الـمـا د ة

الــتحضيـريــة

للثانوية العامة

(الاقترانات ، المستوى الديكارتي ، المجال والمدى ، الزوايا المثلثية ، حل المعادلات المثلثية ، المتطابقات المثلثية ، ضرب الاقترانات وقسمتها ، معادلة الخط المستقيم والمحاور ، تحليل وتركيب الاقترانات)

إعداد الأستاذ

شادي خرفان

٠٧٩٧٧٥١٧١٠

facebook.com/shadi.kherfan.٧

الفهرس

أولا: الاقترانات

 # اقتران كثير الحدود: وهو الاقتران الذي يكون على الصيغة

أ$_{ن}$ س^{ن} + أ$_{ن-١}$ س$^{ن-١}$ + ... + أ$_{١}$ س + أ

حيث ن ∈ ط

أ ، أ$_{ن-١}$ ، ... ، أ$_{١}$ ، أ ∈ ح

ولإقتران كثير الحدود أشكال بدءا من :

- **الاقتران الثابت** : ق(س) = جـ : جـ ∈ ح

مثال: ق(س) = ٧ ق(س) = -٢,٥

ق(س) = π ق(س) = هـ (هـ: العدد النيبيري)

- **الاقتران الخطي** : ق(س) = أ س + ب : أ،ب ∈ ح

مثال: ق(س) = س

ق(س) = ٢س+١

ق(س) = ٣- $\frac{١}{٢}$ س

- **الاقتران التربيعي** : ق(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ : أ،ب،جـ ∈ ح

مثال: ق(س) = س^{٢}

ق(س) = س – ٣س^{٢} +٧

ق(س) = ١+٢س^{٢}

- **الاقتران التكعيبي :**

$ق(س) = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د$: أ،ب،جـ ،د ∋ ح

مثال: $ق(س) = س^{٣}$

$ق(س) = - س^{٣} + ٧$

$ق(س) = ٢س^{٣} - س^{٢} + ٣$

- وبقية الاقترانات على هذه الصورة تسمى كثيرات حدود

$س^{٤} + ٢$ --- كثير حدود من الدرجة **الرابعة**

$٢ س^{٧} + س^{٣} - ١$ --- كثير حدود من الدرجة **السابعة**

.... وهكذا

<u># الإقتران الأسي :</u> وهو الاقتران الذي يكون فيه المتغير س على شكل " قوة " لأساس ثابت موجب .

والصيغة العامة للاقتران على الشكل

$$ق(س) = أ^{س} + جـ \qquad أ ∋ ح^{+} - \{١\}$$

جـ ∋ ح

مثال: $ق(س) = ٢^{س} + ٣$

$ق(س) = هـ^{س} - ١$ (وبهذه الحالة يسمى اقتران اسي طبيعي)

 # الإقتران اللوغاريتمي : ويرمز للاقتران بالرمز " لــو " ويكتب على الصورة

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{لــو}_{\text{أ}}\ \text{ع}(\text{س})$$

حيث **ع(س)** اقتران، **أ** أساس اللوغاريتم : أ ∋ ح$^{+}$-{١}

مثال : ق(س) = لــو س

ق(س) = لــو$_{\text{هـ}}$ س (وبهذه الحالة يسمى اقتران لوغاريتمي طبيعي)

ق(س) = لو$_{٣}$ (٢س+١)

- اذا لم يكتب أساس للوغاريتم كما في اول مثال تلقائيا يكون الأساس = ١٠

 # الاقتران المتشعب : وهو اقتران يحوي يضم اكثر من قاعدة وتطبق كل قاعدة حسب المجال المرافق لها .

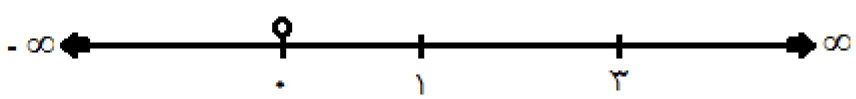
ويكتب بالصورة العامة

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{ق}_{١}(\text{س}) & ، \quad \text{س} \leq \text{أ}_{١} \\ \text{ق}_{٢}(\text{س}) & ، \quad \text{أ}_{١} < \text{س} < \text{أ}_{٢} \\ \vdots & \quad \vdots \\ \text{الاقترانات} & ، \quad \text{المجالات} \end{cases}$$

- وتسمى أ$_{١}$ ، أ$_{٢}$ ، ...... ، أ$_{ن}$ نقاط تشعب

مثال:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + ١ & ، \quad \text{س} < ٠ \\ \text{هـ}^{٢\text{س}} & ، \quad ٠ < \text{س} \leq ١ \\ \text{س}^{٣} - ٢\text{س} & ، \quad ١ < \text{س} \leq ٣ \end{cases}$$



فاذا اردنا إيجاد ق(-١) نطبق القاعدة ٢س+ ١ وذلك لان **-١** < ٠

← ق(-١) = ٢(-١) + ١ = -٢ + ١ = -١

ق(٢) نستعمل س^{٣} – ٢س لأن ١ < **٢** < ٣

← ق(٢) = (٢)^{٣} – ٢(٢) = ٨ – ٤ = ٤

// من خلال المثال السابق جد كل من : ق(١) ، ق(٣) ، ق(٠) ، ق($\frac{١}{٢}$) ؟

 # <u>اقتران القيمة المطلقة :</u> ويرمز له بالرمز | ... |

مثال : ق(س) = | س |

ق(س) = | س + ٣ |

ق(س) = | ١ – ٢س^{٢} + ٣س |

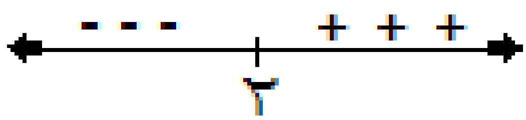
<u>إعادة التعريف</u>

لإعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة هناك خطوات يجب اتباعها ، وكتطبيق على الخطوات سنأخذ المثال ق(س) = | س – ٢ |

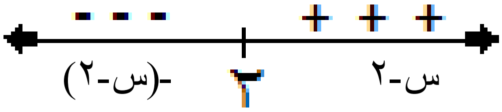
<u>أولا:</u> اجعل ما داخل القيمة المطلقة يساوي **<u>صفرا</u>** وجد قيم **س** .

