

Math

التفوق

فهم الرياضيات

للمرحلة الثانوية / الفرع الأدبي المستوى الثالث

(تأسيس + شرح مفصل للمادة + أمثلة محلولة + اختبار في نهاية كل وحدة مع الإجابة)

إعداد

أ. بشار أبو العمّاش

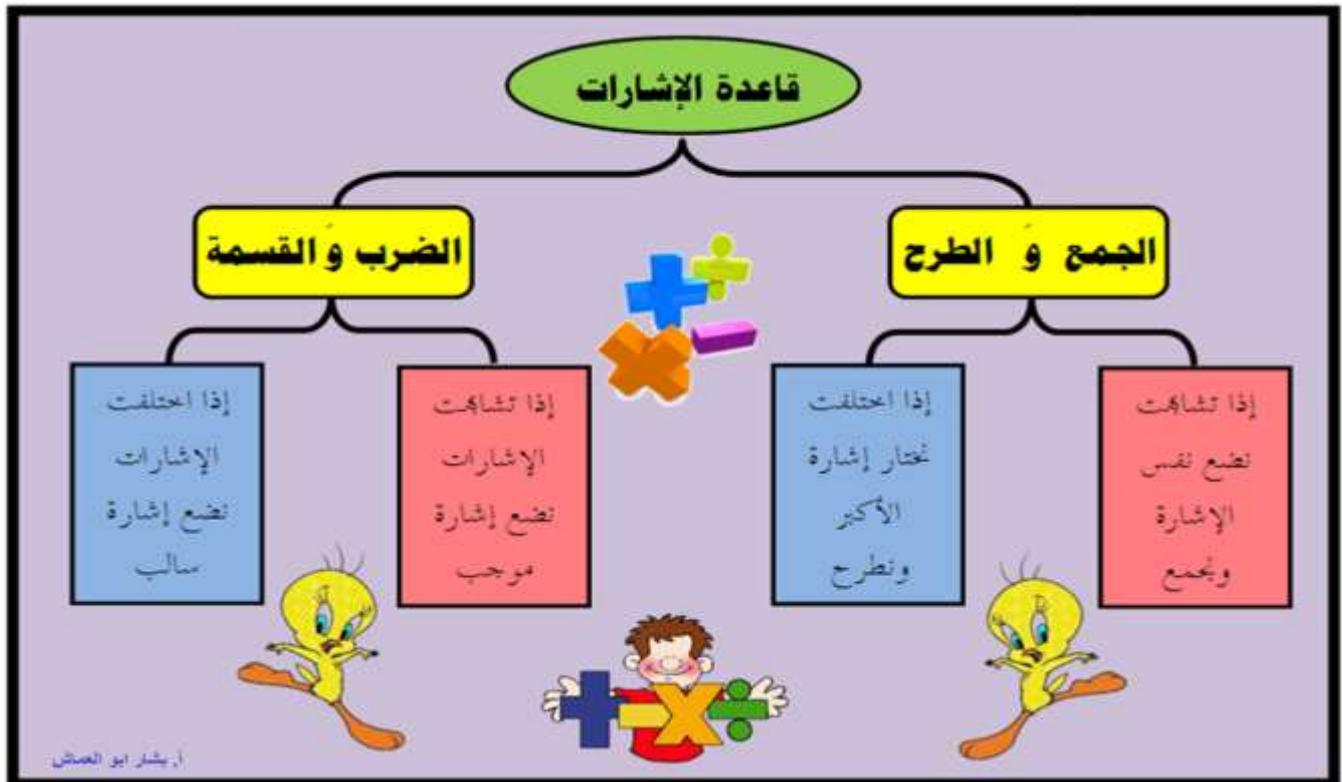
٠٧٧٢٨٨٧٠٦٦



وقل زدني علماً







أمثلة ...

(أ) $12 = 8 + 4$ (لاحظ معي ان الرقمين لهما نفس الاشارة)

(ب) $3 = 5 + 2$ (الرقمين مختلفين في الاشارة، طرحنا واشاره الناتج اشارة العدد الأكبر)

(ج) $6 - = 2 \times 3 -$ (الرقمين مختلفين في الاشارة، اذا اشارة الناتج راح تكون سالبة)

(د) $4 = 2 - \div 8 -$ (لاحظ الرقمين متشابهين في الاشارة معناته اشارة الناتج موجبة)

لا تُحاول

بأن

لا تُحاول

(أ) $3 - + 6 =$ _____ (ب) $3 - \times 9 =$ _____

(ج) $10 - 9 =$ _____ (د) $6 - \times 3 =$ _____

مجموع الرقم ومعكوسة دائما يساوي صفر مثلا ..

(أ) $2 - + 2 =$ صفر (ب) $3 - - 3 =$ صفر

(ج) $5 - + 5 =$ صفر (د) $10 - - 10 =$ صفر

ما هي أولويات العمليات الحسابية ؟

عزيزي الطالب عند إجراء العمليات الحسابية بين الحدود تكون الأولوية لـ:

١. ما داخل الأقواس (.....

٢. الأسس

٣. الضرب والقسمة

٤. الجمع والطرح

حاول حل المثال التالي..

$$٢٦ = \text{الجواب النهائي} = ٢ \div ١٠ - ٦ + (١ - ٢ \times ٣)$$

$$= ٢ - ٣ \times (١ + ٢ -)$$

اولا نجري ما داخل القوس $(١ + ٢ -) = ١ -$

ثانيا نأخذ تربيع الناتج $(١ -) = ١$

ثالثا تضرب الناتج في ٣ ثم نطرح من ٢

فيكون الناتج النهائي = ١

طيب نؤخذ مثال

جمع الكسور وطرحها :

أول قاعدة اذا كانت المقامات متساوية ما عليك غير تطرح أو تجمع

$$\frac{٩}{١٠} = \frac{٦}{١٠} + \frac{٣}{١٠}$$

(شوف بس جمعنا البسط فقط والمقام كما هو)

القاعدة الثانية : اذا كانت المقامات مختلفة شو نعمل

كل اللي تعمله ضرب تبادلي وبعدها تضرب مقام الكسر الاول بالثاني

$$\text{مثال} \quad \frac{٥}{١٨} = \frac{٩ - ٤}{١٨} = \frac{٩ \times ١ - ٢ \times ٢}{٢ \times ٩} = \frac{١}{٢} - \frac{٢}{٩}$$

ضرب الكسور

في حالة ضرب الكسور ما عليك غير تضرب البسط بالبسط

والمقام بالمقام والله يعطيك العافية، نؤخذ مثال :

$$\frac{٩}{٥} = \frac{١٨}{١٠} = \frac{٣ \times ٦}{٢ \times ٥} = \frac{٣}{٢} \times \frac{٦}{٥}$$

(لاحظ انه بسطنا لابطس صورة بالقسمة على (٢) البسط والمقام لانه كلا منهما يقبل ذلك)

قسمة الكسور

اهل
المهنة في حالة القسمة شو نعمل ...

- اولا نترك الكسر الأول كما هو

$$\frac{8}{21} = \frac{4}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{4} \div \frac{2}{7}$$

طيب نؤخذ مثال

- بعدين نحول عملية القسمة لضرب

- وآخر شي نقلب الكسر الثاني

(يعني نقلب المقام مكان البسط والبسط مكان المقام)

قواعد الأسس

اهل
المهنة $A^m \times A^n = A^{m+n}$ (في حالة الضرب تجمع)

$$\text{مثال } (2^6 \times 2^6) = 2^6$$

اهل
المهنة $\frac{A^m}{A^n} = A^{m-n}$ (في حالة القسمة تطرح) مثال: $\frac{2^6}{2^4} = 2^2$

اهل
المهنة $\frac{1}{A^n} = A^{-n}$ (يعني اذا كان عندي سالب في الاس، نقلب ويصبح موجب)
المثال السابق مثلا ...

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$$

اهل
المهنة (أي عدد قوة صفر = ١) مثال: $7^1 = 7$ ، $2^0 = 1$... الخ

اهل
المهنة (أي عدد قوة ١ = نفس العدد) يعني اذا ما كان في قوة للعدد بتكون قوته واحد

$$\text{مثال: } 8 = 8^1 , 9 = 9^1 \dots \text{ الخ}$$

اهل
المهنة $(A \times B)^n = A^n \times B^n$ (يعني نوزع الأس على ما في القوس) مثال $(6 \times 5)^2 = 6^2 \times 5^2$

المقادير الجبرية

✓ الحد الجبري : هو عبارة عن حاصل ضرب عدد ثابت بمتغير أو أكثر ويسمى العدد الثابت (معامل الحد الجبري) ، والمتغيرات بأسسها تسمى (القسم الرمزي) .

مثال: ٥ س : حد جبري معامله ٥ ، وقسمه الرمزي هو س .

مثال: ٧ س ص : حد جبري معامله ٧ ، وقسمه الرمزي س ص .

✓ المقادير الجبرية : هي عبارة عن حدين جبريين أو أكثر يفصل بينهما إشارة زائد (+) أو ناقص (-).

مثال: ٣س + ٢ص : هو مقدار جبري يتكون من حدين جبريين يفصل بينهما إشارة زائد (+)

معامله ٣ ، ٢ ، وقسمه الرمزي س ، ص .

قواعد أساسية:

✓ $أس \pm ب س = (أ \pm ب) س$ (جمع الحدود الجبرية المتشابهة وطرحها يتم بجمع وطرح معاملاتهما اذا تساوت الاسس فقط)

✓ $ص \times (أ \pm ب) = أ ص \pm ب ص$ (خاصية توزيع الضرب على الجمع)

مثال: ✨ $٥ س + ٤ س = ٩ س$

مثال: ✨ $٢٢ ص - ١٢ ص = ١٠ ص$

مثال: ✨ $٤ س ص + ٥ ص = ٤ س ص + ٥ ص$

مثال: ✨ $٩ س + ٣ ص = ٩ س + ٣ ص$

مثال: ✨ $٥ س \times ٤ س = ٢٠ س^٢$

مثال: ✨ $٧ ك \times ٣ ك ص = ٢١ ك^٢ ص$

مثال: ✨ $٣ س \times (٢ س + ٤ ص) = ٣ س \times ٢ س + ٣ س \times ٤ ص = ٦ س^٢ + ١٢ س ص$



تدريب ...

أوجد ناتج ما يلي:

$$\underline{\hspace{10cm}} = 5س + 19س \checkmark$$

$$\underline{\hspace{10cm}} = 24ص - 20ص ع \checkmark$$

$$\underline{\hspace{10cm}} = 15ص - 2س \checkmark$$

$$\underline{\hspace{10cm}} = 4س \times 9س \checkmark$$

$$\underline{\hspace{10cm}} = 8ص^2 \times 4ص^5 \checkmark$$

$$\underline{\hspace{10cm}} = 5س^5 \times 4س^2 \checkmark$$

$$\underline{\hspace{10cm}} = 5س - 3ص + (2س + 7ص) \checkmark$$

$$\underline{\hspace{10cm}} = 14ص ع + 3ص - (5س + 5ع - 3ص) \checkmark$$

$$\underline{\hspace{10cm}} = 7س \times (3ص + 2س) \checkmark$$



حساب القيمة العددية لمقدار جبري معلوم فيه قيم المجاهيل :

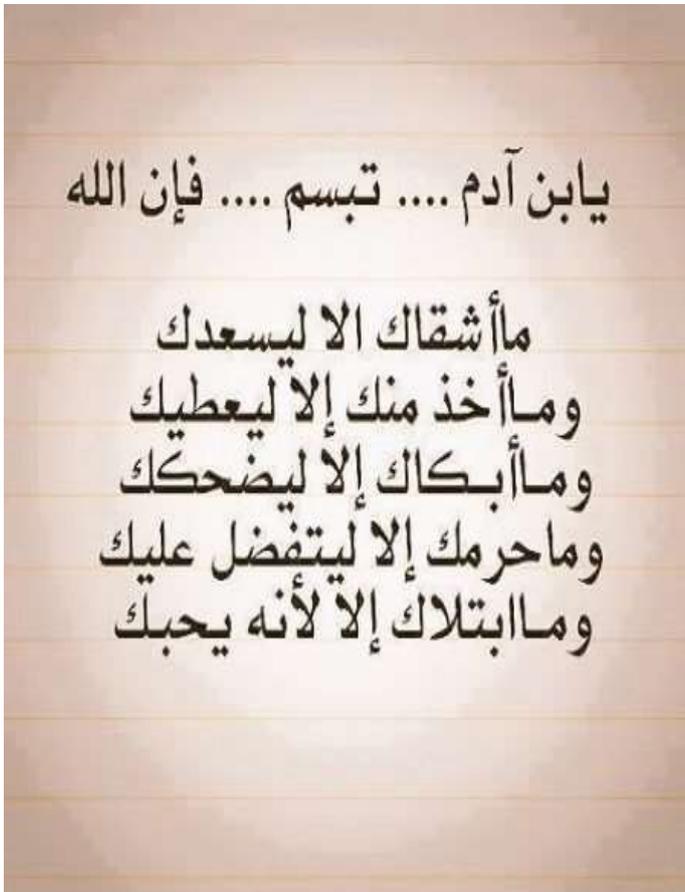
✓ التعويض : استبدال المتغير أو المتغيرات في المقدار الجبري بقيم عددية مفروضة لحساب القيمة العددية للمقدار الجبري .

مثال : جد القيمة العددية للمقدار الجبري $3س - 2ص + ٢ع$ ، إذا كانت $س = ١$ ، $ص = ٢$ ، $ع = ٣$.

الحل : (فقط عوض مباشرة مكان كل مقدار قيمته وجد الناتج)

$3س - 2ص + ٢ع = 3(١) - 2(٢) + 2(٣) = 3 - 4 + 6 = 5$.
سؤال: جد القيمة العددية للمقادير الجبرية التالية ، إذا كانت $س = ٢$ ، $ص = ١$ ، $ق = ١$:
 $2س - 3ص + ٣ق =$

انواع الاقترانات ...



أهمية
الاقتران الثابت.

أهمية
الاقتران الخطي

أهمية
الاقتران التربيعي.

أهمية
الاقتران الكسري.

أهمية
الاقتران المتشعب.

أهمية
اقتران أكبر عدد صحيح.

أهمية
الاقتران العكسي.

أهمية
اقتران القيمة المطلقة.

الاقتران الثابت ...

بهذا الاقتران سيكون عندنا فقط ثابت مثل ق(س) = ٨ .

مثلا ... اذا كانت ق(س) = ٩ فجد ما يلي ...

نلاحظ انه مهما أخذنا أي قيمة للاقتران ق(س) ستبقى كما هي ثابتة، لهذا يسمى اقتران ثابت.

$$\left. \begin{array}{l} \text{ق}(٢) = ٩ \\ \text{ق}(١٠٠) = ٩ \\ \text{ق}(-٥) = ٩ \end{array} \right\}$$

الاقتران الخطي ...

في هذا الاقتران صورته العامة ق(س) = أس + ب

أمثله ... ق(س) = ٢س + ٨ ؛ هـ(س) = ٤ - ٦س ... الخ

مثال.. اذا كانت ق(س) = ٦س - ٩ فجد ما يلي ..

لاحظ انه كل ما عملناه هو تعويض العدد مكان (س) فقط وإيجاد الناتج.

$$\left. \begin{array}{l} \text{ق}(٢) = ٩ - ٢ \times ٦ = ٣ \\ \text{ق}(-١) = ٩ - ١ \times ٦ = ٣ \end{array} \right\}$$

ق(٤) = (أكمل)

ق(-٢) = (أكمل)



تحليل العبارة التربيعية .

الصورة العامة له ← أس^٢ + ب س + ج

حيث ...

(أ معامل س^٢ ، ب معامل س ، ج الحد الثابت)

وعند تحليلها (نبحث عن رقمين حاصل ضربيهما الحد الثابت (ج) وحاصل جمعهما معامل(س))

مع مراعاة الإشارة (سالب ام موجب) وملاحظة ان اشارة العدد الاكبر في التحليل دائما يوخذ إشارة (ب) معامل س^٢

$$\text{مثال : حل ق(س)} = \text{س}^2 + ٥\text{س} + ٤$$

الخطوات ...

أولا .. نجد عددين حاصل ضربيهما (٤) الحد الثابت وجمعهما (٥) معامل س

العددين (١ ، ٤) حاصل ضربيهما = ٤ ، وحاصل جمعهما = ٥

$$\text{س}^2 + ٥\text{س} + ٤ = (\text{س} + ١)(\text{س} + ٤)$$

$$\text{مثال آخر ق(س)} = \text{س}^2 - ٥\text{س} + ٦$$

الخطوات ...

