الفهرس

الفصل الاول التكامل *Integration*

أولا معكوس المشتقة

تعريف Adel Awwad

اذا كان ق اقترانا متصلا على الفترة [أ،ب] فإن م(س) يسمى معكوسا لمشتقة الاقتران ق(س) اذا كان م′(س) = ق(س) لكل س∈(أ،ب).

الامثلة

جد معكوسا لكل من مشتقة الاقترانات التالية :

١

ق(س) = ٥س^{٤}

الحل

م(س) = س^{٥}

٢

ق(س) = ٧س^{٦} – ٣س^{٢}

الحل

م(س) = س^{٧} – س^{٣}

٣

ق(س) =قا^{٢}س

الحل

م(س) =ظاس

٤

ق(س) =جاس+جتاس

الحل

م(س) = –جتاس+جاس

٥

ق(س) =قاسظاس

الحل

م(س) =قاس

٦

ق(س) =قتا^{٢}س

الحل

م(س) =-ظتاس

ملاحظة مهمة : لكل اقتران متصل عدد لا نهائي من الاقترانات التي مشتقتها تعطي الاقتران المتصل تختلف هذه الاقترانات في الثابت جـ

تعريف

Adel Awwad

اذا كان م(س) اقترانا معكوسا لمشتقة الاقتران ق(س) على [أ،ب] فإن الصورة العامة لقاعدة اي معكوس لمشتقة الاقتران ق هي م (س) + جـ ويسمى اي معكوس للمشتقة بالتكامل غير المحدود ل ق(س) بالنسبة الى س ويرمز له على النحو التالي : ∫ ق(س)ءس

الامثلة

جد كلا مما ياتي :

١	٢	٣
∫ ٧س^٦ ءس	∫ ١٠ س^٩ ءس	∫ قا^٢س ءس
الحل	الحل	الحل
س^٧ + جـ	س^١٠ + جـ	ظاس + جـ

تعريف

Adel Awwad

∫ ق′(س) ءس = ق(س) + جـ ، ∫ ق″(س) ءس = ق′(س) + جـ

الامثلة

١

اذا كان $ق(س) = \int (٣س^٢ + ٦س + ٤) ءس$

جد (١) $ق'(س)$ (٢) $ق''(٢)$

الحل

$ق'(س) = ٣س^٢ + ٦س + ٤$

$ق''(س) = ٦س + ٦$

$ق''(٢) = ٦ \times ٢ + ٦$

$ق''(٢) = ١٨$

٢

اذا كان $ق(س) = \int (٣س^٢ + ٦س + ٣)^٤ ءس$ ، جد $ق''(١)$؟

الحل

$ق'(س) = (٣س^٢ + ٦س + ٣)^٤$

$ق''(س) = ٤(٣س^٢ + ٦س + ٣)^٣ (٦س + ٦)$

$ق''(١) = ٤(٣ + ٦ + ٣)^٣ (٦ + ٦)$

$ق''(١) = ٤(١٢)^٣ (١٢)$

$ق''(١) = ٤(١٢)^٤$

٣

اذا كان $\int$ ن $'$(س) ءس = جاس+جتاس ، جد ن $''(\pi)$.

الحل

ن(س)=جاس+جتاس

ن $'$(س)=جتاس−جاس

ن $''$(س)=−جاس−جتاس

ن $''(\pi)$=−جا π−جتا π

ن $''(\pi)$=٠+١=١

٤

اذا كان $\int$ ن $'$(س) ءس = جا ^{٢} ٢س ، جد ن $'(\frac{\pi}{٢})$؟

الحل

ن(س)=جا ^{٢} ٢س

ن $'$(س)=٤ جا٢س جتا٢س

ن $'(\frac{\pi}{٢})$=٤ جا π جتا π

ن $'(\frac{\pi}{٢})$=٠

٥

اذا كان $\int$ ن(س) ءس = ٢س ^{٣} − ٨س ^{٢} ، جد ن $'$(١)؟

الحل

نشتق الطرفين

ن(س) = ٦س ^{٢} − ١٦س

$$ن'(س) = ١٢س - ١٦$$

$$ن(١) = ١٢ - ١٦ = -٤$$

٦

اذا كان $\int ن(س)\,ءس = جا^٢ ٢س + ظاس + جـ$ ، جد $ن'(\frac{\pi}{٤})$ ؟

الحل

نشتق الطرفين

$$ن(س) = ٤جا٢س جتا٢س + قا^٢ س \leftarrow ن(س) = ٢جا٤س + قا^٢ س$$

$$ن'(س) = ٨جتا٤س + ٢قا^٢ س ظاس$$

$$ن'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = ٨جتا\pi + ٢قا^٢ \frac{\pi}{٤} ظا\frac{\pi}{٤}$$

$$ن'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = -٨ + ٤ \leftarrow ن'\left(\frac{\pi}{٤}\right) = -٤$$

٧

اذا كان $\int ن'(س)\,ءس = ٢س^٣ + ٢س^٢ + ٤$ وكان $ن(١) = ٢$ جد $ن'(٢)$ ؟

الحل

$$ن(س) = ٢س^٣ + ٢س^٢ + ٤ + جـ$$

$$ن(١) = ٢ + ٢ + ٤ + جـ$$

$$٢ = ٨ + جـ \leftarrow جـ = -٦$$

$$\therefore ن(س) = ٢س^٣ + ٢س^٢ - ٢$$

$$\therefore ن'(س) = ٦س^٢ + ٤س$$

∴ ن′(٢) = ٦×٤ + ٤×٢

ن′(٢) = ٣٢

٨

اذا كان ∫ (ن′(س) + ٢س) ءس = س^٣ + أس^٢ + ١ وكان ن(٢)=٧ ، ن′(١)=٥

جد (١) قيمة أ　　(٢) ن(٠)　　(٣) ن′(٤) .

الحل

∫ ن′(س) ءس + ∫ ٢س ءس = س^٣ + أس^٢ + ١

ن(س) = س^٣ + أس^٢ − س^٢ + ١ + جـ

ن(٢) = ٨ + ٤أ − ٤ + ١ + جـ

٧ = ٨ + ٤أ − ٤ + ١ + جـ ← ٢ = ٤أ + جـ ....(١)

ن′(س) = ٣س^٢ + ٢أس − ٢س

ن′(١) = ٣ + ٢أ − ٢

٥ = ٣ + ٢أ − ٢ ← أ = ٢

∴ ٢ = ٤×٢ + جـ ← جـ = −٦

٢ = ٨ + جـ ← جـ = −٦

ن(س) = س^٣ + س^٢ − ٥

ن(٠) = −٥

ن′(س) = ٣س^٢ + ٢س

ن′(٤) = ٤٨ + ٨　　　∴ ن′(٤) = ٥٦

٩

اذا كان $\int$ ق $''$(س) ءس = جاس + ٢جتاس ، جد ق $''(\pi)$.

الحل

ق $''$(س) = جتاس − ٢جاس

ق $''(\pi)$ = جتاπ − ٢جاπ

ق $''(\pi)$ = −١ − ٠

ق $''(\pi)$ = −١

١٠

اذا كان ق $'$(س) + قا^{٢}س = ٣س^{٢} ، جد ق(س) ، حيث ق$\left(\frac{\pi}{٤}\right) = \frac{\pi^{٣}}{٦٤}$.

الحل

ق $'$(س) = ٣س^{٢} − قا^{٢}س

$\int$ ق $'$(س) ءس = $\int$ (٣س^{٢} − قا^{٢}س) ءس

ق(س) = س^{٣} − ظاس + جـ

ق$\left(\frac{\pi}{٤}\right) = \left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٣}$ − ظا$\frac{\pi}{٤}$ + جـ

$\frac{\pi^{٣}}{٦٤} = \left(\frac{\pi}{٤}\right)^{٣}$ − ظا$\frac{\pi}{٤}$ + جـ

$\cancel{\frac{\pi^{٣}}{٦٤}} = \cancel{\frac{\pi^{٣}}{٦٤}}$ − ١ + جـ ← جـ = ١

ق(س) = س^{٣} − ظاس + ١

١١

اذا كان م(س) = ٤س^{٣} − ٣س^{٢} + ٢س + ٥ هو معكوسا لمشتقة الاقتران ق(س) جد ق(−١)؟

الحل

م$'$(س) = ق(س)

∴ م$'$(س) = ١٢س^{٢} − ٦س + ٢

ق(−١) = ١٢ + ٦ + ٢

ق(−١) = ٢٠

الابداع في الرياضيات

تمرين (١)

١

اذا كان ق(س)= $\int$ جتا^{٢}س ءس ، جد ق$''$(٠)

٢

اذا كان $\int$ (ق$'$(س)+جاس)ءس = اجتاس + ٤س^{٣} + ٢ا + ٢ وكان ق(٠)=٤ ، ق$'$($\frac{\pi}{٢}$)=٣$\pi^{٢}$

جد (١) ا (٢) ق$''$($\frac{\pi}{٦}$)

٣

اذا كان $\int$ ق(س)ءس = (٣س^{٢} + ٦س + ١)^{٨} +جـ ، جد ق$'$(−١)

٤

اذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق(س) جد : (م − هـ)$'$(س) بدلالة ق(س)؟

٥

اذا كان الاقتران ق(س) = اس + ب وكان م(س) اقتران معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) بحيث ان م$'$(٢)=١٨ ، م$''$(٢)=٢ جد قيمة ا ، ب.

ثانيا — قواعد التكامل غير المحدود

Indefinite Integral Rules

قاعدة ١

$$\int \text{ا}\, ء\text{س} = \text{ا}\text{س} + \text{جـ}$$

الامثلة

جد التكاملات التالية

(١) $\int ٤\, ء\text{س}$

الحل :

$٤\text{س} + \text{جـ}$

(٢) $\int -٣\, ء\text{س}$

الحل :

$-٣\text{س} + \text{جـ}$

(٣) $\int \frac{١}{٢}\, ء\text{س}$

الحل :

$\frac{١}{٢}\text{س} + \text{جـ}$

قاعدة ٢

$$\int \text{س}^{\text{ن}}\, ء\text{س} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{جـ} \quad \text{، حيث } \text{ن} \neq -١$$

الامثلة

جد التكاملات التالية

(١) $\int \text{س}^{٦}\, ء\text{س}$

الحل :

$\frac{\text{س}^{٧}}{٧} + \text{جـ}$

(٢) $\int \text{س}^{-٤}\, ء\text{س}$

الحل :

$\frac{\text{س}^{-٣}}{-٣} + \text{جـ}$

(٣) $\int \text{س}^{\frac{١}{٢}}\, ء\text{س}$

الحل :

$\frac{٢}{٣} \times \text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

قاعدة ٣

$$\int أ\,ن(س)\,ءس = أ\int ن(س)\,ءس$$

الامثلة

جد التكاملات التالية

(١) $\int ٥س^{٦}\,ءس$

الحل :

$$\frac{٥س^{٧}}{٧} + جـ$$

(٢) $\int ٩س^{-٤}\,ءس$

الحل :

$$\frac{٩س^{-٣}}{-٣} + جـ \leftarrow -٣س^{-٣} + جـ$$

قاعدة ٤

$$\int (ن(س) \pm هـ(س))\,ءس = \int ن(س)\,ءس \pm \int هـ(س)\,ءس$$

الامثلة

جد التكاملات التالية

(١) $\int (٢س^{-٣} + ٤س^{٥} + ٦س + ١)\,ءس$

الحل :

$$\frac{٢س^{-٢}}{-٢} + \frac{٤س^{٦}}{٦} + \frac{٦س^{٢}}{٢} + س + جـ$$

$$-س^{-٢} + \frac{٢س^{٦}}{٣} + ٣س^{٢} + س + جـ$$

(٢) $\int (\frac{١}{٢}س^{٤} - ٤س^{٣} - ٨س^{\frac{١}{٢}})ءس$

الحل :

$\frac{س^{٥}}{١٠} - س^{٤} - \frac{١٦س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + جـ$

(٣) $\int (س^{-٤} - ٤س^{\frac{١}{٢}} + ٨س^{\frac{-٤}{٧}})ءس$

الحل :

$\frac{س^{-٣}}{-٣} - \frac{٨س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + \frac{٥٦س^{\frac{٣}{٧}}}{٣} + جـ$

(٤) $\int \sqrt[٥]{س^{٢}}\,ءس = \int س^{\frac{٢}{٥}}ءس$

الحل :

$\frac{٥}{٧}س^{\frac{٧}{٥}} + جـ$

(٥) $\int (\sqrt[٧]{س^{٣}} + \sqrt{س})ءس = \int (س^{\frac{٣}{٧}} + س^{\frac{١}{٢}})ءس$

الحل :

$\frac{٧}{١٠}س^{\frac{١٠}{٧}} + \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

(٦) $\int \frac{٣}{\sqrt[٥]{س^{٢}}}ءس$

الحل :

$$\therefore \int \frac{\text{٣}}{\text{س}^{\frac{\text{٢}}{\text{٥}}}}\,\text{ءس} = \int \text{٣س}^{\frac{-\text{٢}}{\text{٥}}}\,\text{ءس}$$

$$\text{٥س}^{\frac{\text{٣}}{\text{٥}}} + \text{جـ}$$

---

(٧) $\int \frac{\text{٢س}^{\text{٦}} - \text{٤س}^{\text{٣}} + \text{٧س}}{\text{س}^{\text{٣}}}\,\text{ءس}$

توزيع البسط على المقام

الحل :

$$\int \left(\frac{\text{٢س}^{\text{٦}}}{\text{س}^{\text{٣}}} - \frac{\text{٤س}^{\text{٣}}}{\text{س}^{\text{٣}}} + \frac{\text{٧س}}{\text{س}^{\text{٣}}}\right)\text{ءس}$$

$$\int \left(\text{٢س}^{\text{٣}} - \text{٤} + \text{٧س}^{-\text{٢}}\right)\text{ءس}$$

$$\left(\frac{\text{س}^{\text{٤}}}{\text{٢}} - \text{٤س} - \text{٧س}^{-\text{١}}\right) + \text{جـ}$$

---

(٨) $\int \frac{\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{٣س}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$

توزيع البسط على المقام

الحل :

$$\int \left(\text{٢س}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} - \text{٣س}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}\right)\text{ءس}$$

$$\frac{\text{٤}}{\text{٥}}\text{س}^{\frac{\text{٥}}{\text{٢}}} - \text{٢س}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} + \text{جـ}$$

قاعدة ٥

(١) $\int \text{جا م س ءس} = -\frac{\text{جتا م س}}{\text{م}} + \text{جـ}$

(٢) $\int \text{جتا م س ءس} = \frac{\text{جا م س}}{\text{م}} + \text{جـ}$

(٣) $\int \text{قا}^{٢}\text{ م س ءس} = \frac{\text{ظا م س}}{\text{م}} + \text{جـ}$

(٤) $\int \text{قتا}^{٢}\text{ م س ءس} = -\frac{\text{ظتا م س}}{\text{م}} + \text{جـ}$

(٥) $\int \text{قا م س ظا م س ءس} = \frac{\text{قا م س}}{\text{م}} + \text{جـ}$

(٦) $\int \text{قتا م س ظتا م س ءس} = -\frac{\text{قتا م س}}{\text{م}} + \text{جـ}$

الامثلة

جد التكاملات التالية :

(١) $\int (\text{جا٣س} + \text{جتا٦س})\,\text{ءس}$

الحل :

$$-\frac{\text{جتا٣س}}{٣} + \frac{\text{جا٦س}}{٦} + \text{جـ}$$

(٢) $\int (\text{قا}^{٢}\text{٥س} + \text{جتا٨س})\,\text{ءس}$

الحل :

$\frac{\text{ظا٥س}}{٥} + \frac{\text{جا٨س}}{٨} + \text{جـ}$

---

(٣) $\int \left(\text{قتا}^{٢}\,\frac{١}{٢}\text{س} + \text{جا٦س}\right)\text{ءس}$

الحل :

$-\text{٢ظتا}\frac{١}{٢}\text{س} - \frac{\text{جتا٦س}}{٦} + \text{جـ}$

جا٢س = ٢ جاس جتاس

(٤) $\int (\text{جاس جتاس})\text{ءس}$

الحل :

