

مثال : إذا تغيرت درجة الحرارة في أحد أيام الشتاء في عجلون من (- ٤ °) ليلاً إلى (٣ °) مئوية نهاراً ، أوجد مقدار التغير في درجة الحرارة .

الحل :

$$\text{نهاراً} - \text{ليلاً} = ٣ - (-٤) = ٣ + ٤ = ٧ \text{ } \circ \text{ مئوية}$$

مثال : إذا كانت درجة الحرارة ١٢ ° مئوية نهاراً و أصبحت ٣ ° مئوية ليلاً ، احسب المدى الحراري .

الحل :

$$\text{ليلاً} - \text{نهاراً} = (\text{الثانية} - \text{الأولى})$$

$$= ٣ - ١٢ = -٩ \text{ (انخفضت درجة الحرارة بمقدار } ٩ \text{ } \circ \text{ مئوية)}$$

مثال : إذا كانت سرعة سيارة ٢٠ كم/ساعة و ازدادت لتصبح ٨٠ كم/ساعة ، احسب مقدار التغير في سرعة السيارة .

الحل :

$$٨٠ - ٢٠ = ٦٠ \text{ كم/س } \text{التغير في سرعة السيارة}$$

مثال : إذا كانت س ١ = ٤ و س ٢ = ٨ احسب مقدار التغير في س .

الحل :

$$\Delta \text{ التغير في س} = \text{س} - \text{س} = ٨ - ٤ = ٤$$

$$\Delta \text{ التغير في س} = \text{س} - \text{س} = ٤ - ٨ = -٤$$

تعريف :

مقدار التغير في س هو الفرق بين قيمتي س عندما تتغير س من س ١ إلى س ٢ ، ويرمز لها بالرمز Δ س ويعني $\Delta \text{ س} = \text{س} - \text{س}$.

لاحظ :

$$\Delta \text{ س} = \text{س} - \text{س}$$

$$\text{س} = \text{س} + \Delta \text{ س}$$

$$\text{س} = \text{س} - \Delta \text{ س}$$

مثال : إذا كانت س ١ = ٤ ، وكانت $\Delta \text{ س} = ٣$ ، احسب س ٢ .

الحل :

$$\text{س} = \text{س} + \Delta \text{ س}$$

$$= ٤ + ٣ = ٧$$

مثال : إذا كانت ص = ق (س) ، وتغيرت قيمة س من ٣ إلى ٤ ، أوجد مقدار التغير في س و أوجد مقدار التغير في ص .

$$\Delta \text{ س} = \text{س} - \text{س} = ٤ - ٣ = ١$$

الحل : التغير في س =

الأولوية لعملية الضرب
ثم الجمع

$$\begin{aligned} \text{التغير في ص} &= \Delta \text{ ص} = \text{ص} - 2 \text{ ص} = 1 \text{ ص} \\ \Leftarrow 1 \text{ ص} &= \text{ق} (1 \text{ س}) = \text{ق} (3) = 1 + 3 \times 2 = 7 \\ \Leftarrow 2 \text{ ص} &= \text{ق} (2 \text{ س}) = \text{ق} (4) = 1 + 4 \times 2 = 9 \\ \Delta \text{ ص} &= \text{ص} - 2 \text{ ص} = 1 \text{ ص} = 9 - 7 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \text{ ص} &= \text{ص} - 2 \text{ ص} = 1 \text{ ص} \\ \text{ص} &= 2 \text{ ص} + 1 \text{ ص} = \Delta \text{ ص} \\ \text{ص} &= 1 \text{ ص} - 2 \text{ ص} = \Delta \text{ ص} \end{aligned}$$

* مقدار التغير في ص = Δ ص = ص - 2 ص = 1 ص ، ويعني مقدار التغير في

$$\begin{aligned} \text{ق} (1 \text{ س}) &= \Delta \text{ ق} (1 \text{ س}) = \text{ق} (2 \text{ س}) - \text{ق} (1 \text{ س}) \\ \Leftarrow \Delta \text{ ق} (1 \text{ س}) &= \text{ق} (1 \text{ س} + \Delta \text{ س}) - \text{ق} (1 \text{ س}) \end{aligned}$$

مثال : إذا كانت ص = ق (س) = س - 2 ، وتغيرت قيمة س من 3 إلى 7 ، أوجد مقدار التغير في ص .