← س-٢ = ٠ ← س = ٢

<u>ثانيا:</u> ضع قيم **س** على خط الأعداد وادرس إشارة الاقتران



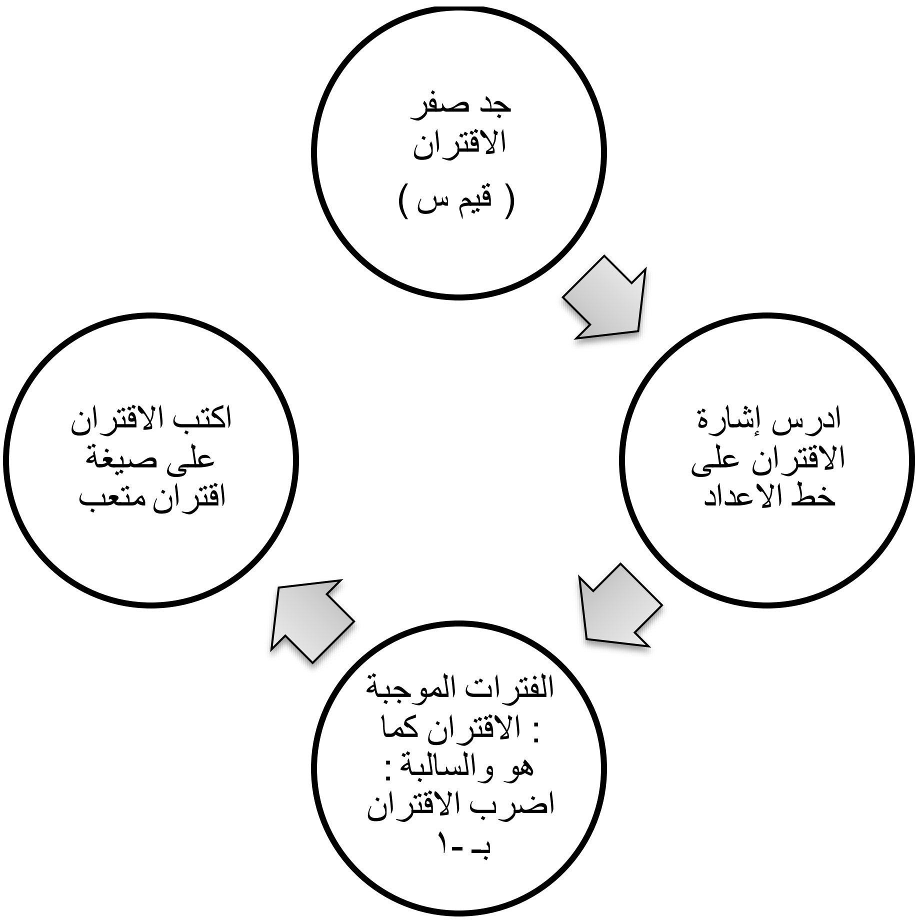
ثالثا: الفترات الموجبة تأخذ نفس قاعدة الاقتران ، والفترات السالبة تأخذ قاعدة الاقتران مضروبة بسالب



رابعا: نكتب اقتران القيمة المطلقة على شكل اقتران متشعب بحيث تكون نقاط التشعب هي قيم س .

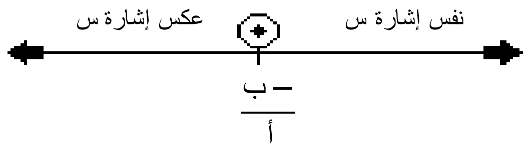
$$ق(س) = \begin{cases} س - ٢ & ، \quad س \geq ٢ \\ ٢ - س & ، \quad س < ٢ \end{cases}$$

- اذا وبطريقة سريعة

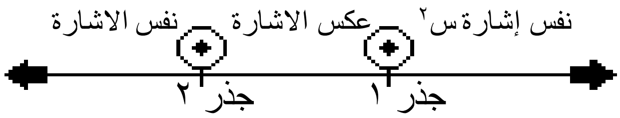


- عند دراسة إشارة اقتران خطي او تربيعي نتبع طرقا سريعة واكثر شيوعا

الاقتران الخطي ق(س) = أ س + ب

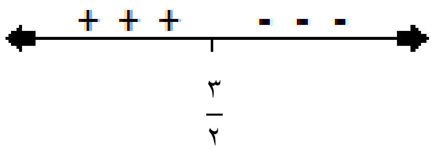


الاقتران التربيعي ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ



مثال: أعد تعريف الاقتران ق(س) = | ٣ – ٢ س |

الحل ٣ – ٢س = ٠ ← س = $\frac{٣}{٢}$



← ق(س) = $\begin{cases} \text{٣ – ٢س} ، & \text{س} \leq \frac{٣}{٢} \\ \text{٢س – ٣} ، & \text{س} > \frac{٣}{٢} \end{cases}$