$\int (\text{جاس جتاس})\text{ءس} = \int \frac{١}{٢}\text{جا٢س ءس}$

$-\frac{١}{٢} \times \frac{\text{جتا٢س}}{٢} + \text{جـ}$

---

(٥) $\int \left(\text{٤ جا}\frac{١}{٢}\text{س جتا}\frac{١}{٢}\text{س}\right)\text{ءس}$

الحل :

$\int \text{٢جاس ءس}$

$-٢ \times \text{جتاس} + \text{جـ}$

جتا٢س = جتا^{٢}س − جا^{٢}س

(٦) $\int (\text{جتا}^{٢}\text{٣س} - \text{جا}^{٢}\text{٣س})\text{ءس}$

الحل :

$\int \text{جتا٦س ءس} \leftarrow \frac{\text{جا٦س}}{٦} + \text{جـ}$

$$\text{جا}^{2}\text{س} + \text{جتا}^{2}\text{س} = 1$$

(٧) $\int (\text{جا}^{2}\text{س} + \text{جتا}^{2}\text{س})\, د\text{س}$

الحل :

$\int 1\, د\text{س}$

س + جـ

$$\text{جا}^{2}\text{س} = \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}2\text{س})$$

(٨) $\int \text{جا}^{2}\text{س}\, د\text{س}$

الحل :

$\frac{1}{2}\int (1 - \text{جتا}2\text{س})\, د\text{س}$

$\frac{1}{2}(\text{س} - \frac{\text{جا}2\text{س}}{2}) + \text{جـ}$

$$\text{جتا}^{2}\text{س} = \frac{1}{2}(1 + \text{جتا}2\text{س})$$

(٩) $\int \text{جتا}^{2}\text{س}\, د\text{س}$

الحل :

$\frac{1}{2}\int (1 + \text{جتا}2\text{س})\, د\text{س}$

$\frac{1}{2}(\text{س} + \frac{\text{جا}2\text{س}}{2}) + \text{جـ}$

(١٠) $\int \text{جتا}^{4}\text{س}\, د\text{س}$

الحل :

$\int \text{جتا}^{2}\text{س}\,\text{جتا}^{2}\text{س}\, د\text{س}$

$$\frac{1}{4}\int (1+\text{جتا}2\text{س})(1+\text{جتا}2\text{س})\,\text{ءس}$$

$$\frac{1}{4}\int (1+2\,\text{جتا}2\text{س}+\text{جتا}^{2}2\text{س})\,\text{ءس}$$

$$\frac{1}{4}\int (1+2\,\text{جتا}2\text{س}+\frac{1}{2}(1+\text{جتا}4\text{س}))\,\text{ءس}$$

$$\frac{1}{4}(\text{س}+\frac{2\,\text{جا}2\text{س}}{2}+\frac{1}{2}\text{س}+\frac{1}{2}\times\frac{\text{جا}4\text{س}}{4})+\text{جـ}$$

$$\frac{1}{4}(\text{س}+\text{جا}2\text{س}+\frac{1}{2}\text{س}+\frac{1}{8}\times\text{جا}4\text{س})+\text{جـ}$$

(١١) $\int \text{ظا}^{2}\text{س}\,\text{ءس}$

$\text{ظا}^{2}\text{س} = (\text{قا}^{2}\text{س}-1)$

الحل :

$$\int (\text{قا}^{2}\text{س}-1)\,\text{ءس}$$

$$(\text{ظاس}-1)+\text{جـ}$$

(١٢) $\int \frac{\text{جتا}2\text{س}}{\text{جا}^{2}\text{س}\,\text{جتا}^{2}\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل :

$$\int \frac{\text{جتا}^{2}\text{س}-\text{جا}^{2}\text{س}}{\text{جا}^{2}\text{س}\,\text{جتا}^{2}\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$\int \frac{\text{جتا}^{2}\text{س}}{\text{جا}^{2}\text{س}\,\text{جتا}^{2}\text{س}}\,\text{ءس}-\int \frac{\text{جا}^{2}\text{س}}{\text{جا}^{2}\text{س}\,\text{جتا}^{2}\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$\int \text{قتا}^{2}\text{س}\,\text{ءس}-\int \text{قا}^{2}\text{س}\,\text{ءس}$$

$$-\text{ظتاس}-\text{ظاس}+\text{جـ}$$

(١٣) $\int$ جتا٣س(جتا٢س جتاس − جا٢س جاس)ءس

جتا(س ± ص) = جتاس جتاص ∓ جاس جاص

✍ الحل :

$\int$ جتا^{٢}٣س ءس ← $\frac{١}{٢}\int$(١ + جتا٦س)ءس

$\frac{١}{٢}$(س + $\frac{\text{جا٦س}}{٦}$) + جـ

---

(١٤) $\int \frac{١}{\text{١ + جاس}}$ ءس

الضرب بالعامل المرافق

✍ الحل :

$\int \frac{١}{\text{١ + جاس}} \times \frac{\text{١ − جاس}}{\text{١ − جاس}}$ ءس

$\int \frac{\text{١ − جاس}}{\text{١ − جا}^{٢}\text{س}}$ ءس ← $\int \frac{\text{١ − جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ ءس ← $\int$(قا^{٢}س − ظاس قاس)ءس

ظاس − قاس + جـ

قاعدة مهمة جدا

$\int$(اس + ب)^{ن} ءس = $\frac{(\text{اس + ب})^{ن+١}}{\text{ا}(ن+١)}$ + جـ　،　ن + ١ ≠ ٠

الامثلة

جد التكاملات التالية :

(١) $\int$(٢س + ٧)^{٦} ءس

الحل :

$$\frac{(٢س + ٧)^{٧}}{١٤} + ج$$

(٢) $\int (-٤س + ٨)^{٢}\, ءس$

الحل :

$$\frac{(-٤س + ٨)^{٣}}{-١٢} + ج$$

(٣) $\int (٢ - ٤س)^{-٦}\, ءس$

الحل :

$$\frac{(٢ - ٤س)^{-٥}}{٢٠} + ج$$

الابداع في الرياضيات

تمرين (٢)

١) جد كلا من التكاملات التالية :

١) $\int \left(س^{-٤} + ٨س^{\frac{١}{٢}} + \sqrt[٣]{س}\right) ءس$

٢) $\int \left(-٣س + ٨\right)^{-\frac{١}{٢}} ءس$

٣) $\int \frac{٣}{جتا٢س + ١} ءس$

٤) $\int \frac{\left(س^{٥} - ٤س^{٣} + س\right)}{\sqrt{س}} ءس$

٥) $\int \frac{٢}{جتاس - ١} ءس$

٦) $\int \frac{ظاس}{جتاس} ءس$

٧) $\int \left(جا\frac{١}{٣}س \, جتا\frac{١}{٣}س\right) ءس$

٨) $\int \left(جتا^{٢}٢س - جا^{٢}٢س\right) ءس$

٩) $\int جتا^{٢}\left(\frac{س}{٢}\right) ءس$

١٠) $\int س^{٤}\left(٣ + \frac{١}{س}\right)^{٤} ءس$

١١) $\int \frac{١}{س}\sqrt{٢س^{٣} + ٥س^{٢}}\, ءس$ ، $س > ٠$

١٢) $\int \frac{\left(١ - جا^{٣}س\right)}{١ - جاس} ءس$

١٣) $\int \frac{\left(س^{٣} - ٤س^{٢}\right)}{\sqrt{س} - ٢} ءس$

١٤) $\int \frac{\left(س^{٢} - س\right)}{\sqrt{س} - ٣} ءس$

١٥) $\int \frac{١}{قاس - ١} ءس$

١٥) $\int \frac{٦س}{\sqrt{٩س + ٥} + \sqrt{٣س + ٥}} ءس$

٢) اذا كان $ق''(س) = جاس$ ، $ق'(\pi) = -١$ ، $ق(\pi) = ٠$ فجد قاعدة الاقتران ق(س) .

إيجاد التكامل في حالة اختلاف الزوايا

تذكير

(١) جتاأجتاب = $\frac{١}{٢}$ [جتا(أ − ب)+جتا(أ + ب)]

(١) جاأجاب = $\frac{١}{٢}$ [جتا(أ − ب)−جتا(أ + ب)]

(٣) جاأجتاب = $\frac{١}{٢}$ [جا(أ − ب)+جا(أ + ب)]

الامثلة

جد التكاملات التالية :

(١) ∫ جا٢س جتا٨س ءس

الحل :

$\frac{١}{٢}$ ∫ (جا−٦س+جا١٠س) ءس

$\frac{١}{٢}$ ($\frac{\text{جتا٦س}}{٦}$ − $\frac{\text{جتا١٠س}}{١٠}$)+جـ

---

(٢) ∫ جتا١٠س جتا٤س ءس

الحل :

$\frac{١}{٢}$ ∫ (جتا١٤س+جتا٦س) ءس

$$\frac{١}{٢}\left(\frac{\text{جا٤١س}}{١٤}+\frac{\text{جا٦س}}{٦}\right)+\text{جـ}$$

---

(٣) $\int \text{جا٦س جا٢س ءس}$

✍ الحل :

$$\frac{١}{٢}\int(\text{جتا٤س} - \text{جتا٨س})\,\text{ءس}$$

$$\frac{١}{٢}\left(\frac{\text{جا٤س}}{٤}-\frac{\text{جا٨س}}{٨}\right)+\text{جـ}$$

---

(٤) $\int \text{جتا١٠س} \times \left[\text{جتا(٤س)جتا(س)} - \text{جا(٤س)جا(س)}\right]\text{ءس}$

✍ الحل :

$$\int \text{جتا١٠س} \times \text{جتا٥س ءس}$$

$$\frac{١}{٢}\int(\text{جتا٥س} + \text{جتا١٥س})\,\text{ءس}$$

$$\frac{١}{٢}\left(\frac{\text{جا٥س}}{٥}+\frac{\text{جا١٥س}}{١٥}\right)+\text{جـ}$$

ثالثا التكامل المحدود *The Definite Integral*

Adel Awwad

تعريف

اذا كان ق اقترانا متصلا على الفترة [أ،ب] م(س) معكوسا لمشتقة الاقتران ق(س) ، يسمى $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس$ لكل $س \in (أ،ب)$ بالتكامل المحدود حيث :

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = م(س)\Big]_{أ}^{ب} = م(ب) - م(أ)$$ حيث أ : الحد السفلي ب : الحد العلوي

الامثلة

س١ جد التكاملات التالية :

(١) $\int_{٢}^{٤} (٢س + ٤)\,دس$

الحل :

$$(س^{٢} + ٤س)\Big]_{٢}^{٤} = (٤)^{٢} + ٤(٤) - ((٢)^{٢} + ٤(٢))$$

$$٣٢ - ١٢ = ٢٠$$

(٢) $\int_{-٢}^{٢} (٣س^{٢} + ٤س)\,دس$

الحل :

$$\left[\text{س}^{3}+2\text{س}^{2}\right]_{-2}^{2}=8+8-(-8+8)=16$$

(٣) $\displaystyle\int_{0}^{16}\sqrt{\text{س}}\,\text{ءس}$

الحل :

$$\int_{0}^{16}\text{س}^{\frac{1}{2}}\,\text{ءس}\leftarrow\frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{16}\leftarrow\frac{2}{3}\sqrt{(\text{س})^{3}}\Big|_{0}^{16}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{(16)^{3}}-\sqrt{(0)^{3}}\right)=\frac{128}{3}$$

(٤) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\text{جاس}+\text{جتاس}\right)\text{ءس}$

الحل :

$$\left(-\text{جتاس}+\text{جاس}\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=-\text{جتا}\frac{\pi}{2}+\text{جا}\frac{\pi}{2}-\left(-\text{جتا}0+\text{جا}0\right)=2$$

س٢

اذا كان $\displaystyle\int_{2}^{\text{أ}}4\,\text{ءس}=20$ فما قيمة الثابت أ

قاعدة :

$\displaystyle\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}\text{جـ}\,\text{ءس}=\text{جـ}(\text{ب}-\text{أ})$ حيث جـ ثابت

الحل :

$$4(\text{أ}-2)=20\leftarrow\text{أ}=7$$

س٣

اذا كان $\displaystyle\int_{2\text{أ}}^{3}5\,\text{ءس}=8$ فما قيمة الثابت أ.

الحل :

$$هـ(٣-٢أ)=٨ \leftarrow أ=\frac{٧}{١٠}$$

س٤

اذا كان $\int_{١+أ}^{٢+٣أ} هـ\,ءس = ٤٠$ فما قيمة الثابت أ .

الحل :

$$هـ((٢+٣أ)-(١+أ))=٤٠ \leftarrow (١+٢أ)=٨ \leftarrow \therefore أ=\frac{٧}{٢}$$

س٥

اذا كان $\int_{٠}^{٣}(٢أس+٤)ءس = ٢١$ فما قيمة الثابت أ.

الحل :

$$أس^{٢}+٤س\Big|_{٠}^{٣}=٢١ \leftarrow ٩أ+١٢=٢١ \leftarrow أ=١$$

الابداع في الرياضيات

تمرين (٣)

(١) اذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثانية وكان ق(٠) = ق(١) = ٠ ، $\int_{٠}^{١}$ (٢أس + ٤) دس = ١ جد قاعدة الاقتران ق .

(٢) اذا كان $\int_{-١}^{٣}$ (٣س^{٢} − ٢ $\int_{٠}^{جـ}$ ٣م^{٢} دم) دس = −٢٠ ، جد قيمة الثابت جـ .

خصائص التكامل المحدود

خاصية (١) الخواص الخطية

(١) $\int_{أ}^{ب}$ جـ ق(س) دس = جـ $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس

(٢) $\int_{أ}^{ب}$ (ق(س) ± هـ(س)) دس = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس ± $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) دس

الامثلة

(١) اذا كان $\int_{٢}^{٤}$ ٣ق(س) دس = ١٢ ، جد $\int_{٢}^{٤}$ (٤ق(س) + ١٠) دس

الحل :

$\int_{٢}^{٤}$ ٣ق(س) دس = ١٢ ← $\int_{٢}^{٤}$ ق(س) دس = ٤

$$\therefore \int_{٢}^{٤} (٤\text{د}(\text{س}) + ١٠)\,\text{دس} = ٤\int_{٢}^{٤} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} + \int_{٢}^{٤} ١٠\,\text{دس}$$

$$١٦ + ١٠ \times ٢ = ٣٦$$

---

(٢) اذا كان $\int_{١}^{٥} (٢\text{د}(\text{س}) - ٢\text{س})\,\text{دس} = ٢٠$ ، جد $\int_{١}^{٥} \text{د}(\text{س})\,\text{دس}$.

الحل :

$$\int_{١}^{٥} ٢\text{د}(\text{س})\,\text{دس} - \int_{١}^{٥} ٢\text{س}\,\text{دس} = ٢٠ \leftarrow \int_{١}^{٥} ٢\text{د}(\text{س})\,\text{دس} - \left|\text{س}^{٢}\right|_{١}^{٥} = ٢٠$$

$$\int_{١}^{٥} ٢\text{د}(\text{س})\,\text{دس} - (٢٥ - ١) = ٢٠ \leftarrow \int_{١}^{٥} ٢\text{د}(\text{س})\,\text{دس} = ٤٤$$

$$\int_{١}^{٥} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = ٢٢$$

---

(٣) جد كثير حدود من الدرجة الاولى بحيث يكون $\int_{-١}^{١} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = ٤$ ، $\int_{١}^{٣} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = ٢$.