الحل:

$$1 - \text{مقدار التغير في س} = \Delta \text{ س} = \text{س} - 2 \text{ س} = 1 \text{ س} = 7 - 3 = 4$$

$$2 - \text{مقدار التغير في ص} = \text{ص} - 2 \text{ ص} = 1 \text{ ص} = \Delta \text{ ق} (1 \text{ س}) = \text{ق} (2 \text{ س}) - \text{ق} (1 \text{ س})$$

$$\Leftarrow 1 \text{ ص} = \text{ق} (1 \text{ س}) = (3) = 1 - 9 = 8$$

$$\Leftarrow 2 \text{ ص} = \text{ق} (2 \text{ س}) = (7) = 1 - 49 = 48$$

$$\begin{aligned} \Delta \text{ ص} &= \Delta \text{ ق} (1 \text{ س}) - \Delta \text{ ق} (2 \text{ س}) \\ &= 8 - 48 = 40 \end{aligned}$$

مثال : إذا كانت ص = 13 وكانت Δ ص = 7 ، أوجد 2 ص

الحل :

$$\Delta \text{ ص} = \text{ص} - 2 \text{ ص} = 1 \text{ ص}$$

$$13 - 2 \text{ ص} = 7$$

$$20 = 2 \text{ ص} \Leftarrow 2 \text{ ص} = 13 + 7$$

عند نقل العدد من يسار المساواة إلى يمين المساواة تتغير إشارته
من سالب إلى موجب أو من موجب إلى سالب

متوسط التغير

تسمى النسبة $\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}}$ بمتوسط التغير .

$$\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \frac{\text{ص} - 2 \text{ ص}}{1 \text{ ص} - 2 \text{ ص}} = \frac{\text{ق} (2 \text{ س}) - \text{ق} (1 \text{ س})}{1 \text{ س} - 2 \text{ س}}$$

أو متوسط التغير =

$$\Delta ق (س) = \frac{ق (س_1 + \Delta) - ق (س_1)}{س_1 - 2س_1} \neq 2س_1$$

ويمكن الرمز لـ Δ س بالرمز ه فيصبح

$$ق (س_1 + ه) - ق (س_1) ، ه \neq 0$$

إذا كان المقام صفر و البسط عدد حقيقي يكون الجواب كمية غير معروفة

مثال :

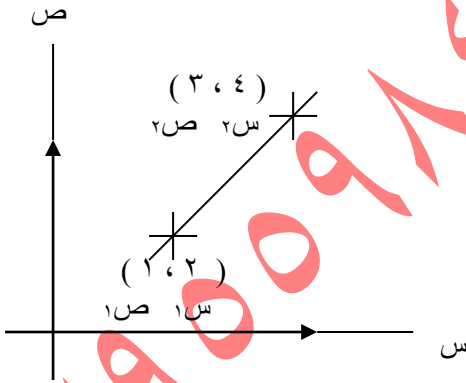
$$\frac{11}{0} ، \sqrt{2} ، \frac{4}{0}$$

إذا كان البسط صفراً و المقام عدد حقيقي يكون الجواب صفراً .

مثال :

$$\frac{0}{11} ، \sqrt{2} ، \frac{0}{4}$$

مثال : احسب ميل الخط المستقيم الموضح في الشكل التالي :



$$م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

$$م = \frac{2 - 1}{4 - 3} = \frac{1}{1} = 1$$

الاقتران الخطي = ق (س) = أس + ب

ملاحظة : متوسط التغير للاقتران الخطي هو ميل الخط المستقيم .