سؤال: أعد تعريف الاقتران ق(س) = | ٤ + ٢س |

مثال: أعد تعريف الاقتران ق(س) = | س – ١ | على الفترة س∈ [٢ ، ٥]

الحل س – ١ = ٠ ← س = ١

لاحظ س-١ على الفترة المعطاة يكون موجب

- - + + +
١ ٢ ٥

← ق(س) = س – ١ : س∈ [٢ ، ٥]

سؤال: أعد تعريف الاقتران ق(س) = | ٢س – ١ | : س ∈ [-١ ، $\frac{٥}{٢}$)

- **إعادة تعريف اقتران نسبي مطلق .**

مثال: أعد تعريف الاقتران ق(س) = | $\frac{س-٢}{س+١}$ | ، س≠ -١

الحل س – ٢ = ٠ ← س = ٢

س + ١ = ٠ ← س = -١

+ + + --- + + +
-١ ٢

← ق(س) = $\begin{cases} \frac{س-٢}{س+١} & ، \quad س \geq ٢ \text{ ، } س < -١ \\ -\frac{س-٢}{س+١} & ، \quad -١ < س < ٢ \end{cases}$

** لاحظ في المثال السابق

١ - لم توضع أي مساواه عند س= -١ لانها صفر المقام (واستثنت من المجال)
حيث يكون هناك الاقتران غير معرف

٢ - إشارة $\frac{س-٢}{س+١}$ تعاملنا معها كما لو تعاملنا مع (س-٢) × (س+١)

- **إعادة تعريف اقتران قيمة مطلقة لكثير حدود من الدرجة الثانية**

** وهنا نستخدم قواعد لدراسة إشارة الاقتران التربيعي

الصورة العامة للعبارة التربيعية أ س^{٢} + ب س + جـ

المميز هو ب^{٢} – ٤ أ جـ ، حيث :

ب^{٢} – ٤ أ جـ > صفر ← يوجد للمعادلة جذران　　نفس ｜ عكس ｜ نفس

ب^{٢} – ٤ أ جـ = صفر ← يوجد جذر واحد　　نفس ｜ نفس

ب^{٢} – ٤ أ جـ < صفر ← لا يوجد جذور للمعادلة　　نفس

<u>مثال:</u> أعد تعريف الاقتران ع(س) = | س^{٢} - ٤ |

<u>الحل</u> س^{٢} – ٤ = ٠ ← س^{٢} = ٤

← س = ± ٢

+ + + ｜ - - - ｜ + + +
٢-　　٢

← ع(س) = $\begin{cases} ٤ - س^{٢} ، & ٢- < س < ٢ \\ س^{٢} - ٤ ، & س \geq ٢ ، س \leq ٢- \end{cases}$

<u>تدريب١</u> أعد تعريف الاقتران ع(س) = | س^{٢} – ٥س + ٦ |

١- على الفترة س ∈ [٢- ، ٠]

٢- على الفترة س ∈ (١- ، ٤)

<u>تدريب٢</u> أعد تعريف الاقتران ع(س) = | س – س^{٢} |

- **خواص القيمة المطلقة**

١- | س | ≤ أ ↔ ـأ ≤ س ≤ أ

٢- | س | ≥ أ ↔ س ≥ أ أو س ≤ ـأ

٣- | س × ص | = | س | × | ص |

٤- $\left|\frac{س}{ص}\right| = \frac{|س|}{|ص|}$

٥- | س + ص | ≤ | س | + | ص |

<u>مثال:</u> أعد تعريف الاقتران ىہ(س) = $\begin{cases} ٢س+٣ & ، \quad |٢س-٣| \le ١ \\ س^{٢}+١ & ، \quad |٢س-٣| > ١ \end{cases}$

<u>الحل</u> |٢س-٣| ≤ ١ ← -١ ≤ ٢س-٣ ≤ ١

٢ ≤ ٢س ≤ ٤

١ ≤ س ≤ ٢

|٢س-٣| > ١ ← ٢س – ٣ > ١ أو ٢س – ٣ < -١

٢س > ٤ ٢س < ٢

س > ٢ س < ١

ىہ(س) = $\begin{cases} ٢س+٣ & ، \quad ١ \le س \le ٢ \\ س^{٢}+١ & ، \quad س < ١ \text{ ، } س > ٢ \end{cases}$

$س^{٢}+١$ ٢س+٣ $س^{٢}+١$

١ ٢

سؤال: أعد تعريف الاقتران

$$ق(س) = \begin{cases} س^{٣} - ١ & ، \quad |٣ - س| < ٥ \\ ٢س & ، \quad |٣ - س| \geq ٥ \end{cases}$$

** أما اذا كانت القيمة المطلقة ليس لكل الاقتران ، عندها نعيد تعريف القيمة المطلقة وبعد كتابة الاقتران المتشعب نضيف اليه بقية أجزاء الاقتران

مثال: أعد تعريف الاقتران $ق(س) = \frac{|٢س + ٦|}{س^{٢} + ٧س}$: $س \neq \{ ٠ ، -٧ \}$

الحل نعيد تعريف $|٢س + ٦|$ أولا

$$\leftarrow |٢س + ٦| = \begin{cases} ٢س + ٦ & ، \quad س \geq -٣ \\ -(٢س + ٦) & ، \quad س < -٣ \end{cases}$$

ثم نضيف باقي أجزاء الاقتران ليصبح :