الحل :

$$\text{د}(\text{س}) = \text{أس} + \text{ب}$$

$$\int_{-١}^{١} (\text{أس} + \text{ب})\,\text{دس} = ٤ \leftarrow \left|\left(\frac{\text{أس}^{٢}}{٢} + \text{ب س}\right)\right|_{-١}^{١} = ٢ \leftarrow \left(\frac{\text{أ}}{٢} + \text{ب}\right) - \left(\frac{\text{أ}}{٢} - \text{ب}\right) = ٢$$

$٢\text{ب} = ٤ \leftarrow \text{ب} = ٢$ .... (١)

$$\int_{1}^{3} (\text{أ}س + 2)\,ds = 2 \leftarrow \left(\frac{\text{أ}س^2}{2} + 2س\right)\Bigg|_{1}^{3} = 2 \leftarrow \left(\frac{9\text{أ}}{2} + 6\right) - \left(\frac{\text{أ}}{2} + 2\right) = 2$$

$$\left(\frac{9\text{أ}}{2} + 6\right) - \left(\frac{\text{أ}}{2} + 2\right) = 2 \leftarrow 4\text{أ} + 4 = 2 \leftarrow \text{أ} = \frac{-1}{2}$$ .... (٢)

$$\therefore\ ق(س) = \frac{-1}{2}س + 2$$

تمرين (٤)

(١) جد $\int_{-1}^{2} (2س^4) + \int_{1}^{2} (3ص^2 + 2)\,dص\,dس$

(٢) $\int_{0}^{\pi} (جتا2س) + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (جاص\,dص)\,dس$

خاصية (٢) خاصية الاضافة

اذا كان ق قابلا للتكامل على فترة تنتمي اليها الاعداد أ ، ب ، جـ فإن :

$$\int_{\text{أ}}^{جـ} ق(س)\,dس = \int_{\text{أ}}^{ب} ق(س)\,dس + \int_{ب}^{جـ} ق(س)\,dس$$

ليس شرطا ان تقع ب بين جـ ، أ

الامثلة

(١) اذا كان ق متصل على ح وكان $\int_{٢أ+١}^{٥ب-٢} ق(س)\,دس - \int_{٣}^{٧} ق(س)\,دس = \int_{٧}^{١٢} ق(س)\,دس$ جد قيمة أ ، ب

الحل :

$$\int_{٢أ+١}^{٥ب-٢} ق(س)\,دس = \int_{٣}^{٧} ق(س)\,دس + \int_{٧}^{١٢} ق(س)\,دس$$

$$\therefore \int_{٢أ+١}^{٥ب-٢} ق(س)\,دس = \int_{٣}^{١٢} ق(س)\,دس$$

$$٥ب - ٢ = ١٢ \leftarrow ب = \frac{١٤}{٥}$$

$$٢أ + ١ = ٣ \leftarrow أ = ١$$

---

(٢) اذا كان $ق(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} + ٢س & ،١ \le س < ٣ \\ ٤س+٢ & ،٣ \le س \le ٥ \end{cases}$ ، جد $\int_{١}^{٥} ق(س)\,دس$ ؟

الحل :

$$\int_{١}^{٥} ق(س)\,دس = \int_{١}^{٣} (٣س^{٢} + ٢س)\,دس + \int_{٣}^{٥} (٤س+٢)\,دس$$

$$\int_{١}^{٥} ق(س)\,دس = (س^{٣} + س^{٢})\Big|_{١}^{٣} + (٢س^{٢} + ٢س)\Big|_{٣}^{٥}$$

$$\int_{١}^{٥} ق(س)\,دس = (٢٧ + ٩) - (٢) + (٦٠) - (٢٤) = ٧٠$$

---

(٣) جد $\int_{٢}^{٦} |س - ٣| ى س$

الحل :

$س - ٣ = ٠ \leftarrow س = ٣$

$$\int_{٢}^{٦} |س - ٣| ى س = \int_{٢}^{٣} (٣ - س) ى س + \int_{٣}^{٦} (س - ٣) ى س$$

$$\int_{٢}^{٦} |س - ٣| ى س = \left(٣س - \frac{س^{٢}}{٢}\right)\Big|_{٢}^{٣} + \left(\frac{س^{٢}}{٢} - ٣س\right)\Big|_{٣}^{٦}$$

$$\int_{٢}^{٦} |س - ٣| ى س = \left(٩ - \frac{٩}{٢}\right) - (٦ - ٢) + (١٨ - ١٨) - \left(\frac{٩}{٢} - ٩\right)$$

$$\int_{٢}^{٦} |س - ٣| ى س = ٥$$

---

(٤) جد $\int_{-١}^{٣} [س - ٢] ى س$

الحل :

$س - ٢ = ٠ \leftarrow س = ٢$ طول الدرجة $= \frac{١}{|١|} = ١$

$$د(س) = \begin{cases} -٣ & ، -١ \le س < ٠ \\ -٢ & ، ٠ \le س < ١ \\ -١ & ، ١ \le س < ٢ \\ ٠ & ، ٢ \le س < ٣ \end{cases}$$

$$\int_{١-}^{٣}[\text{س}-٢]\,\text{ءس}=\int_{١-}^{٠}-٣\,\text{ءس}+\int_{٠}^{١}-٢\,\text{ءس}+\int_{١}^{٢}-١\,\text{ءس}+\int_{٢}^{٣}٠\,\text{ءس}$$

$$\int_{١-}^{٣}[\text{س}-٢]\,\text{ءس}=-٣\times(١)+-٢\times(١)+-١\times(١)+٠\times(١)=-٦$$

---

(٥) جد $\int_{٢}^{٥}[٣-\text{س}]\,\text{ءس}$

الحل :

$٣-\text{س}=٠\leftarrow\text{س}=٣$ 　　 طول الدرجة $=\frac{١}{|-١|}=١$

$$\text{ت(س)}=\begin{cases}٠ & ،\ ٢<\text{س}\le ٣\\ -١ & ،\ ٣<\text{س}\le ٤\\ -٢ & ،\ ٤<\text{س}\le ٥\end{cases}$$

$$\int_{٢}^{٥}[٣-\text{س}]\,\text{ءس}=\int_{٢}^{٣}٠\,\text{ءس}+\int_{٣}^{٤}-١\,\text{ءس}+\int_{٤}^{٥}-٢\,\text{ءس}$$

$$\int_{١-}^{٣}[\text{س}-٢]\,\text{ءس}=٠\times(١)+-١\times(١)+-٢\times(١)=-٣$$

---

(٦) جد $\int_{٣}^{٧}\left[\frac{١}{٢}\text{س}-٢\right]\text{ءس}$

الحل :

$\frac{١}{٢}\text{س}-٢=٠\leftarrow\text{س}=٤$ 　　 طول الدرجة $=\frac{١}{\left|\frac{١}{٢}\right|}=٢$

$$\text{ن}(\text{س}) = \begin{cases} -١ \text{ ، } ٣ \le \text{س} < ٤ \\ ٠ \text{ ، } ٤ \le \text{س} < ٦ \\ ١ \text{ ، } ٦ \le \text{س} < ٧ \end{cases}$$

$$\int_{٣}^{٧} \left[\tfrac{١}{٢}\text{س} - ٢\right] \text{ءس} = \int_{٣}^{٤} -١\,\text{ءس} + \int_{٤}^{٦} ٠\,\text{ءس} + \int_{٦}^{٧} ١\,\text{ءس} = -١ + ٠ + ١ = ٠$$

الابداع في الرياضيات

تمرين (٥)

(١) جد $\int_{٠}^{٢} \sqrt{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}\,\text{ءس}$

(٢) اذا كان $\int_{٢}^{\text{ب}} \left[\tfrac{١}{٢}\text{س} + ٣\right] \text{ءس} = ٢٤$ ، ب > ٠ جد قيمة الثابت ب .

(٣) جد التكامل التالي :

$$\int_{٠}^{٢} \left(\text{س}^{٢} - |\text{س} - ١|\right) \text{ءس}$$

(٤) اذا كان م(س) ، هـ(س) اقترانين معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق(س) وكان

$$\int_{-١}^{٣} \left(\text{م}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س})\right) \text{ءس} = ١٢ \text{ جد } \int_{٠}^{٤} ٢\text{س}\,\text{م}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{٤}^{٠} ٢\text{س}\,\text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس} \text{ ؟}$$

خاصية (٣)

اذا كان ق قابلا للتكامل على [أ،ب] فإن :

(١) $\int_{أ}^{أ} ق(س)\,ءس = ٠$　　　(٢) $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس = -\int_{ب}^{أ} ق(س)\,ءس$

الامثلة

(١) جد $\int_{٥}^{٥} \sqrt{س^٣ + ٧}\,ءس$

الحل :

$$\int_{٥}^{٥} \sqrt{س^٣ + ٧}\,ءس = ٠$$

---

(٢) اذا كان $\int_{١}^{٤} ق(س)\,ءس = ١٠$ ، $\int_{٧}^{٤} ق(س)\,ءس = ٣$ ، جد $\int_{١}^{٧} ق(س)\,ءس$ ؟

الحل :

$$\int_{١}^{٧} ق(س)\,ءس = \int_{١}^{٤} ق(س)\,ءس + \int_{٤}^{٧} ق(س)\,ءس$$

$$\int_{١}^{٧} ق(س)\,ءس = ١٠ + -٣ = ٧$$

---

(٣) اذا كان $\int_{٢}^{٥} ٤ق(س)\,ءس = -٤$ ، $\int_{٩}^{٥} \frac{١}{٢}ق(س)\,ءس = ٨$ ، جد $\int_{٢}^{٩} ق(س)\,ءس$ ؟

الحل :

$$\int_{٢}^{٩}\text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{٢}^{٥}\text{د}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{٥}^{٩}\text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$$

$$\int_{١}^{٧}\text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = -١ + -١٦ = -١٧$$

---

(٤) اذا كان $\int_{٣}^{٤}(٢\text{د}(\text{س}) + ٢\text{س})\,\text{ءس} = ١٠$ ، جد $\int_{٣}^{٤}٣\text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$ ؟

الحل :

$$\int_{٣}^{٤}(٢\text{د}(\text{س}) + ٢\text{س})\,\text{ءس} = \int_{٣}^{٤}٢\text{د}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{٣}^{٤}٢\text{س}\,\text{ءس} = ١٠$$

$$\int_{٣}^{٤}٢\text{د}(\text{س})\,\text{ءس} + \text{س}^{٢}\Big|_{٣}^{٤} = ١٠$$

$$\int_{٣}^{٤}٢\text{د}(\text{س})\,\text{ءس} + ٧ = ١٠ \leftarrow \int_{٣}^{٤}\text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \frac{٣}{٢}$$

$$\therefore \int_{٣}^{٤}٣\text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \frac{٩}{٢}$$

---

(٥) اذا كان $\int_{-٢}^{\text{ج}}٢\text{س}\,\text{ءس} = ٠$ جد قيمة ج ؟

الحل :

$$\text{س}^{٢}\Big|_{-٢}^{\text{ج}} = ٠ \leftarrow \text{ج}^{٢} - ٤ = ٠ \leftarrow \text{ج} = \pm ٢$$

(٦) اذا كان $\int_{١}^{٣} \left(٢\text{ق}(\text{س}) + \frac{١}{\text{س}^{٢}} - ٦\right)\text{ءس} = ٦$ ، جد $\int_{١}^{٣} \left(٣\text{ق}(\text{س}) - ٢\text{س}\right)\text{ءس}$ ؟

✍الحل :

$$\int_{١}^{٣} ٢\text{ق}(\text{س})\text{ءس} + \int_{١}^{٣} \frac{١}{\text{س}^{٢}} - ٦\text{ءس} = ٦ \leftarrow \int_{١}^{٣} ٢\text{ق}(\text{س})\text{ءس} + \int_{١}^{٣} (\text{س}^{-٢} - ٦)\text{ءس} = ٦$$

$$\int_{١}^{٣} ٢\text{ق}(\text{س})\text{ءس} + (-\text{س}^{-١} - ٦\text{س})\Big|_{١}^{٣} = ٦ \leftarrow \int_{١}^{٣} ٢\text{ق}(\text{س})\text{ءس} + \left(-\frac{١}{\text{س}} - ٦\text{س}\right)\Big|_{١}^{٣} = ٦$$

$$\int_{١}^{٣} ٢\text{ق}(\text{س})\text{ءس} - \frac{١}{\text{س}} - ٦\text{س}\Big|_{١}^{٣} = ٦ \leftarrow \int_{١}^{٣} ٢\text{ق}(\text{س})\text{ءس} - \frac{١}{٣} - ١٨ + ٧ = ٦$$

$$\int_{١}^{٣} ٢\text{ق}(\text{س})\text{ءس} = \frac{٥٢}{٣} \leftarrow \int_{١}^{٣} \text{ق}(\text{س})\text{ءس} = \frac{٥٢}{٦}$$

$$\therefore \int_{١}^{٣} ٣\text{ق}(\text{س})\text{ءس} - \int_{١}^{٣} ٢\text{س}\text{ءس} \leftarrow \int_{١}^{٣} ٣\text{ق}(\text{س})\text{ءس} - \text{س}^{٢}\Big|_{١}^{٣}$$

$$٣ \times \frac{٥٢}{٦} - ٨ = ١٨$$

---

(٧) اذا كان $\int_{٢}^{٣} \left(٢\text{ق}(\text{س}) - ٣\text{س}^{٢}\right)\text{ءس} = ١٠$ ، ، وكان $\int_{٥}^{٣} \text{ق}(\text{س})\text{ءس} = -٢$ جد $\int_{٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\text{ءس}$ ؟

✍الحل :

$$\int_{٢}^{٣} \left(٢\text{ق}(\text{س}) - ٣\text{س}^{٢}\right)\text{ءس} = ١٠ \leftarrow \int_{٢}^{٣} ٢\text{ق}(\text{س})\text{ءس} - \int_{٢}^{٣} ٣\text{س}^{٢}\text{ءس} = ١٠$$

$$\int_{٢}^{٣} \left(٢\text{ق}(\text{س})\right)\text{ءس} - \text{س}^{٣}\Big|_{٢}^{٣} = ١٠ \leftarrow \int_{٢}^{٣} ٢\text{ق}(\text{س})\text{ءس} - ١٩ = ١٠$$

$$\int_{2}^{3} 2 ق(س) ءس = 29 \leftarrow \int_{2}^{3} ق(س) ءس = \frac{29}{2}$$

$$\int_{2}^{5} ق(س) ءس = \frac{29}{2} + 2 = \frac{33}{2}$$

خاصية (٤) خاصية المقارنة

اذا كان ق ، هـ قابلين للتكامل على [أ،ب] وكان ق(س) ≤ هـ(س) لكل س∈[أ،ب] فإن :

$$\int_{أ}^{ب} ق(س) ءس \le \int_{أ}^{ب} هـ(س) ءس$$

نتيجة

اذا كان ق قابل للتكامل على [أ،ب] وكان ق(س) ≥ ٠ لكل س∈[أ،ب] فإن :

$$\int_{أ}^{ب} ق(س) ءس \ge 0$$

نتيجة

اذا كان ق قابل للتكامل على [أ،ب] وكان ق(س) ≤ ٠ لكل س∈[أ،ب] فإن :

$$\int_{أ}^{ب} ق(س) ءس \le 0$$

الامثلة

(١) دون اجراء التكامل ابحث في اشارة

$$\int_{٢}^{٦} \frac{س^٢ + ٤}{٢س + ٦} \, ءس$$

الحل :

$س^٢ + ٤ > ٠$ لكل $س \in [٢،٦]$

$٢س + ٦ > ٠$ لكل $س \in [٢،٦]$

$\therefore \frac{س^٢ + ٤}{٢س + ٦} > ٠$ لكل $س \in [٢،٦]$

$\therefore \int_{٢}^{٦} \frac{س^٢ + ٤}{٢س + ٦} \, ءس > ٠$ حسب خاصية المقارنة .

