = \frac{7 - 9}{3} - \frac{7 - 0}{3} = \frac{-2}{3} - \frac{7}{3} = -\frac{9}{3} = -3$$

$$\left[\frac{7 - (s)}{3} \right]_{s=0}^{s=9} + \left[\frac{7 - (s)}{3} \right]_{s=0}^{s=9} = \left[\frac{7 - (s)}{3} \right]_{s=0}^{s=9} \iff -3 + (-3) = -6$$

$$= 8 - 12 = -4 \text{ اذا:}$$

$$\left[\frac{7 - (s)}{3} \right]_{s=0}^{s=9} = \frac{7 - 9}{3} - \frac{7 - 0}{3} = -\frac{2}{3} - \frac{7}{3} = -\frac{9}{3} = -3$$

$$= -4 - 42 = -46$$

السؤال الثالث (ج):

لا يوجد نقاط تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات نجد أصفار الاقتران. $0 = (s)$

$$s^2 - 4s = 0 \iff s(s - 4) = 0 \iff s = 0, s = 4$$

$$\left[\frac{1}{3} (s^2 - 4s) \right]_{s=0}^{s=4} = \frac{1}{3} \left[\frac{16}{3} - \frac{64}{3} \right] = \frac{1}{3} \left[-\frac{48}{3} \right] = -16$$

$$= \left[\frac{1}{3} (s^2 - 4s) \right]_{s=0}^{s=4} = \frac{1}{3} \left[\frac{16}{3} - \frac{64}{3} \right] = \frac{1}{3} \left[-\frac{48}{3} \right] = -16$$

$$= \frac{32}{3} = \left| \frac{32}{3} \right| = \left| \frac{96}{3} - \frac{64}{3} \right| = \frac{32}{3} \text{ وحدة مربعة.}$$

إجابات الدورة (شتوية ٢٠١٢)

السؤال الاول:

٥	٤	٣	٢	١	رقم السؤال
٢	ب	ج	د	ب	الاجابة

السؤال الثاني(أ):

$$(1) \left[(س^٥ + \frac{٢}{س} + س^٣) \right] س \neq ٥$$

$$\leftarrow \frac{س^٤}{٤} + ٢|س| + س^٣$$

$$(2) \left[\frac{٣ + س^٢}{(س^٣ + س^٢)} \right] س \text{ نفرض}$$

$$ص = س^٢ + س^٣ \leftarrow \frac{ص}{س} = س^٢ + س^٣$$

$$\leftarrow ص = س(س^٢ + س^٣)$$

$$\left[\frac{٣ + س^٢}{(س^٣ + س^٢)} \right] س = \frac{ص}{ص}$$

$$\left[\frac{ص}{ص} \right] = \frac{ص}{ص}$$

$$= ظاص + ج = ظا(س^٢ + س^٣) + ج$$

السؤال الثاني(ب):

$$= \left[(س) س^٢ \right] =$$

$$= \left[(س) س^٢ \right] + \left[(س) س^٢ \right] = ٨ = ٢ + ٦ =$$

$$= \left[(س) س^٢ + ٥ \right] =$$

$$= \left[(س) س^٢ + ٥ \right] + \left[(س) س^٢ + ٥ \right] =$$

$$= ٢٨ = ٢٠ + ٨ = (١ \times ٥ - ٣ \times ٥) + ٨ =$$

السؤال الثالث(أ):

$$= (س) \left[(٥ + س^٨ - ٢س^٣) \right] س$$

$$= ٥س + \frac{٢س^٨}{٢} - \frac{٢س^٣}{٣} =$$

السؤال الثالث(ب):

$$= (ص) \left[(٨ + ٧٦) \right] س = ٧٨ + ٧٣ = ج$$

$$= (٥) = ٣ = ج$$

$$= (ص) = ٧٨ + ٧٣ =$$

السؤال الثالث(ج):

نجد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات:

$$٣س + ٦ = ٥ \leftarrow س = -٢ \text{ لا تنتمي للفترة } [٥, ٣]$$

$$= م = \left[(٦ + س^٣) \right] س$$

$$= \left[\frac{٢٧}{٢} + ٦س \right] = -١٨ + \frac{٢٧}{٢}$$

$$= \frac{٢٧}{٢} - ١٨ = ٣,٥ \text{ وحدة مربعة.}$$

إجابات الدورة (شتوية ٢٠١١)

السؤال الاول:

٤	٣	٢	١	رقم السؤال
٥	١	ج	٥	الاجابة

السؤال الثاني (أ):

$$(1) \left[\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \right] = \frac{2}{3} (1 + \frac{2}{3})$$

$$\frac{7}{6} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$$

$$(2) \text{ نفرض } v = \frac{3s}{1+2s} \Rightarrow \frac{1+2s}{3s} = \frac{1}{v}$$

$$\frac{1+2s}{3s} = \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{1+2s}{3s} = \frac{1}{v}$$

$$\frac{1+2s}{3s} = \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{1+2s}{3s} = \frac{1}{v}$$

$$\frac{1+2s}{3s} = \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{1+2s}{3s} = \frac{1}{v}$$