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{٢س + ٦}{س^{٢} + ٧س} & ، \quad س \geq -٣ \\ -\frac{٢س + ٦}{س^{٢} + ٧س} & ، \quad س < -٣ \end{cases}$$

<u>أسئلة مهارية:</u> أعد تعريف كل من الاقترانات التالية

١- ق(س) = (٥ س + ٣٢)$^{|س|}$

٢- ق(س) = $\sqrt[3]{|٢س - ٦| + ٧ س^{٢}}$

٣- ق(س) = ٣ س^{٣} | س^{٢} + ٧س + ١٠ |

٤- ق(س) = $\begin{cases} |س - ٥| & ، \quad س \geq ١ \\ س^{٢} & ، \quad س < ١ \end{cases}$

٥- ق(س) = | س − س^{٣} | $\sqrt[3]{س}$ س ≠ ٠

اقتران أكبر عدد صحيح ويرمز له بالرمز [...]

ق(س) = [س] وتقرأ أكبر عدد صحيح لـ س حيث

= ن ن ≤ س < ن+١

[٢,٤] = ٢

[٣,١] = ٣

[٤,٩] = ٤

[-٢,٤] = -٣

[-٣,١] = -٤

[-٤,٩] = -٥

** اذا كانت القيمة داخل أكبر عدد صحيح موجبة فقط احذف الأجزاء العشرية

** أما اذا كانت سالبة

١) احذف الأجزاء العشرية

٢) اطرح ١ من المقدار

مثال: -٢,٥ ← -٢ $\xleftarrow{-١}$ -٣

** دائما في اقتران أكبر عدد صحيح ، السؤال يعطي فتره عند إعادة تعريفه

** عند إعادة تعريف الاقتران يكون الناتج على شكل قيم صحيح فقط داخل كل فتره جزئية ، وطول هذه الفترة الجزئية (ل) حيث :

$$ل = \frac{1}{|\text{معامل س}|}$$

- **إعادة التعريف**

<u>مثال:</u> أعد تعريف الاقتران $ق(س) = [\,٢س - ٣\,]$: $س \in [٠ ، ٢]$

أولا: نجد صورة طرفي الفترة { ٠ ، ٢ } من خلال التعويض المباشر

$ق(٠) = [\,٢\times٠ - ٣\,] = [\,-٣\,] = -٣$

$ق(٢) = [\,٢\times٢ - ٣\,] = [\,١\,] = ١$

ثانيا: نجد الفترة الجزئية الأولى حيث تكون عند الطرف الأول

$-٣ \le ٢س - ٣ < -٢ \quad \leftarrow \quad ٠ \le ٢س < ١$

$\leftarrow \quad ٠ \le س < \frac{١}{٢}$

طول الفترة = $\frac{١}{٢}$ من خلال المتباينة أعلاه او من خلال قانون ل

ثالثا: حصر قيم ق(س) بين طرفي الفترة بناء على قيمة **ل**

$٠ \leftarrow \frac{١}{٢} \leftarrow ١ \leftarrow \frac{٣}{٢} \leftarrow ٢$

رابعا: نكتب الاقتران على شكل اقتران متشعب ونوازن الفترة الناتجة مع الفترة المعطاة

$$ق(س) = \begin{cases} -٣ \quad ، & ٠ \le س < \frac{١}{٢} \\ -٢ \quad ، & \frac{١}{٢} \le س < ١ \\ -١ \quad ، & ١ \le س < \frac{٣}{٢} \\ ٠ \quad ، & \frac{٣}{٢} \le س < ٢ \\ ١ \quad ، & ٢ \le س < \frac{٥}{٢} \end{cases}$$

لاحظ هذه الفترة تجاوزت

لذا نقوم بموازنتها

$$ق(س) = \begin{cases} -٣ \quad ، & ٠ \le س < \frac{١}{٢} \\ -٢ \quad ، & \frac{١}{٢} \le س < ١ \\ -١ \quad ، & ١ \le س < \frac{٣}{٢} \\ ٠ \quad ، & \frac{٣}{٢} \le س < ٢ \\ ١ \quad ، & س = ٢ \end{cases}$$

<u>مثال:</u> أعد تعريف الاقتران $ق(س) = [\frac{١}{٣}س - ٢]$: $س \in [-٢ ، ٥]$

<u>الحل</u> $ق(-٢) = [-٢\frac{٢}{٣}] = -٣$

$ق(٥) = [-\frac{١}{٣}] = -١$

$-٣ \le \frac{١}{٣}س - ٢ < -٢$

$-١ \le \frac{١}{٣}س < ٠ \leftarrow -٣ \le س < ٠ \leftarrow ل = ٣$

$$ق(س) = \begin{cases} -٣ \quad ، & -٣ \le س < ٠ \\ -٢ \quad ، & ٠ \le س < ٣ \\ -١ \quad ، & ٣ \le س < ٦ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} -٣ \quad ، & -٢ \le س < ٠ \\ -٢ \quad ، & ٠ \le س < ٣ \\ -١ \quad ، & ٣ \le س \le ٥ \end{cases}$$

لاحظ هنا وضعت المساواة لان الفترة [٣، ٥]
تقع ضمنيا داخل الفترة [٣ ، ٦)

مثال: أعد تعريف الاقتران ق(س) = [١ - ١/٢ س] : س ∋ [-١ ، ٥]