---

(٢) دون اجراء التكامل ابحث في اشارة

$$\int_{-٧}^{-١} \frac{س^٣ - ٢}{س^٢ + ٥} \, ءس$$

الحل :

$س^٣ - ٢ < ٠$ لكل $س \in [-٧،-١]$

$س^٢ + ٥ > ٠$ لكل $س \in [-٧،-١]$

$\therefore \frac{س^٣ - ٢}{س^٢ + ٥} < ٠$ لكل $س \in [-٧،-١]$

$\therefore \int_{-٧}^{-١} \frac{س^٣ - ٢}{س^٢ + ٥} \, ءس < ٠$ حسب خاصية المقارنة

(٣) دون اجراء التكامل بين ان :

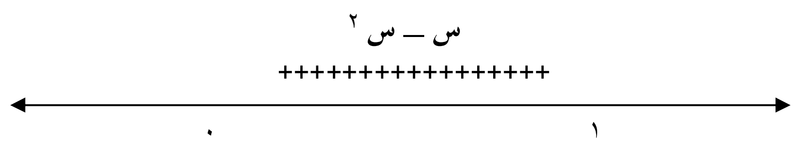
$$\int_{٠}^{١} \text{س}\,\text{ءس} \leq \int_{٠}^{١} \text{س}^{٢}\,\text{ءس}$$

الحل :

نفرض ان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{٢}$

$\text{ل}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س})$

ندرس اشارة ل (س)



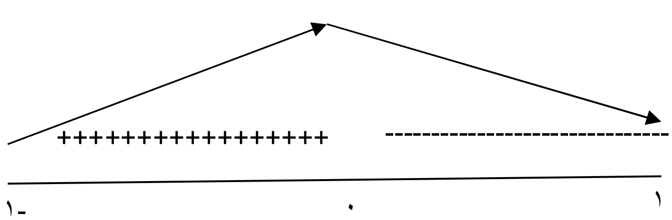
$\therefore$ $\text{ل}(\text{س}) > ٠$ لكل $\text{س} \in [٠،١]$

$\therefore$ $\text{س} \leq \text{س}^{٢}$ لكل $\text{س} \in [٠،١]$

$\therefore \int_{٠}^{١} \text{س}\,\text{ءس} \leq \int_{٠}^{١} \text{س}^{٢}\,\text{ءس}$ حسب خاصية المقارنة

(٤) بين ان $٠ \leq \int_{-١}^{١} \sqrt{١ - \text{س}^{٢}}\,\text{ءس} \leq ٢$ دون اجرا ء التكامل للمقدار $\int_{-١}^{١} \sqrt{١ - \text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$.

الحل :



نفرض ان $\text{ن}(\text{س}) = \sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$

نجد القيم القصوى المطلقة

$$\text{ن}'(\text{س}) = \frac{-٢\text{س}}{٢\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}$$

$$٠ \leq \sqrt{١-س^٢} \leq ٢$$

$$\int_{-١}^{١} ٠ ءس \leq \int_{-١}^{١} \sqrt{١-س^٢} ءس \leq \int_{-١}^{١} ١ ءس$$ حسب خاصية المقارنة

$$٠ \leq \int_{-١}^{١} \sqrt{١-س^٢} ءس \leq ٢$$

(٥) اذا كان ق(س) اقترانا قابلا للتكامل وكان ق(س) $\geq$ ٧ لكل س$\in$[٢،٥] ما اصغر قيمة للمقدار

$$\int_{٢}^{٥} ق(س) ءس \text{ ؟}$$

✍ الحل :

بما أن ق(س) $\geq$ ٧

$\therefore$ اصغر قيمة للمقدار ق(س) = ٧

$$\therefore \int_{٢}^{٥} ق(س) ءس = \int_{٢}^{٥} ٧ ءس$$ حسب خاصية المقارنة

$$\therefore \int_{٢}^{٥} ق(س) ءس = ٧(٥-٢) = ٢١$$

(٦) اذا كان ق(س) اقترانا قابلا للتكامل وكان ق(س) $\leq$ ٦ لكل س$\in$[٢،٦] ما اكبر قيمة للمقدار

$$\int_{٢}^{٦} ق(س) ءس$$

✍ الحل :

بما أن ق(س) $\leq$ ٦

$\therefore$ اكبر قيمة للمقدار ق(س) = ٦

∴ $\int_{2}^{6} ق(س)\,ءس = \int_{2}^{6} 6\,ءس$ حسب خاصية المقارنة ∴ $\int_{2}^{6} ق(س)\,ءس = 6(6-2) = 24$

(٧) اذا كان ق(س) اقترانا قابلا للتكامل على [١، ٤] وكان $3 \leq ق(س) \leq 5$ فما قيمة أ ، ب التي تحقق $أ \leq \int_{1}^{4} ق(س) \leq ب$

الحل :

∴ اصغر قيمة للمقدار ق(س) = ٣　　　　∴ اكبر قيمة للمقدار ق(س) = ٥

∴ $3 \leq ق(س) \leq 5$

∴ $\int_{1}^{4} 3\,ءس \leq \int_{1}^{4} ق(س)\,ءس \leq \int_{1}^{4} 5\,ءس$ حسب خاصية المقارنة ∴ $9 \leq \int_{1}^{4} ق(س)\,ءس \leq 15$

الابداع في الرياضيات

تمرين (٦)

(١) بين ان $6 \le \int_{1}^{3} (2\text{س}+1)\, \text{ءس} \le 14$ دون اجرا ء التكامل للمقدار $\int_{1}^{3} (2\text{س}+1)\, \text{ءس}$

(٢) اذا علمت $\text{م} \le \int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{\text{س}^{3}}+1}\, \text{ءس} \le \text{ك}$ ، بدون حساب قيمة التكامل $\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{\text{س}^{3}}+1}\, \text{ءس}$ جد قيمة كل من الثابتين م ، ك.

(٣) بين ان $\frac{\pi}{5} \le \int_{0}^{\pi} \frac{1}{3\text{جتا}^{2}\text{س}+2}\, \text{ءس} \le \frac{\pi}{2}$ دون اجرا ء التكامل للمقدار $\int_{0}^{\pi} \frac{1}{3\text{جتا}^{2}\text{س}+2}\, \text{ءس}$

(٤) بين ان $\int_{-2}^{5} (\text{س}^{2}+4)\, \text{ءس} \ge \int_{-2}^{5} 3\text{س}\, \text{ءس}$ دون حساب قيمة كلا من التكاملين ؟

(٥) بين ان $\int_{0}^{2\pi} (3+\text{جتا}^{2}\text{س})\, \text{ءس}$ ينحصر بين العددين 6π ، 8π ؟

الفصل الثاني

طرائق التكامل

Techniques of the Integral

اولا التكامل بالتعويض

الفكرة العامة للتكامل بالتعويض هو حاصل ضرب اقترانين أحدهما مشتق من الاخر ويكون على الصورة

$$\int ن'(س)\left(ن(س)\right)\left(ن(س)\right)^{ن} ء س = \frac{\left(ن(س)\right)^{ن+١}}{ن+١} + جـ \quad ، \quad ن+١ \neq ٠$$

الامثلة

جد التكاملات التالية

(١) $\int (٢س+٢)(س^{٢}+٢س+٢)^{٧} ء س$

الحل :

نفرض ان $ص = س^{٢} + ٢س + ٢$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٢س+٢ \leftarrow ءص = (٢س+٢)ءس \leftarrow ءس = \frac{ءص}{٢س+٢}$$

$$\therefore \int (٢س+٢)(ص)^{٧} \frac{ءص}{٢س+٢} \leftarrow \int (ص)^{٧} ءص$$

$$\frac{(ص)^{٨}}{٨} + جـ \leftarrow \frac{(س^{٢}+٢س+٢)^{٨}}{٨} + جـ$$

---

(٢) $\int (س^{٢}+١)(س^{٣}+٣س+١)^{\frac{١}{٢}} ء س$

الحل :

نفرض ان $ص = س^{٣} + ٣س + ١$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٣س}^{٢} + ٣ \leftarrow \text{دص} = (\text{٣س}^{٢} + ٣)\text{دس} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{٣س}^{٢} + ٣} = \text{دس}$$

$$\therefore \int (\text{س}^{٢} + ١)(\text{ص})^{\frac{١}{٢}} \frac{\text{دص}}{٣(\text{س}^{٢} + ١)} \leftarrow \frac{١}{٣}\int (\text{ص})^{\frac{١}{٢}} \text{دص}$$

$$\frac{١}{٣} \frac{(\text{ص})^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} \leftarrow \frac{٢}{٩}(\text{س}^{٣} + \text{٣س} + ١)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$$

---

(٣) $\int (\text{٩س}^{٢} + ٥)\text{جا}(\text{٣س}^{٣} + \text{٥س})\,\text{دس}$

الحل :

نفرض ان $\text{ص} = \text{٣س}^{٣} + \text{٥س}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٩س}^{٢} + ٥ \leftarrow \text{دص} = (\text{٩س}^{٢} + ٥)\text{دس} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{٩س}^{٢} + ٥} = \text{دس}$$

$$\therefore \int (\text{٩س}^{٢} + ٥)\text{جا}(\text{ص}) \frac{\text{دص}}{\text{٩س}^{٢} + ٥} \leftarrow \int \text{جا}(\text{ص})\,\text{دص}$$

$$-\text{جتاص} + \text{جـ} \leftarrow -\text{جتا}(\text{٣س}^{٣} + \text{٥س}) + \text{جـ}$$

---

(٤) $\int \frac{\text{جاس}}{(٢ + \text{جتاس})^{٥}}\,\text{دس}$

الحل :

نفرض ان $\text{ص} = ٢ + \text{جتاس}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جاس} \leftarrow \text{دص} = (-\text{جاس})\text{دس} \leftarrow \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}} = \text{دس}$$

$$\therefore \int \text{جاس}\,(\text{ص})^{-٥} \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}} \leftarrow -\int (\text{ص})^{-٥}\,\text{دص}$$

$$\frac{-(ص)^{-٤}}{-٤}+جـ \leftarrow \frac{(٢+جتاس)^{-٤}}{٤}+جـ$$

(٥) $\int \frac{١}{س^٢}\times قا^٢(\frac{٢}{س})\,ءس$

✍ الحل :

نفرض ان $ص=\frac{٢}{س}$

$$\frac{ءص}{ءس}=-\frac{٢}{س^٢} \leftarrow س^٢ءص=-٢ءس \leftarrow ءس=-\frac{س^٢}{٢}$$

$$\int \frac{١}{س^٢}\times قا^٢(ص)\times -\frac{س^٢}{٢}ءص \leftarrow -\frac{١}{٢}\int قا^٢(ص)ءص$$

$$-\frac{١}{٢}ظا(ص)+جـ \leftarrow -\frac{١}{٢}ظا(\frac{٢}{س})+جـ$$

(٦) $\int س\times جاس^٢\,جتاس^٢\,ءس$

✍ الحل :

نفرض ان $ص=س^٢$

$$\frac{ءص}{ءس}=٢س \leftarrow ءس=\frac{ءص}{٢س}$$

$$\int س\times جا(ص)جتا(ص)\times\frac{ءص}{٢س} \leftarrow \int جا(ص)جتا(ص)\times ءص \leftarrow \frac{١}{٤}\int جا٢ص ءص$$

$$-\frac{١}{٤}\times\frac{جتا٢ص}{٢}+جـ \leftarrow -\frac{١}{٤}\times\frac{جتا٢س^٢}{٢}+جـ$$

(٧) $\int ٤س\times قا(٢+٢س^٢)ظا(٢+٢س^٢)\,ءس$

✍ الحل :

نفرض ان $ص = ٢ + ٢س^{٢}$

$$\frac{دص}{دس} = ٤س \leftarrow دس = \frac{دص}{٤س}$$

$$\int ٤س \times قا(ص)ظا(ص) \times \frac{دص}{٤س} \leftarrow \int قا(ص)ظا(ص) \times دص$$

$$\int قا(ص)ظا(ص) \times دص = قا(ص) + جـ \leftarrow قا(٢ + ٢س^{٢}) + جـ$$

---

(٨) $\int جاس \times جتا^{٥}س\, دس$

الحل :

نفرض ان $ص = جتاس$

$$\frac{دص}{دس} = -جاس \leftarrow \frac{دص}{-جاس} = دس$$

$$\int جاس \times (ص)^{٥} \frac{دص}{-جاس} \leftarrow -\int (ص)^{٥} دص$$

$$-\int (ص)^{٥} دص = -\frac{(ص)^{٦}}{٦} + جـ \leftarrow -\frac{(جتاس)^{٦}}{٦} + جـ$$

---

(٩) $\int جتا^{٥} ٤س (جتا٣س جاس + جتاس جا٣س) دس$

الحل :

إنتبه

$$جتا٣س جاس + جتاس جا٣س = جا(س + ٣س) = جا٤س$$

$$\int جتا^{٣} ٤س جا٤س\, دس$$

نفرض ان $ص = جتا٤س$

$$\frac{دص}{دس} = -٤ جا٤س \leftarrow دس = \frac{دص}{-٤ جا٤س}$$

$$\int جا٤س \times (ص)^{٣} \frac{ءص}{-٤جا٤س} \leftarrow -\frac{١}{٤}\int (ص)^{٣} ءص$$

$$-\int (ص)^{٣} ءص = -\frac{(ص)^{٤}}{١٦}+جـ \leftarrow -\frac{(جتا٤س)^{٤}}{١٦}+جـ$$

(١٠) $\int جا^{٣}س ءس$

✍ الحل :

$$\int جاس جا^{٢}س ءس = \int جاس(١-جتا^{٢}س)ءس$$

نفرض ان ص =جتاس

$$\frac{ءص}{ءس} = -جاس \leftarrow \frac{ءص}{-جاس} = ءس$$

$$\int جاس \times (١-ص^{٢}) \frac{ءص}{-جاس} \leftarrow \int (ص^{٢}-١)ءص$$

$$\left(\frac{ص^{٣}}{٣}-ص\right)+جـ \leftarrow \left(\frac{(جتاس)^{٣}}{٣}-جتاس\right)+جـ$$

(١١) $\int س^{٥}\sqrt{س^{٣}+٢}ءس$

✍ الحل :

نفرض ان $ص = س^{٣}+٢ \leftarrow ص-٢ = س^{٣}$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} \leftarrow \frac{ءص}{٣س^{٢}} = ءس$$

$$\int س^{٥}\sqrt{ص}\frac{ءص}{٣س^{٢}} \leftarrow \frac{١}{٣}\int (ص-٢)\sqrt{ص}ءص \leftarrow \frac{١}{٣}\int (ص^{\frac{٣}{٢}}-٢ص^{\frac{١}{٢}})ءص$$

$$\frac{١}{٣}\int (ص^{\frac{٣}{٢}}-٢ص^{\frac{١}{٢}})ءص = \frac{١}{٣}(\frac{٢}{٥}ص^{\frac{٥}{٢}}-\frac{٤}{٣}ص^{\frac{٣}{٢}})+جـ$$

$$\frac{١}{٣}\left(\frac{٢}{٥}\sqrt{(س^{٣}+٢)^{٥}}-\frac{٤}{٣}\sqrt{(س^{٣}+٢)^{٣}}\right)+جـ$$

(١٢) $\int س^{٥}\sqrt[٣]{٢س^{٣}+٣}\,ءس$

الحل :

نفرض ان $ص = ٢س^{٣}+٣ \leftarrow \frac{ص-٣}{٢}=س^{٣}$

$$\frac{ءص}{ءس}=٦س^{٢} \leftarrow \frac{ءص}{٦س^{٢}}=ءس$$

$$\int س^{٥}\sqrt[٣]{ص}\,\frac{ءص}{٦س^{٢}} \leftarrow \frac{١}{١٢}\int(ص-٣)\sqrt[٣]{ص}\,ءص \leftarrow \frac{١}{١٢}\int\left(ص^{\frac{٤}{٣}}-٣ص^{\frac{١}{٣}}\right)ءص$$

$$\frac{١}{١٢}\int\left(ص^{\frac{٤}{٣}}-٢ص^{\frac{١}{٣}}\right)ءص=\frac{١}{١٢}\left(\frac{٣}{٧}ص^{\frac{٧}{٣}}-\frac{٩}{٤}ص^{\frac{٤}{٣}}\right)+جـ$$

$$\frac{١}{١٢}\left(\frac{٣}{٧}\sqrt[٣]{(٢س^{٣}+٣)^{٧}}-\frac{٩}{٤}\sqrt[٣]{(٢س^{٣}+٣)^{٤}}\right)+جـ$$

(١٣) $\int س^{٢}\times\sqrt[٣]{س^{٧}-س^{٣}}\,ءس$

الحل :

$$\int س^{٢}\times\sqrt[٣]{س^{٣}(س^{٤}-١)}\,ءس \leftarrow \int س^{٣}\times\sqrt[٣]{(س^{٤}-١)}\,ءس$$

نفرض ان $ص = س^{٤}-١$

$$\frac{ءص}{ءس}=٤س^{٣} \leftarrow \frac{ءص}{٤س^{٣}}=ءس$$

$$\int س^{٣}\sqrt[٣]{ص}\,\frac{ءص}{٤س^{٣}} \leftarrow \frac{١}{٤}\int\sqrt[٣]{ص}\,ءص \leftarrow \frac{١}{٤}\int ص^{\frac{١}{٣}}ءص$$

$$\frac{١}{٤}\times\frac{٣}{٤}ص^{\frac{٤}{٣}}+جـ \leftarrow \frac{٣}{١٦}\sqrt[٣]{(س^{٤}-١)^{٤}}+جـ$$