مثال : ق (س) = 2س + 1 أوجد ميل الخط المستقيم

الحل :

في الاقتران الخطي يكون ميل الخط المستقيم هو معامل س

$$م = 2 = متوسط التغير .$$

مثال : إذا كانت ص = ق (س) = س² ، وتغيرت قيمة س من ٢ إلى ٤ ، أوجد متوسط التغير .
الحل :

$$1- \text{التغير في س} = \text{س} - \text{س} = \text{س} - 2 = \Delta \text{س} = 4 - 2 = 2$$

$$2- \text{التغير في ص} = \text{ص} - \text{ص} = \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(2) = 16 - 4 = 12$$

$$1- \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(4) = 16 = \text{ص} = 16$$

$$2- \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(2) = 4 = \text{ص} = 4$$

$$3- \Delta \text{ص} = \text{ص} - \text{ص} = 16 - 4 = 12$$

$$\Delta \text{ص} = \frac{12}{2} = \frac{16 - 4}{4 - 2} = \frac{\text{ص} - \text{ص}}{\text{س} - \text{س}}$$

مثال : أوجد متوسط التغير في الاقتران ص = ق (س) = س³ - س² + ١ ، وتغير قيمة س من ٠ إلى ٣
الحل :

$$1- \Delta \text{س} = \text{س} - \text{س} = 3 - 0 = 3$$

$$2- \Delta \text{ص} = \text{ص} - \text{ص} = \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(0) = 27 - 1 = 26$$

$$\text{ص} = \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3 - \text{س}^2 + 1 = 27 - 9 + 1 = 19$$

$$\text{ص} = \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^3 - \text{س}^2 + 1 = 1 - 0 + 1 = 2$$

$$\Delta \text{ص} = \frac{17}{3} = \frac{19 - 2}{3 - 0}$$

مثال : س¹ ص¹ ، س² ص² ، س³ ص³ ، احسب متوسط التغير في النقطتين .
الحل :

$$\Delta \text{ص} = \frac{7 - 9}{3 - 6} = \frac{2}{3} = \text{متوسط التغير}$$

تمارين و مسائل

(١) إذا كانت ص = ق (س) فجد Δ س عندما تتغير س من :

(أ) - س = ١ إلى س = ٢ إلى س = ٥

الجواب = لاحظ هنا أن المطلوب هو مقدار التغير في س = ٢س - ١س = Δ س

$$٢ = ٣ - ٥ = ١س - ٢س = \Delta س =$$

(ب) - س = ١ إلى س = ٢ إلى س = ٣

الجواب = المطلوب مقدار التغير في س = ٢س - ١س = Δ س

$$٢ = ٥ + ٣ - = (٥ -) - ٣ - = ١س - ٢س = \Delta س =$$

(ج) - س = ١,٢ إلى س = ١,٢٥

الجواب = المطلوب مقدار التغير في س = ٢س - ١س = Δ س

$$٠,٠٥ = ١,٢ - ١,٢٥ = ١س - ٢س = \Delta س =$$

(٢) - إذا كانت ص = ٣ - ٥ س فجد مقدار التغير في ص أي (Δ ص) عندما تتغير س من

١س = ٢ إلى س = ٥

الجواب = المطلوب مقدار التغير في ص = ٢ص - ١ص = Δ ص

$$\Leftrightarrow ص = ٥ - ٣س \text{ لإيجاد قيمة ص } ١ \text{ نقوم بتعويض قيمة س } ١ = ٢ \text{ في المعادلة ص } = ٥ - ٣ \times ١$$

$$\Leftrightarrow ص = ٥ - ٣ \times ١ = ٥ - ٣ = ٢$$

$$\Leftrightarrow \text{ لإيجاد قيمة ص } ٢ \text{ نقوم بتعويض قيمة س } ٥ = ٥ \text{ في المعادلة ص } = ٥ - ٣ \times ٥$$

$$\Leftrightarrow ص = ٥ - ٣ \times ٥ = ٥ - ١٥ = -١٠$$

$$\Delta ص = ٢ص - ١ص = ١ص - ١٠ = (١ -) - ١٠ = ١ + ١٠ = ١١$$

(٣) - إذا كانت ص = ٢س - ٥ + ٦ فجد متوسط التغير في الاقتران عندما تتغير س من

١س = ١ إلى س = ٣

الجواب = لاحظ أن المطلوب هو متوسط التغير و هو يساوي مقدار التغير في ص مقسوماً على مقدار التغير في س .