الحل ق(-١) = ١ ق(٥) = ٢

-١ ≤ ١ - ١/٢ س < ٢

٠ ≤ - ١/٢ س < ١

٠ ≥ ١/٢ س > -١ ← -٢ < س ≤ ٠

›› ق(س) =
- ١ ، -١ ≤ س ≤ ٠
- ٠ ، ٠ < س ≤ ٢
- -١ ، ٢ < س ≤ ٤
- -٢ ، ٤ < س ≤ ٥

بالنسبة لهذه القيم لا تزعج نفسك بالتعويض

‹› اتبع القيمة الأولى وهنا هي (١) ثم :

١- اذا كان معامل س **موجب** فان القيم اسفلها **تصاعدية** كما في المثال السابق

٢- اذا كان معامل س **سالب** فان القيم اسفلها **تنازلية** كما في هذا المثال

سؤال: أعد تعريف الاقتران

ق(س) = | س | . [١/٢ س + ١] : س ∋ [-٣ ، ٣]

<u>سؤال مهاري</u> شامل القيمة المطلقة وأكبر عدد صحيح

أعد تعريف الاقتران :

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٥\text{س} & , \quad \text{س} \geq ٦ \\ [\, \frac{\text{س}}{٢} + ٢ \,] & , \quad ٢ \leq \text{س} < ٦ \\ |\, ٢\text{س} + ٣ \,| & , \quad \text{س} < ٢ \end{cases}$$

الاقتران النسبي : اذا كان ع(س) ، هـ (س) كثيري حدود وكان ق(س) = $\frac{ع(س)}{هـ(س)}$

: هـ (س) ≠ ٠ ، فإن ق(س) يسمى اقتران نسبي

مثال: ق(س) = $\frac{٢}{س-١}$

ق(س) = $\frac{-٣ س + ١}{س^٢+٢ س-٣}$

** وهنا يجب ان ننتقل لموضوع " أصفار المقام "

› أي اقتران نسبي أو كسري أي ($\frac{بسط}{مقام}$) فان له اصفار مقام ، واصفار المقام هي قيم س التي تجعل المقام يساوي صفرا

كيف نجدها ؟

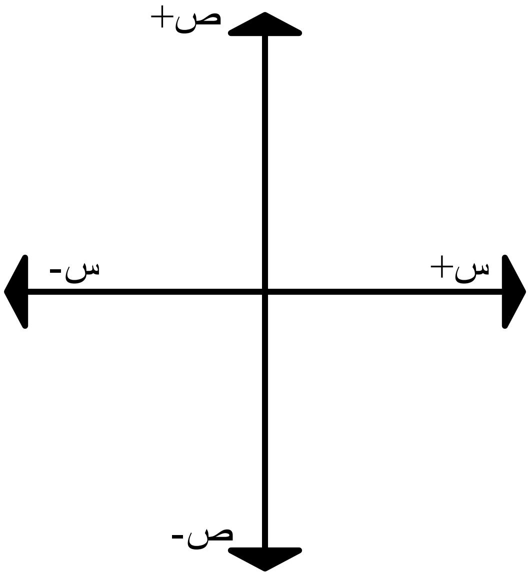
مثال: ق(س) = $\frac{س}{س^٢-١}$

◄ نجعل المقام يساوي صفرا ← س^٢-١ = ٠ ← س = ± ١

◄ اذا اصفار المقام هي س = { ± ١ }

ثانيا: تعيين النقاط على المستوى الديكارتي

المستوى الديكارتي " البياني " : عبارة عن احداثيين احدهما افقي ويسمى سيني وعلية نعين قيم س ، والأخر عمودي ويسمى صادي وعليه نعين قيم ق(س)



** في النقطة (أ ، ب) تعتبر أ هي المسقط السيني أي تعين على المحور السيني { س+، س- } ، و ب تعتبر المسقط الصادي أي تعيين على المحور الصادي { ص+ ، ص- } .

← نقول ق(أ) = ب

أي أن (أ ، ب) ≡ (أ ، ق(أ))

** ولإيجاد قيمة معينة في اقتران نقوم باستبدالها محل س .

مثال: اذا كان ق(س) = س^{٣} – ٢س^{٢} + س – ٧ ، جد ق(٢) .

الحل ق(٢) تكون محل كل س في الاقتران ق(س)

← ق(٢) = (٢)^{٣} – ٢ (٢)^{٢} + (٢) – ٧

= ٨ – ٨ + ٢ – ٧ = -٥

اذا النقطة تعين على المستوى باحداثيات (٢ ، -٥)

مثال: جد ىَ $(\frac{\pi}{4})$ في الاقتران ىَ(س) = جاس + جتاس

الحل ىَ $(\frac{\pi}{4})$ = جا $(\frac{\pi}{4})$ + جتا $(\frac{\pi}{4})$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{2}{\sqrt{2}}$

$= \sqrt{2}$

سؤال: جد ىَ(٠) في الاقتران ىَ(س) = $\frac{\text{لـو}(س+1)}{2س-3}$

ثالثا: المجال والمدى

♦ **المجال** : هو قيم **س** التي تعوض في الاقتران (المجال مرتبط مع المحور السيني)

♦ **المدى** : هو قيم ق(س) الناتجة من تعويض قيم س في الاقتران (المدى مرتبط مع المحور الصادي) .