(١٤) $\int \frac{\sqrt[3]{\text{س} - \text{س}^{٣}}}{\text{س}^{٤}}\, \text{ءس}$

الحل :

$$\int \frac{\sqrt[3]{\text{س}^{٣}\left(\frac{١}{\text{س}^{٢}} - ١\right)}}{\text{س}^{٤}}\, \text{ءس} \leftarrow \int \frac{\text{س} \times \sqrt[3]{\left(\frac{١}{\text{س}^{٢}} - ١\right)}}{\text{س}^{٤}}\, \text{ءس} \leftarrow \int \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{١}{\text{س}^{٢}} - ١\right)}}{\text{س}^{٣}}\, \text{ءس}$$

نفرض ان $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}^{٢}} - ١$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٢\text{س}}{\text{س}^{٤}} = \frac{-٢}{\text{س}^{٣}} \leftarrow \frac{\text{س}^{٣}}{-٢}\text{ءص} = \text{ءس}$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{\text{ص}}}{\text{س}^{٣}} \times \frac{\text{س}^{٣}}{-٢}\, \text{ءص} \leftarrow \frac{-١}{٢}\int \sqrt[3]{\text{ص}}\, \text{ءص} \leftarrow \frac{-١}{٢}\int \text{ص}^{\frac{١}{٣}}\, \text{ءص}$$

$$\frac{-١}{٢} \times \frac{٣}{٤}\text{ص}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ} \leftarrow \frac{-٣}{٨}\sqrt[3]{\left(\frac{١}{\text{س}^{٢}} - ١\right)^{٤}} + \text{جـ}$$

---

(١٥) $\int \frac{(\text{س} + ١)^{٧}}{(\text{س})^{٩}}\, \text{ءس}$

الحل :

$$\int \frac{(\text{س} + ١)^{٧}}{(\text{س})^{٧}(\text{س})^{٢}}\, \text{ءس} \leftarrow \int \left(\frac{\text{س} + ١}{\text{س}}\right)^{٧} \times \frac{١}{(\text{س})^{٢}}\, \text{ءس}$$

$$\int \left(\frac{١}{\text{س}} + ١\right)^{٧} \times \frac{١}{(\text{س})^{٢}}\, \text{ءس}$$

نفرض ان $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}} + ١ \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}} \leftarrow -\text{س}^{٢}\, \text{ءص} = \text{ءس}$

$$\int (\text{ص})^{٧} \times \frac{١}{(\text{س})^{٢}} \times -\text{س}^{٢}\, \text{ءص} \leftarrow -\int (\text{ص})^{٧}\, \text{ءص}$$

$-\int (ص)^{٧} \, ءص \leftarrow -\frac{(ص)^{٨}}{٨}+جـ \leftarrow -\frac{\left(\frac{١}{س}+١\right)^{٨}}{٨}+جـ$

(١٦) $\int \frac{(٢+٣س)^{٩}}{(س)^{١١}} \, ءس$

الحل :

$\int \frac{(٢+٣س)^{٩}}{(س)^{٢}(س)^{٩}} \, ءس \leftarrow \int \left(\frac{٢+٣س}{س}\right)^{٩} \times \frac{١}{(س)^{٢}} \, ءس$

$\int \left(\frac{٢}{س}+٣\right)^{٧} \times \frac{١}{(س)^{٢}} \, ءس$

نفرض ان $ص = \frac{٢}{س}+٣ \leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢}{س^{٢}} \leftarrow \frac{س^{٢}}{-٢} \, ءص = ءس$

$\int (ص)^{٩} \times \frac{١}{(س)^{٢}} \times \frac{س^{٢}}{-٢} \, ءص \leftarrow -\frac{١}{٢}\int (ص)^{٩} \, ءص$

$-\frac{١}{٢}\int (ص)^{٩} \, ءص = ص = -\frac{١}{٢} \times \frac{(ص)^{١٠}}{١٠}+جـ \leftarrow -\frac{١}{٢} \times \frac{\left(\frac{٢}{س}+٣\right)^{١٠}}{٢٠}+جـ$

(١٧) $\int \frac{(س^{٤}+٢س^{٢}+١)^{٥}}{(س)^{٢٣}} \, ءس$

الحل :

$\int \frac{(س^{٢}+١)^{١٠}}{(س)^{٣}(س)^{٢٠}} \, ءس \leftarrow \int \left(\frac{س^{٢}+١}{س^{٢}}\right)^{١٠} \times \frac{١}{(س)^{٢}} \, ءس$

$\int \left(١+\frac{١}{س^{٢}}\right)^{١٠} \times \frac{١}{(س)^{٢}} \, ءس$

نفرض ان $\text{ص} = ١ + \frac{١}{\text{س}^{٢}} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢\text{س}}{\text{س}^{٤}} = \frac{-٢}{\text{س}^{٣}} \leftarrow \frac{\text{س}^{٣}}{-٢}\text{دص} = \text{دس}$

$$\int (\text{ص})^{١٠} \times \frac{١}{(\text{س})^{٣}} \times \frac{\text{س}^{٣}}{-٢}\text{دص} \leftarrow -\frac{١}{٢}\int (\text{ص})^{١٠}\text{دص}$$

$$-\frac{١}{٢}\int (\text{ص})^{١٠}\text{دص} \leftarrow \text{ص} = -\frac{١}{٢} \times \frac{(\text{ص})^{١١}}{١١} + \text{جـ} \leftarrow -\frac{\left(١ + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{١١}}{٢٢} + \text{جـ}$$

---

(١٨) $\int \text{جا}^{٣}\text{س} \times \text{جتا}^{٢}\text{س}\,\text{دس}$

الحل :

$$\int \text{جا}^{٢}\text{س} \times \text{جاس} \times \text{جتا}^{٢}\text{س}\,\text{دس}$$

نفرض ان $\text{ص} = \text{جتاس}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جاس} \leftarrow \frac{\text{دص}}{-\text{جاس}} = \text{دس}$$

$$\int \text{جا}^{٢}\text{س}\,\text{جاس} \times (\text{ص})^{٢}\frac{\text{دص}}{-\text{جاس}} \leftarrow -\int (١ - \text{ص}^{٢})(\text{ص})^{٢}\text{دص}$$

$$-\int (١ - \text{ص}^{٢})(\text{ص})^{٢}\text{دص} \leftarrow -\int (\text{ص}^{٢} - \text{ص}^{٤})\text{دص}$$

$$-\int (\text{ص}^{٢} - \text{ص}^{٤})\text{دص} = -\left(\frac{(\text{ص})^{٣}}{٣} - \frac{(\text{ص})^{٥}}{٥}\right) + \text{جـ} \leftarrow -\left(\frac{(\text{جتاس})^{٣}}{٣} - \frac{(\text{جتاس})^{٥}}{٥}\right) + \text{جـ}$$

---

(١٩) $\int \text{ظا}^{٤}\text{س} \times \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{دس}$

الحل :

نفرض ان $\text{ص} = \text{ظاس}$

$$\frac{ءص}{ءس} = قا^{٢}س \leftarrow \frac{ءص}{قا^{٢}س} = ءس$$

$$\int قا^{٢}س \times (ص)^{٤} \frac{ءص}{قا^{٢}س} \leftarrow \int (ص)^{٤} ءص$$

$$\int ص^{٤} ءص = \frac{(ص)^{٥}}{٥} + جـ \leftarrow \frac{(ظاس)^{٥}}{٥} + جـ$$

(٢٠) $\int_{٠}^{\sqrt{١٥}} \frac{٢س}{\sqrt{س^{٢}+١}} ءس = \int_{٠}^{\sqrt{١٥}} ٢س (س^{٢}+١)^{-\frac{١}{٢}} ءس$

الحل :

نفرض ان $ص = س^{٢}+١$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٢س \leftarrow \frac{ءص}{٢س} = ءس$$

$$\int_{٠}^{\sqrt{١٥}} ٢س (ص)^{-\frac{١}{٢}} \frac{ءص}{٢س} \leftarrow \int_{٠}^{\sqrt{١٥}} (ص)^{-\frac{١}{٢}} ءص$$

$$\int (ص)^{-\frac{١}{٢}} ءص = ٢ (ص)^{\frac{١}{٢}} \Big]_{١}^{١٦} = ٢\sqrt{ص} \Big]_{١}^{١٦} = (٨-٢) = ٦$$

(٢١) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{٢جاس جتاس}{\sqrt{جا^{٢}س+١}} ءس = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ٢جاس جتاس (جا^{٢}س+١)^{-\frac{١}{٢}} ءس$

الحل :

نفرض ان $ص = جا^{٢}س+١$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٢جاس جتاس \leftarrow \frac{ءص}{٢جاس جتاس} = ءس$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{٢جاس جتاس}\left(\text{جا}^{٢}\text{س}+١\right)^{\frac{-١}{٢}} \text{ءس} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{٢جاس جتاس}\,(\text{ص})^{\frac{-١}{٢}} \frac{\text{ءص}}{\text{٢جاس جتاس}}$$

$$\int (\text{ص})^{\frac{-١}{٢}}\,\text{ءص} = ٢(\text{ص})^{\frac{١}{٢}}\Big]_{١}^{٢} = ٢\sqrt{\text{ص}}\Big]_{١}^{٢} = (٢\sqrt{٢}-٢)$$

الابداع في الرياضيات

تمرين (٧)

جد التكاملات التالية :

(١) $\int \text{ظا}^{٦}\text{س}\times\text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس}$ (٢) $\int \text{جتا}^{٣}\text{س}\,\text{ءس}$ (٣) $\int (\text{جا}^{١٢}\text{س}\times\text{جتا}^{١٠}\text{س}-\text{جا}^{١٠}\text{س}\times\text{جتا}^{١٢}\text{س})\,\text{ءس}$

(٤) $\int \frac{(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١)^{٥}}{(\text{س})^{١٢}}\,\text{ءس}$ (٥) $\int \left(١+\sqrt{٢\text{س}-١}\right)^{٩}\,\text{ءس}$ (٦) $\int \text{جا}^{٥}\text{س}\times\text{جتا}^{٢}\text{س}\,\text{ءس}$

(٧) $\int \sqrt[٥]{\frac{\text{س}-١}{\text{س}^{١١}}}\,\text{ءس}$ (٨) $\int_{0}^{٢} (\text{س}+٣)\sqrt{\text{س}^{٢}+٦\text{س}}\,\text{ءس}$

(٩) $\int \sqrt[٥]{٢-\sqrt{\text{س}}}\,\text{ءس}$ (١٠) $\int \sqrt{\frac{١+\sqrt{\text{س}}}{\text{س}}}\,\text{ءس}$

ثانيا　التكامل بالاجزاء

$$(\text{ق} \times \text{هـ})'(\text{س}) = \text{ق}\,\text{هـ}' + \text{هـ}\,\text{ق}'$$

$$\text{هـ}\,\text{ق}' = (\text{ق} \times \text{هـ})'(\text{س}) - \text{ق}\,\text{هـ}' \leftarrow \int \text{هـ}\,\text{ق}'\,\text{ءس} = \int (\text{ق} \times \text{هـ})'(\text{س})\,\text{ءس} - \int \text{ق}\,\text{هـ}'\,\text{ءس}$$

$$\therefore \int \text{هـ}\,\text{ق}'\,\text{ءس} = (\text{ق} \times \text{هـ}) - \int \text{هـ}.\text{ءق}$$

الامثلة

اذا كان الاقتران عبارة عن حاصل ضرب اقتران كثير حدود في اقتران مثلثي فإن الاقتران الكثير حدود هي ق

(١) $\int \text{س جتاس ءس}$

✍ الحل :

$\text{ق} = \text{س}$　　　　$\text{ءق} = \text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جتاس}$　　　　$\text{هـ} = \text{جاس}$

$= \text{س جاس} - \int \text{جاس.ءس}$

$= \text{س جاس} + \text{جتاس} + \text{جـ}$

---

(٢) $\int (\text{٤س} + ١)\,\text{جا٢س.ءس}$

✍ الحل :

$\text{ق} = \text{٤س} + ١$　　　　$\text{ءق} = \text{٤ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جا٢س}$　　　　$\text{هـ} = \dfrac{-\text{جتا٢س}}{٢}$

$= (\text{٤س} + ١) \times \dfrac{-\text{جتا٢س}}{٢} + ٢\int \text{جتا٢س.ءس}$

$$= (\text{٤س} + \text{١}) \times \frac{-\text{جتا٢س}}{\text{٢}} + \text{جا٢س} + \text{جـ}$$

---

(٣) $\int \text{٢س} \sqrt{\text{٣س} + \text{٥}} \, .\text{ءس}$

الحل :

$\text{ن} = \text{٢س} \quad \longrightarrow \quad \text{ءن} = \text{٢ءس}$

$\text{ءهـ} = (\text{٣س} + \text{٥})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} \quad \longrightarrow \quad \text{هـ} = \frac{\text{٢}}{\text{٩}} (\text{٣س} + \text{٥})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}$

$$= \text{٢س} \times \frac{\text{٢}}{\text{٩}} (\text{٣س} + \text{٥})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} - \frac{\text{٤}}{\text{٩}} \int (\text{٣س} + \text{٥})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} .\text{ءس}$$

$$= \text{٢س} \times \frac{\text{٢}}{\text{٩}} (\text{٣س} + \text{٥})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} - \frac{\text{٤}}{\text{٩}} \times \frac{\text{٢}}{\text{١٥}} (\text{٣س} + \text{٥})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} + \text{جـ}$$

---

(٤) $\int \text{٤س جا٢س جتا٢س} .\text{ءس}$

الحل :

$\int \text{٢س جا٤س} .\text{ءس}$

$\text{ن} = \text{٢س} \quad \longrightarrow \quad \text{ءن} = \text{٢ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جا٤س} \quad \longrightarrow \quad \text{هـ} = \frac{-\text{جتا٤س}}{\text{٤}}$

$$= \text{٢س} \times \frac{-\text{جتا٤س}}{\text{٤}} + \frac{\text{٢}}{\text{٤}} \int \text{جتا٤س} .\text{ءس}$$

$$= \frac{-\text{س جتا٤س}}{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{٨}} \text{جا٢س} + \text{جـ}$$

(٥) $\int \frac{\text{٣س}}{\text{قا٤س}}\,\text{ءس}$

$\int \text{٣س جتا٤س ءس}$

الحل :

ق = ٣س ءق = ٣ءس

ءه = جتا٤س ه = $\frac{\text{جا٤س}}{\text{٤}}$

$= \frac{\text{٣س جا٤س}}{\text{٤}} - \int \frac{\text{٣}}{\text{٤}} \times \text{جا٤س.ءس}$

$= \frac{\text{٣س جا٤س}}{\text{٤}} + \frac{\text{٣}}{\text{١٦}}\,\text{جتا٤س} + \text{جـ}$

---

(٦) $\int \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{س}^{\text{٢}}\,\text{جاس.ءس}$

اجزاء مرتين

الحل :

ق = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{س}^{\text{٢}}$ ءق = س ءس

ءه = جاس ه = −جتاس

$-\frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{س}^{\text{٢}} \times \text{جتاس} + \int \text{س جتاس.ءس}$

ق = س ءق = ١ءس

ءه = جتاس ه = جاس

$= \text{س جاس} - \int \text{جاس.ءس}$

$= \text{س جاس} + \text{جتاس} + \text{جـ}$

$\therefore -\frac{1}{2}\text{س}^{2}\times\text{جتاس}+\text{س جاس}+\text{جتاس}+\text{جـ}$

(٧) $\int \text{جا}\sqrt{\text{س}+1}\,\text{ءس}$

الحل :