السؤال الثاني (ب):

$$v = \frac{1}{3} \text{ لكن}$$

$$\frac{1}{3} + v = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} + v = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} + v = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$v = \frac{1}{3} \text{ ومنه:}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

السؤال الثالث (أ):

$$n \leq n \Rightarrow (n) \leq (n) = n$$

$$n + \frac{2}{3} = n + \frac{2}{3} = n$$

$$\text{اذا: } (0) \leq (0) = 0 \Rightarrow (0) \leq (0) = 0$$

$$(0) \leq (0) = 0 \Rightarrow (0) \leq (0) = 0$$

السؤال الثالث (ب):

$$v = \frac{1}{3} \text{ هـ} = \frac{1}{3} \text{ س}$$

$$v = \frac{1}{3} \text{ هـ} = \frac{1}{3} \text{ س}$$

$$v = \frac{1}{3} \text{ هـ} = \frac{1}{3} \text{ س}$$

$$v = \frac{1}{3} \text{ هـ} = \frac{1}{3} \text{ س}$$

$$v = \frac{1}{3} \text{ هـ} = \frac{1}{3} \text{ س}$$

$$v = \frac{1}{3} \text{ هـ} = \frac{1}{3} \text{ س}$$

$$v = \frac{1}{3} \text{ هـ} = \frac{1}{3} \text{ س}$$

$$v = \frac{1}{3} \text{ هـ} = \frac{1}{3} \text{ س}$$

$$v = \frac{1}{3} \text{ هـ} = \frac{1}{3} \text{ س}$$

$$v = \frac{1}{3} \text{ هـ} = \frac{1}{3} \text{ س}$$

وحدة نقدية.

النهايات والاتصال

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٥٦٤٤٣٠٢٣٦٠٧٩٦٠

إجابات الدورة (صيفية ٢٠١١)

السؤال الاول:

٤	٣	٢	١	رقم السؤال
ج	ب	ج	ب	الاجابة

السؤال الثاني(أ):

$$(1) \left[\frac{3}{s} + s^2 \right] s$$

$$= \left[\frac{3}{s} + s^2 \right] s = 3 + s^3$$

$$= 3 + s^3$$

$$(2) \left[\sqrt[3]{s^3 - 6s^2} \right] s \text{ نفرض ان}$$

$$s^3 - 6s^2 = \frac{v}{s} \leftarrow s^3 - 6s^2 = v$$

$$\frac{v}{s^3 - 6s^2} = s \leftarrow$$

$$\frac{v}{(s^3 - 6s^2)} \times (s^3 - 6s^2) \times \sqrt[3]{v} \leftarrow$$

$$\frac{3}{4} v \times \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{3}{4} \leftarrow$$

$$\frac{3}{4} (s^3 + 6s^2) + \frac{4}{3} \leftarrow$$

السؤال الثاني(ب):

$$\left[(s) s^2 = 12 \right]$$

$$\left[(s) s^3 + (s) s^3 \right] s \leftarrow$$

$$= \left[(s) s^3 + (s) s^3 \right] s =$$

$$\leftarrow s^3 + 12 \times 3 =$$

$$\leftarrow 8 - 0 + 36 = 44$$

السؤال الثالث(أ):

عندما $s = 21$ نجد قيمة (s) التي تقابل (e)

من العلاقة المعطاة

$$21 = s^2 + 11 \leftarrow s^2 = 11 - 21$$

$$s^2 = 10 \leftarrow s = 5 \text{ ومنه:}$$

$$f = e \times s - \left[\frac{s}{s} \right] = 5 \times 21 - 1$$

$$= 105 - 1 = 104$$

$$= \left[\frac{s^2}{2} + s \right] - 105 =$$

$$= \left[\frac{21^2}{2} + 21 \right] - 105 =$$

$$= 80.5 - 105 = 25 \text{ دينار}$$

السؤال الثالث(ب):

$$m = \left[s + \frac{s^2}{2} \right] = (1 + s^2) s$$

$$= 4 - 2 + 0 = 6 \text{ وحدة مربعة}$$

السؤال الثالث(ج):

$$\left[s^2 = 21 \leftarrow s = 7 \right] \text{ ومنه:}$$

$$3 = 1 \leftarrow \frac{21}{7} = \frac{27}{7} \leftarrow 21 = 0 \times 7 - 1 \times 7$$

السؤال الثاني (ج):

$$٥(س) = ٤س - ٣س$$

$$\Leftarrow ٥(س) = ٥(س) \Rightarrow ٥(س) = ٥(س)$$

$$\Leftarrow ٥(س) = ٤س - ٣س + \frac{٣س^٢}{٢}$$

$$٥(٢) = ٥ = ٤ + ٥ = ٥ \Leftarrow ٥ = ٥ + ٤ \Leftarrow ٥ = ٥ + ٤$$

$$\Leftarrow ٥(س) = ٤س - ٣س + ٢ = ١$$

السؤال الثالث (أ):