أولا .. نجد عددين حاصل ضربيهما (٦) الحد الثابت وجمعهما (-٥) معامل س

العددين (٣ ، ٢) حاصل ضربيهما = ٦ ، وحاصل جمعهما = ٥

$$\text{س}^2 - ٥\text{س} + ٦ = (\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)$$

لاحظ إشارة معامل س دائما عند العدد الاكبر وهنا (٣)



وبشكل عام كيف نحدد الاشارات عند حل المعادلة التربيعية ؟

$$(1) \text{ أس}^2 + \text{ب س} + \text{ج} = (\text{س} + \text{أ}) (\text{س} + \text{ب})$$

(معامل س + والحد الثابت + التحليل للرقمين +)

$$(2) \text{ أس}^2 - \text{ب س} + \text{ج} = (\text{س} - \text{أ}) (\text{س} - \text{ب})$$

(معامل س (-) والحد الثابت (+) التحليل للرقمين (-))

$$(3) \text{ أس}^2 - \text{ب س} - \text{ج} = (\text{س} - \text{أ}) (\text{س} + \text{ب})$$

(معامل س (-) ومعامل الحد الثابت (-) التحليل الرقم الأكبر سالب والأصغر موجب)

$$(4) \text{ أس}^2 + \text{ب س} - \text{ج} = (\text{س} + \text{أ}) (\text{س} - \text{ب})$$

(معامل س (+) ومعامل الحد الثابت (-) التحليل للرقم الأكبر موجب والأصغر سالب)

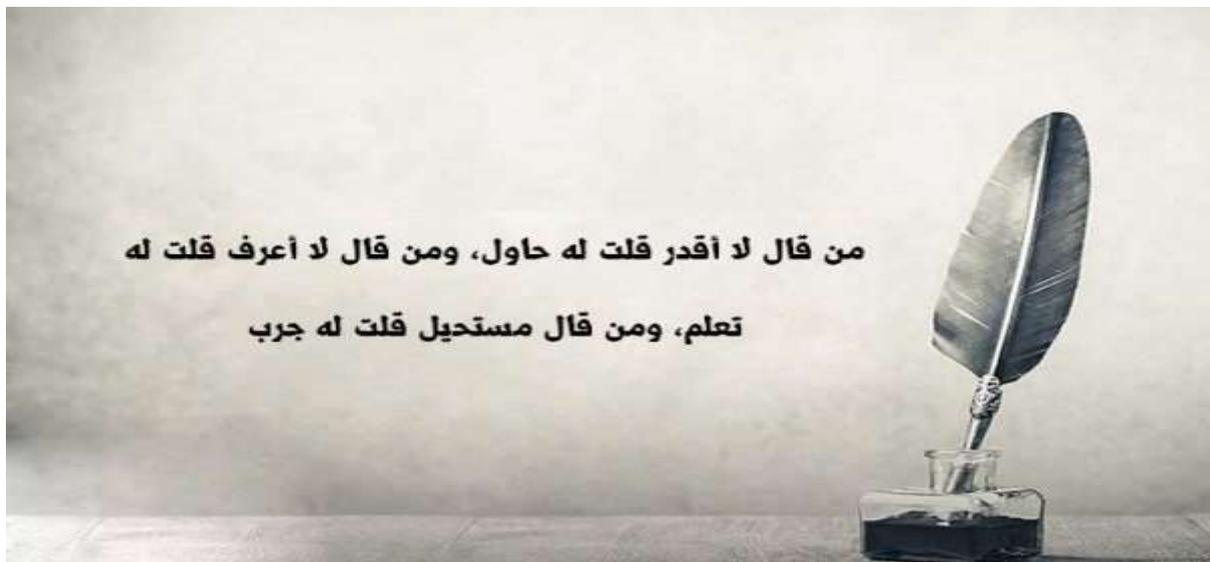
تدريبات

$$(1) \text{ ق(س)} = \text{س}^2 - \text{س}^3 - 4$$

$$(2) \text{ ق(س)} = \text{س}^2 - 6\text{س} + 9$$

$$(3) \text{ ق(س)} = \text{س}^2 + \text{س} - 2$$

$$(4) \text{ ق(س)} = \text{س}^2 - 2\text{س} + 1$$



تحليل الفرق بين مربعين..

$$\text{الصورة العامة (س-أ)} = (س^2 - أ^2) = (س+أ)(س-أ)$$

كيف نجد تحليلها؟

$$\text{ق(س)} = س^2 - ٢٥$$

(- س² عبارة عن س × س (- ٢٥ عبارة عن ٥ × ٥

$$(س + ٥) (س - ٥)$$

عند التحليل نفتح قوسين ونوزع س وال ٥

مثال:

تدريب

حلل المقادير الجبرية الآتية:

$$(١) (س^2 - ٤٩)$$

$$(١) (س^2 - ١٦) = (س + ٤)(س - ٤)$$

$$(٢) (س^2 - ٤)$$

$$(٢) (س^2 - ٨١) = (س + ٩)(س - ٩)$$

$$(٣) (س^2 - ٢٥)$$

$$(٣) (س^2 - ٩) = (س + ٣)(س - ٣)$$

$$(٤) (س^2 - ٨١)$$

$$(٤) (س^2 - ٣٦) = (س + ٦)(س - ٦)$$

تحليل مجموع بين مربعين..

$$(س^2 + أ^2) = \text{لا يمكن تحليله}$$

مثال:

حلل المقادير الجبرية الآتية:

$$(١) (س^2 + ١٦) = \text{لا يمكن تحليله}$$

$$(٢) (س^2 + ٢٥) = \text{لا يمكن تحليله}$$



تحليل الفرق بين مكعبين..

الصورة العامة له

$$(أ^٣ - ب^٣) = (أ - ب)(أ^٢ + أب + ب^٢)$$

أي (الحد الأول - الحد الثاني) (مربع الحد الأول + الحد الأول × الحد الثاني + مربع الحد الثاني)

مثال:

تدريب

$$(١) (٨ - س^٣)$$

$$(٢) (١ - س^٣)$$

$$(٣) (س^٣ - ١٢٥)$$

حلل المقادير الجبرية الآتية:

$$(١) س^٣ - ٦٤ = (س - ٤)(س^٢ + ٤س + ١٦)$$

$$(٢) س^٣ - ٢٧ = (س - ٣)(س^٢ + ٣س + ٩)$$

تحليل مجموع بين مكعبين..

الصورة العامة له

$$(أ^٣ + ب^٣) = (أ + ب)(أ^٢ - أب + ب^٢)$$

أي (الحد الأول + الحد الثاني) (مربع الحد الأول - الحد الأول × الحد الثاني + مربع الحد الثاني)

مثال:

$$(١) س^٣ + ٦٤ = (س + ٤)(س^٢ - ٤س + ١٦)$$

$$(٢) س^٣ + ٨ = (س + ٢)(س^٢ - ٢س + ٤)$$

مفكوك القوس التربيعي...

الصورة العامة

$$(س + أ)^٢ = س^٢ + ٢سأ + أ^٢$$

أي .. مربع الأول + ٢ × الحد الأول × الحد الثاني + مربع الحد الثاني

مثال:

$$(س + ٦)^٢ = س^٢ + ٢س٦ + ٣٦$$

الحد الأول × الحد الثاني

$$= س^٢ + ١٢س + ٣٦$$

مثال:

$$(١) (س + ٣)^٢ = س^٢ + ٦س + ٩$$

$$(٢) (س - ٥)^٢ = س^٢ - ١٠س + ٢٥$$

التحليل بأخذ عامل مشترك ...

عند أخذ s كعامل مشترك من الحدود نأخذ s المرفوعة لأقل قوة

مثال :

حلل المقادير الجبرية الآتية إلى عواملها الأولية :

$$(1) \quad s^3 + 2s^2 + s = s(s^2 + 2s + 1)$$

$$(2) \quad s^4 - 27s = s(s^3 - 27) \quad (\text{أصبحت الفرق بين مكعبين})$$

$$= s(s - 3)(s^2 + 3s + 9)$$

$$(3) \quad s^4 - s^2 = s^2(s^2 - 1)$$

الاقتران المتشعب ...

لهذا الاقتران أكثر من قاعدة كما في المثال التالي

$$\left. \begin{array}{l} s^2 \geq 1 - s > 2 \quad (\text{هذه القاعدة لجميع الأرقام التي تقل عن } -1) \text{ وأقل من } 2 \\ s - 3 < 2 \quad (\text{هذه القاعدة لجميع الأرقام التي هي أكبر من } 2) \end{array} \right\} = \text{إذا كانت } q(s)$$

فجد $q(-1)$ ، $q(0)$ ، $q(2)$ ، $q(-4)$ ، $q(5)$

$$q(-1) = \text{يطبق على القاعدة الأولى } (s^2) = (-1)^2 = 1$$

$$q(3) = \text{يطبق على القاعدة الثانية } (s - 3) \text{ لأنه } 3 \text{ أكبر من } 2 \text{ أكمل الحل ...}$$



الوحدة الاولى

النهايات والاتصال

الدرس الاول : مفهوم النهاية

الملاحظة إذا كانت $(س) = ٢س + ١$ فان نهاية $(س) =$ أي انه عندما $(س)$ تأخذ قيمة قريبة من (٢) فان $(س)$

تأخذ قيمة قريبة من العدد (٢) (أي أن النهاية تقترب من العدد (٢) ولكن لا تساويه)

الملاحظة نهاية $(س)$ (تقرأ نهاية الاقتران $ق(س)$) عندما $س$ تقترب (تؤول) من العدد (٢)

نهاية $(س)$ ————
 نهاية $(س)$ ————
 تذكر هذا اتجاه وليس إشارة
 نهاية $(س)$ ————
 نهاية $(س)$ ————

الملاحظة تكون النهاية موجبة ———— ودية إذا كانت نهاية $(س) =$ نهاية $(س)$

أي النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

النهاية من الجدول

الملاحظة في حال طلب النهاية من الجدول (طبعا سيكون الجدول معطي) ما عليك غير من جهة اليمين

نزل العدد كما هو بدون الاعداد اللي بعد الفاصلة ، ومن جهة اليسار بنزيد واحد للرقم

الملاحظة مثال: بالاعتماد على الجدول التالي الذي يمثل $ق(س)$ ($س$) أجب عما يأتي:

٢,٩	٢,٩٩	٢,٩٩٩	٣	٣,٠٠١	٣,٠١	٣,٠١	س
٦,٩	٦,٩٩	٦,٩٩٩		٥,٠٠١	٥,٠١	٥,٠١	ق(س)

بنزيد للرقم ٦ واحد فتصبح (٧)

بنزله مثل ما هو (٥)

$$(١) \text{نهاية } ق(س) = ٥ \quad (٢) \text{نهاية } ق(س) = ٧$$

(٣) نهاية $ق(س) =$ بما انه اليمين لا يساوي اليسار اذا نهاية الـ ٣ غير موجودة

تدريب: بالاعتماد على الجدول الآتي الذي يبين قيم h (س) عندما $s = 2$ فإن نهايتها h (س) تساوي :-

1.997	1.998	1.999		2.0001	2.001	2.01	س
0.997	0.998	0.999		0.1001	0.101	0.11	h (س)
5 (د)		1 (ج)		غير موجودة (ب)			0 (پ)

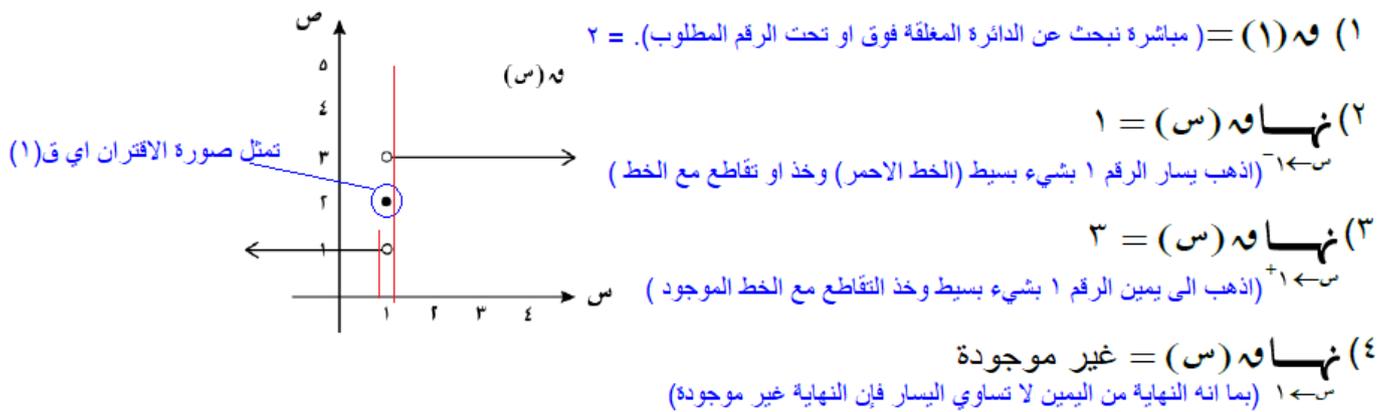
النهاية من الرسم وإيجاد المجاهيل

في نهايات الرسم والجدول وخط الاعداد اذا لم يحدد السؤال يمين او يسار نحن نعمل يمين ونعمل يسار ثم نجد النهاية

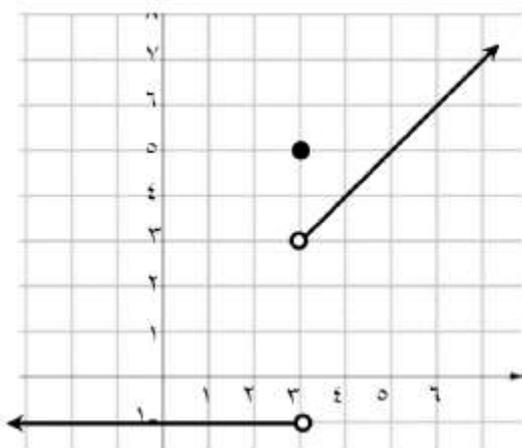
الدوائر في رسومات النهايات ليس لها علاقة في حساب النهاية

مع ملاحظة ان الدائرة المغلقة تمثل صورة الاقتران ولا علاقة لها بالنهاية

مثال: اعتمادا على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران h (س) جد ما يلي .



تدريب 1 معتمدا على الشكل الذي يمثل منحنى h (س) جد:

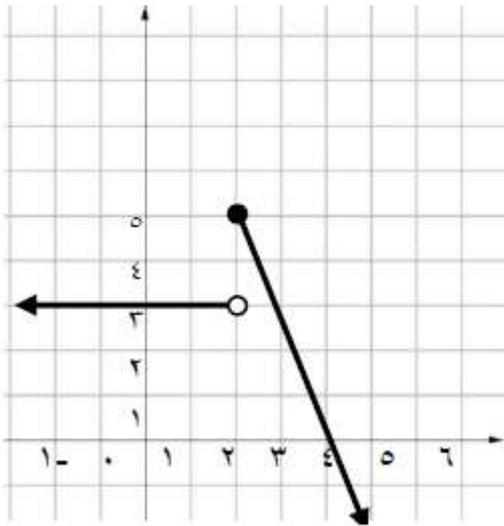


(1) نهايتها h (س) = 3
 $s \leftarrow$

(2) نهايتها h (س) = 3
 $s \leftarrow$

(3) نهايتها h (س) = 7
 $s \leftarrow$

المهمة تدريب ٢ معتمدا على الشكل الذي يمثل منحنى ق (س) جد:



(١) نها \leftarrow س \leftarrow ٢ (س)

(٢) نها \leftarrow س \leftarrow +٤ (س)

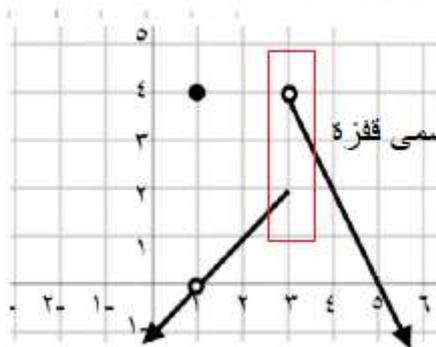
(٣) نها \leftarrow س \leftarrow -٤ (س)

(٤) نها \leftarrow س \leftarrow ٤ (س)

(٥) نها \leftarrow س \leftarrow (س) + س \leftarrow ٢ + ٥

إيجاد المجاهيل من الرسم ...

مثال: جد مجموعة قيم ب حيث نها \leftarrow س (س) غير موجودة.

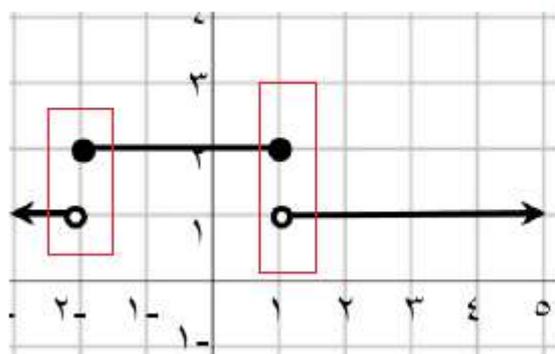


(نبحث عن الرقم على محور السينات اللي فوقه او تحته ففزة)

هذه تسمى ففزة

قيمة ب = ٣

مثال جد مجموعة قيم أ حيث نها \leftarrow س (س) غير موجودة.



إذا قيمة أ = { ١ ، ٢- }

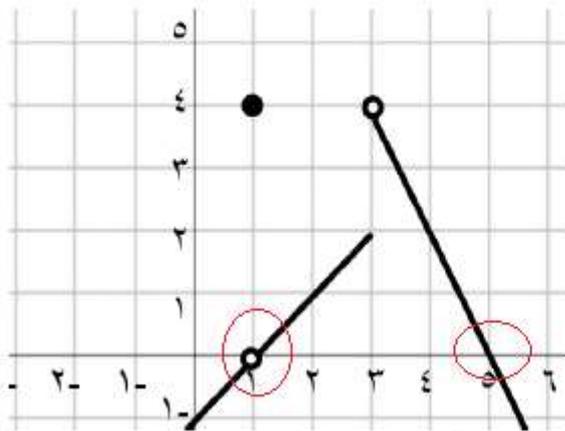
ضع قدمك على أول

خطوة لطريقك للنجاح

وعينك على آخره

إذا كان مُعطى مجهول وكانت النهاية تساوي صفر
كل ما عليك هو البحث عن خطوط التقاطع مع محور السينات

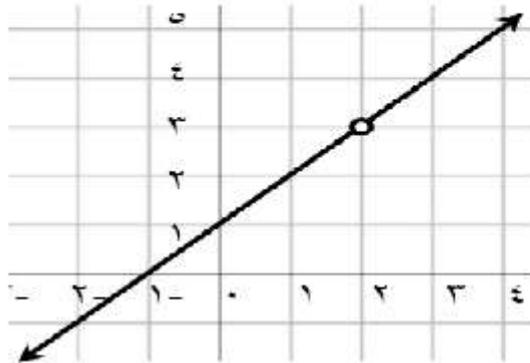
مثال: جد مجموعة قيم x التي تجعل $f(x) = 0$.



(تقاطع محور السينات)

إذا قيم $x = \{0, 1\}$

تدريب جد مجموعة قيم x التي تجعل $f(x) = 0$.



الدرس الثاني. نظريات النهايات

أهم الميزة الأصل في أي نهاية التعويض المباشر
(يعني نعوض بدل س الرقم المعطى بالنهاية)

أهم الميزة مثال نها (س٢ - ١٠) = ٤ × ٢ = ١٠ - ٨ = ١٠ - ٢ (فقط نستبدل س بالعدد الموجود عند السهم تحت النهاية)

أهم الميزة تدريب نها (س٢ - ٤) = ٥ (أ) ١٠ (ب) ٩ (ج) ٣ (د)

نها (س٣ + ٥) = ٢ (أ) ٦ (ب) ٨ (ج) ٦ (د)

إيجاد المجاهيل من التعويض المباشر.