** **إيجاد المجال والمدى** : لمعرفة المجال والمدى لاقتران معين يجب مسبقا تحديد نوع الاقتران .

◄ **كثير الحدود** مجاله دائما ح والمدى مرتبط بالاقتران ان كان زوجي او فردي

◄ **الجذر الزوجي** مجاله س ∋ ىَ(س) $\geq$ ٠ (أي ما بداخلة أكبر من صفر)

ومداه ح+

◄ **الجذر الفردي** مجاله ح ومداه ح

◄ **الاقتران النسبي** مجاله هو مجال البسط $\cap$ مجال المقام - { أصفار المقام }

◄ **الاقترانات المثلثية** (جـــا ىٯ(س) ، جتـــا ىٯ(س)) مجالها هو مجال ما بداخلها أي مجال ىٯ(س) ومداها [-١ ، ١]

. (ظـــا ىٯ(س)) مجاله ح – { $\frac{\pi}{٢}$ ن } ومداه ح

◄ **الاقتران اللوغاريتمي** ىٯ(س) = لـــو ع(س) ويكون مجال هذا الاقتران ع(س) > ٠ (أي ان ما بداخله اكبر من صفر) ومداه ح

◄ **الاقتران الأسي** ىٯ(س) = أ^{س} : أ>٠ ، أ≠١ ويكون مجاله ح ومداه ح+

** ملاحظه: جميع الاقترانات السابقة أعطي المجال والمدى لها في الحالة العامة ، غير ذلك اذا اضيف لها أي قيمة نتبع الازاحة.

__أمثلة:__ أوجد مجال كل من الاقترانات التالية

١- ىٯ(س) = س^{٥} – ٣س^{٢} + ١

٢- ىٯ(س) = $\sqrt{س - ١}$

٣- ىٯ(س) = $\sqrt[٣]{س - ١}$

٤- ىٯ(س) = (س + ١)^{٢}

٥- ىٯ(س) = ١ + س^{٢}

٦- ىٯ(س) = (٢س + ١)^{٣}

٧- ىٯ(س) = ١ + ٢س^{٣}

٨- $ى(س) = \frac{٢ س}{س - ١}$

٩- $ى(س) = \frac{لـو س}{س^٢ - ٤}$

الحل (يترك الحل للطالب)

رابعا: الزوايا المثلثية

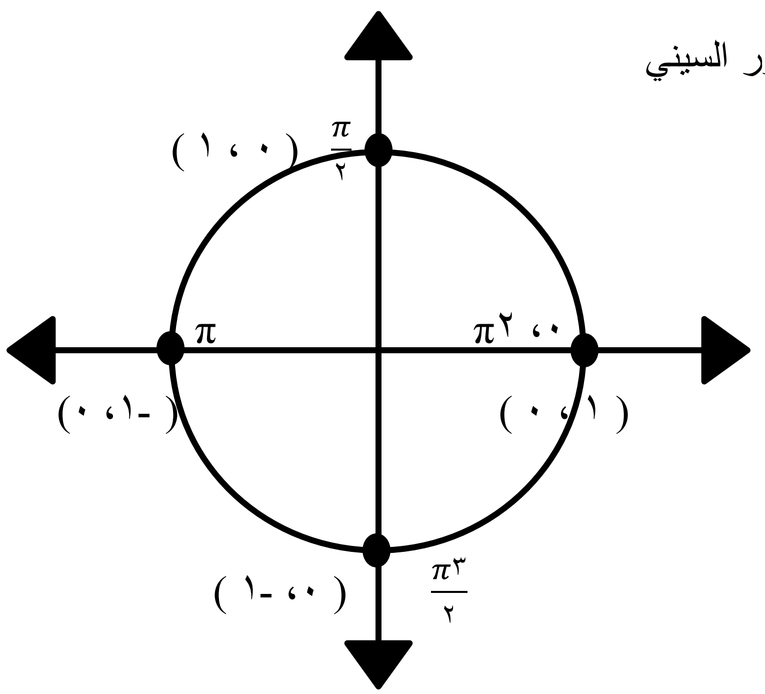
الزاوية	النسبة	جـا هـ	جتـا هـ	ظـا هـ
٠ ، ٣٦٠	٠ ، ٢π	٠	١	٠
٣٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
٤٥	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١
٦٠	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$
٩٠	$\frac{\pi}{٢}$	١	٠	قيمة غير معرفة
١٨٠	π	٠	١-	٠
٢٧٠	$\frac{\pi ٣}{٢}$	١-	٠	قيمة غير معرفة

دائرة الوحدة

الجيب : مرتبط مع المحور الصادي

جيب التمام : مرتبط مع المحور السيني

(جيب ، جتا)



خامسا: حل المعادلات المثلثية

والمقصود هنا إيجاد قيم س داخل معادلة تحوي اقترانات مثلثية.

مثال: جـــاس = $\frac{١}{٢}$ أي ما هي الزاوية س التي جيبها يساوي $\frac{١}{٢}$

← س = ٣٠° ≡ $\frac{\pi}{٦}$ راد

مثال: جتـــا (س+١) = $\frac{١}{٢}$ أي ما هي الزاوية س+١ التي جيب التمام لها يساوي $\frac{١}{٢}$.