نجد نقاط التقاطع بين المنحنيين

$$\Leftarrow ٣(س) = ١ - ٢س$$

$$\Leftarrow ٢س = ٤ \Leftarrow ٢س = ٤$$

$$\therefore ٣(١ - ٢س) = ٢س$$

$$= ٣(١ - ٢س) = ٢س \Rightarrow ٣ - ٦س = ٢س$$

$$= ٣ - ٨س = \frac{٨}{٣} - ٨ = \frac{٣س}{٣} - ٤س = ٤س - \frac{٨}{٣}$$

$$= ١٦ - \frac{١٦}{٣} = \frac{٣٢}{٣} \text{ وحدة مساحة}$$

السؤال الثالث (ب):

$$٤ = ٢٧٠٠٠ \text{ نسمة } \approx ٢٥ \text{ سنة}$$

$$٤ = ١٠٠٤ \Leftarrow ٤ = ١٢ \Leftarrow ٤(٧) = ٤ \times ٧$$

$$\Leftarrow ٢٧٠٠٠ = ٤ \times ٧ \times ٢٥$$

$$\frac{٢٧٠٠٠}{٧} = ٤ \Leftarrow ٤ = ٢٧٠٠٠$$

$$\Leftarrow ٤ = \frac{٢٧٠٠٠}{٢,٧} = ١٠٠٠٠ \text{ دينار}$$

إجابات الدورة (شتوية ٢٠١٠)

السؤال الاول:

٤	٣	٢	١	رقم السؤال
٥	ب	٢	ج	الاجابة

السؤال الثاني (أ):

$$\left[(٥س + ٣) + (٤س)^٢ \right] ٥س$$

$$= ٥س + (٤ \div (٤س)) + ٣$$

السؤال الثاني (ب):

$$\frac{(١ + ٢س)}{١ - س + ٢س}$$

$$= \frac{١}{٢} (١ - س + ٢س)(١ + ٢س)$$

$$١ - س + ٢س = ٣$$

$$\Leftarrow \frac{٣}{١ + ٢س} = ١ + ٢س = \frac{٣}{٣}$$

$$\Leftarrow \frac{١}{٢} (١ - س + ٢س)(١ + ٢س) = ٣$$

$$= \frac{٣}{١ + ٢س} \frac{١}{٢} (١ + ٢س) = ٣$$

$$= \frac{٣}{٢} = ٣ \times ٢ = ١٢$$

$$= ٢\sqrt{٢س + ١} = ١٢$$

السؤال الثاني (ج):

$$\int_1^4 (s) ds$$

$$\int_1^2 (s^3 - 2) ds + \int_2^4 (s^3 + 6) ds =$$

$$= \left[\frac{s^4}{4} - 2s \right]_1^2 + \left[\frac{s^4}{4} + 6s \right]_2^4 =$$

$$(12 + 4) - (24 + 16) + (2 - 1) - (4 - 8) =$$

$$29 = 24 + 5 = 16 - 4 + 1 + 4 =$$

السؤال الثالث (أ):

٦ - ٢ = ٤ = ٠ ← ٣ = ٣ يقطع محور السينات في الفترة [٤,٠] عندما ٣ = ٣ وعليه:

$$\left| \int_3^4 (s^2 - 6) ds \right| + \left| \int_0^3 (s^2 - 6) ds \right| = \text{المساحة}$$

$$\left| \int_0^3 (s^2 - 6) ds \right| = ١٢$$

$$\left| \int_3^4 (s^2 - 6) ds \right| =$$

$$= |9 - 9 - 18| = 9 \text{ وحدات مربعة.}$$

$$\left| \int_3^4 (s^2 - 6) ds \right| = ١٢$$

$$(9 - 18) - (16 - 24) = \left| \int_3^4 (s^2 - 6) ds \right| =$$

$$1 = |1 - 1| = |9 - 8| =$$

١٠ = ١ + ٩ وحدة مربعة

السؤال الثالث (ب):

$$\int_1^3 (s) ds = (s) \Big|_1^3$$

$$= (3^2 - 1^2) = (9 - 1) = 8$$

$$= (3^2 - 1^2) = (9 - 1) = 8$$

$$= 90 = 15 + 50 - 125 =$$

السؤال الثالث (ج):

$$ع(٧) = ع \times ٧ \times ٧ \leftarrow$$

$$ع(٢٥) = ٢٥ \times ٢٥ \times ٢٥ = ٣٠٠٠ \times ٣٠٠٠ \times ٣٠٠٠$$

$$\leftarrow ٢٠٧ \times ٣٠٠٠ = ٨١٠٠ \text{ دينار}$$

التكامل وتطبيقاته

اعداد الاستاذ: أحمد ابومويس ٤٤٦٤٣٤٠٢٣٠٧٩٦٠

الرقم	الموضوع	الصفحة	عدد الاسئلة
١	التكامل الغير محدود	١	٥٩
٢	التكامل المحدود	٩	١١
٣	خصائص التكامل المحدود	١١	٢٥
٤	التكامل بالتعويض	١٧	٣٣
٥	تطبيقات التكامل المحدود	٢٣	٢٩
٦	التطبيقات الاقتصادية	٣٠	٣٦
٧	اسئلة متنوعة على الوحدة كاملة	٣٨	٨٧