أهم الميزة إذا كانت نها أس + ٤ = ١٤ فجد قيمة أ

الحل: فقط نعوض مباشرة ونشكل معادلة ونحلها

$$14 = 4 + A$$

$$10 = A \text{ ومنه } A = 10$$

تدريب إذا كانت نها (س + ٣) = ١٥ فإن م =

(أ) ٢ (ب) ١٥ (ج) ١٢ (د) ٢

تدريب إذا كان ل عدداً ثابتاً وكانت نها (س + ل) = ٦ فإن ل = (أ) ٨ (ب) ٦ (ج) ٤ (د) ٣

تدريب إذا كانت نها (س٢ + ٥س + ١) = ٢٥ ، قيمة (أ)

(أ) ٣ (ب) ٩ (ج) ١ (د) ٦



النهاية في الاقتران المتشعب

كما قلنا سابقا شرط النهاية حتى تكون موجودة يجب ان تتساوي من اليمين ومن اليسار

في الاقتران المشتعب يكون للاقتران اكثر من قاعدة وهنا يجب ان نجد النهاية من اليمين ومن اليسار فاذا تساوت تكون النهاية موجودة

اليسار ← > اصغر

اليمين ← < اكبر

مثال اذا كان $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 2 \\ 3 - x^2, & x > 2 \end{cases}$ جد قيمة كل مما يلي :

(أ) نهاية $f(x)$ = $2x - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$

(هل 3 نقطة تشعب؟ طبعاً لا اذا مباشرة نعوض في فاعديتها وهي اكبر من 2)

(ب) نهاية $f(x)$ = $3 - x^2 = 3 - 2^2 = -1$ (غير موجودة)
 (د) نهاية $f(x)$ = $2x - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$ (نقطة تشعب، اذا وجب ان نأخذها من اليمين ومن اليسار)

تدريب اذا كان $f(x) = \begin{cases} x^2 + 7, & x \leq 3 \\ 5, & x > 3 \end{cases}$ فإن نهاية $f(x)$ = (أ) 5 (ب) 32 (ج) 2 (د) غير موجودة

تدريب اذا كان $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1}, & x \leq 4 \\ 3 - x^2, & x > 4 \end{cases}$ فإن نهاية $f(x)$ =

(أ) 13 (ب) 3 (ج) 9 (د) غير موجودة



إيجاد المجاهيل في الاقتران المتشعب.

خطوات الحل ...

(١) نساوي النهاية من اليمين في النهاية من اليسار

(٢) نعوض قيمة العدد التي تقترب منه النهاية

(٣) نحل المعادلة المُشكَّلة ونجد المجاهيل

مثال إذا كان $س$ و $ل$ (س) = $\left. \begin{array}{l} س + ٢ = ٤س , س > ٢ \\ ل + ٢ = ٢س , س \leq ٢ \end{array} \right\}$ فجد قيمة الثابت ل، إذا كانت نها $س$ موجودة

الحل: نها $س$ = نها $ل$

$$س + ٢ = ٤س$$

$$٢ \times ٤ + ٢ = ٢ + ٢ل \quad (\text{عوضنا مكان } س \text{ الرقم الذي تقترب منه النهاية } (٢))$$

$$١٢ = ٢ + ٢ل$$

$$١٠ = ٢ل \quad \text{ومنه } ل = ٥$$

تدريب إذا كان $س$ و $ل$ (س) = $\left. \begin{array}{l} ٥ - س , س < ٥ \\ ٢٠ = س , س = ٥ \\ ٨ + س = ٥ , س > ٥ \end{array} \right\}$ فما قيمة م التي تجعل نها $س$ موجودة؟

٥ (د) ٤ (ج) ٢ (ب) ٣ (أ)

تدريب إذا كان $س$ و $ل$ (س) = $\left. \begin{array}{l} س \geq ٢ , س \\ م س , س < ٢ \end{array} \right\}$ فما قيمة الثابت م التي تجعل نها $س$ موجودة؟

٣ (د) ٨ (ج) ٤ (ب) ٢ (أ)

تدريب إذا كان $س$ و $ل$ (س) = $\left. \begin{array}{l} س + ٢ = ب , س > ٢ \\ ٢ + س = ٦ , س < ٢ \end{array} \right\}$ وكانت نها $س$ = ٣،

وكانت نها $ل$ (س) موجودة فإن قيم (أ، ب) = (أ) {٣، ٢} (ب) {٢، ٠} (ج) {٤، ٦} (د) {٠، ٠}

توزيع النهاية على الجمع والطرح

مثال إذا كانت نها $\lim_{x \rightarrow 2} (س) = ٤$ ، فإن نها $\lim_{x \rightarrow 2} (س - ٣) =$

الحل: اول شي نبدأ فيه هو توزيع النهاية (يعني بعد كل + او - نضع نهاية)

ثاني شي اي مقدار مش جاهز لازم نجهزه كيف...

يعني لازم تكون النهاية مثل هيك $\lim_{x \rightarrow 2} (س) = ٤$ ما معها ولا اي رقم لا قبلها ولا بعدها

بعدها نشوف السؤال ونوزع عليه النهاية كمان مرة اذا فيه + او -

السؤال فإن نها $\lim_{x \rightarrow 2} (س - ٣) =$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (س - ٣) = \lim_{x \rightarrow 2} س - \lim_{x \rightarrow 2} ٣ \quad (\text{وزعنا النهاية})$$

$$= ٤ - ٣ = ١ \quad \text{نعوض مباشرة}$$

مثال إذا كانت نها $\lim_{x \rightarrow 2} (س) = ١٠$ ، نها $\lim_{x \rightarrow 2} (س) = ٢$ ، فجد : نها $\lim_{x \rightarrow 2} (٣(س) - (س)هـ + (س) - ٢) =$

الحل: نها $\lim_{x \rightarrow 2} (٣(س) - (س)هـ + (س) - ٢) = ٣ \times ١٠ - ٢ = ٢٨$ (نجهزها) اذا نها $\lim_{x \rightarrow 2} (س) = ١٠$

~~نها $\lim_{x \rightarrow 2} (س) = ٢$ (كمان نجهزها) اذا نها $\lim_{x \rightarrow 2} (س) = ٨$~~

نرجع للسؤال ونوزع النهاية ونعوض مباشرة

$$\lim_{x \rightarrow 2} (٣(س) - (س)هـ + (س) - ٢) = \lim_{x \rightarrow 2} ٣(س) - \lim_{x \rightarrow 2} (س)هـ + \lim_{x \rightarrow 2} (س) - \lim_{x \rightarrow 2} ٢$$

$$= ٨ - ٢ + ١٠ - ٢ = ١٤$$

أهمية تدريب:

- ١- إذا كانت نها $\lim_{x \rightarrow 3} (س) = ٤$ ، فإن نها $\lim_{x \rightarrow 3} (س - ٣) =$
- ٢- إذا كانت نها $\lim_{x \rightarrow 3} (س) = ٤$ ، نها $\lim_{x \rightarrow 3} (س) = ٣$ ، فإن نها $\lim_{x \rightarrow 3} (س + هـ(س)) =$
- ٣- إذا كانت نها $\lim_{x \rightarrow 3} (س) = ٣$ ، نها $\lim_{x \rightarrow 3} (س) = ١$ ، فإن نها $\lim_{x \rightarrow 3} (س + ل(س)) =$
- ٤- إذا كانت نها $\lim_{x \rightarrow 3} (س) = ٤$ ، فإن نها $\lim_{x \rightarrow 3} (س) =$
- ٥- إذا كانت نها $\lim_{x \rightarrow 3} (س) = ٢$ ، نها $\lim_{x \rightarrow 3} (س) = ١$ ، فإن نها $\lim_{x \rightarrow 3} (س + هـ(س)) =$
- ٦- إذا كانت نها $\lim_{x \rightarrow 3} (س) = ٢ + ٤ = ٦$ ، نها $\lim_{x \rightarrow 3} (س) = ٣$ ، فما قيمة نها $\lim_{x \rightarrow 3} (س - هـ(س)) =$
- ٧- إذا كانت نها $\lim_{x \rightarrow 3} (س) = ٥$ فجد نها $\lim_{x \rightarrow 3} (٦س + ٣) =$

إن أكبر عائق يمنع النجاح هو
الخوف من الفشل و الإخفاق

F E A R

الملاحظة (في حال كان موجود جذر تربيعي للمتغير (س) والناتج كان $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ مباشرة نضرب بالمرافق)

تذكر أن : مرافق $\sqrt{s-7}$ هو $\sqrt{s+7}$ كذلك مرافق $\sqrt{s+6}$ هو $\sqrt{s-6}$

أيضاً : $(\sqrt{s-7})(\sqrt{s+7}) = (s+7) - (s-7) = 14$ (لاحظ اختفاء الجذر)

مثال **الملاحظة** نهياً $\frac{\sqrt{s-8}}{s-4} = \frac{\sqrt{s-8}}{(s-2)(s+2)}$ (ناتج التعويض المباشر هو $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وبسبب وجود جذر تربيعي نضرب بالمرافق)

الحل نهياً $\frac{\sqrt{s-8}}{s-4} \times \frac{\sqrt{s+2}}{\sqrt{s+2}} = \frac{\sqrt{(s-8)(s+2)}}{s^2-2}$ (تذكر في حالة الضرب نضرب البسط بالبسط والمقام بالمقام)

$$\frac{s-4}{(s-2)(s+2)} = \frac{(s-4)}{(s-2)(s+2)} \quad \text{نأخذ ما تحت الجذر كما هو ونربع ما بعده}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{(2)(s+2)} \quad \text{(لهون نعوض مباشرة)}$$

$$\frac{\sqrt{s+1}-2}{s-3} \quad \text{نهياً} \quad \begin{matrix} \leftarrow s \\ 3 \end{matrix}$$

$$\frac{\sqrt{s+1}-3}{s-8} \quad \text{نهياً} \quad \begin{matrix} \leftarrow s \\ 8 \end{matrix}$$



اللهم لا سهل إلا ما جعلته سهلاً
و أنت تجعل الحزن إذا شئت سهلاً
يا أرحم الراحمين يا الله



توحيد المقامات يا أهل الهمة

مثال $\frac{1}{2-s} - \frac{1}{s+1} = \frac{1}{3-2s}$ (لما نعوض مباشرة راح يطلع معنا $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$) (إذا توحد مقامات)

الحل $\frac{1}{2-s} - \frac{1}{s+1} = \frac{(1+s)-3}{(1+s)(2-s)} = \frac{3+s-3}{(1+s)(2-s)} = \frac{s}{(1+s)(2-s)}$ (لا تنسى الضرب التبادلي لتوحيد المقامات)

تذكر دائما أن $1 - \frac{(s-1)}{(s-1)} = 1$

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{(1+s)^3} = \frac{1-s}{(1+s)(2-s)^3}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{s+1} = \frac{s+1-2}{2(s+1)} = \frac{s-1}{2(s+1)}$$

$$\frac{s+2}{1-s} - \frac{s}{2-s} = \frac{(s+2)(2-s) - s(1-s)}{(1-s)(2-s)} = \frac{2s-4-s^2+4s-1+s^2}{(1-s)(2-s)} = \frac{6s-5}{(1-s)(2-s)}$$

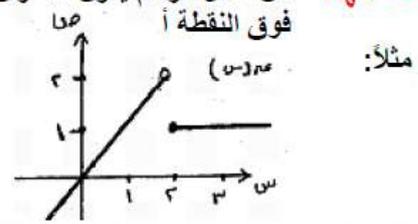
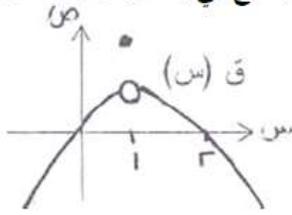


أنا أحب الرياضيات
I Love Math

الدرس الرابع. الاتصال عند نقطة.

الاتصال من خلال الرسم.

ملاحظة مهمة من خلال الرسم يكون الاقتران متصلًا عند $s = 1$ إذا لم يكن هناك انقطاع في منحناه عند النقطة A أو عدم وجود فجوة فوق النقطة A

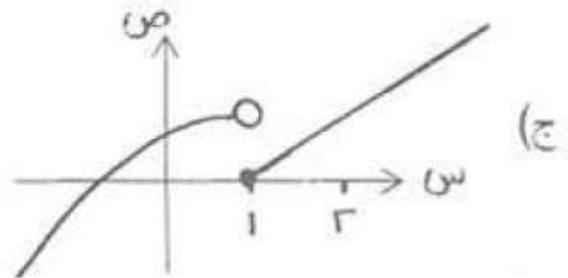
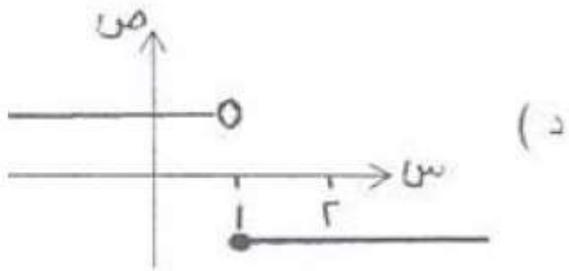
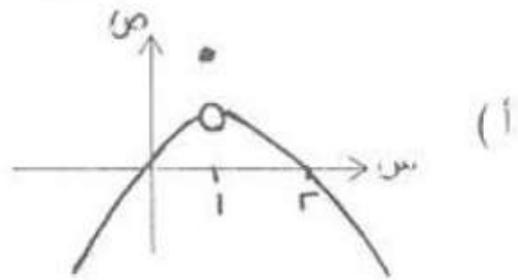
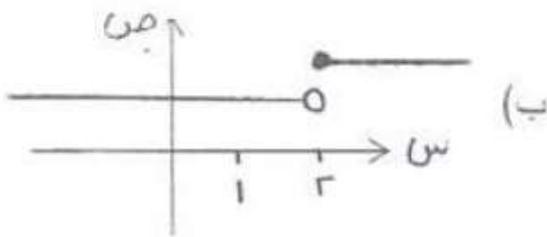


١) $s=1$ غير متصل عند $s=1$ لوجود فجوة (دائرة مفرغة) فوق ١ لكنه متصل عند $s=2$

٢) $s=2$ غير متصل عند $s=2$ لوجود انقطاع فوق ٢ لكنه متصل عند $s=1$ أو $s=3$ مثلاً

يعني بالمختصر من خلال الرسم اذا طلب نقاط عدم الاتصال نبحث عن القفزة والدائرة المفتوحة .

تدريب أي الاقترانات الآتية يمثل اقتراناً متصلًا عند $s = 1$ ؟



إن أكبر عائق يمنع النجاح هو
الخوف من الفشل و الإخفاق

FEAR

الاتصال عند نقطة.

الملاحظة يكون الاقتران متصل اذا كانت

$$ق(س) = نهـا ق(س) + أ \quad = \quad نهـا ق(س) - أ$$

(يعني يجب ان تتساوى الصورة والنهية)

الملاحظة اقتران كثير الحدود دائما متصل عند جميع الاعداد الحقيقية.

الملاحظة مثال : اذا كانت ق(س) = س + ٢ ، فأبحث في اتصال ق(س) عند س = ٢ -

الحل : بما انه ق(س) اقتران كثير حدود فإن ق(س) متصل عند س = ٢ -

الملاحظة أما الاقتران المتشعب يجب ان نجد الصورة (ق(س)) ثم النهية من اليمين واليسار ثم نقارن

اذا تساوت الصورة والنهية يكون الاقتران متصل عند س = أ

الملاحظة مثال إذا كان ق(س) = $\left. \begin{array}{l} ٣س + ٥ ، س > ٢ \\ ٦س - ١ ، س \leq ٢ \end{array} \right\}$ فأبحث في اتصال ق(س) عند س = ٢

الحل : ١- ق(٢) = ١ - ٢ × ٦ = ١١ (عدد حقيقي) ✓ أولا نجد الصورة (يعني المساواة)

٢- نهـا ق(س) = ١١ = (١ - س)٦ ، نهـا ق(س) = ١١ = (٥ + س)٣ ، نهـا ق(س) = ١١ موجودة ✓
(نجد النهية من اليمين واليسار)

٣- نهـا ق(س) = ق(٢) = ١١ ✓ إذا ق(س) متصل عند س = ٢

الملاحظة مثال : اذا كانت ق(س) = $\left. \begin{array}{l} \frac{٢٧ - ٣س}{٣ - س} ، س > ٣ \\ ٣س ، س < ٣ \\ ٢٤ + س ، س = ٣ \end{array} \right\}$

ثم نجد الصورة

الحل : نجد النهية من اليمين واليسار

ق(٣) = ٢٤ + ٣ = ٢٧

نهـا ق(س) = $\frac{٢٧ - ٣س}{٣ - س} = \frac{٢٧ - ٣(٣)}{٣ - ٣}$

٢٧ = ٩ + ٩ + ٩ =

نهـا ق(س) = ٢٧ = ٣(٣) = ٣س

بما أن نهـا ق(س) = نهـا ق(س) = نهـا ق(س) = ق(٣)

إذا ق(س) متصل عند س = ٣

وجود مجاهيل في الاتصال.

أهمية

في حال وجود مجهول او مجهولين في الاتصال ساوي النهاية بالصورة وكون معادلة وحلها

مثال إذا كان $٧ + ٢س > ٢$ ، $٢ < ١ + ٢س$ وكان $٧ (س)$ متصلًا عند $٢ = ٢$ ، فما قيمة (١)

الحل: بما ان $٧ (س)$ متصل فان $٧ = ٢$ (معناته انه الصورة ق(س) تساوي النهاية عند $٢ = ٢$)

$$٧ = ٢ \Rightarrow ٧ + ٢(٢) = ١ + ٢(٢) \Rightarrow ١٠ = ٥$$

$$١٠ = ٥ \Rightarrow ١٠ = ٥ \Rightarrow ١١ = ١ + ٢$$

أهمية

تدريب:

(١) إذا كان $٣س + ١ > ٢$ ، $٢ < ٣س + ١$ وكان ق(س) متصلًا ، فما قيمة م؟

(٢) إذا كان ق(س) متصلًا عند $٢ = ٢$ ، فما قيمة (أ) التي تجعل $٣س + ١ = ٢$ ، $٢ = ٣س + ١$ ؟



نقاط عدم الاتصال.