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٢ص - ١ص}{١س - ٢س}$$

، إذا يتوجب علينا إيجاد قيمة ص ١ و قيمة ص ٢

لكي نوجد قيمة ص_١ نقوم بتعويض قيمة س_١ = ١ في المعادلة ص = ٢س_١ - ٥س + ٦

$$\Leftrightarrow \text{ص} = ١ = ٢(١) - ٥ - ٦ = ٦ + ١ \times ٥ - ٢$$

لكي نوجد قيمة ص_٢ نقوم بتعويض قيمة س_٢ = ٣ في المعادلة ص = ٢س_٢ - ٥س + ٦

$$\Leftrightarrow \text{ص} = ٠ = ٦ + ٣ \times ٥ - ٢$$

$$\Delta \text{ ص} = \text{ص} - \text{ص} = ٢ - ٠ = ٢ - ٠ = ٢$$

$$\Delta \text{ س} = \text{س} - \text{س} = ١ - ٣ = ١ - ٣ = -٢$$

$$\Delta \text{ ص} = \frac{\text{ص} - \text{ص}}{\text{س} - \text{س}} = \frac{٢ - ٠}{١ - ٣} = \frac{٢}{-٢} = -١$$

(٤) - إذا كانت ص = ٣س_١ - ١١ فجد متوسط التغير في الاقتران ص عندما تتغير س من

$$\text{س} = ٠,١ \text{ إلى } \text{س} = ٠,٣$$

$$\text{الجواب} = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}}{\text{س} - \text{س}} = \frac{٠,٣ - ٠,١}{٠,٣ - ٠,١}$$

إذن يتوجب علينا إيجاد قيمة ص_١ وقيمة ص_٢

١- لإيجاد قيمة ص_٢ نقوم بتعويض قيمة س_٢ = ٠,٣ في المعادلة ص = ٣س_٢ - ١١

$$\Leftrightarrow \text{ص} = ٢ = ٣(٠,٣) - ١١ = ١١ - (٠,٠٩) = ١١ - ٠,٠٩ = ١٠,٩١$$

١- لإيجاد قيمة ص_١ نقوم بتعويض قيمة س_١ = ٠,١ في المعادلة ص = ٣س_١ - ١١

$$\Leftrightarrow \text{ص} = ١ = ٣(٠,١) - ١١ = ١١ - (٠,٠٣) = ١١ - ٠,٠٣ = ١٠,٩٧$$

$$\Delta \text{ ص} = \frac{\text{ص} - \text{ص}}{\text{س} - \text{س}} = \frac{١٠,٩٧ - ١٠,٩١}{٠,٣ - ٠,١} = \frac{٠,٠٦}{٠,٢} = ٠,٣$$

٠,٢٤

♣ لاحظ هنا — لا يجوز أن يكون المقسوم عليه كسر عشري لأجل ذلك نقوم بإزاحة الفاصلة في المقام خانة واحدة باتجاه اليمين فيصبح العدد ٢,٠ ونقوم أيضاً بإزاحة الفاصلة

في البسط خانة واحدة باتجاه اليمين (نفس المقام) فيصبح ٢,٤

$$1,2 = \frac{2,4}{2,0} \Leftrightarrow \frac{0,24}{0,2} \Leftrightarrow$$

(٥) - إذا كانت ص = س^٣ - ٧ فجد متوسط التغير في الاقتران ص عندما تتغير س من س_١ = ٢ إلى س_٢ = ٣ ، وما ميل القاطع المار بالنقطتين (٧-، ٠) ، (١-، ٦) .