← س + ١ = $\frac{\pi}{٣}$ ← س = ($\frac{\pi}{٣}$ – ١)راد

مثال: حل المعادلة المثلثية -٢جـــاس + جـــا^{٢}س + ١ = ٠

** في مثل هذه المعادلات نقوم بالفرض ، لذلك نفرض أن **ص = جـــاس**

الحل ص^{٢} – ٢ ص + ١ = ٠

← (ص – ١) (ص – ١) = ٠ ← (ص – ١)^{٢} = ٠

← ص = ١

أي جـــاس = ١ ← س = $\frac{\pi}{٢}$

♦ في جميع الأمثلة السابقة تم إيجاد الحل الأولي ، اما اذا طلب الحل العام فإننا نضيف للحل الأولي + ٢π ن

سادسا: المتطابقات المثلثية

* جـا^{٢} س + جتـا^{٢} س = ١

* جـا (س ± ص) = جـا س جتـا ص ± جتـا س جـا ص

* جتـا (س ± ص) = جتا س جتا ص ∓ جـا س جـا ص

* ظـا (س ± ص) = $\frac{\text{ظـاس} \pm \text{ظـاص}}{1 \mp \text{ظـاس ظـاص}}$

---

* جـا ٢س = ٢ جـا س جتـا س

* جتـا ٢س = جتـا^{٢} س – جـا^{٢} س

= ٢ جتـا^{٢} س – ١

= ١ – ٢ جـا^{٢} س

---

* جـاس ± جـاص = ٢ جـا $\frac{\text{س} \pm \text{ص}}{٢}$ جتـا $\frac{\text{س} \mp \text{ص}}{٢}$

* جتـا س + جتـا ص = ٢ جتـا $\frac{\text{س}+\text{ص}}{٢}$ جتـا $\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}$

* جتـا س – جتـا ص = -٢ جـا $\frac{\text{س}+\text{ص}}{٢}$ جتـا $\frac{\text{س}-\text{ص}}{٢}$

---

* جتـا س جتـا ص = ٠,٥ (جتـا (س+ص) + جتـا (س- ص))

* جـا س جـا ص = ٠,٥ (جتـا (س- ص) ـ جتـا (س+ ص))

* جـا س جتـا ص = ٠,٥ (جـا (س+ص) + جـا (س- ص))

---

* جـا (- س) = - جـا س

* جتـا (- س) = جتـا س

* ظـا (- س) = - ظـا س

سابعا: ضرب الاقترانات وقسمتها

◄ **أولا:** ضرب اقتران في ثابت " وهنا نضرب الثابت في كل حد من حدود الاقتران "

مثال: ٧ × (س^{٢} + ٢س – ١) = ٧س^{٢} + ١٤ س – ٧

◄ **ثانيا:** ضرب اقترانين " وهنا نستخدم خاصية توزيع الضرب على الجمع "

مثال: (س+٢) × (س^{٢} – ٣س + ٢)

= س (س^{٢} – ٣س + ٢) + ٢ (س^{٢} – ٣س + ٢)

= س^{٣} – ٣س^{٢} + ٢س + ٢س^{٢} – ٦س + ٤

= س^{٣} – س^{٢} – ٤س + ٤

◄ **ثالثا:** قسمة اقترانين

وتقسم القسمة الى نوعين وهما **القسمة الطويلة** وتستخدم بشكل عام و**القسمة التركيبية** وتستخدم اذا كان المقسوم علية اقتران خطي

اذا كان ن(س) = $\frac{\text{ع(س)}}{\text{هـ(س)}}$ فإن ع(س) تسمى المقسوم و هـ (س) المقسوم علية

♦ وبعد اجراء عملية القسم يكتب الناتج على الشكل :

ن(س) = الناتج + $\frac{\text{الباقي}}{\text{هـ(س)}}$

♦ درجة ن(س) = درجة ع(س) – درجة هـ (س)

القسمة الطويلة

مثال: جد $\frac{س^{٣} + ٢ س + ٥}{س - ٢}$

الناتج

$س^{٢} + ٢س + ٦$

المقسوم علية

$س - ٢$ | $س^{٣} + ... + ٢س + ٥$

المقسوم

$-$

$س^{٣} - ٢س^{٢}$

$٢س^{٢} + ٢س + ٥$

$-$

$٢س^{٢} - ٤س$

$٦س + ٥$

$-$

$٦س - ١٢$

١٧

الباقي

تتوقف العملية عندما تصبح درجة الباقي
اقل من درجة المقسوم علية

.

$$\leftarrow \frac{س^{٣} + ٢ س + ٥}{س - ٢} = (س^{٢} + ٢س + ٦) + \frac{١٧}{س - ٢}$$

تدريب: جد $\frac{س^{٤} - ٣ س - ٧}{س^{٢} + ١}$

الحل: $س^{٢} - ١ + \frac{-٣ س - ٦}{س^{٢} + ١}$

القسمة التركيبية

مثال: جد $\frac{\text{س}^{٣}+٢\text{س}+٥}{\text{س}-٢}$

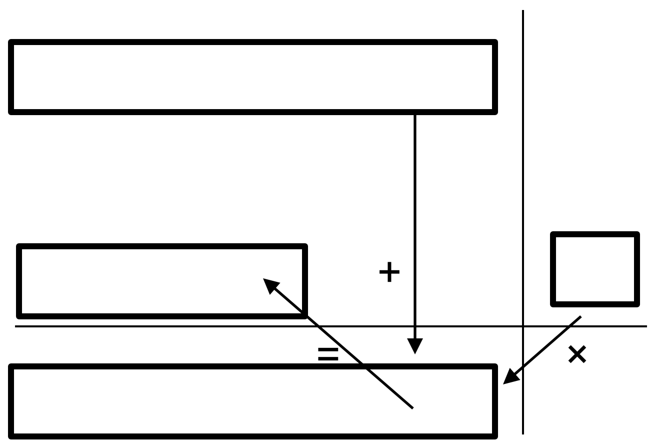
صفر المقام	$\text{س}^{٣}$	$\text{س}^{٢}$	س	جـ	
	١	٠	٢	٥	← معاملات س
٢		٢	٤	١٢	
	١	٢	٦	١٧	← الباقي