أهمية أصفار المقام هي النقاط التي تجعل المقام = صفر او اصفار المقام وتسمى نقاط عدم الاتصال

أهمية الاقتران النسبي الاقتران الذي يكون بسط ومقام، متصل عند جميع الاعداد الحقيقية ما عدا اصفار المقام

أهمية مثال ج د نقاط عدم الاتصال للاقتران ل (س) = $\frac{س}{س^2 - ٧س + ١٠}$

الحل: نأخذ فقط المقام ونساويه بالصفر ونجد قيمة أو قيم س

$$س^2 - ٧س + ١٠ = \text{صفر (معادلة تربيعية نحلها)}$$

$$(س - ٥) (س - ٢) = \text{صفر ومنه } س = ٥, س = ٢$$

هام

أصفار المقام (نقاط عدم الاتصال { ٥ ، ٢ }

أهمية تدريب نقاط عدم الاتصال للاقتران $\frac{س^6}{س^2 + ٩}$ هي :

(أ) ٣- (ب) ٣ (ج) ٣، -٣ (د) لا يوجد له نقاط عدم اتصال

أهمية تدريب يكون الاقتران $\frac{٣ + س^٣}{س - ٤} + \frac{١}{س^٢} = (س)$ فإن نقاط عدم الاتصال لـ ق (س)

(أ) ٤، ٢ (ب) ٤، ٠ (ج) -٤، ٠ (د) ٠، ٤، ١، ٠

أهمية تدريب قيم س التي عندها نقط عدم اتصال للاقتران $\frac{س}{(س + ١)(س - ٢)}$ هي :

(أ) ٢، ١- (ب) ٠، ١-، ٢ (ج) ١-، ٢ (د) ٠

لا تنظر الى الماضي فتحزن
ولا تخاف من المستقبل فتفشل

بل أترك همومك و افرح
و توكل على ربك لتفلاح

أهله أهمته

اختبار الوحدة الأولى



ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة.

$$١- \text{نهيا} = (س^٢ - ٤) = (س-٢)(س+٢) \quad \text{أ) } ٥ \quad \text{ب) } ١٠ \quad \text{ج) } ٩ \quad \text{د) } ٣$$

$$٢- \text{نهيا} = \sqrt{س^٣ + ٥} \quad \text{أ) } ٢ \quad \text{ب) } \sqrt{٦} \quad \text{ج) } \sqrt{٨} \quad \text{د) } ٦$$

$$٣- \text{إذا كانت نهيا} = (س + ٣) = ١٥ \text{ فإن } م = ١٥ - ٢ = ١٣ \quad \text{أ) } ١٥ \quad \text{ب) } ١٢ \quad \text{ج) } ١٠ \quad \text{د) } ٢$$

$$٤- \text{نهيا} = \frac{س + ٤}{س - ٦} \quad \text{أ) } ٢ \quad \text{ب) } ٦ \quad \text{ج) } ٨ \quad \text{د) } ٤$$

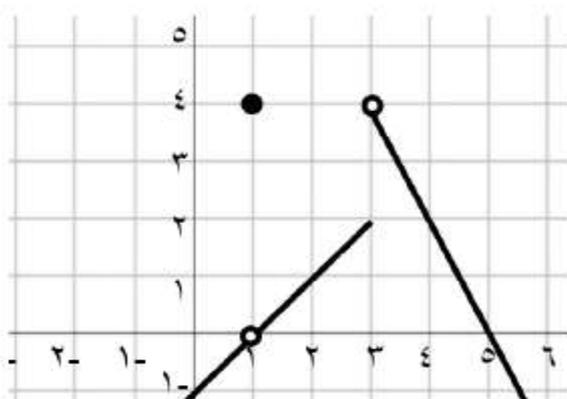
$$٥) \text{ إذا كان } نهيا = (س) \quad \left. \begin{array}{l} ١٥ = س + ٣, س \neq ٣ \\ نهيا = (س) = ١٥ \end{array} \right\} \text{ فإن } نهيا = (س) \text{ غير موجودة} \quad \text{أ) } ١٥ \quad \text{ب) } ١٠ \quad \text{ج) } ٦ \quad \text{د) } ٢$$

$$٦) \text{ إذا كان } نهيا = (س) \quad \left. \begin{array}{l} ٤ \leq س, \sqrt{س^٢ - ١} \\ ٤ > س, ٢ - س^٣ \end{array} \right\} \text{ فإن } نهيا = (س) \text{ غير موجودة} \quad \text{أ) } ١٣ \quad \text{ب) } ٣ \quad \text{ج) } ٩ \quad \text{د) } ٥$$

$$٧) \text{ إذا كان } نهيا = (س) \quad \left. \begin{array}{l} م = س - ٥, س < ٥ \\ ٥ = س, ٢٠ \\ ٨ = س + ٥, س > ٥ \end{array} \right\} \text{ قيمة } م \text{ التي تجعل } نهيا = (س) \text{ موجودة؟} \quad \text{أ) } ١٣ \quad \text{ب) } ٣ \quad \text{ج) } ٩ \quad \text{د) } ٥$$

$$\text{أ) } ١٣ \quad \text{ب) } ٣ \quad \text{ج) } ٩ \quad \text{د) } ٥$$

$$٨) \text{ اعتمد على الجدول} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{س} & ٢,١ & ٢,٠١ & ٢,٠٠١ & ٢ & ١,٩٩ & ١,٩٨ & ١,٩٥ \\ \hline \text{ق(س)} & ٦,٩ & ٦,٩٦ & ٦,٩٨ & & ٧,٠٢ & ٧,٠٣ & ٧,٠٦ \\ \hline \end{array} \quad \text{فإن } نهيا = (س) \text{ غير موجودة} \quad \text{أ) } ٦ \quad \text{ب) } ٧ \quad \text{ج) } ٨ \quad \text{د) } ٥$$



$$٩) \text{ مجموعة قيم } أ \text{ التي تجعل } نهيا = (س) = ٠ \quad \text{أ) } \{٥, ٢, ١\} \quad \text{ب) } \{٣\} \quad \text{ج) } \{٥, ١\} \quad \text{د) } \{٣, ١\}$$

$$\text{أ) } \{٥, ٢, ١\} \quad \text{ب) } \{٣\}$$

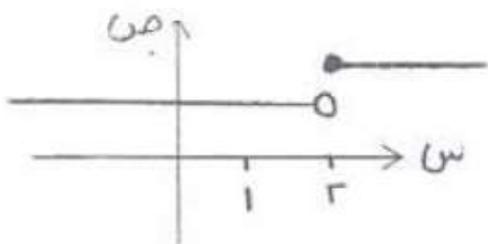
$$\text{ج) } \{٥, ١\} \quad \text{د) } \{٣, ١\}$$

(١٠) إذا كانت نها $\lim_{s \rightarrow 2} 3(s) = 27$ ، فإن نها $\lim_{s \rightarrow 2} (3(s) + s)$

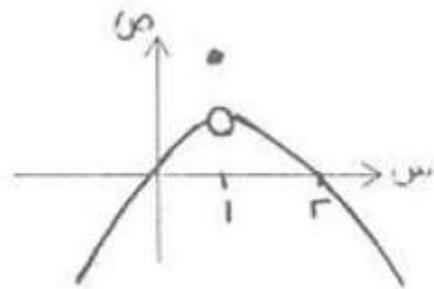
(أ) ٩ (ب) -٩ (ج) ١١ (د) ٢٩

(١١) نها $\lim_{s \rightarrow 9} \frac{2s^2 - 6s}{s^2 - 81} = \frac{1}{54}$ (أ) نها $\lim_{s \rightarrow 54} \frac{1}{54}$ (ب) $\frac{1}{54}$ (ج) ٥٤ (د) ٥٤ - ٣٥

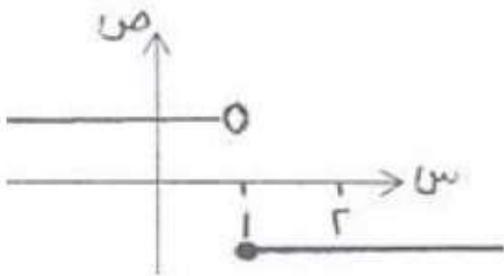
(١٢) أي الاقترانات الآتية يمثل اقتراناً متصلًا عند $s = 1$ ؟



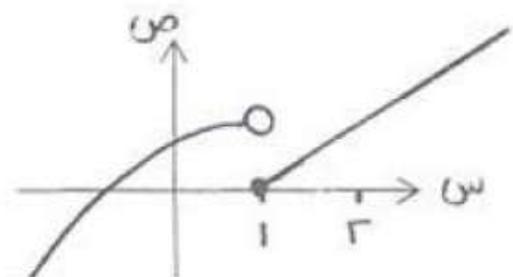
(ب)



(أ)



(د)



(ج)

(١٣) قيم s التي عندها نقاط عدم اتصال للاقتران $f(s) = \frac{s-2}{(s+3)(s-1)}$ هي

(أ) ٢ (ب) ٢، ١، ٣ (ج) ٣، ١ (د) ١، ٣

مفتاح الإجابة



السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣
فرع الإجابة	أ	أ	د	د	أ	ب	ج	أ	ج	ج	أ	ب	د

النجاح الذي نطمح به
اليوم هو نتيجة التمن
الذي دفعته في الماضي .





التفاضل

الوحدة الثانية

التفاضل

الدرس الاول : معدل التغير

المهمة مقدار التغير = القيمة الجديدة - القيمة القديمة ويرمز له بالرمز Δ (وهو حرف يوناني يُلفظ " دلتا ")

المهمة **مثال :** لو حكينا طالب كان وزنه قبل التوجيهي ٧٠ كغم ولما بلش بالتوجيهي صار وزنه ٦٥ كغم

فإن مقدار التغير في وزن هذا الطالب = القيمة الجديدة وهي s_2 - القيمة القديمة وهي s_1

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

$$\Delta s = 65 - 70 = -5$$

المهمة في الرياضيات: مقدار التغير في s هو $\Delta s = s_2 - s_1$ ، ومقدار التغير في v هو $\Delta v = v_2 - v_1$

ولأن $v = f(s)$: أي أن v تعتمد على s فإن $\Delta v = f(s_2) - f(s_1)$

المهمة **مثال:**

(١) إذا كان $v = f(s) = 2s - 1$ وتغيرت s من (٢) إلى (٥) فجد قيمة Δs (أو جد مقدار التغير في s)

$$\text{الحل: } \Delta s = s_2 - s_1 = 5 - 2 = 3$$

(٢) إذا كان $v = f(s) = 4s + 3$ وتغيرت s من (١ -) إلى (٢) فجد قيمة Δv (أو جد مقدار التغير في v)

$$\text{الحل: } \Delta v = v_2 - v_1 = f(s_2) - f(s_1) = (4(2) + 3) - (4(1) + 3) = 11 - 7 = 4$$

المهمة **تدريب :**

(١) إذا كان $v = f(s) = 2s - 5$ وتغيرت s من (٢-) إلى (٢) فجد مقدار التغير في s ثم جد مقدار التغير في v



متوسط التغير (معدل التغير) للاقتران $v = w$ (س) عندما تتغير س من s_1 إلى s_2 هو :

$$\frac{v_2 - v_1}{s_2 - s_1} = \frac{\Delta v}{\Delta s} \quad \text{أي} \quad \frac{\text{مقدار التغير في قيمة } v}{\text{مقدار التغير في قيمة } s}$$

ولا ننسى أن : $v_2 = w(s_2)$ ، $v_1 = w(s_1)$

مثال: إذا كان $w(s) = 3 - s^2$ فجد معدل التغير للاقتران w في الفترة $[-1, 4]$

الحل: نحدد قيم :

$$\begin{aligned} (1) \quad s_1 &= 1 & (3) \quad v_1 &= w(s_1) = w(1) = 2 \\ (2) \quad s_2 &= 4 & (4) \quad v_2 &= w(s_2) = w(4) = 13 \end{aligned}$$

$$\text{ومنه معدل التغير} = \frac{v_2 - v_1}{s_2 - s_1} = \frac{13 - 2}{4 - 1} = \frac{11}{3}$$

تدريب:

١- إذا كان $w(s) = 3s - s^2$ وتغيرت س من (٢) إلى (٤) فإن معدل التغير للاقتران $w(s) =$

(أ) ٢ - (ب) ٣ - (ج) ١ - (د) ٦

٢- إذا كان $w(s) = 4 - 3s$ وتغيرت س من (٣) إلى (٥) فإن قيمة Δs هي

(أ) ٦ - (ب) ٢ - (ج) ٢ - (د) ٣

٣- إذا كان $w(s) = s^2$ وتغيرت قيمة س من $s_1 = 2$ إلى $s_2 = 4$ فإن مقدار التغير في v يساوي :

(أ) ١٢ - (ب) ٢ - (ج) ١٢ - (د) ٦

قواعد مهمة :

(١) الاقتران الخطي على صورة (أس + ب) معدل التغير له دائما يساوي معامل س (أ)

مثال: يعني لو حكيت ان $q(s) = 4s + 5$ ، وتغيرت س من ٣ الى ٩- فجد معدل التغير لـ $q(s)$

الجواب مباشرة بدون ما احل هو (٤) (جرب تأكد بنفسك)

(٢) الاقتران الثابت معدل التغير له دائما يساوي صفر

مثال: اذا كانت $q(s) = 8$ وتغيرت س من ٧ الى ٣- فجد معدل التغير في $q(s)$

بما انه الاقتران ثابت اذا معدل التغير له يساوي صفر بدون ما أحل

التفسير الهندسي

المهمة في التفسير الهندسي يطلب منا السؤال ميل القاطع والذي $\frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١} = \frac{ص١ - ص٢}{س١ - س٢}$ (بلا حظ انه نفس القانون لمعدل التغير)

المهمة **مثال:** إذا كان $ص = (س)$ فجد ميل القاطع المار بالنقطتين $(١, ٤)$ ، $(٣, -٩)$

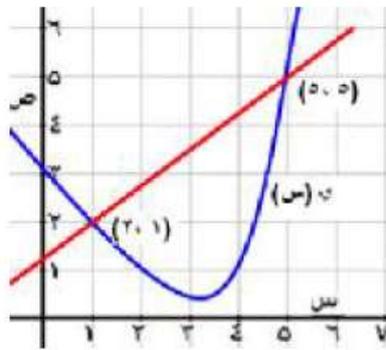
الحل: بلا حظ انه النقطتين معطيني اياهم ... عشان هيك بسميهم

$$\begin{array}{|c|c|} \hline (س١, ص١) \\ \hline (١, ٤) \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline (س٢, ص٢) \\ \hline (٣, -٩) \\ \hline \end{array}$$

$$\text{ومنه ميل القاطع} = \frac{ص١ - ص٢}{س١ - س٢} = \frac{٤ - (-٩)}{١ - ٣} = \frac{١٣}{-٢} = -\frac{١٣}{٢}$$

المهمة **تدريب:**

(١) بالاعتماد على الشكل المجاور فإن ميل القاطع المار



بالنقطتين $(١, ٢)$ ، $(٥, ٥)$ يساوي :

$$\begin{array}{ll} \text{أ) } \frac{٤}{٣} & \text{ب) } -\frac{٣}{٤} \\ \text{ج) } \frac{٣}{٤} & \text{د) } ٣ \end{array}$$

(٢) إذا كان $ص = (س) - ١$ فجد ميل القاطع الواصل بين النقطتين $(١, ١)$ ، $(٣, ١)$ ، $(٣, ١)$ ، $(١, ١)$



أنا أحب الرياضيات
I Love Math

التفسير الفيزيائي (متوسط السرعة)

السرعة المتوسطة لجسم يتحرك على خط مستقيم = $\frac{\text{مقدار التغير في المسافة}}{\text{مقدار التغير في الزمن}}$

يعني نفس قانون معدل التغير لكن المسميات تختلف

$$\text{السرعة المتوسطة} = \frac{\text{ف (ن ٢)} - \text{ف (ن ١)}}{\text{ن ٢} - \text{ن ١}}$$

مثال: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم أثناء سقوطه إلى أسفل تعطى بالعلاقة $\text{ف} = ١٠ - ٢\text{ن}$ حيث ن الزمن بالثواني ، ف المسافة بالأمتار، احسب السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [١ ، ٣]

الحل: $\text{ن} = ١$ ، $\text{ن} = ٣$

$$\text{ف (ن ١)} = \text{ف (١)} = ١ \times ٢ - ١٠ = ٨$$

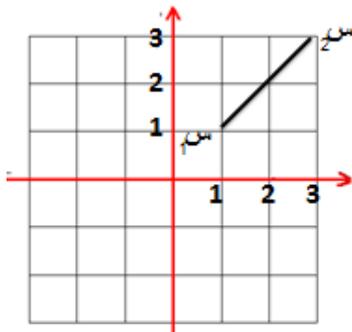
$$\text{ف (ن ٢)} = \text{ف (٣)} = ٣ \times ٢ - ١٠ = ١٢$$

$$\text{السرعة المتوسطة} = \frac{\text{ف (ن ٢)} - \text{ف (ن ١)}}{\text{ن ٢} - \text{ن ١}} = \frac{١٢ - ٨}{٣ - ١} = ٢ \text{ م/ث}$$

تدريب: يتحرك جسم على خط مستقيم حسب العلاقة $\text{ف} = ٣ + ٢\text{ن}$ حيث ن الزمن بالثواني ، ف المسافة بالأمتار، السرعة

المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [١ ، ٣] تساوي : أ) ٢ م/ث ب) ٤ م/ث ج) ٧ م/ث د) ٨ م/ث

تدريب: تسير سيارة وفق المخطط الموجود، جد متوسط سرعة هذه السيارة.