نفرض ان $\text{ص}=\sqrt{\text{س}+1}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=\frac{1}{2\sqrt{\text{س}+1}}\leftarrow 2\sqrt{\text{س}+1}\,\text{ءص}=\text{ءس}$$

$$\int \text{جا}\sqrt{\text{س}+1}\,\text{ءس}=\int 2\text{ص جاص ءص}$$

$\text{ع}=2\text{ص}$ $\text{ءع}=2\text{ءص}$

$\text{ءهـ}=\text{جاص}$ $\text{هـ}=-\text{جتاص}$

$$=-2\text{ص}\times\text{جتاص}+\int 2\,\text{جتاص}.\text{ءص}$$

$$=-2\sqrt{\text{س}+1}\times\text{جتا}\sqrt{\text{س}+1}+2\,\text{جا}\sqrt{\text{س}+1}+\text{جـ}$$

(٨) $\int \text{س}^{3}\,\text{جا}(\frac{\text{س}^{2}}{2})\,\text{ءس}$

الحل :

نفرض ان $\text{ص}=\frac{\text{س}^{2}}{2}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=\text{س}\leftarrow\frac{\text{ءص}}{\text{س}}=\text{ءس}$$

$$\int \text{س}^{3}\,\text{جا}(\frac{\text{س}^{2}}{2})\,\text{ءس}=\int \text{س}^{2}\,\text{جا(ص)}\,\text{ءص}=\int 2\text{ص جا(ص)}\,\text{ءص}$$

ن = ٢ص	ءن = ٢ءص

ءهـ = جاص	هـ = −جتاص

= −٢ص×جتاص + ∫ ٢ جتاص.ءص

= −٢ص×جتاص + ٢ جاص + جـ

$= -س^{٢} \times جتا\frac{س^{٢}}{٢} + ٢\,جا\frac{س^{٢}}{٢} + جـ$

---

(٩) $\int س^{٥} \times \left(٢ - \frac{١}{س}\right)^{٤} ءس$

الحل :

$\int س^{٥} \times \left(٢ - \frac{١}{س}\right)^{٤} ءس \leftarrow \int س^{٥} \times \left(\frac{٢س - ١}{س}\right)^{٤} ءس \leftarrow \int س^{٥} \times \frac{(٢س - ١)^{٤}}{(س)^{٤}} ءس$

$\int س^{٥} \times \frac{(٢س - ١)^{٤}}{(س)^{٤}} ءس = \int س \times (٢س - ١)^{٤} ءس$

ن = س	ءن = ءس

$ءهـ = (٢س - ١)^{٤}$	$هـ = \frac{(٢س - ١)^{٥}}{١٠}$

$= س \times \frac{(٢س - ١)^{٥}}{١٠} - \int \frac{(٢س - ١)^{٥}}{١٠}.ءس$

$= س \times \frac{(٢س - ١)^{٥}}{١٠} - \frac{(٢س - ١)^{٦}}{١٢٠} + جـ$

---

(١٠) $\int \frac{\text{س جتاس}}{\text{جا}^{٣}\text{س}}\, ء س$

$\int \text{س ظتاس قتا}^{٢}\text{س}\, ء س$

✍ الحل :

ن = س　　　　ءن = ءس

ءهـ = ظتاس قتا^{٢} س　　　　هـ = $\frac{-(\text{ظتاس})^{٢}}{٢}$　من (١)

بالتعويض

ص=ظتاس ← $\frac{ءص}{ءس}$ = -قتا^{٢} س ← $\frac{ءص}{-\text{قتا}^{٢}\text{س}}$ = ءس

$\int \text{س ظتاس قتا}^{٢}\text{س}\, ء س$ ← $\int \text{ص قتا}^{٢}\text{س} \frac{ءص}{-\text{قتا}^{٢}\text{س}}$

$-\int \text{ص}\, ء\text{ص} = \frac{\text{ص}^{٢}}{٢} + \text{جـ} = \frac{-(\text{ظتاس})^{٢}}{٢} + \text{جـ}$ ....(١)

$= -\text{س} \frac{(\text{ظتاس})^{٢}}{٢} + \int \frac{(\text{ظتاس})^{٢}}{٢}\, ء س$

$= -\text{س} \frac{(\text{ظتاس})^{٢}}{٢} + \int \frac{\text{قتا}^{٢}\text{س} - ١}{٢}\, ء س$

$= -\text{س} \frac{(\text{ظتاس})^{٢}}{٢} + \frac{-\text{ظتاس} - \text{س}}{٢} + \text{جـ}$

(١١) $\int \text{س}(\text{جتا٥س جتا٣س} - \frac{١}{٢}\text{جتا٨س})\, ء س$

✍ الحل :

جتا٥س جتا٣س = $\frac{١}{٢}$ (جتا٨س + جتا٢س)

$\int$ س ($\frac{١}{٢}$ (جتا٨س + جتا٢س) − $\frac{١}{٢}$ جتا٨س) ءس = $\int$ س ($\frac{١}{٢}$ جتا٨س + $\frac{١}{٢}$ جتا٢س − $\frac{١}{٢}$ جتا٨س) ءس

$\int$ $\frac{١}{٢}$ س (جتا٢س) ءس

ى = $\frac{١}{٢}$ س		ءى = $\frac{١}{٢}$ ءس

ءهـ = جتا٢س		هـ = $\frac{\text{جا٢س}}{٢}$

= $\frac{١}{٢}$ س × $\frac{\text{جا٢س}}{٢}$ − $\int$ $\frac{\text{جا٢س}}{٤}$. ءس

= $\frac{١}{٢}$ س × $\frac{\text{جا٢س}}{٢}$ + $\frac{\text{جتا٢س}}{٨}$ + جـ

مشتقة اقتران اللوغاريتم الطبيعي

قاعدة

اذا كان $ق(س) = لـو_{هـ}|ل(س)|$ وكان ل(س) قابلا للاشتقاق فإن

$$ق'(س) = \frac{ل'(س)}{ل(س)}$$

الامثلة

جد $ق'(س)$ فيما يلي :

(١) $ق(س) = لـو_{هـ}|س^{٣} + ٤س|$

✍ الحل :

$$ق'(س) = \frac{٣س^{٢} + ٤}{س^{٣} + ٤س}$$

---

(٢) $ق(س) = لـو_{هـ}|٢س^{٦}|$

✍ الحل :

$$ق'(س) = \frac{١٢س^{٥}}{٢س^{٦}}$$

---

(٣) $ق(س) = لـو_{هـ}|جاس|$

✍ الحل :

$$ق'(س) = \frac{جتاس}{جاس} = ظتاس$$

(٤) $\text{د(س)} = \text{لـو}_{\text{هـ}} \left| \text{جتا}^{٢}\text{س} \right|$

الحل :

$$\text{د}'\text{(س)} = \frac{-\text{٢جاس جتاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = -\text{٢ظاس}$$

(٥) $\text{د(س)} = \text{٢س}^{٢} \times \text{لـو}_{\text{هـ}} \left| \text{٤س} + ٦ \right|$

الحل :

$$\text{د}'\text{(س)} = \text{٢س}^{٢} \times \frac{٤}{\text{٤س} + ٦} + \text{٤س} \times \text{لـو}_{\text{هـ}} \left| \text{٤س} + ٦ \right|$$

(٦) $\text{د(س)} = \left(\text{لـو}_{\text{هـ}} \left|\text{س}\right|\right)^{٥}$

الحل :

$$\text{د}'\text{(س)} = \frac{٥\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}\right)^{٤}}{\text{س}}$$

(٧) $\text{د(س)} = \sqrt{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}$

الحل :

$$\text{د}'\text{(س)} = \frac{\frac{١}{\text{س}}}{٢\sqrt{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}} = \frac{١}{\text{٢س}\sqrt{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}}$$

قوانين مهمة

(١) $\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س} \times \text{ص}) = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص}$

(٢) $\text{لـو}_{\text{هـ}}\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{ص}$

(٣) $\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ}^{\text{ن}} = \text{ن لـو}_{\text{هـ}}\text{أ}$

(٤) $\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{هـ} = ١$ (٥) $\text{لـو}_{\text{هـ}}١ = ٠$

(٨) $ت(س) = لـو_{هـ}\left(\frac{س+١}{\sqrt{س-٢}}\right)$

الحل :

نستطيع تطبيق قوانين اللوغاريتمات قبل ايجاد المشتقة من اجل تبسيط السؤال؟

$$ت(س) = لـو_{هـ}(س+١) - لـو_{هـ}\left(\sqrt{س-٢}\right)$$

$$ت(س) = لـو_{هـ}(س+١) - لـو_{هـ}\frac{١}{٢}(س-٢)$$

$$ت'(س) = \frac{١}{س+١} - \frac{١}{٢(س-٢)} = \frac{س-٥}{٢(س+١)(س-٢)}$$

---

(٩) $ت(س) = لـو_{هـ}\left(\frac{س^{\frac{٣}{٤}}\sqrt{س^{٢}+١}}{(٣س+٢)^{٥}}\right)$

الحل :

$$ت(س) = لـو_{هـ}\left(س^{\frac{٣}{٤}}\right) + لـو_{هـ}\left(\sqrt{س^{٢}+١}\right) - لـو_{هـ}(٣س+٢)^{٥}$$

$$ت(س) = \frac{٣}{٤}لـو_{هـ}س + \frac{١}{٢}لـو_{هـ}(س^{٢}+١) - ٥لـو_{هـ}(٣س+٢)$$

$$ت(س) = \frac{٣}{٤س} + \frac{س}{(س^{٢}+١)} - \frac{١٥}{(٣س+٢)}$$

الابداع في الرياضيات

تمرين

(١) جد $\text{ق}'(\text{س})$ فيما يلي :

(أ) $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[5]{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}}$ (ب) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جا}^{2}\,\text{س}$

(٢) اذا كان $\text{ص} = \text{س}^{2} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ أثبت ان $\text{ص}'' = \frac{2\,\text{ص}}{\text{س}^{2}} + 3$

(٣) اذا كان $\int (\text{ق}'(\text{س}) - \text{س})\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{قتاس} + \text{ظتاس}\right| - 2$ فاثبت ان $\text{ق}'(\text{س}) = \text{س} - \text{قتاس}$

ثالثا: تكامل اقتران اللوغاريتم الطبيعي

نظرية

$$\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\,\text{ءس} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{ق}(\text{س})\right| + \text{جـ}$$

الامثلة

جد التكاملات التالية :

(١) $\int \frac{٣\text{س}^{٢}+٢}{\text{س}^{٣}+٢\text{س}}.\text{ءس}$

✍ الحل :

$\text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{س}^{٣}+٢\text{س}\right| + \text{جـ}$

(٢) $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+٦}.\text{ءس}$

✍ الحل :

$\frac{١}{٢}\text{لـو}_{\text{هـ}}\left|\text{س}^{٢}+٦\right| + \text{جـ}$

---

(٣) $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{س}|.\text{ءس}$

اجزاء

✍ الحل :

$\text{ق} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ $\qquad$ $\text{ءق} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{ءس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \text{س}$

$\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \int ١.\text{ءس}$

$\text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \text{س} + \text{جـ}$

(٤) $\int \text{س} \,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|\,.\,\text{ءس}$

اجزاء

الحل :

$\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ $\qquad\qquad$ $\text{ءق} = \dfrac{1}{\text{س}}\,\text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{س}$ $\qquad\qquad$ $\text{هـ} = \dfrac{\text{س}^2}{2}$

$\dfrac{\text{س}^2}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \int \dfrac{\text{س}}{2}\,.\,\text{ءس}$

$\dfrac{\text{س}^2}{2}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \dfrac{\text{س}^2}{4} + \text{جـ}$

---

(٥) $\int \dfrac{\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|}{\text{س}}\,\text{ءس}$

بالتعويض

الحل :

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \leftarrow \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{1}{\text{س}} \leftarrow \text{س}\,\text{ءص} = \text{ءس}$

$\int \dfrac{\text{ص}}{\text{س}}\,\text{س}\,\text{ءص} \leftarrow \int \text{ص}\,\text{ءص}$

$\int \text{ص}\,\text{ءص} = \dfrac{\text{ص}^2}{2} + \text{جـ} \leftarrow \dfrac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})^2}{2} + \text{جـ}$

---

(٦) $\int \dfrac{1}{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}|}\,\text{ءس}$

الحل :

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} \leftarrow \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{1}{\text{س}} \leftarrow \text{س}\,\text{ءص} = \text{ءس}$

$\int \frac{١}{\text{س ص}}\,\text{س ءص} \leftarrow \int \frac{١}{\text{ص}}\,\text{ءص}$

$\int \frac{١}{\text{ص}}\,\text{ءص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ} = \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}| + \text{جـ}$

---

(٧) $\int \text{جتاس لـو}_{\text{هـ}}|\text{جاس}|.\text{ءس}$

بالتعويض

الحل :

$\text{ص} = \text{جاس} \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتاس} \leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}}$

$\int \text{جتاس لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}|.\frac{\text{ءص}}{\text{جتاس}} \leftarrow \int \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}|.\text{ءص}$

$\int \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{ص}|.\text{ءص}$

اجزاء

$\text{ع} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{ص}$ $\qquad$ $\text{ءع} = \frac{١}{\text{ص}}\,\text{ءص}$

$\text{ءهـ} = \text{ءص}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \text{ص}$

$\text{ص لـو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} - \int ١.\text{ءص}$

$\text{ص لـو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} - \text{ص} + \text{جـ}$

$\text{جاس لـو}_{\text{هـ}}\,\text{جاس} - \text{جاس} + \text{جـ}$

---

(٨) $\int \left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)^{٢}.\text{ءس}$

بالتعويض

الحل :

$\text{ع} = \left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right)^{٢}$ $\qquad$ $\text{ءع} = ٢\left(\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\right) \times \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{ءس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \text{س}$

اجزاء

$$\text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2} - 2\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}.\text{دس}$$

$$\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}.\text{دس}$$

الحل :

$$\text{ن} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \qquad \text{دن} = \frac{1}{\text{س}}\text{دس}$$

$$\text{دهـ} = \text{دس} \qquad \text{هـ} = \text{س}$$

$$\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int 1.\text{دس}$$

$$\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س} + \text{جـ}$$

$$\therefore \text{س}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2} - 2\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + 2\text{س} + \text{جـ}$$

---

(٩) $$\int \frac{\text{ظتا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})}{\text{س}}\text{دس}$$

الحل :

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{1}{\text{س}} \leftarrow \text{س}\,\text{دص} = \text{دس}$$

$$\int \frac{\text{ظتاص}}{\text{س}}\text{س}\,\text{دص} \leftarrow \int \text{ظتاص}\,\text{دص}$$

$$\int \text{ظتاص}\,\text{دص} = \int \frac{\text{جتاص}}{\text{جاص}}\text{دص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\right| + \text{جـ}$$

---

(١٠) $$\int \text{ظا}^{3}\text{س}.\text{دس}$$

الحل :

$\int \text{ظا}^{٣}\text{س.ءس} = \int \text{ظاس ظا}^{٢}\text{س.ءس}$

$\int \text{ظاس(قا}^{٢}\text{س} - ١\text{).ءس}$

$\int \text{ظاس(قا}^{٢}\text{س} - ١\text{).ءس} = \int \text{ظاس قا}^{٢}\text{س.ءس} - \int \text{ظاس ءس}$

$\int \text{ظاس قا}^{٢}\text{س.ءس}$

بالتعويض

$\text{ص=ظاس} \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢}\text{س} \leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$\int \text{ص قا}^{٢}\text{س}.\frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} = \int \text{ص ءص} = \frac{(\text{ص})^{٢}}{٢} + \text{جـ} \leftarrow \frac{(\text{ظاس})^{٢}}{٢} + \text{جـ}$ ....(١)

$\int \text{ظاس ءس} = \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\text{ءس} = -\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{جتاس} + \text{جـ}$ ....(٢)

من (١) ، (٢)

$\frac{(\text{ظاس})^{٢}}{٢} + \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{جتاس} + \text{جـ}$

---

(١١) $\int \text{قاس.ءس}$

حالة خاصة في التكامل

الحل :

$\int \frac{\text{قاس(قاس+ظاس)}}{\text{(قاس+ظاس)}}\text{ءس} = \int \frac{(\text{قا}^{٢}\text{س+قاس ظاس})}{\text{(قاس+ظاس)}}\text{ءس} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{(قاس+ظاس)+جـ}$

---

(١٢) $\int \frac{١}{\sqrt{\text{س}}\,(٥ + \sqrt{\text{س}})}\text{ءس}$

الحل :

$ص = \sqrt{س} \leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{2\sqrt{س}} \leftarrow 2\sqrt{س}ءص = ءس$

$\int \frac{1}{ص(5+ص)} 2ص ءص = \int \frac{2}{(5+ص)} ءص = 2لـو_{هـ}(5+\sqrt{س})+جـ$.