الجواب =

$$\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \frac{\text{ص} - ٢ \text{ ص}}{\text{س} - ٢ \text{ س}}$$

إذن يتوجب علينا إيجاد قيمة ص_١ و قيمة ص_٢ ، وذلك بتعويض قيم س_١ = ٢ و س_٢ = ٣ على التوالي .

$$١ \text{ ص} - ١ = ٧ - ٢(٢) = ٣ ، ٢ \text{ ص} - ٢ = ٧ - ٢(٣) = ١$$

$$١٩ = \frac{١٩}{١} = \frac{١ - ٢٠}{٢ - ٣} = \frac{\text{ص} - ٢ \text{ ص}}{\text{س} - ٢ \text{ س}}$$

$$١ = \frac{١}{١} = \frac{٧ - ٦}{٣ - ١} = \frac{\text{ص} - ٢ \text{ ص}}{\text{س} - ٢ \text{ س}} = \frac{\text{مقدار التغير في ص}}{\text{مقدار التغير في س}}$$

♣ ميل القاطع =

(٦) - إذا كانت ص = ق(س) = س^٣ - ٢س - ١ ، س_١ = ١ ، س_٢ = ٣ ، فجد :

(أ) - Δ ص يعني مقدار التغير في ص أي ص_٢ - ص_١ ولإيجاد قيمة ص_١ نقوم بتعويض س_١ = ١

$$\text{في المعادلة ص} = \frac{٣}{٢} \text{ س} - ١$$

$$\text{ص} = \frac{٣}{٢} (١) - ١ = \frac{٣}{٢} - \frac{٢ \times ١}{٢} = \frac{٣}{٢} - \frac{٢}{٢} = \frac{١}{٢}$$

⇔ لإيجاد قيمة ص_٢ نقوم بتعويض س_٢ في المعادلة ص = $\frac{٣}{٢}$ س - ١ . ولكن قيمة س_٢ غير موجودة

والموجود هو Δ س فنقوم بإيجاد س_٢ كالتالي :

$$\Delta \text{ س} = ٢ \text{ س} - ١ \text{ س} \Leftrightarrow ٣ = ١ - ٢ \text{ س} \Leftrightarrow ٣ = ١ + ٣ = ٢ \text{ س} \text{ ومنها } ٢ \text{ س} = ٤$$

$$\text{الآن نوجد ص} \text{ بتعويض قيمة س} = ٢ \text{ في المعادلة } \text{ص} = \frac{٣}{٢} - ١$$

$$\text{ص} = \frac{٣}{٢} - ١ = \frac{٣}{٢} - ١ \times \frac{٢}{٢} = \frac{٣ - ٢}{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{ص} = ٢٢,٥ = \frac{١}{٢} - ٢٣ = ١ \text{ ص} - ٢ \text{ ص} = \Delta \text{ ص} \text{ ومنها } ٢٣ = ١ - ٢٤$$

تابع السؤال السادس :

(ب) - متوسط التغير في الاقتران ص = ق (س)

متوسط التغير =

$$٧,٥ = \frac{٢٢,٥}{٣} = \frac{١ \text{ ص} - ٢ \text{ ص}}{١ \text{ س} - ٢ \text{ س}} = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}}$$

ملاحظة هامة :

يجب الانتباه إلى ثلاث مطالب :

- ١- مقدار التغير في س
- ٢- مقدار التغير في ص
- ٣- متوسط التغير

- ١- مقدار التغير في س يعني ذلك س٢ - س١
- ٢- مقدار التغير في ص يعني ذلك ص١ - ص٢
- ٣- متوسط التغير يعني ذلك :

مقدار التغير في ص = ص١ - ص٢

=

مقدار التغير في س = س١ - س٢

أحمد القضاة ٢٠٣١٦٥٠٦
٧٩٥٥٩١٦٥٠٦