أقوى فكرة

مثال: إذا كان معدل التغير للاقتران هـ في الفترة [٢- ، ١] يساوي ٣ وكان هـ(س) = ١٥(س) - ٢س ، فجد معدل التغير للاقتران (هـ) في الفترة [٢- ، ١]

الحل: معدل التغير للاقتران ق(س) = $\frac{ق(٢س) - ق(١س)}{٢س - ١س}$ = ٣ (معطى من السؤال)

$$\frac{هـ(٢-) - هـ(١-)}{٢- - ١-} = \frac{هـ(٢س) - هـ(١س)}{٢س - ١س} = \text{معدل التغير للاقتران هـ(س)}$$

(فك الأقواس) $\frac{(٤ - (٢-) ق) - (١ - (١) ق)}{٣} = \frac{((٢-) - (٢-) ق) - (١ - (١) ق)}{٣} =$

(نجمع ق(س) مع بعض والثوابت مع بعض) $\frac{٤ + (٢-) ق - ١ - (١) ق}{٣} =$

$$٤ = ١ + ٣ = \frac{٤ + ١ -}{٣} + \frac{(٢-) ق - (١) ق}{٣} =$$

معطى من السؤال لأنها تمثل معدل التغير لـ ق(س)

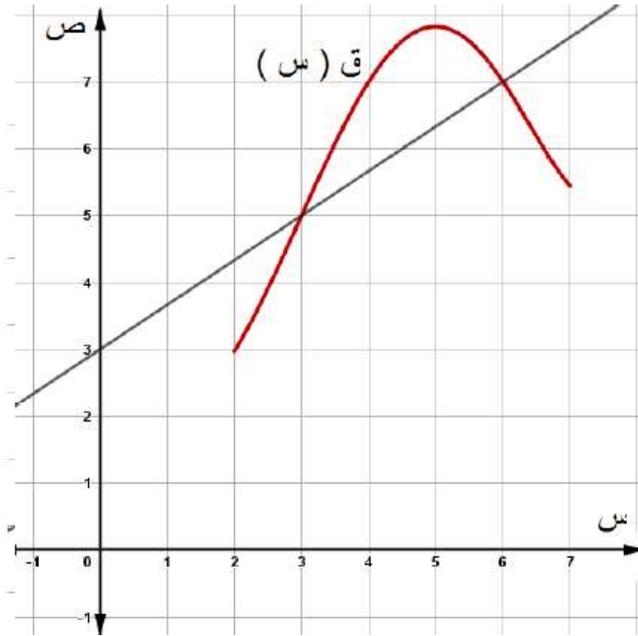
إذا معدل التغير لـ هـ(س) خلال الفترة [٢- ، ١] = ٤



تدريب: إذا كان متوسط التغير للاقتران $هـ$ في الفترة $[١، ٤]$ يساوي ٦ وكان الاقتران $هـ(س) = هـ(س) - ٢س$ ،
فإن متوسط التغير للاقتران $(هـ)$ في الفترة $[١، ٤]$

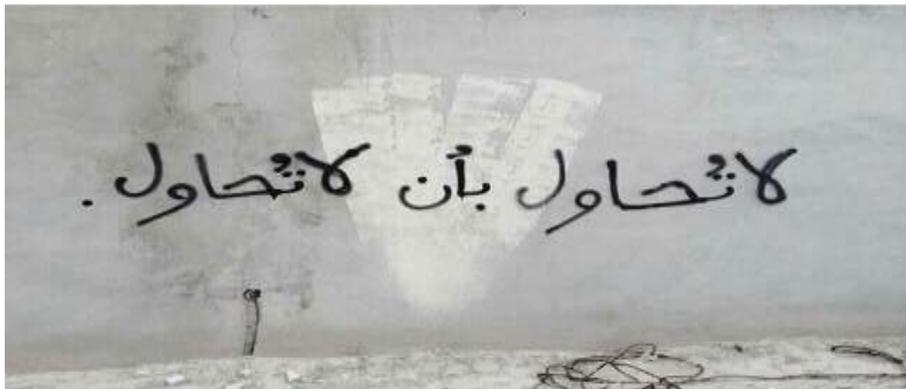
- (أ) ٤ (ب) ٦ (ج) ٢ (د) ٣

تدريب: اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $ق$ ، جد معدل التغير للاقتران في الفترة $[٣، ٦]$.



تدريب: إذا كان معدل تغير الاقتران $ق$ في الفترة $[٢، ٥]$ يساوي ٤

وكان $هـ(س) = ق(س) + س^٢$ فجد معدل تغير الاقتران $هـ$ في الفترة $[٢، ٥]$.



الدرس الثاني : المشتقة الاولى (التعريف العام للمشتقة)

$$(٢) \frac{دص}{دس}$$

أهلاً أهلاً رموز المشتقة : (١) ق (س)

$$(٤) \frac{نهـا \quad ق (ع) - ق (س)}{ع - س}$$

$$(٣) \frac{نهـا \quad ق (س+هـ) - ق (س)}{هـ}$$

يعني وين ما شفت اي رمز من الرموز السابقة معناته بده مشتقة

أهلاً أهلاً لإيجاد المشتقة باستخدام القانون $\frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$

(فك الأقواس والاختصار الأفقي أو توحيد المقامات أو الضرب في المرافق)

(أخذ هـ عامل مشترك واختصارها مع هـ التي في المقام)

واخيراً (إيجاد النهاية - من خلال التعويض مكان هـ بالصفر -)

ملاحظة مهمة جداً : إذا تم استبدال س بأي عدد حقيقي فإن الرمز عندها يدل على مشتقة الاقتران عند ذلك العدد

مثلاً : $\frac{ق(١+هـ) - ق(١)}{هـ}$ يدل على $ق(١)$

يعني بده مشتقة ق(س) وبعد أخذ المشتقة نعوض الـ ١

مثال : باستخدام التعريف العام للمشتقة ، جد المشتقة الأولى $ق(س)$ لكل مما يأتي :

$$١- ق(س) = ٤س$$

$$\text{الحل: } ق(س) = \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ} = \frac{٤(س+هـ) - ٤س}{هـ} = \frac{٤س + ٤هـ - ٤س}{هـ} = \frac{٤هـ}{هـ} = ٤$$

$$٢- ق(س) = ٥س^٢ + ٥ عند س = ٣$$

الحل:

$$ق(س) = \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ} = \frac{٥(س+هـ)^٢ + ٥ - (٥س^٢ + ٥)}{هـ} = \frac{٥(س^٢ + ٢سهـ + هـ^٢) + ٥ - ٥س^٢ - ٥}{هـ} = \frac{١٠سهـ + ٥هـ^٢}{هـ} = ١٠س + ٥هـ$$

$$\text{الآن نعوض } ٣ \text{ في } ق(س) = ١٠س + ٥هـ = ٣٠ + ١٥ = ٤٥$$

أهلاً أهلاً **بدك تحفظه :** $ق(س+هـ) = ١٠س + ٥هـ + ٥هـ$

مثال: باستخدام التعريف العام للمشتقة $f'(s) = \frac{f(s) - f(c)}{s - c}$ جد $f'(1) = ?$ ، $f'(3) = ?$

جد $f'(1) = ?$ ، $f'(3) = ?$

الحل: أولاً اكتب القانون وبعدين عوض مرة ع ومرة س بالاقتران

فك الأقواس ولا تنسى دخول السالب عالقوس الثاني $f'(s) = \frac{f(s) - f(c)}{s - c} = \frac{f(s) - f(1)}{s - 1} = \frac{f(s) - f(3)}{s - 3}$

تحليل الفرق بين مربعين والاختصار $f'(s) = \frac{f(s) - f(c)}{s - c} = \frac{f(s) - f(1)}{s - 1} = \frac{f(s) - f(3)}{s - 3}$

$f'(s) = (s + 1) = 2$ ثم نعوض $(1-)$ في الناتج وهو المشتقة فيكون الناتج النهائي بعد التعويض $2 -$

بذك تحفظ ... عند استخدام هذا القانون لايجاد المشتقة فإنه يكون

$(2) (s + 1) = 2$

$(1) (s + 1) = 2$

$(3) (s - 1) = (s + 1) = 2$

$(4) (s - 3) = (s + 1) = 2$

تدريب: ١- إذا كان $f'(s)$ كثير حدود فإن $f'(s) = \frac{f(s) - f(c)}{s - c}$ $f'(3) = ?$ (أ) $f'(3) = ?$ (ب) $f'(3) = ?$ (ج) $f'(3) = ?$ (د) $f'(3) = ?$

٢- إذا كان $f'(s)$ اقترانا قابلاً للاشتقاق ، فأی مما يلي يمثل $f'(7)$ ؟

(أ) $f'(7) = \frac{f(7) - f(c)}{7 - c}$ (ب) $f'(7) = \frac{f(7) - f(c)}{7 + c}$

(ج) $f'(7) = \frac{f(7) - f(c)}{7 - c}$ (د) $f'(7) = \frac{f(7) - f(c)}{7 + c}$



الدرس الثالث : قواعد الاشتقاق (جميعها)

مشتقة الثابت = صفر



مثل : جد المشتقة الاولى للاقترانات التالية .

ق(س) = ٧ ————— المشتقة صفر لانه ثابت

ق(س) = $\frac{٢}{٩}$ ————— المشتقة صفر لانه ثابت

مشتقة س^ن = ن س^{ن-١}



مثل : جد المشتقة الاولى للاقترانات التالية .

ق(س) = س^٢ ————— المشتقة = ٢س

ق(س) = س^٤ ————— المشتقة = ٤س^٣

مشتقة أس^ن = ن × أس^{ن-١}



مثل : جد المشتقة الاولى للاقترانات التالية .

ق(س) = ٢س^٢ ————— المشتقة = ٤س

ق(س) = ٢س^{-٢} ————— المشتقة = -٤س^{-٣}



$$\text{مشتقة ق(س) } \pm \text{ هـ(س) } = \text{ مشتقة ق(س) } \pm \text{ مشتقة هـ(س)}$$

أي نشتق كل اقتران على حدى



مثل : جد المشتقة الاولى للاقترانات التالية .

$$\text{ق(س) } = ٥س^٢ + ٣س - ٨ \text{ نشتق كل اقتران لوحدة } \text{ المشتقة } = ١٠س + ٣$$

$$\text{ق(س) } = -٣س^٢ + ٥س - ٩ + ٢ \text{ نشتق كل اقتران لوحدة } \text{ المشتقة } = -٩س + ١٠س - ٩$$

مشتقة الضرب



$$\text{مشتقة ق(س) } \times \text{ هـ(س) } = (\text{ق(س) } \times \text{ هـ'(س)}) + (\text{ق'(س) } \times \text{ هـ(س)})$$

$$\text{مشتقة (اقتران } \times \text{ اقتران) } = (\text{الاول } \times \text{ مشتقة الثاني}) + (\text{الثاني } \times \text{ مشتقة الاول})$$

مثل : جد المشتقة الاولى للاقترانات التالية .

$$\text{ق(س) } = (٣ + ٢س)(٥ - ٤س) = \frac{\text{الحد الاول}}{١ح} \times \frac{\text{الحد الثاني}}{٢ح} = ٢ \times (٥ - ٤س) + ٤ \times (٣ + ٢س) = ١٠ - ٨س + ١٢ + ٨س = ٢٢$$



مشتقة القسمة... ولها ٣ حالات



$$\text{الحالة الاولى ... } \frac{\text{اقتران}}{\text{عدد}} = \text{المشتقة} = \frac{\text{مشتقة الاقتران}}{\text{العدد}}$$

مثال: جد ق' (س) الـ

$$\frac{٦س}{٧} = \text{المشتقة} \frac{٥ + ٣س^٢}{٧} = \text{ق(س)}$$

(لاحظ فقط قمنا باشتقاق البسط فقط)

مشتقة القسمة... ولها ٣ حالات



$$\text{الحالة الثانية ... } \frac{\text{عدد}}{\text{اقتران}} = \text{المشتقة} = \frac{\text{العدد} \times \text{مشتقة الاقتران}}{(\text{الاقتران})^٢}$$

مثال: جد ق' (س) الـ

$$\frac{٣}{٥ + ٣س^٢} = \text{المشتقة} \frac{٣ \times -١٨س}{(٥ + ٣س^٢)^٢} = \text{ق(س)}$$



مشتقة القسمة.... ولها ٣ حالات



$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{مشتقة المقام} \times \text{البسط}}{\text{المقام تربيع}} = \frac{\text{مشتقة} \frac{\text{اقتران}}{\text{اقتران}}}{\text{اقتران}}$$

مثال: جد ق (س) الـ

$$\frac{(5 \times 6s) - 5 \times (3 + s^2)}{(5 + 3s)} = \frac{\text{المشتقة} \frac{5s}{5 + 3s}}{5 + 3s} = \text{ق(س)}$$

$$\text{قاعدة السلسلة} \quad \frac{\text{دع}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

(يعني نشق كل اقترن لوحده ثم نضرب وبالاخير نرجع قيمة ع



$$\text{مثال: إذا كانت } ص = 3ع + 5 \text{ ؛ } ع = 2س^2 + 2 \text{ ، فجد } \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

(نلاحظ انه اعطى السؤال ٣ متغيرات (ص ، ع ، س) مباشرة نطبق قاعدة السلسلة)

$$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{3ع + 5}{\text{دع}} \quad \text{نشتقها} \quad \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{2س^2 + 2}{\text{دس}} \quad \text{نشتقها} \quad \text{س}^6$$

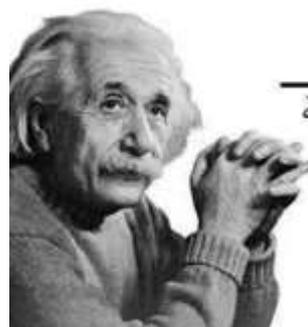
ثم نضرب

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

وفي النهاية نعوض قيمة ع

$$\text{س}^6 \times \frac{\text{دص}}{\text{دع}}$$

$$= 6(2س^2 + 2) \times \text{س}^6 = 36 \text{س}^8 (2س^2 + 2) \text{ وهو المطلوب}$$



$$\frac{1}{\text{المعرفة}} = \text{الغرور}$$

”كلما زادت المعرفة نقص الغرور
كلما قلت المعرفة زاد الغرور.“

-ألبرت أينشتاين-

مشتقة الجذر التربيعي = $\frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{2 \times \text{الجذر نفسه}}$



مثال: إذا كانت $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ فجد $f'(x)$

الحل:
$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{2x}{2 \times \sqrt{x^2 + 4}} = \frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{2 \times \text{الجذر نفسه}}$$

مشتقة الجذر التكعيبي = $\frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{3 \times (\text{الجذر نفسه})^2}$



مثال: إذا كانت $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 5}$ فجد $f'(x)$

الحل:
$$\frac{-5}{3 \times (\sqrt[3]{x^3 - 5})^2} = \frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{3 \times (\text{الجذر نفسه})^2}$$



السير نحو النجاح
رحلة لا نهاية لها
توقف قليلاً عن
السير وراجع ما
قطعته في رحلتك
وصحح أخطائك
وظهر مهاراتك
واشحن همتك وانظر
للحياة بتفائل
وسعادة ثم أكمل المسير

مشتقة الاقتران المركب على صورة (أس + ب) ^ن مشتقته ن (أس + ب) ^{ن-١} × مشتقة الاقتران



مثال: اذا كانت ق(س) = (س٢ + ٨) فجد ق'(س)

الحل: اول شي بنزل الأس قدام ثم نكتب الاقتران كما هو ثم نطرح من الاس واحد ثم نضرب في مشتقة الاقتران

$$ق'(س) = ٢ × (س٢ + ٨) = ٢(س٢ + ٨)$$

مشتقة الاقترانات الدائرية...

جاس — جتا س

جتا س — جاس

ظا س — قاس

مشتقة الاقترانات الدائرية... (في حال وجود اقتران بعد اقتران الزاوية)

جا ق (س) — ق'(س) جتا ق (س)

جتا ق (س) — ق'(س) × - جا ق (س)

ظا ق (س) — ق'(س) قأ ق (س)

أمثلة على المشتقات الدائرية.....