---

(١٣) $\int \frac{\sqrt{س}}{س\sqrt{س}+1} ءس$

الحل :

$ص = \sqrt{س} \leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{2\sqrt{س}} \leftarrow 2\sqrt{س}ءص = ءس$

$\int \frac{2(ص)^2}{(ص)^3+1} ءص = \frac{2}{3}لـو_{هـ}((ص)^3+1)+جـ = \frac{2}{3}لـو_{هـ}((\sqrt{س})^3+1)+جـ$.

---

(١٤) $\int \frac{س}{(س^4+س^2)} ءس = \int \frac{س}{س^4(1+\frac{1}{س^2})} ءس = \int \frac{1}{س^3(1+\frac{1}{س^2})} ءس$

الحل :

نفرض ان $ص = 1 + \frac{1}{س^2} \leftarrow \frac{ءص}{ءس} = -2س^{-3} \leftarrow \frac{س^3 ءص}{-2} = ءس$

$\int \frac{1}{س^3(ص)} \frac{س^3 ءص}{-2} = \frac{1}{-2}\int \frac{1}{(ص)} ءص$

$\frac{1}{-2}\int \frac{1}{(ص)} ءص = \frac{1}{-2}لـو_{هـ}(ص)+جـ$

$\frac{1}{-2}لـو_{هـ}(1+\frac{1}{س^2})+جـ$

الابداع في الرياضيات

تمرين

(١) جد التكاملات التالية

(١) $\int \text{س}^{٤} \left(\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س}\right)^{٢} \, \text{ءس}$ (٢) $\int \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جاس}+\text{جتاس}} \, \text{ءس}$

(٣) $\int \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}} \text{س}}{\sqrt{\text{س}}} \, \text{ءس}$ (٤) $\int \text{قتاس} \, \text{ءس}$

مشتقة الاقتران الاسي الطبيعي

نظرية

اذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ فإن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

البرهان

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \leftarrow \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}^{\text{س}} \leftarrow \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}$

$\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{س} \leftarrow \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = ١ \leftarrow \text{ص}' = \text{ص}$

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

نظرية

اذا كان $\text{ص} = \text{أ}^{\text{س}}$ فإن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{أ}^{\text{س}}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{أ}$

البرهان

$\text{ص} = \text{أ}^{\text{س}} \leftarrow \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{أ}^{\text{س}} \leftarrow \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{أ}$

$\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{أ} \leftarrow \frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{أ} \leftarrow \text{ص}' = \text{ص}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{أ}$ $\quad \therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{أ}^{\text{س}}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\,\text{أ}$

الامثلة

١) جد $\frac{دص}{دس}$ فيما يلي :

(١) $ص = هـ^{٢س}$

✍ الحل :

$\frac{دص}{دس} = ٢هـ^{٢س}$

(٢) $ص = ٣س^{٢} \times هـ^{٣س+٧}$

✍ الحل :

$\frac{دص}{دس} = ٩س^{٢} \times هـ^{٣س+٧} + ٦س \times هـ^{٣س+٧}$

(٣) $ص = ٢س^{٥} - لو_{هـ} س + هـ^{٤س+٦}$

✍ الحل :

$\frac{دص}{دس} = ١٠س^{٤} - \frac{١}{س} + ٤هـ^{٤س+٦}$

(٤) $ص = جا(هـ^{٢س})$

✍ الحل :

$\frac{دص}{دس} = ٢هـ^{٢س} جتا(هـ^{٢س})$

(٥) $ص = \frac{هـ^{س} + ١}{هـ^{س}}$

✍الحل :

$$ص = ١ + \frac{١}{هـ^{س}} = ١ + هـ^{-س}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = -هـ^{-س}$$

(٦) $ص = جا^{٢}(هـ^{٤س})$

✍الحل :

$$ص = ٨هـ^{٤س} جا(هـ^{٤س}) جتا(هـ^{٤س})$$

(٧) $ص = ٢^{س}$

✍الحل :

$$\frac{ءص}{ءس} = ٢^{س} لـو_{هـ} ٢$$

(٨) $ص = ٧^{س}$

✍الحل :

$$\frac{ءص}{ءس} = ٧^{س} لـو_{هـ} ٧$$

(٩) $ص = ٣^{(٢س+٤)}$

✍الحل :

$$\frac{ءص}{ءس} = ٢ \times ٣^{٢س+٤} لـو_{هـ} ٣$$

(١٠) $ص = لـو_{هـ} هـ^{س^٢}$

الحل :

$ص = س^٢ \times لـو_{هـ} هـ \leftarrow ص = س^٢$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٢س$

(١١) $ص = لـو_{هـ} هـ^{(٣س^٣ - ٦)}$

الحل :

$ص = (٣س^٣ - ٦) لـو_{هـ} هـ \leftarrow ص = (٣س^٣ - ٦)$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٩س^٢$

(١٢) $ص = هـ^{لـو_{هـ} س^٣}$

الحل :

$ص = هـ^{لـو_{هـ} س^٣} \leftarrow ص = س^٣$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٣س^٢$

(١٣) $ص = س^٢ هـ^{لـو_{هـ} س^٣}$

الحل :

$ص = س^٢ هـ^{لـو_{هـ} س^٣} \leftarrow ص = س^٥$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٥س^{٤}$

٢) اذا كان $ص = هـ^{\frac{١}{س}} + ٲ لـو_{هـ} \sqrt{س}$ وكان $ن'(١) = هـ$ جد قيمة $ٲ$.

الحل :

$$ص = هـ^{\frac{١}{س}} + \frac{ٲ}{٢} لـو_{هـ} س \leftarrow ن'(س) = \frac{-١}{س^{٢}} \times هـ^{\frac{١}{س}} + \frac{ٲ}{٢س}$$

$$ن'(١) = -١ \times هـ^{١} + \frac{ٲ}{٢} = هـ \leftarrow ٲ = ٤هـ$$

٣) اذا كان $هـ^{س\times ص} = س + ص$ اثبت ان :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١ - س ص - ص^{٢}}{س^{٢} + س ص - ١}$$

الحل :

$$هـ^{س\times ص} = (س + ص)$$

$$(س \times ص' + ص) هـ^{س\times ص} = ١ + ص'.$$

$$س \times ص' \times هـ^{س\times ص} + ص هـ^{س\times ص} = ١ + ص'$$

$$س \times ص' \times هـ^{س\times ص} - ص' = ١ - ص هـ^{س\times ص}$$

$$ص' \times (س \times هـ^{س\times ص} - ١) = ١ - ص هـ^{س\times ص} \leftarrow \frac{ءص}{ءس} = \frac{١ - ص هـ^{س\times ص}}{(س \times هـ^{س\times ص} - ١)}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١ - ص(س + ص)}{(س \times (س + ص) - ١)}$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{١} - \text{س ص} - \text{ص}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{س ص} - \text{١}}$$

٤) اذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{أس}}$ فجد قيمة أ التي تحقق المعادلة $\text{ص}'' - \text{٥ص}' + \text{٦ص} = \text{٠}$

الحل :

$$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{أس}} \longrightarrow \text{ص}' = \text{أهـ}^{\text{أس}} \longrightarrow \text{ص}'' = \text{أ}^{\text{٢}}\,\text{هـ}^{\text{أس}}$$

$$\text{أ}^{\text{٢}}\,\text{هـ}^{\text{أس}} - \text{٥أهـ}^{\text{أس}} + \text{٦هـ}^{\text{أس}} = \text{٠} \longrightarrow \text{هـ}^{\text{أس}}(\text{أ}^{\text{٢}} - \text{٥أ} + \text{٦}) = \text{٠}$$

$$\text{هـ}^{\text{أس}} \neq \text{٠}$$

$$(\text{أ}^{\text{٢}} - \text{٥أ} + \text{٦}) = \text{٠} \longrightarrow (\text{أ} - \text{٢})(\text{أ} - \text{٣}) = \text{٠}$$

$$\text{أ} = \text{٢} \quad ، \quad \text{أ} = \text{٣}$$

الابداع في الرياضيات

تمرين

(١) اذا كان $\text{ص} = \text{أهـ}^{\text{٢س}} + \text{جا}(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})$ حيث أ عدد ثابت وكان $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س} = \text{١}} = \text{هـ}^{\text{٣}} + \text{١}$

جد قيمة أ.

(٢) اذا كان $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{٢س}}$ اثبت ان $\text{ص}'' - \text{٣ص}' + \text{٢ص} = \text{٠}$

(٣) اذا كان $\text{ق}''(\text{س}) = \text{جاس} + \text{هـ}^{\text{٢س}}$ وكان $\text{ق}(\text{٠}) = \frac{\text{١}}{\text{٤}}$ ، $\text{ق}'(\text{٠}) = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ فجد قاعدة الاقتران $\text{ق}(\text{س})$.

رابعا

تكامل الاقتران الاسي الطبيعي

نظرية

أ. عادل عواد

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$$

الابداع في الرياضيات

الامثلة

جد التكاملات التالية :

(١) $\int \text{هـ}^{٢\text{س}+٤}\, \text{ءس}$

✍ الحل :

$$\frac{\text{هـ}^{٢\text{س}+٤}}{٢} + \text{جـ}$$

---

(٢) $\int ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}+٦}\, \text{ءس}$

بالتعويض

✍ الحل :

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٦ \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} \leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{٢\text{س}}$

$$\int ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\, \frac{\text{ءص}}{٢\text{س}} = \int \text{هـ}^{\text{ص}}\, \text{ءص} \leftarrow \text{هـ}^{\text{س}^{٢}+٦} + \text{جـ}$$

---

(٣) $\int \text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{هـ}^{\text{ظاس}}\, \text{ءس}$

✍ الحل :

بالتعويض

ص=ظاس ← $\frac{ءص}{ءس}$ =قا^{٢}س ← $\frac{ءص}{قا^{٢}س}$ = ءس

$\int$ قا^{٢}س هـ^{ص} $\frac{ءص}{قا^{٢}س}$ = ءس = $\int$ هـ^{ص}ءص ← هـ ← هـ^{ظاس}+جـ

---

(٤) $\int$ س هـ^{٢س} ءس

الحل :

ں = س　　　ءں = ءس

ءهـ = هـ^{٢س}　　　هـ = $\frac{هـ^{٢س}}{٢}$

$\frac{سهـ^{٢س}}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ $\int$ هـ^{٢س}ءس ← $\frac{سهـ^{٢س}}{٢}$ − $\frac{١}{٤}$ هـ^{٢س}+جـ

---

(٥) $\int$ جا٢س هـ^{جتاس} ءس

بالتعويض

الحل :

$\int$ ٢ جاس جتاس هـ^{جتاس} ءس

ص=جتاس ← $\frac{ءص}{ءس}$ = −جاس ← $\frac{ءص}{−جاس}$ = ءس

$\int$ ٢ جاس ص هـ^{ص} $\frac{ءص}{−جاس}$ = $\int$ − ٢ ص هـ^{ص} ءص

اجزاء

ں = −٢ص　　　ءں = −٢ءص

ءهـ = هـ^{ص}　　　هـ = هـ^{ص}

$$-٢\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + ٢\int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{ءص} \leftarrow -٢\text{ص}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + ٢\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$$

$$-٢\text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{جتاس}} + ٢\text{هـ}^{\text{جتاس}} + \text{جـ}$$

---

(٦) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}.\text{ءس}$

اجراء مرتين ثم نقل

الحل :

$\text{ن} = \text{هـ}^{\text{س}}$ $\text{ءن} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جاس}$ $\text{هـ} = -\text{جتاس}$

$-\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{جتاس} + \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}.\text{ءس}$ ....(١)

$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}.\text{ءس}$

$\text{ن} = \text{هـ}^{\text{س}}$ $\text{ءن} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$

$\text{ءهـ} = \text{جتاس}$ $\text{هـ} = \text{جاس}$

$\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{جاس} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}.\text{ءس}$ ....(٢)

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}.\text{ءس} = -\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{جتاس} + \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{جاس} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}.\text{ءس}$$

$$٢\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}.\text{ءس} = -\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{جتاس} + \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{جاس} + \text{جـ}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}.\text{ءس} = \frac{-\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{جتاس}}{٢} + \frac{\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{جاس}}{٢} + \text{جـ}$$

الابداع في الرياضيات

تمرين

جد التكاملات التالية :

(١) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{جتاس} . \text{ءس}$

(٢) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{قاس}} . \text{ءس}$ (٣) $\int \text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\, \text{س}) . \text{ءس}$

طريقة الجدول

حالات استخدام طريقة الجدول :

حاصل ضرب اقترانين أحدهما كثير حدود والاقتران الاخر على احدى الصور الاتية:

١) جاأس ٢) جتاأس ٣) $هـ^{أس}$ ٤) $(أس+ب)^{ن}$ ، ن ≠ −١ ، أ ≠ ٠

جد التكاملات التالية

١) $\int س^{٢}هـ^{س}ءس$

الحل :

ق(اجراء التفاضل)		ءهـ (اجراء التكامل)
$س^{٢}$	+	$هـ^{س}$
٢س	-	$هـ^{س}$
٢	+	$هـ^{س}$
٠	-	$هـ^{س}$

$\int س^{٢}هـ^{س}ءس = س^{٢}هـ^{س} - ٢سهـ^{س} + ٢هـ^{س} + جـ$

---

٢) $\int جاس هـ^{س}ءس$

الحل :

ق(اجراء التفاضل)		ءهـ (اجراء التكامل)
$س^{٢}$	+	جاس
٢س	-	−جتاس
٢	+	−جاس
٠	-	جتاس

$\int جاس هـ^{س}ءس = -جتاس هـ^{س} + جاس هـ^{س} + ٢جتاس هـ^{س} + جـ$

خامسا　التكامل بالكسور الجزئية

اذا كان ١) الاقتران نسبيا ٢) وليس لبسطه علاقة بمشتقة مقامه ٣) وامكن تحليل مقامه الى عوامله فإنه يمكن ايجاد تكامله بطريقة تسمى التكامل بالكسور الجزئية .