معاملات الناتج

درجة الناتج = درجة المقسوم – ١

← الناتج $\text{س}^{٢}$ + ٢س + ٦ والباقي ١٧

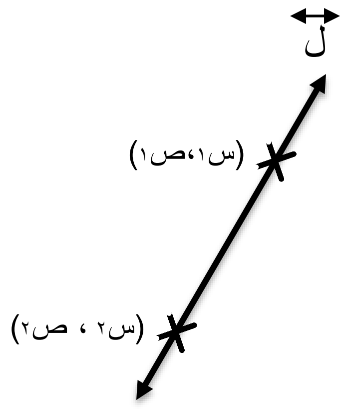
** رسم توضيحي لعملية القسمة التركيبية



ثامنا: معادلة الخط المستقيم والمحاور

في المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ نجد ميله عن طريق

القانون $\text{م} = \dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \dfrac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$



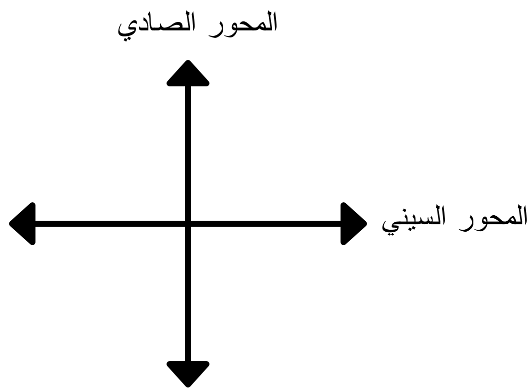
وبالتالي فإن معادلة هذا المستقيم هي :

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م} \left(\text{س} - \text{س}_1 \right)$$

حيث (س_1 ، ص_1) نقطة واقعه على المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}}$.

** ملاحظة: يمكنك اختيار أي نقطة على المستقيم ((لأن جميع النقاط على استقامة واقعه))

معادلة المحاور



- معادلة المحور السيني هي ص=٠
- معادل المحور الصادي هي س=٠

◄ في بعض الأحيان يطلب منك رسم مستقيمات موازية للمحاور لذلك

- أي مستقيم يكون بمعادلته المتغير س فان المستقيم موازي للمحور الصادي
- أي مستقيم يكون بمعادلته المتغير ص فان المستقيم موازي للمحور السيني

مثال جد معادلة المستقيم الذي يقع عليه النقطتان أ (٢، ٣) ب (-١ ، ١)

الحل م = $\frac{٣-١}{٢--١}$ = $\frac{٢}{٣}$

ص – ص١ = م (س – س١)

ص – ٣ = $\frac{٢}{٣}$ (س – ٢) نختار أحد النقطتين أ او **ب** // وهنا اخترنا أ

ص = $\frac{٢}{٣}$ س - + $\frac{٨}{٣}$

تمارين

١- جد معادلة المستقيم الذي ميله -١ والنقطة (-٢، ١) تقع علية

٢- ما ميل المستقيم ٢ص = ٣س + ٦

تذكر: في المعادلة العامة ميل س & ص = ١

٣- ارسم كلا من المستقيمات التالية

‹› س = ٣ ، س = -٢

‹› ص = هـ ، ص = -١

تاسعا: تحليل الاقترانات

أولا: فرق بين مربعين

أ^{٢} – ب^{٢} = (أ – ب) (أ + ب)

مثال: ٤ – س^{٢} = (٢)^{٢} – (س)^{٢}

= (٢ – س) (٢ + س)

** يسمى (أ – ب) مرافق تربيعي لـ (أ + ب) والعكس صحيح

مثال: مرافق س + ٣ هو س – ٣

ثانيا: فرق بين مكعبين

أ^{٣} – ب^{٣} = (أ – ب) (أ^{٢} + أ ب + ب^{٢})

مثال: س^{٣} – ٨ = (س)^{٣} – (٢)^{٣}

= (س – ٢) (س^{٢} + ٢س + ٤)

** يسمى (أ – ب) مرافق تكعيبي لـ (أ^{٢} + أ ب + ب^{٢}) والعكس صحيح

ثالثا: مجموع مكعبين

أ^{٣} + ب^{٣} = (أ + ب) (أ^{٢} – أ ب + ب^{٢})

مثال: س^{٣} + ٦٤ = (س)^{٣} + (٤)^{٣}

= (س + ٤) (س^{٢} – ٤ س + ١٦)

** دائما اذا اردت التأكد من حلك سواء هنا او في أي تحليل آخر اضرب الناتج فان كان نفس المقدار المعطى فالحل صحيح

تدريب: جد ناتج (س + ٤) × (س^{٢} – ٤ س + ١٦)

<u>عاشرا: تركيب الاقترانات</u>

" أي تعويض اقتران داخل اقتران آخر " ، ويرمز له بالرمز " ٥ " ويقرأ بعد .

← (ق ٥ ع)(س) = ق (ع (س)) وتقرأ **ق** بعد **ع** لـ س

<u>مثال:</u> اذا كان ق(س) = س + ١ وكان ع(س) = س^{٢} – ٧

جد : ١) (ق ٥ ع) (س)

٢) (ع ٥ ق)(س)

٣) (ق ٥ ع)(-١)

<u>الحل:</u> ١) (ق ٥ ع) (س) = ق (ع (س))

= ق (س^{٢} – ٧)

= (س^{٢} – ٧) + ١ = س^{٢} – ٦

٢) واجب

٣) واجب