أهلاً أهلاً إذا كانت ق (س) = جا ٢ س فجد ق' (س)

الحل: أولاً نشتق الاقتران (ما بعد جا) جا ٢ س = ٢ جتا ٢ س

أهلاً أهلاً إذا كانت ق (س) = ٦ ظا (٥ + ٢س) فإن ق' (س) =

$$٦ \times ٨ س قأ (٥ + ٢س) = ٤٨ س قأ (٥ + ٢س)$$

$$\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = \text{ظا س}$$



متى نستخدم هذه القاعدة ؟

مثال: إذا كانت ق (س) = جتاس ظاس، فجد ق' (س)

الحل: (نعوض مكان ظا قيمتها السابقة)

$$\text{جتاس ظاس} = \text{جتاس} \times \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = \text{جاس} \text{ ومشتقة جاس} = \text{جتاس}$$

إذا جتا س ظا س مشتقتها = جتاس

أهلاً الاهمة

اختبار الوحدة الثانية



أهلاً بكم ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة

- (١) إذا كان $٥ = (س)٢ + ٣$ وكانت $س = ٢$ ، $٥ = ٣$ فإن قيمة Δ ص تساوي :
- (أ) ٣ (ب) ٥ (ج) ١١ (د) ٦
- (٢) إذا كان $٥ = (س)٤ - س٢$ وتغيرت $س$ من (٢) إلى (٤) فإن معدل التغير للاقتران $(س)$ يساوي
- (أ) ٢ - (ب) ٤ (ج) ٢ (د) صفر
- (٣) إذا كان $٥ = (س)٢$ فإن ميل القاطع المار بالنقطتين $(٢، -٤)$ ، $(١، ١)$ يساوي
- (أ) ٣ - (ب) ١ - (ج) ١ (د) ٣
- (٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب الاقتران $٤ = (٧)٢$ حيث ٧ الزمن بالثواني ، ٤ المسافة بالأمتار ، ما السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية $[١ ، ٣]$ ؟
- (أ) ٢ م/ث (ب) ٤ م/ث (ج) ٦ م/ث (د) ٨ م/ث
- (٥) إذا كان الاقتران $٥ = (س)٢ - ٢س + ١$ ، $١ \geq س \geq ٣$ فجد متوسط التغير في الاقتران $ق(س)$ عندما تتغير $س$ من ٢ إلى ٥
- (أ) ٣ (ب) ٥ (ج) ٧ (د) ٢
- (٦) إذا كان مقدار التغير في الاقتران $ق(س)$ عندما تتغير $س$ من $س١$ الى $س٢$ هو $٤س٢ + ٥س١$ ، فإن قيمة $ق(١-)$ تساوي :
- (أ) ٤ - (ب) ٤ (ج) ١٢ - (د) ١٢
- (٧) إذا كان $٥ = (٢)٢$ ، $٥ = (٢)٢$ ، $٣ = (٢)٢$ ، $٤ = (٢)٢$ ، $١ = (٢)٢$ فإن $١ = (٢)٢$ هو
- (أ) ٢٠ - (ب) ١٧ - (ج) ١٧ (د) ٦ -
- (٨) إذا كان $٥ = (٥)٢$ ، $٢ = (٥)٢$ ، $٤ = (٥)٢$ ، $٢ = (٥)٢$ فإن $٢ = (٥)٢$ هو
- (أ) ٢٠ (ب) ٦ (ج) ٣ (د) ١
- (٩) إذا كان $٥ = (س)٢ = (١ - ٢س٢) (٣س٢ + ٥س)$ ، فإن $٥ = (١)٢$ هو
- (أ) ٦٤ (ب) ٨ (ج) ٢١ (د) ٤٣
- (١٠) إذا كان $٥ = (س)٢ = \frac{٥س}{٢ + س}$ ، فإن $٥ = (١ -)٢$ هو
- (أ) ٥ (ب) ١٠ - (ج) صفر (د) ١٠

$$(١١) \text{ إذا كانت ق(س) = } \frac{\text{ظ}٣\text{س فإن نهـ} \frac{\text{ق(س+هـ) - ق(س)}}{\text{هـ}} =$$

(أ) ٣ قأس (ب) -٣ قأس (ج) قأس (د) ٣ قأس

$$(١٢) \text{ إذا كان ق(س) = هـ(س) } \times \text{ل(س) ، وكان هـ(س) ، ل(س) قابلين للاشتقاق فإن وهـ(س) =$$

$$(أ) \text{ هـ(س) } \times \text{ل(س)} \quad (ب) \text{ هـ(س) } \times \text{ل(س)} - \text{هـ(س) } \times \text{ل(س)}$$

$$(ج) \text{ هـ(س) } \times \text{ل(س)} \quad (د) \text{ هـ(س) } \times \text{ل(س)} + \text{هـ(س) } \times \text{ل(س)}$$

$$(١٣) \text{ إذا كان ق(س) = س}^٢ + ٣ ، \text{ فإن نهـ} \frac{\text{ق(هـ + ٥) - ق(٥)}}{\text{هـ}} \text{ تساوي:}$$

(أ) ٢٢ (ب) ١٠ (ج) ٧ (د) ٥

$$(١٤) \text{ إذا كان ق(س) = } \sqrt{\text{س}^٢ + ٧} ، \text{ فإن ق(٣) تساوي:}$$

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (ج) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

$$(١٥) \text{ إذا كان ق(س) = ٥ جتا ٢س ، فإن ق(س) تساوي:}$$

(أ) ٥ جاس (ب) -٥ جاس (ج) ١٠ جاس (د) -١٠ جاس

مفتاح الإجابة

السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥
فرع الإجابة	د	أ	ب	ب	أ	أ	ب	ج	د	د	د	ب	ب	أ	د



تطبيقات التفاضل

الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

الدرس الاول : التفسير الهندسي

أهمية عزيزي الطالب في هذا الدرس يكون المطلوب

(١) ميل المماس : وهنا كل ما عليك فعله هو اشتقاق ق(س) وتعويض قيمة س في المشتقة لإيجاد الميل

(٢) معادلة ميل المماس: وهنا عليك ان تجد قيم

س (وتكون مُعطي بالسؤال)

ص وهنا اذا لم تكن موجودة عوض س في الاقتران ق(س)

م (الميل) وهنا عليك ان تشتق الاقتران ق(س) ثم تعوض قيمة س في المشتقة

وفي النهاية عوض في معادلة ميل المماس (ص - ص) = م (س - س)

مثال : جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $q = (س) = س^٤ - س^٣$ عند $س = ١$

الحل: كما قلنا علينا ان نحدد ما يلي :

س = ١ - (معطى بالسؤال)

ص = ق(١) = (١-) = (١-) - (١-) = ٢ - ٣ = ٢ - نلاحظ انه عوضنا قيمة س في الاقتران ق(س) مباشرة

م (الميل) = ق(١) = (١-) = ٤ - (١-) = ٦ - ٢ = ٢

اذا معادلة ميل المماس = (ص - ص) = م (س - س)

(ص - - ٢) = ٢ (س - - ١) = (٢ + ص) = ٢ (١ + س)



أهمية **تدريب :**

١- إذا كان $s = (س)$ فإن ميل المماس لمنحنى $s = ١ + ٣س$ عند $s = ٤$ يساوي :

٤ (أ) ٣ (ب) ١٣ (ج) ١٢ (د)

٢- إذا كان $s = (س)$ فما هي قيمة s التي يكون عندها ميل المماس لمنحنى $s = ٧$ يساوي ٧ ؟

٦ (أ) ٨ (ب) ١ (ج) ٧ (د)

أهمية **تدريب :** إذا كان $ق(س) = (٣س - ٤)$ ، جد معادلة المماس عند $s = ٥$ ؟

أهمية **لما يعطيني مجهول ، كيف نجد قيمته ؟**

أهمية **مثال :** إذا كان $ق(س) = ٢س + ٢س + ٥$ ، حيث $أ$ ثابت ، وكان ميل المماس عند $s = ٢$ يساوي ١٨ ، فجد قيمة الثابت $أ$ ؟

الحل : أول شي اشتق الاقتران $ق(س) = ٢س + ٢$

بعد هيك عوض قيمة s وساويها بقيمة الميل

$$ق(٢) = ٢ + ٢ \times ٢ = ١٨$$

$$١٨ = ٢ + ٤أ \quad (\text{حل المعادلة})$$

$$١٦ = ٤أ \quad \text{ومنه } أ = ٤$$

أهمية **تدريب :** إذا كان $ق(س) = ٢س + ٤س$ ، حيث $أ$ ثابت ،

وكان ميل المماس عند $s = ٣$ يساوي ٢٢ ، فجد قيمة الثابت $أ$ ؟



الدرس الثاني : التفسير الفيزيائي

مشتقة المسافة (ف) = السرعة (ع) و مشتقة السرعة = التسارع (ت) : (ف ← ع ← ت)

$$ع(١) = ف(١) \quad كذلك \quad ت(١) = ع(١) \quad أو \quad ت(١) = ف(١)$$

التسارع = المشتقة الثانية للاقتران

السرعة = المشتقة الاولى للاقتران

طيب شو يعني المشتقة الثانية؟؟!! يعني انه نشتق الاقتران اول مرة، ونرجع نشتق كمان مرة ويكون رمزها (ق'' (س)) وتقرأ ق الفتحين / أو المشتقة الثانية الق(س)

طيب نؤخذ مثال: اذا كانت ق(س) = س^٣ + ٢س^٢ + ٤، فجد ق(س) .

الحل: أولا نؤخذ ق(س) = س^٣ + ٤ + ٦س = ق''(س)

أول فكرة:



مثال: يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = ١١ن^٢ - ٤، احسب ما يلي :

(أ) سرعة هذا الجسم بعد مرور ٣ ثواني من بدء الحركة.

(ب) تسارع هذا الجسم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

الحل: (أ) مباشرة بما انه اعطاني السؤال ف(س) وبده السرعة نشتق المشتقة الاولى ونعوض (٣) فيها

$$\text{السرعة} = ع(ن) = ف'(ن) = ٢٢ن + ٣ = \text{(المشتقة الاولى)}$$

$$\text{السرعة} = ع(٣) = ف'(٣) = ٣ \times ٢٢ + ٣ = ٧٥ \text{ م/ث}$$

(ب) شو بده السؤال! بده التسارع يعني المشتقة الثانية (يعني اشتق المشتقة الاولى وعوض ٢ فيها

$$\text{التسارع} = ت(ن) = ف''(ن) = ٢٢ + ٦$$

$$\text{التسارع} = ت(٢) = ف''(٢) = ٢٢ + ٢ \times ٦ = ٣٤ \text{ م/ث}^٢$$



أهلاً
المهمة تدريب:

١- إذا تحرك جسم وفق العلاقة ف(ن) $v = v_0 - at$ فإن تسارع هذا الجسم بعد مرور (٣) ثواني من بدء الحركة يساوي :

(أ) ٢ م / ث^٢ (ب) ٤ م / ث^٢ (ج) ٥ م / ث^٢ (د) ٦ م / ث^٢

٢- إذا تحرك جسم وفق العلاقة ف(ن) $v = v_0 + at$ فإن سرعة الجسم بعد مرور (ن) ثانية تعطى بالعلاقة :

(أ) $v = v_0 + at$ (ب) $v = v_0 + at^2$ (ج) $v = v_0 + at^3$ (د) $v = v_0 + at^4$



الفكرة الثانية: اذا السؤال بده السرعة ويكون معطيك التسارع.

شو نعمل : كل اللي عليك تعمله :

(١) تشتق المشتقة الاولى وتساويها بالسرعة

(٢) ترجع تشتق المشتقة الثانية وتساويها بالتسارع

(٣) تجد قيمة (ن) من خلال التسارع

يعني تساوي المشتقة الثانية بقيمة التسارع المعطى بالسؤال

(٤) بعد ما تجد قيمة ن ارجع عوضها بالمشتقة الاولى،
بتكون هيك وجد السرعة

مثال: يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) $v = v_0 - at^2 - v_0^2$ ، احسب سرعة الجسم

عندما يكون تسارعه ١٦ م/ث^٢

الحل: مثل هيك سؤال : مباشرة اشتق المشتقة الاولى، وارجع اشتق المشتقة الثانية مباشرة

السرعة ع (ن) = المشتقة الاولى = $2v_0 - 2at$ - ٨ن

التسارع ت(ن) = المشتقة الثانية = $2a$ = ١٢ ن - ٨

لكن السؤال أعطاني انه التسارع = ١٦ م/ث^٢ اذا تساوي التسارع ب ١٦ حتى نجد قيمة ن

$$ت(ن) = 12n - 8 = 16 \Rightarrow 12n = 24 \Rightarrow n = 2$$

اخر شيء نعوض (٢) بالسرعة $ع(ن) = 2v_0 - 2at = 16 - 2 \times 8 = 8$ م/ث وهو المطلوب



(١) يتحرك جسم حسب العلاقة فـ(ن) $= ٣ن - ٢ن + ٥$ ، احسب سرعة الجسم عندما يكون تسارعه ٤ م/ث^٢

(٢) يتحرك جسم حسب العلاقة فـ(ن) $= ٢ن٢ - ٦ن + ١٥ - ١$ ، احسب سرعة الجسم عندما ينعدم تسارعه



الفكرة الثالثة: اذا السؤال طلب التسارع وبيكون معطيك السرعة .

(١) تشتق المشتقة الاولى وتساويها بالسرعة

(٢) ترجع تشتق المشتقة الثانية وتساويها بالتسارع

(٣) تجد قيمة (ن) من خلال السرعة

يعني نساوي المشتقة الاولى بالسرعة المعطى بالسؤال

(٤) بعد ما تجد قيمة ن ارجع عوضها بالمشتقة الثانية
بتكون هيك وجد التسارع



أهلام تدريب: يتحرك جسم حسب العلاقة فـ(ن) $= ٢ن٢ - ٨ن + ٧$ ، احسب تسارعه عندما تكون سرعته ٤٦ م/ث

التسارع ت(ن) = المشتقة الثانية = ١٢ ن

الحل: السرعة ع(ن) = المشتقة الاولى = $٤٦ - ٢ن٦$

نساوي المشتقة الاولى بـ ٤٦ لنجد قيمة ن $\leftarrow ٤٦ = ٨ - ٢ن٦ \leftarrow ٥٤ = ٢ن٦ \leftarrow ٩ = ٢ن \leftarrow ٣ \pm = ن$
(- ٣ تهمل لأن الزمن دائماً موجب)

والآن لإيجاد التسارع (المطلوب) نعوض فيها الزمن $٣+$ (قيمة ن)

ت(٣) = $٣ \times ١٢ = ٣٦$ م/ث^٢ وهو المطلوب



أنا أحب الرياضيات
I Love Math

تدريب : 

يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة ف $(v) = v^2 - 3v + 7$ ، جد سرعة الجسم عندما يصبح تسارعه 12 م/ث^2

يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة ف $(n) = 3n^2 - n + 15$ ، جد تسارع هذا الجسم عندما تصبح سرعته 9 م/ث

يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف $(n) = 2n^2 - 6n + 10 - n$ ، حيث ن الزمن بالثواني ، ف المسافة بالأمتار جد سرعة هذا الجسيم عندما ينعدم تسارعه

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للاقتران ف $(n) = 2n^3 - 6n$ ، حيث ن الزمن بالثواني ، ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار ، جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته 48 م/ث

إذا كان ف $(n) = n^3 - 6n$ هي المسافة التي يقطعها جسيم ، حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، ما سرعة الجسيم بعد ٣ ثوانٍ من بدء الحركة؟

(أ) ١٨ م/ث (ب) ١٨ م/ث (ج) ٢١ م/ث (د) ٢١ م/ث



الدرس الثالث : التزايد والتناقص والقيم القصوى

من خلال الرسم

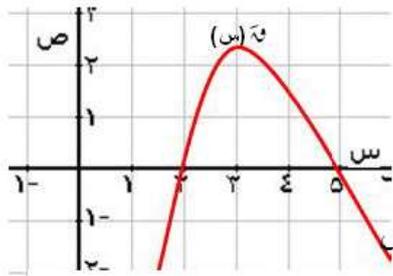
ملاحظة مهمة: ركز منيح بين رسمة ق(س) ورسمة ق(س)

نبدأ بـ ق(س) من خلال الشكل الذي يمثل ق(س) جد

(١) القيمة/القيم الحرجة (٢) فترات التزايد والتناقص (٣) القيم/القيمة القصوى والعظمى إن وجدت

الحل (١) بما انه الرسمة ق(س) فإن النقاط الحرجة هي تقاطع محور السينات أي

النقاط الحرجة هي [٥، ٢]



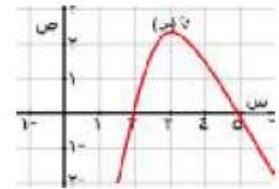
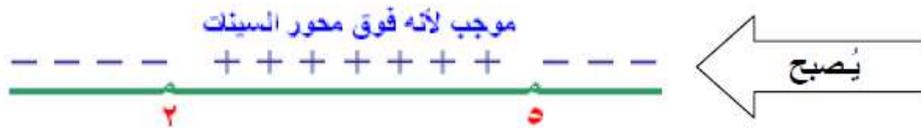
٢) فترات التزايد والتناقص

ملاحظة مهمة: عندما يُطلب إيجاد فترات التزايد والتناقص من خلال (رسمة) منحنى ق(س)

يُفضّل تحويل الرسمة إلى جدول إشارات :-

إذا كان منحنى ق(س) فوق محور السينات فإن ق(س) موجبة (+) وبالتالي ق(س) متزايد

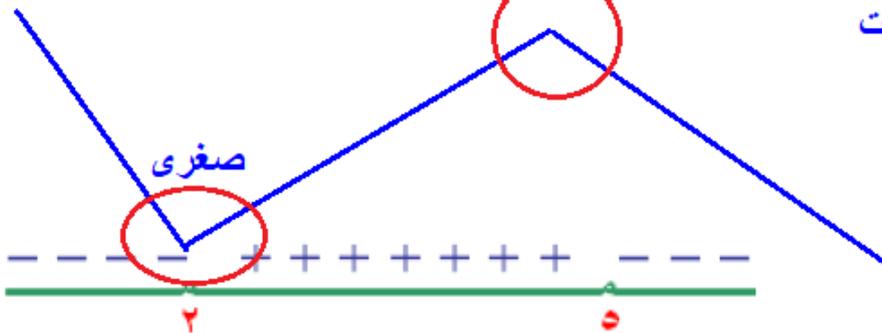
وإذا كان منحنى ق(س) تحت محور السينات فإن ق(س) سالبة (-) وبالتالي ق(س) متناقص

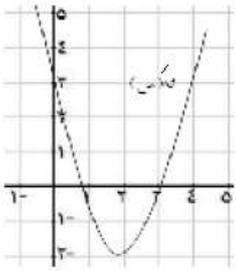


إذا ق(س) متزايد في [٥، ٢] ومتناقص في (- ∞، ٢]، [٥، ∞)

عظمى

٣) القيم العظمى والصغرى إن وجدت





المهمة **تدريب**: معتمداً على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى $f(x)$ ، أجب على

(١) قيمة / قيم S الحرجة هي (أ) [٢] (ب) [٤، ١] (ج) [٣، ١] (د) [٣]

(٢) - $f(x)$ متناقص في الفترة

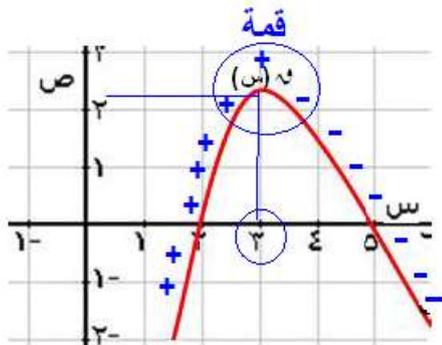
(أ) $(-\infty, 2]$ (ب) $[3, 1]$ (ج) $[-2, \infty)$ (د) $[3, 1]$

(٣) - $f(x)$ متزايد في الفترة

(أ) $(-\infty, 2]$ (ب) $[3, 1]$ (ج) $(\infty, 3]$ (د) $(1, \infty)$

المهمة **طيب شو بالنسبة لرسمه ق(س)؟؟**

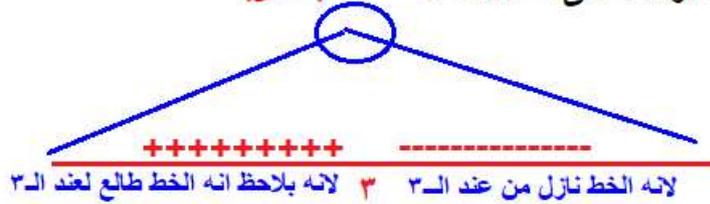
في هذه الرسمه بتكون القيمة / القيم الحرجة قيمة او قاع (يعني اعلى الرسمه أو اسفل الرسمه كما في المثال
مثال: من خلال رسمه ق(س) جد



(١) القيمة/القيم الحرجة (٢) فترات التزايد والتناقص (٣) القيمة العظمى والصغرى إن وجدت

الحل: ١) بما ان الرسمه ق(س) فتكون الحرجة قمة أو قاع وهنا بتكون [٣]

(٢) نحول الرسمه الى خط الاعداد **قيمة (عظمى)**



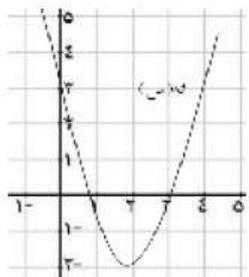
المهمة معتمداً على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى $f(x)$ ، أجب على

$f(x)$ متناقص في الفترة

(أ) $(-\infty, 2]$ (ب) $[3, 1]$ (ج) $[-2, \infty)$ (د) $[3, 1]$

$f(x)$ متزايد في الفترة

(أ) $(-\infty, 2]$ (ب) $[3, 1]$ (ج) $(\infty, 3]$ (د) $(1, \infty)$



ضع قدمك على أول

خطوة لطريقك للنجاح

وعينك على آخره

من خلال الاقترانات :

خطوات إيجاد القيم القصوى باستخدام اختبار المشتقة الأولى:



أ - نجد $0 = (س)$

ب - نضع $0 = (س)$ = صفر

ج- نجد أصفار (جذور) $0 = (س)$ (وهي النقاط الحرجة)

(يعني نساوي المشتقة بالصفر ونجد قيمة/قيم س فتكون هي الحرجة)

د- نحدد فترات التزايد والتناقص

هـ - إذا تحول الاقتران (حول النقطة الحرجة) من متزايد إلى متناقص فهي قيمة عظمى

و- إذا تحول الاقتران (حول النقطة الحرجة) من متناقص إلى متزايد فهي قيمة صغرى

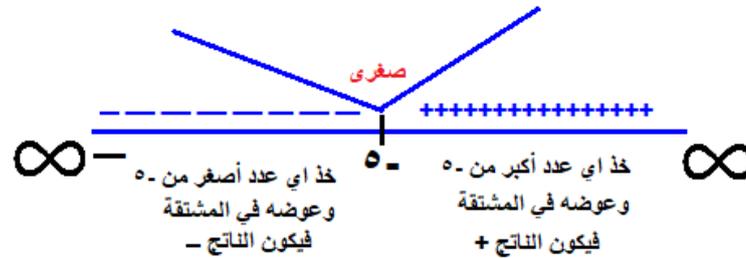
مثال: إذا كانت $0 = (س) = س^٢ + ١٠س$ فجد:



(١) القيمة/القيم الحرجة (٢) فترات التزايد والتناقص (٣) القيمة/القيم العظمى والصغرى إن وجدت

الحل: أولاً نجد $0 = (س)$ ونساويها بالصفر : $0 = (س) = س^٢ + ١٠س$ $\Rightarrow ٠ = س = ١٠$ $\Rightarrow س = ١٠$ $\Rightarrow س = ٠$
القيمة الحرجة

ثانياً نكون جدول إشارات لتحديد إشارة المشتقة الأولى حول العدد $س = ٠$ (كما في التزايد والتناقص) :



ومنه الرسم على خط الاعداد نجد ان فترات التزايد $[-٠, ∞)$ ، فترات التناقص $(-∞, ٠]$
 مغلقة مفتوحة مغلقة مفتوحة

وللاقتران قيمة صغرى عند $س = ٠$ وقيمتها $= ٢٠$ تم التعويض في الاقتران الاصلي $0 = (س) = س^٢ + ١٠س$

مثال: إذا كانت $u = (s)$ $s = (s - 27)$ فجد

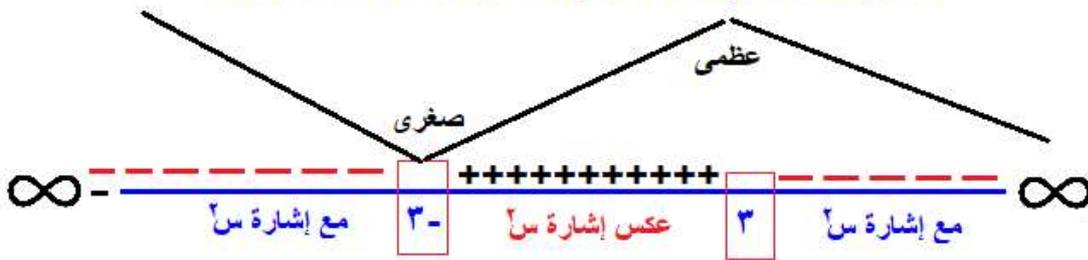
(١) القيمة/القيم الحرجة (٢) فترات التزايد والتناقص (٣) القيم/القيم العظمى والصغرى إن وجد و جد قيمتها

الحل: نجهز المقدار $u = (s)$ $s = (s - 27)$ (بإدخال s الى القوس) $u = (s) = s - 27$

ننتق $u = (s) = s - 27$ ونساويها بالصفر لنجد قيمة $s = 27$ $s = 27$ ومنه $s = 27$

إذا قيم s الحرجة $[-3, 3]$

نرسم صديقنا (خط الاعداد) ونعين عليه النقاط الحرجة



أكمل الباقي ...

أهل
الهمة
تدريب:

إذا علمت أن $q = (s)$ $= (s - 4)(s + 6)$ ، فإن مجموعة قيم s الحرجة للاقتزان $q = (s)$ هي:

(أ) $\{-6, -4\}$ (ب) $\{-4, 6\}$ (ج) $\{-6, 4\}$ (د) $\{6, 4\}$

إذا كان $q = (s)$ $= 4s^2 - 6s + 24$ ، فإن القيمة العظمى المحلية للاقتزان q تساوي:

(أ) ٢٤ (ب) ٢٢ (ج) ١ (د) صفر

ما الفترة التي يكون فيها منحنى الاقتزان $q = (s) = 27s - s^3$ متزايداً؟

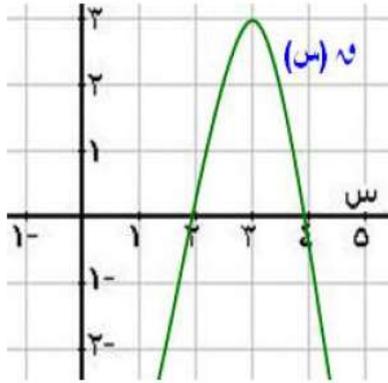
(أ) $[\infty, 3]$ (ب) $(-\infty, 3]$ (ج) $[-3, \infty)$ (د) $(-\infty, 3)$

إن أكبر عائق يمنع النجاح هو
الخوف من الفشل و الإخفاق

F E A R



تدريب: بالاعتماد على الشكل المجاور، والذي يمثل منحنى f (س)، أجب على الأسئلة (١، ٢، ٣، ٤)



١) يوجد للاقتران f و $(س)$ نقطة حرجة عند $س =$

(أ) صفر (ب) ٤ (ج) ٢ (د) ٣

٢) الاقتران f و $(س)$ متزايد في الفترة

(أ) $[٤, ٢]$ (ب) $(٤, ٤]$ (ج) $(٤, ٤)$ (د) $(٤, ٤)$

٣) للاقتران f و $(س)$ قيمة عظمى عند $س =$

(أ) ٢ (ب) صفر (ج) ٤ (د) ٣

٤) الاقتران f و $(س)$ متناقص في الفترة

(أ) $[٤, ٢]$ (ب) $(٤, ٤]$ (ج) $(٢, ٤)$ (د) $(٤, ٤]$

٥) إذا كان $f(س) = ٢س^٢ + ٥س - ٤$ فإن النقاط الحرجة لـ f (س) هي:

(أ) $-\frac{٤}{٥}$ (ب) $-\frac{٥}{٤}$ (ج) $-\frac{٥٧}{٨}$ (د) ٢



الدرس الرابع : تطبيقات اقتصادية

هناك مجموعة من القوانين يجب حفظها: (حيث ك : التكلفة ، د : الإيراد ، ر : الربح)

- ١- اقتران التكلفة الكلية = ل (س) ، اقتران التكلفة الحدية = ل' (س)
- ٢- اقتران الإيراد الكلي = د (س) ، اقتران الإيراد الحدي = د' (س)
- ٣- اقتران الربح = ر (س) ، اقتران الربح الحدي = ر' (س)
- ٤- د (س) = ل (س) + ر (س) ، د' (س) = ل' (س) + ر' (س)

يعني وين ما شفت كلمة **حدي** معناته بدي اشتق



مثال: إذا كانت تكلفة إنتاج س لعبة في أحد مصانع الألعاب هي ل (س) = ١٠س^٢ - ٥س + ٤٠٠

وكان الإيراد الكلي الناتج عن بيعها د (س) = ٢٠٠س - س^٢ فجد

- ١- التكلفة الحدية لإنتاج ٥ لعب
- ٢- الإيراد الحدي الناتج عن بيع ١٠ لعب
- ٣- الربح الحدي لبيع ٣ لعب

الحل: ١) بده تكلفة حدية (يعني راح اشتق التكلفة الحدية ك (س)) وبعدين اعوض ٥

$$ل (س) = ١٠س^٢ - ٥س + ٤٠٠$$

$$ل' (س) = ٢٠س - ٥ \leq ل' (٥) = ٥ \times ٢٠ - ٥ = ١٠٠ - ٥ = ٩٥ \text{ دينار}$$

٢) هون طلب الايراد الحدي، بس نشق الايراد د (س) ونعوض فيه ١٠

$$د (س) = ٢٠٠س - س^٢$$

$$د' (س) = ٢٠٠ - ٢س \leq د' (١٠) = ٢٠٠ - ٢ \times ١٠ = ٢٠٠ - ٢٠ = ١٨٠ \text{ دينار}$$

مثال: إذا كانت تكلفة إنتاج س لعبة في أحد مصانع الألعاب هي ل (س) = ١٠س^٢ - ٥س + ٤٠٠

وكان الإيراد الكلي الناتج عن بيعها د (س) = ٢٠٠س - س^٢ فجد

- ١- التكلفة الحدية لإنتاج ٥ لعب
- ٢- الإيراد الحدي الناتج عن بيع ١٠ لعب
- ٣- الربح الحدي لبيع ٣ لعب

٣) طلب هو الربح الحدي : ما عليك غير تطرح مشتقة الايراد من مشتقة التكلفة

$$ر' (س) = د' (س) - ل' (س) \quad \text{ل' (س) = ٢٠س - ٥} \quad \text{د' (س) = ٢٠٠ - ٢س}$$

التكلفة الحدية

الايراد الحدي

$$ر' (س) = (٢٠٠ - ٢س) - (٢٠س - ٥) \quad (\text{ادخل الـ (-) علقوس})$$

$$ر' (س) = ٢٠٠ - ٢س - ٢٠س + ٥$$

$$ر' (س) = ٢٠٥ - ٢٢س \quad \leftarrow \quad ر' (٣) = ٢٠٥ - ٢٢ \times ٣ = ١٣٩$$

مثال: إذا كانت تكلفة إنتاج س من القطع في مصنع ما هي ل (س) = س^٢ + ٤٠س + ٦٠٠ وكان الإيراد الكلي الناتج عن بيعها هو د (س) = ٢٠٠س - ٣س^٢ + ٥٠ فجد عدد القطع الواجب إنتاجها لتحقيق أكبر ربح يمكن

الحل: الربح = الإيراد - التكلفة

$$ر(س) = د(س) - ل(س) = (٢٠٠س - ٣س^٢ + ٥٠) - (س^٢ + ٤٠س + ٦٠٠)$$

نشتق ونساوي بالصفر
لنجد قيمة س

$$ر'(س) = (٢٠٠ - ٦س) - (٢س + ٤٠) = ٠$$

$$٢٠٠ - ٦س - ٢س - ٤٠ = ٠$$

$$١٦٠ - ٨س = ٠$$

$$١٦٠ = ٨س \Rightarrow س = \frac{١٦٠}{٨} = ٢٠$$

مثال: إذا كان اقتران التكلفة الكلية ك (س) = ٠,٠٠٢س^٢ + ٥س + ٢ وكان سعر الجهاز الواحد (٢٥٠) دينار ، فجد الربح الحدي؟

وكان سعر الجهاز الواحد (٢٥٠) دينار ، فجد الربح الحدي؟

الحل: لاحظ ان السؤال لم يعطيني الايراد الكلي

كل ما عليك فعله هون حتى نجد الايراد الكلي د(س) هو ضرب السعر ب س

لاحظ أن د(س) مجهولة ← د(س) = س × السعر

$$د(س) = ٢٥٠ × س = ٢٥٠س$$

$$ر(س) = د(س) - ل(س) = ٢٥٠س - (٠,٠٠٢س^٢ + ٥س + ٢)$$

$$ر'(س) = ٢٥٠ - ٠,٠٠٤س - ٥ = ٠$$

$$٢٤٥ = ٠,٠٠٤س \Rightarrow س = \frac{٢٤٥}{٠,٠٠٤} = ٦١٢,٥$$



السير نحو النجاح
رحلة لا نهاية لها
توقف قليلاً عن
السير وراجع ما
قطعته في رحلتك
وصحح أخطائك
وظهر مهاراتك
واشحن همتك وانظر
للحياة بتفائل
وسعادة ثم أكمل المسير

التدريب

- ١- إذا كان $D(s) = 200 + 2s$ هو اقتران الإيراد الناتج عن بيع s وحدة فإن أكبر إيراد يساوي :
- (أ) ١ (ب) ٢٠١ (ج) ٢٠٠ (د) ١٠٠
- ٢- إذا كان $D(s) = 200 + 2s$ هو اقتران الإيراد الناتج عن بيع s وحدة فإن أكبر إيراد يكون عندما s يساوي :
- (أ) ١ (ب) ٢٠١ (ج) ٢٠٠ (د) ١٠٠
- ٣- إذا كان اقتران التكلفة الكلية $L(s) = 20 - 4s + s^2$ فإن التكلفة الحدية عندما $s = 5$ تساوي :
- (أ) ١٤ - (ب) ٦ (ج) ٥ (د) ٢٠
- ٤- إذا كان اقتران الإيراد الكلي يُعطى بالعلاقة $D(s) = 50s - s^2$ فإن الإيراد الحدي عندما $s = 4$ يساوي :
- (أ) ١٨ (ب) ٥٠ (ج) ٤٢ (د) ٤ -
- ٥) إذا كان اقتران التكلفة الكلية لإنتاج s قطعة من منتج ما هو $L(s) = 200 - 4s + s^2$ فإن التكلفة الحدية عندما $s = 8$ هي:
- (أ) ١٢ (ب) ٨ (ج) ١٦٨ (د) ٢١٢
- ٦) إذا كان الإيراد الكلي لبيع s وحدة من منتج ما في أحد المصانع هو $D(s) = 80s - 3s^2$ فإن الإيراد الحدي عندما $s = 5$ هو:
- (أ) ٣٢٥ (ب) ٧٥ (ج) ٥ (د) ١٥
- ٧) إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو $D(s) = 80s - 2s^2$ واقتران التكلفة الكلية $L(s) = 20s$ فإن اقتران الربح الكلي =
- (أ) $60 - 4s$ (ب) $60s - 2s^2$ (ج) $2s^2 - 60s$ (د) $4s - 60$

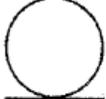
ضع دائماً صورتك التي تريد أن تكون عليها في عقلك و مخيلتك ، و ستتجه تدريجياً نحوها ... إذا لم تهزم نفسك ، ستهزمك نفسك ... سلم النجاه لا يعاني من الازدحام في اعلاه





اختبار شامل للفصل الاول ?

١



١



ق م ن ل

إدارة الامتحانات والاختبارات
قسم الامتحانات العامة

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠٢١

(وثيقة مسمية/متردد)

س : د
٢ : ٠٠مدة الامتحان:
اليوم والتاريخ:
رقم الجلوس:رمز المبحث:
رقم النموذج:المبحث: الرياضيات
الفرع: الأدبي
اسم الطالب:

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة

$$2s + 5 < s$$

$$3s - 1 > s$$

$$2s + 4 \neq s$$

$$2s + 1 \leq s$$

$$2s + 4 \neq s$$

* إذا كان s نهياً =١- نهياً s =٢- نهياً s =٣- نهياً s =٥) إذا كان s نهياً =٥) بالاعتماد على الجدول التالي الذي يمثل q (س) نهياً q (س)

س	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	٣	٢,٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩
ق(س)	٥,١	٥,٠١	٥,٠٠١		٦,٩٩٩	٦,٩٩	٦,٩

٥ (أ) ٦ (ب) ٧ (ج) ٨ (د) غير موجودة

٦) إذا كان s نهياً =

١٣ (أ) ٣ (ب) ٩ (ج) ٩ (د) غير موجودة

(١٢) إذا كانت نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} = 7$ ، فإن نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+2} = 17$ (أ) ١٧ (ب) $\sqrt{12}$ (ج) ٣ (د) ٥

(١٣) إذا كانت نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+9} = 5$ فإن م = ٨ (أ) ٨ (ب) ١٦ (ج) ٢٥ (د) ٢ -

(١٤) إذا كانت نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{2(s+3)}{s} = 20$ فإن نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} = 1$ (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ١٨ (د) ١ -

(١٥) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{2-s}}{s-4} = \frac{1}{12}$ (أ) $\frac{1}{12}$ (ب) $\frac{1}{12}$ (ج) ١٢ - (د) ١٢

(١٦) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 - s^6}{s-2} = 6$ (أ) ٦ - (ب) ٦ (ج) صفر (د) ٣

(١٧) إذا كانت نها $\lim_{s \rightarrow 0} (s^3 - 4s + 5) = 5$ فإن قيمة م = ٤ (أ) ٤ (ب) ٦ (ج) ٧ (د) ٥

(١٨) نها $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 1}{s-1}$ تساوي : (أ) ١ - (ب) ١ (ج) صفر (د) غير موجودة

(١٩) أحد الاقتران التالية متصل عند $s = 2$

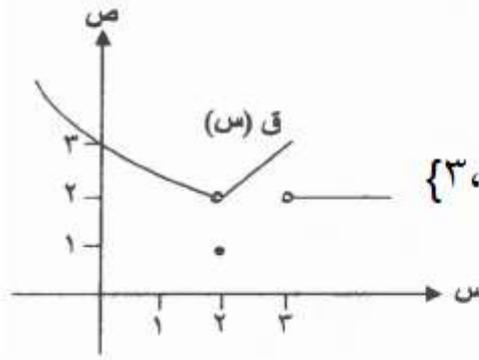
$$\left. \begin{array}{l} 2 < s, 1 + s^4 \\ 2 > s, 3 + s^2 \end{array} \right\} = \text{ب) ق(س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 = s, 5 + s^2 \\ 2 \neq s, 2 + s^3 \end{array} \right\} = \text{أ) ق(س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 < s, \frac{4-s^2}{2-s} \\ 2 \geq s, 10 - s^6 \end{array} \right\} = \text{د) ق(س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 < s, 3 + s^3 \\ 2 \geq s, 6 + s^2 \end{array} \right\} = \text{ج) ق(س)}$$

٢٠) من خلال رسمة ق(س) فإن قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل .



(أ) { ٣ ، ٢ } (ب) { ٢ }

(ج) { ٣ } (د) { ٣ ، ٢ ، ١ }

٢١) نقاط عدم الاتصال لـ $ص = \frac{٩ + س}{٣ - س}$ هي : (أ) ٣ (ب) { ٣ ، ٩ - } (ج) -٤ (د) ٤

٢٢) نقاط الانفصال لـ $ص = \frac{س٤}{١٥ - س٢ - س}$ هي : (أ) ٤ (ب) ٥ (ج) { ٥ ، ٣ - } (د) { ٥ - ، ٣ }

٢٣) إذا كان $ص = \begin{cases} ٣ + س ، س > ٤ \\ ٧ ، س = ٤ \\ ١ + س ، س < ٤ \end{cases}$ فإن $ص$ غير متصل عند $س =$ (أ) ٧ (ب) ٣ (ج) ١ (د) ٤

٢٤) إذا كان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطتين ٢ (-١ ، ٣) ، ب (٢ ، ل) وكان ميل القاطع ٢ ب يساوي (-٢) ،

فإن قيمة الثابت ل تساوي: (أ) -٥ (ب) ٣ (ج) ١ (د) -٣

٢٥) إذا كان $ص = ٣ - ٤س$ وتغيرت س من (٣) إلى (٥) فإن قيمة $\Delta س$ هي

(أ) ٦ (ب) -٢ (ج) ٢ (د) ٣

٢٦) إذا كان $ص = س٢$ فإن ميل القاطع المار بالنقطتين (-٢ ، ٤) ، (١ ، ١) يساوي :

(أ) -٣ (ب) -١ (ج) ١ (د) ٣

٢٧) إذا كان $ص = س٢$ وتغيرت قيمة س من $س_١ = ٢$ إلى $س_٢ = ٤$ فإن مقدار التغير في ص يساوي:

(أ) ١٢ (ب) ٢ (ج) ١٢ (د) ٦

٢٨) يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب الاقتران $ف(ص) = ٧ص٢$ حيث ن الزمن بالثواني ، ف المسافة بالأمتر ،

ما السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١ ، ٣] ؟

(أ) ٢ م/ث (ب) ٤ م/ث (ج) ٦ م/ث (د) ٨ م/ث

٢٩) إذا كان مقدار التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من $س_١$ الى $س_٢$ هو $(٤س_٢ هـ + هـ٢)$ ،

فإن قيمة ق^{-١} (١) تساوي: (أ) -٤ (ب) ٤ (ج) -١٢ (د) ١٢

٣٠) يتحرك جسم حسب العلاقة فـ(ن) $= ٢ن + ٥ + ١$ فإن تسارع الجسم بعد (٣) ثوان من بدء الحركة يساوي:
 (أ) ٢ م/ث^٢ (ب) صفر م/ث^٢ (ج) ٣ م/ث^٢ (د) ٢٥ م/ث^٢

٣١) يتحرك جسم حسب العلاقة فـ(ن) $= ٣ن + ٧$ ، فإن سرعة الجسم بعد (٣) ثوان من بدء الحركة يساوي:
 (أ) ١٨ م/ث (ب) ٢٧ م/ث (ج) ٣٤ م/ث (د) ٦ م/ث

٣٢) يتحرك جسم حسب العلاقة فـ(ن) $= ٣ن + ٦ + ٥$ ، احسب تسارعه عندما تكون سرعته ١٨ م/ث
 (أ) ٢ م/ث^٢ (ب) ١٢ م/ث^٢ (ج) ٣ م/ث^٢ (د) ٦ م/ث^٢

٣٣) يتحرك جسم حسب العلاقة فـ(ن) $= ٣ن - ٥ + ٥$ ، احسب سرعة الجسم عندما يكون تسارعه ٤ م/ث^٢
 (أ) ٨ م/ث (ب) ١ م/ث (ج) ٤ م/ث (د) ٦ م/ث

٣٤) إذا كان $٣س = ١ + ٣$ فإن ميل المماس لمنحنى $٥ = ٤$ عند $س = ٤$ يساوي :

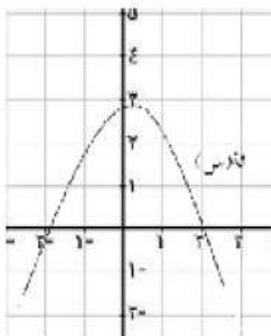
(أ) ٤ (ب) ٣ (ج) ١٣ (د) ١٢

٣٥) إذا كان $٣س = ٣س + ٤$ فما هي قيمة $س$ التي يكون عندها ميل المماس لمنحنى $٥ = ٧$ يساوي ؟

(أ) ٦ (ب) ٨ (ج) ١ (د) ٧

٣٦) جد معادلة المماس لمنحنى $٥ = ٣س + ٥ + ٤$ عند $س = ١$.

(أ) $٤ = ٢ + ٨(١ + س)$ (ب) $٤ = ٢ + ٨(١ - س)$ (ج) $٤ = ٢ - ٨(١ - س)$ (د) $٤ = ٢ + ٨(١ + س)$



معتدلاً على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى $٥ = ٦$ ، أجب على (٦ ، ٧)

٣٧) $٥ = ٢$ (س) متناقص في الفترة

(أ) $(٢, \infty)$ ، $(-\infty, ٢)$ (ب) $[٢, ٢]$ (ج) $(-\infty, ٢)$ (د) $(٢, \infty)$

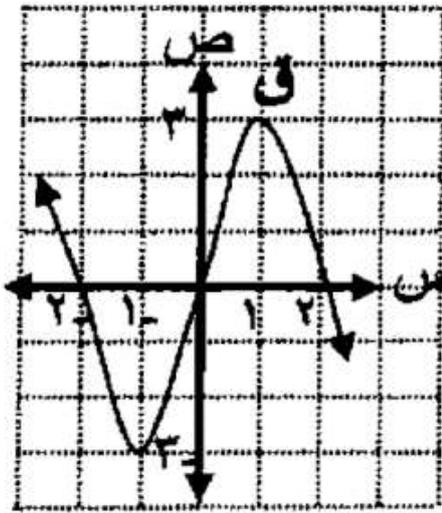
٣٨) $٥ = ٢$ (س) متزايد في الفترة

(أ) $(٢, \infty)$ ، $(-\infty, ٢)$ (ب) $[٢, ٢]$ (ج) $(-\infty, ٢)$ (د) $(٢, \infty)$

قُلْ رَبِّيَ رَبِّي
 رَبِّيَ رَبِّي
 رَبِّيَ رَبِّي
 رَبِّيَ رَبِّي



٤٠ معتمداً الشكل المجاور الذي يُمثل منحنى الاقتران ق(س) ، أجب عن السؤالين (٣٩ ، ٤٠)



٣٩ قيم س الحرجة للاقتران ق(س) هي

(أ) (٢- ، ٢) (ب) (١- ، ١)

(ج) (٢- ، صفر ، ٢) (د) (١- ، صفر ، ١)

٤٠ للاقتران قيمة صغرى عند س =

(أ) ٢- (ب) ١- (ج) صفر (د) ١

٤١ إذا كان ك(س) هو اقتران التكلفة الكلية لإنتاج س قطعة من منتج معين ، د(س) هو اقتران الإيراد الكلي .

فإن اقتران الربح الكلي ر(س) يساوي :

(أ) ك(س) - د(س) (ب) ك(س) + د(س) (ج) د(س) × ك(س) (د) د(س) - ك(س)

٤٢ إذا كان اقتران التكلفة الكلية لإنتاج س قطعة من منتج ما هو له (س) = ٢٠٠ - ٤س + س^٢

فإن التكلفة الحدية عندما س = ٨ هي: (أ) ١٢ (ب) ٨ (ج) ١٦٨ (د) ٢١٢

٤٣ إذا كان الإيراد الكلي لبيع س وحدة من منتج ما في أحد المصانع هو د(س) = ٨٠س - س^٣

فإن الإيراد الحدي عندما س = ٥ هو: (أ) ٥٠ (ب) ٧٥ (ج) ٢٥ (د) ١٥

٤٤ إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو د(س) = ٨٠س - س^٢ و اقتران التكلفة الكلية له (س) = ٢٠س

فإن اقتران الربح الحدي =

(أ) ٦٠ - ٤س (ب) ٦٠س - س^٢ (ج) ٢س^٢ - ٦٠س (د) ٤س - ٦٠



مفتاح الإجابة

د	ج	ب	أ	رقم السؤال
				١
				٢
				٣
				٤
				٥
				٦
				٧
				٨
				٩
				١٠
				١١
				١٢
				١٣
				١٤
				١٥
				١٦
				١٧
				١٨
				١٩
				٢٠
				٢١
				٢٢
				٢٣
				٢٤
				٢٥
				٢٦
				٢٧
				٢٨
				٢٩
				٣٠
				٣١
				٣٢
				٣٣
				٣٤
				٣٥
				٣٦
				٣٧
				٣٨
				٣٩
				٤٠
				٤١
				٤٢
				٤٣
				٤٤

طريقة لوبيتال لحساب النهايات

• عزيزي الطالب تذكر معنا انه عند نهاية خارج قسمة اقترانين عندما يكون الناتج صفر علي صفر نستخدم احد الطرق التالية :

- التحليل والاختصار

- الضرب المرافق

- توحيد المقامات

وكثير من الطلبة يواجهون صعوبة في تطبيق ذلك، وكما نعرف امتحان الثانوية لهذا العام ٢٠٢٠ سيكون ضع دائرة (يعني اللي بيهمني الجواب النهائي بغض النظر عن الطريق)

عشان هيك راح نستخدم طريقة لوبيتال لحساب نهاية خارج قسمة اقترانين، كل ما عليك ان تكون متمكن من قواعد الاشتقاق لانه الطريقة سهله وبسيطة وسريعة ونطبق القاعدة ...

$$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{\text{ق (س)}}{\text{هـ (س)}} \text{ اذا كان نها س — أ هـ (س)}$$

فإن

$$\frac{\text{ق (أ)}}{\text{هـ (أ)}} = \frac{\text{ق (س)}}{\text{هـ (س)}} \text{ اذا كان نها س — أ هـ (س)}$$

يعني بالمختصر نشتق البسط ونعوض (أ) في المشتقة

ثم نشتق المقام ونعوض كمان مرة (أ) في المشتقة ثم

نقسم الناتج في المرة الاولى على الناتج في المرة الثانية

مثلاً: $\frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - ٦س + ٩} = \frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - ٦س + ٩}$ ← نحلل إلى العوامل

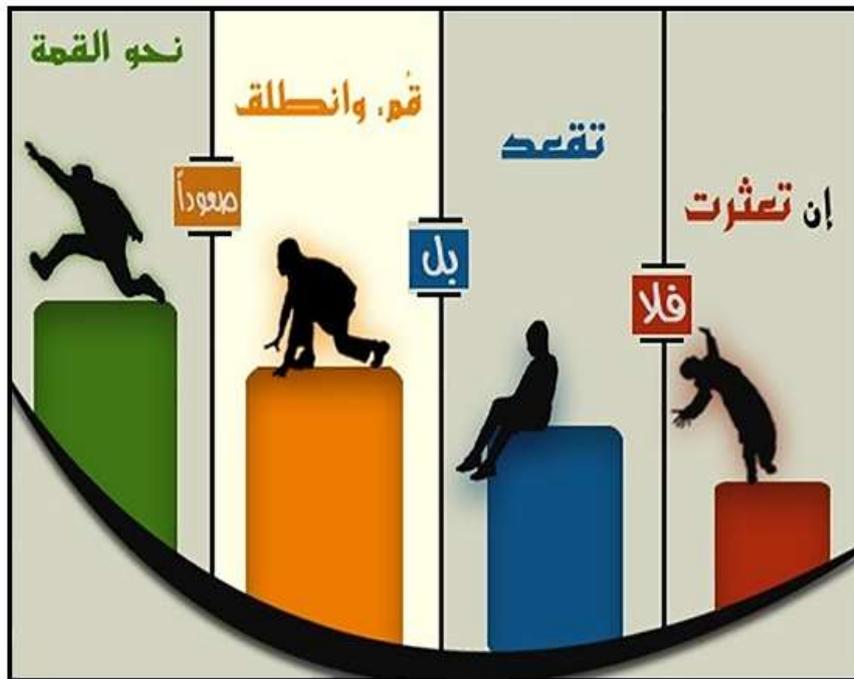
$$\boxed{٣} = \frac{٦}{٢} = \frac{(س+٣)}{٢} \times \frac{٣}{س} = \frac{(س+٣)(٣)}{٢(س)} = \frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - ٦س + ٩} \times \frac{٣}{س}$$

ونحن ما بدنا هالسالفة الطويلة هاي
نطبق القاعدة

مشتقة البسط = $٢س$ ونعوض (٣) فتصير معنا $٦ = ٣ \times ٢$

نرجع نشتق المقام = ٢

نقسم $\frac{٦}{٢} = \boxed{٣}$ وهو المطلوب



نشوف مثال ثاني نهيا

$$\frac{س^٢ - ٢٥}{س^٢ - ١٠}$$

مشتقة البسط $س^٢$ ، نعوض ٥ فتصير معنا $١٠ = ٥ \times ٢$

مشتقة المقام $س - ١٠$ ونعوض ٥ فتصير معنا $١٠ = ١٠ - ٥ \times ٤$

$$١ = \frac{١٠}{١٠}$$

إذا الناتج راح يكون معنا

طيب نشوف مثال على الضرب المرافق

$$\frac{س^٢ - ٨}{س^٢ - ٨} = \text{ناتج التعويض المباشر هو } \div \text{ وبسبب وجود جذر تربيعي نضرب بالمرافق}$$

$$\frac{١}{٨} = \frac{س^٢ - ٨}{(س^٢ - ٨) \times ٨} = \frac{س^٢ - ٨}{(س^٢ - ٨) \times ٨} = \frac{(س^٢ - ٨)(س^٢ - ٨)}{(س^٢ - ٨)(س^٢ - ٨) \times ٨} = \frac{(س^٢ - ٨)(س^٢ - ٨)}{(س^٢ - ٨)(س^٢ - ٨) \times ٨}$$

وكمان مرة ما بدنا هالطريقة لانه اللي بيهمني الناتج النهائي كون الامتحان ضع دائرة

$$\frac{١}{س^٢ - ٨} = \text{مشتقة البسط} = \frac{١}{س^٢ - ٨} \text{ نرجع نعوض } ٤ \text{ فيكون الناتج } \frac{١}{٨} \text{ ، مشتقة المقام } = ٢ - ٨$$

$$\frac{١}{٨} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٨} \text{ إذا الناتج } \frac{١}{٨} \text{ وهو المطلوب}$$



نحل كمان مثال $\frac{\sqrt{s^3 + 1} - 1}{s^2 - 25}$ هنا

مشتقة البسط = $\frac{3}{1 + \sqrt{s^3 + 1}}$ وبتعويض ٥ يكون الناتج $\frac{3}{8}$

مشتقة المقام = $2s$ وبتعويض ٥ يكون الناتج ١٠

وبالقسمة ناتج الاول على ناتج الثاني $\frac{\frac{3}{8}}{10}$ (تذكر هنا أن الأول × مقلوب الثاني) $\frac{3}{80}$

مثال على توحيد المقامات

ن هنا $\frac{1}{2} - \frac{1}{s}$: الناتج بعد التعويض المباشر = $\frac{1}{2} - \frac{1}{s}$ لذلك نوحّد المقامات (أو بالضرب التبادلي) ثم نختصر

$\frac{1}{4} - \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2} - \frac{1}{s} = \frac{1 - 2}{2 \times (2 - s)}$ هنا $\frac{1 - 2}{2 \times (2 - s)}$ هنا $\frac{s - 2}{2 \times (2 - s)}$ هنا $\frac{1 \times s - 2 \times 1}{2 \times s - 2 - s}$

وكمان مرة ما بدنا هالطريقة كون الامتحان ضع دائرة

مشتقة البسط = $\frac{1}{s}$ وبتعويض ٢ = $\frac{1}{4}$ ، مشتقة المقام ١

الناتج النهائي $\frac{1}{4}$

يا بن آدم تبسم فإن الله

ما أشقاك إلا يسعدك
وما أخذ منك إلا يعطيك
وما أبكاك إلا ليضحكك
وما حرمك إلا ليتفضل عليك
وما ابتلاك إلا لأنه يحبك

هذا العمل خالص لوجه الله تعالى



وأي خطأ فيها فمننا ومن الشيطان ، نستميحكم عذرا عليه



والصواب من الله وحده، نشكره ونحمده عليه



نستقبل ملاحظاتكم في أي وقت

٠٧٧٢٨٨٧٠٦٦



ولا تنسونا من صالح دعائكم لي ولوالدي



سائلين المولى سبحانه أن نكون دائما

على مستوى نطلعناكم وعند

حسن ظنكم بنا..

أ. بشار ابو العماش

٠٧٧٢٨٨٧٠٦٦