اولا　اذا كانت درجة البسط اقل من درجة المقام

الامثلة

جد التكاملات التالية :

(١) $\int \frac{٤}{س^{٢} - ٩} \, ءس$

الحل :

$$\frac{٤}{س^{٢} - ٩} = \frac{أ}{س - ٣} + \frac{ب}{س + ٣}$$

$$٤ = أ(س + ٣) + ب(س - ٣)$$

عند س = ٣

$$٤ = ٦أ \leftarrow أ = \frac{٢}{٣}$$

عند س = -٣

$$٤ = -٦ب \leftarrow ب = \frac{-٢}{٣}$$

$$\therefore \frac{٢}{٣} \int \frac{١}{س - ٣} \, ءس - \frac{٢}{٣} \int \frac{١}{س + ٣} \, ءس$$

$\therefore \frac{٢}{٣} لـو_{هـ} (س - ٣) - \frac{٢}{٣} لـو_{هـ} (س + ٣) + جـ$

(٢) $\int \frac{٣}{س^{٢} - ٤س + ٣} ءس$

الحل :

$$\frac{٣}{س^{٢} - ٤س + ٣} = \frac{أ}{س - ١} + \frac{ب}{س - ٣}$$

$٣ = أ(س - ٣) + ب(س - ١)$

عند س = ٣

$٣ = ٦ب \leftarrow ب = \frac{٣}{٢}$

عند س = ١

$٣ = -٢أ \leftarrow أ = \frac{-٣}{٢}$

$\therefore \frac{-٣}{٢} \int \frac{١}{س - ١} ءس + \frac{٣}{٢} \int \frac{١}{س - ٣} ءس$

$\therefore \frac{-٣}{٢} لـو_{هـ} (س - ١) + \frac{٣}{٢} لـو_{هـ} (س - ٣) + جـ$

(٣) $\int \frac{٢س + ١}{س^{٢} - ١٦} ءس$

الحل :

$$\frac{٢س + ١}{س^{٢} - ١٦} = \frac{أ}{س - ٤} + \frac{ب}{س + ٤}$$

$٢س + ١ = أ(س + ٤) + ب(س - ٤)$

عند س = ٤

$٩ = ٨ أ \leftarrow أ = \frac{٩}{٨}$

عند س = -٤

$-٧ = -٨ ب \leftarrow ب = \frac{٧}{٨}$

$\therefore \frac{٩}{٨}\int \frac{١}{س - ٤} ءس + \frac{٧}{٨}\int \frac{١}{س + ٤} ءس$

$\therefore \frac{٩}{٨} لو_{هـ} (س - ٤) + \frac{٧}{٨} لو_{هـ} (س + ٤) + جـ$

---

(٤) $\int \frac{٢}{س^{٢} - ٢س} ءس$

✍ الحل :

$\frac{٢}{س^{٢} - ٢س} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س - ٢}$

$٢ = أ(س - ٢) + ب س$

عند س = ٢

$٢ = ٢ب \leftarrow ب = ١$

عند س = ٠

$٢ = -٢أ \leftarrow أ = -١$

$\therefore \int \frac{-١}{س} ءس + \int \frac{١}{س - ٢} ءس$

$\therefore -لو_{هـ} (س) + لو_{هـ} (س - ٢) + جـ$

---

(٥) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} - ٨١} ءس$

✍ الحل :

نفرض ان $ص = هـ^{س} \leftarrow \frac{ءص}{ءس} = هـ^{س} \leftarrow \frac{ءص}{هـ^{س}} = ءس$

$\int \frac{ص}{ص^{٢} - ٨١} ءص$

$\frac{ص}{ص^{٢} - ٨١} = \frac{ا}{ص - ٩} + \frac{ب}{ص + ٩}$

$ص = ا(ص + ٩) + ب(ص - ٩)$

عند ص=-٩

$ص = ا(ص + ٩) + ب(ص - ٩) \leftarrow -٩ = -١٨ب \leftarrow ب = \frac{-١}{٢}$

عند ص= ٩

$ص = ا(ص + ٩) + ب(ص - ٩) \leftarrow ٩ = ١٨ا \leftarrow ا = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{١}{٢} \int \frac{١}{ص - ٩} ءس - \frac{١}{٢} \int \frac{١}{ص + ٩} ءس$

$\therefore \frac{١}{٢} لـو_{هـ} (ص - ٩) - \frac{١}{٢} لـو_{هـ} (ص + ٩) + جـ$

$\therefore \frac{١}{٢} لـو_{هـ} (هـ^{س} - ٩) - \frac{١}{٢} لـو_{هـ} (هـ^{س} + ٩) + جـ$

---

(٦) $\int \frac{٢}{\sqrt[٣]{س^{٤}} + ٤س + ٣\sqrt[٣]{س^{٢}}} ءس$

✍ الحل :

نفرض ان $ص = \sqrt[3]{س} \leftarrow ص^{3} = س \leftarrow ٣ص^{2} \frac{ءص}{ءس} = ١ \leftarrow ٣ص^{2} ءص = ءس$

$\int \frac{٦ص^{2}}{ص^{4} + ٤ص^{3} + ٣ص^{2}} ءص \leftarrow \int \frac{٦ص^{2}}{ص^{2}(ص^{2} + ٤ص + ٣)} ءص \leftarrow \int \frac{٦}{(ص^{2} + ٤ص + ٣)} ءص$

$\int \frac{٦}{(ص^{2} + ٤ص + ٣)} ءص$

$\frac{٦}{ص^{2} + ٤ص + ٣} = \frac{أ}{ص + ٣} + \frac{ب}{ص + ١}$

$٦ = أ(ص + ١) + ب(ص + ٣)$

عند ص=-١

$٦ = أ(ص + ١) + ب(ص + ٣) \leftarrow ٦ = ٢ب \leftarrow ب = ٣$

عند ص= -٣

$٦ = أ(ص + ١) + ب(ص + ٣) \leftarrow ٦ = -٢أ \leftarrow أ = -٣$

$\therefore -٣\int \frac{١}{ص + ٣} ءس + ٣\int \frac{١}{ص + ١} ءس$

$\therefore -٣لـو_{هـ} (ص + ٣) + ٣لـو_{هـ} (ص + ١)$+جـ

$\therefore -٣لـو_{هـ} (\sqrt[3]{س} + ٣) + ٣لـو_{هـ} (\sqrt[3]{س} + ١)$+جـ

(٧) $\int \frac{٢}{س - ٤\sqrt{س} + ٣} ءس$

الحل :

نفرض ان $ص = \sqrt{س} \leftarrow ص^{2} = س \leftarrow ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ١ \leftarrow ٢صءص = ءس$

$$\int \frac{\text{٤ص}}{\text{ص}^{٢} - \text{٤ص} + ٣}\,\text{ءص} \leftarrow \int \frac{\text{٤ص}}{(\text{ص} - ٣)(\text{ص} - ١)}\,\text{ءص}$$

$$\frac{\text{٤ص}}{(\text{ص} - ٣)(\text{ص} - ١)} = \frac{\text{أ}}{(\text{ص} - ٣)} + \frac{\text{ب}}{(\text{ص} - ١)}$$

$$\text{٤ص} = \text{أ}(\text{ص} - ١) + \text{ب}(\text{ص} - ٣)$$

عند ص=١

$$\text{٤ص} = \text{أ}(\text{ص} - ١) + \text{ب}(\text{ص} - ٣) \leftarrow ٤ = -٢\text{ب} \leftarrow \text{ب} = -٢$$

عند ص= ٣

$$\text{٤ص} = \text{أ}(\text{ص} - ١) + \text{ب}(\text{ص} - ٣) \leftarrow ١٢ = ٢\text{أ} \leftarrow \text{أ} = ٦$$

$$\therefore ٦\int \frac{١}{\text{ص} - ٣}\,\text{ءس} - ٢\int \frac{١}{\text{ص} - ١}\,\text{ءس}$$

$$\therefore ٦\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص} - ٣) - ٢\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص} - ١) + \text{جـ}$$

$$\therefore ٦\text{لو}_{\text{هـ}}(\sqrt{\text{س}} - ٣) - ٢\text{لو}_{\text{هـ}}(\sqrt{\text{س}} - ١) + \text{جـ}$$

---

(٨) $$\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{(\text{٥ظا}^{٢}\text{س} - \text{٣ظاس} - ٢)}\,\text{ءس}$$

الحل :

نفرض ان $\text{ص} = \text{ظاس} \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢}\text{س} \leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

$$\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{(\text{٥ظا}^{٢}\text{س} - \text{٣ظاس} - ٢)}\,\text{ءس} \leftarrow \int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{(\text{٥ص}^{٢} - \text{٣ص} - ٢)}\,\frac{\text{ءص}}{\text{قا}^{٢}\text{س}} \leftarrow \int \frac{١}{(\text{٥ص}^{٢} - \text{٣ص} - ٢)}\,\text{ءص}$$

$$\frac{١}{(\text{٥ص}^{٢} - \text{٣ص} - ٢)} = \frac{\text{أ}}{(\text{٥ص} + ٢)} + \frac{\text{ب}}{(\text{ص} - ١)}$$

$\text{ص} = \text{أ}(\text{ص} - ١) + \text{ب}(٥\text{ص} + ٢)$

عند ص=١

$١ = \text{أ}(\text{ص} - ١) + \text{ب}(٥\text{ص} + ٢) \leftarrow ١ = ٧\text{ب} \leftarrow \text{ب} = \frac{١}{٧}$

عند $\text{ص} = \frac{-٢}{٥}$

$١ = \text{أ}(\text{ص} - ١) + \text{ب}(٥\text{ص} + ٢) \leftarrow ١ = \frac{-٧}{٥}\text{أ} \leftarrow \text{أ} = \frac{-٥}{٧}$

$\therefore \frac{-٥}{٧}\int \frac{١}{٥\text{ص}+٢}\,\text{ءص} + \frac{١}{٧}\int \frac{١}{\text{ص}-١}\,\text{ءص}$

$\therefore \frac{-٥}{٧}\text{لو}_{\text{هـ}}(٥\text{ص}+٢) + \frac{١}{٧}\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}-١) + \text{جـ}$

$\therefore \frac{-٥}{٧}\text{لو}_{\text{هـ}}(٥\text{ظاس}+٢) + \frac{١}{٧}\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ظاس}-١) + \text{جـ}$

---

(٩) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{س}+١)^{٢}}\,\text{ءس}$

الحل :

بالاجزاء

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\qquad$ $\text{ءع} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{ءس}$

$\text{ءهـ} = (\text{س}+١)^{-٢}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \frac{-١}{(\text{س}+١)\times \text{س}}$

$-(\text{س}+١)^{-١} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \int \frac{١}{(\text{س}+١)\times\text{س}}.\text{ءس}$

$\int \frac{١}{(\text{س}+١)\times\text{س}}.\text{ءس}$

بالكسور الجزئية

$\frac{١}{\text{س}(\text{س}+٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{(\text{س}+٢)}$

$\text{١} = \text{ا}(\text{س}+\text{١}) + \text{ب س}$

عند س = ٠

$\text{١} = \text{ا}(\text{س}+\text{١}) + \text{ب س} \leftarrow \text{ا} = \text{١}$

عند س =-١

$\text{١} = \text{ا}(\text{س}+\text{١}) + \text{ب س} \leftarrow \text{ب} = -\text{١}$

$\therefore \int \frac{\text{١}}{\text{س}}\,\text{ءس} - \int \frac{\text{١}}{\text{س}+\text{١}}\,\text{ءس}$

$\therefore \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}) - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+\text{١}) + \text{جـ}$

$\therefore -(\text{س}+\text{١})^{-\text{١}} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}) - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+\text{١}) + \text{جـ}$

(١٠) $\int \frac{\text{جاس}}{(\text{٢جتا٢س} + \text{٢جا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{جتاس} - \text{١})}\,\text{ءس}$

الحل :

بالتعويض

$\text{٢جتا٢س} = \text{٤جتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{٢}$

$\text{جا}^{\text{٢}}\text{س} = \text{١} - \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}$

$$\int \frac{\text{جاس}}{(\text{٤جتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{٢} + \text{٢} - \text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{جتاس} - \text{١})}\,\text{ءس} \leftarrow \int \frac{\text{جاس}}{(\text{٢جتا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{جتاس} - \text{١})}\,\text{ءس}$$

نفرض ان $\text{ص} = \text{جتاس} \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{جاس} \leftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}}$

$$\int \frac{\text{جاس}}{(\text{٢ص}^{\text{٢}} - \text{ص} - \text{١})} \cdot \frac{\text{ءص}}{-\text{جاس}} \leftarrow \int \frac{-\text{١}}{(\text{٢ص}+\text{١})(\text{ص}-\text{١})}\,\text{ءص}$$

$$\frac{-\text{١}}{(\text{٢ص}+\text{١})(\text{ص}-\text{١})} = \frac{\text{ا}}{(\text{٢ص}+\text{١})} + \frac{\text{ب}}{(\text{ص}-\text{١})}$$

$-١ = أ(ص - ١) + ب(٢ص + ١)$

$ص = \frac{-١}{٢}$

$-١ = أ(\frac{-١}{٢} - ١) \leftarrow أ = \frac{٢}{٣}$

$ص = ١$

$-١ = ٣ب \leftarrow ب = \frac{-١}{٣}$

$\frac{٢}{٣}\int \frac{١}{(٢ص + ١)} ءص - \frac{١}{٣}\int \frac{١}{(ص - ١)} ءص$

$\therefore \frac{٢}{٣} لــو_{هـ} (٢ص + ١) - \frac{١}{٣} لــو_{هـ} (ص - ١) + جـ$

$\therefore \frac{٢}{٣} لــو_{هـ} (٢جتاس + ١) - \frac{١}{٣} لــو_{هـ} (جتاس - ١) + جـ$

---

(١١) $\int_{٢}^{٣} \frac{(س + ١)}{س^{٢} + س - ٢} ءس$

الحل :

$\frac{س + ١}{س^{٢} + س - ٢} = \frac{أ}{س + ٢} + \frac{ب}{س - ١}$

$س + ١ = أ(س - ١) + ب(س + ٢)$

عند $س = ١$

$س + ١ = أ(س - ١) + ب(س + ٢) \leftarrow ٢ = ٣ب \leftarrow ب = \frac{٢}{٣}$

عند $س = -٢$

$$\text{س}+١ = \text{ا}(\text{س}-١)+\text{ب}(\text{س}+٢) \leftarrow -١ = -٣\text{ا} \leftarrow \text{ا} = \frac{١}{٣}$$

$$\therefore \frac{١}{٣}\int \frac{١}{\text{س}+٢}\,\text{ءس} + \frac{٢}{٣}\int \frac{١}{\text{س}+١}\,\text{ءس}$$

$$\therefore \left[\frac{١}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+٢) + \frac{٢}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}-١)\right]_{٢}^{٣}$$

$$\therefore \frac{١}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}(٥) + \frac{٢}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}(٢) - (\frac{١}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}(٤) + \frac{٢}{٣}\text{لو}_{\text{هـ}}(١))$$

---

(١٢) $$\int \frac{\text{س}}{(\text{س}^{٤}+\text{س}^{٢})}\,\text{ءس} = \int \frac{\text{س}}{\text{س}^{٤}(١+\frac{١}{\text{س}^{٢}})}\,\text{ءس} = \int \frac{١}{\text{س}^{٣}(١+\frac{١}{\text{س}^{٢}})}\,\text{ءس}$$

الحل :

نفرض ان $\text{ص} = ١+\frac{١}{\text{س}^{٢}} \leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٢\text{س}^{-٣} \leftarrow \frac{\text{س}^{٣}\,\text{ءص}}{-٢} = \text{ءس}$

$$\int \frac{١}{\text{س}^{٣}(\text{ص})}\,\frac{\text{س}^{٣}\,\text{ءص}}{-٢} = \frac{١}{-٢}\int \frac{١}{(\text{ص})}\,\text{ءص}$$

$$\frac{١}{-٢}\int \frac{١}{(\text{ص})}\,\text{ءص} = \frac{١}{-٢}\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص})+\text{جـ}$$

$$\frac{١}{-٢}\text{لو}_{\text{هـ}}(١+\frac{١}{\text{س}^{٢}})+\text{جـ}$$

الابداع في الرياضيات

تمرين

جد التكاملات التالية

(١) $$\int \frac{٦\text{جتاس}}{(٢\text{جاس}-١)(\text{جاس}+١)}\,\text{ءس}$$

(٢) $\int \frac{٢}{\text{س}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}) - ٢\right)\left(\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}) - ٣\right)}\, \text{ءس}$

(٣) $\int_{١}^{٤} \frac{|\text{س} - ١|}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}\, \text{ءس}$

ثانيا

اذا كانت درجة البسط اكبر او تساوي من درجة المقام

الاسئلة

جد التكاملات التالية

(١) $\int \frac{\text{س}^{٢} + \text{س}}{(\text{س} - ١)}\, \text{ءس}$

الحل :

$$\begin{array}{r|l} \text{س} + ٢ & \\ \hline \text{س}^{٢} + \text{س} & \text{س} - ١ \\ -\ \text{س}^{٢} + \text{س} & \\ \hline ٢\text{س} & \\ -\ ٢\text{س} + ٢ & \\ \hline ٢ & \end{array}$$

$$\int (\text{س} + ٢)\,\text{ءس} + \int \frac{٢}{(\text{س} - ١)}\, \text{ءس}$$

$$\therefore \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٢\text{س} + ٢\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س} - ١) + \text{جـ}$$

---

(٢) $\int \frac{\text{س}^{٣} + \text{س}}{(\text{س} + ١)}\, \text{ءس}$

الحل :

اجراء القسمة الطويلة اولا (خوارزمية القسمة)

$$\int (\text{س}^{٣} - \text{س} + ٢)\,\text{ءس} - \int \frac{٢}{(\text{س} + ١)}\, \text{ءس}$$

$\therefore \frac{س^3}{3} - \frac{س^2}{2} + 2س - 2 لـو_هـ (س+1) + جـ$

(3) $\int \frac{2س^3 - س^2 + 3س}{(س^2 - 3س - 4)} ءس$

الحل :

اجراء القسمة الطويلة اولا (خوارزمية القسمة)

$\int (2س + 5) ءس + \int \frac{26س + 20}{(س^2 - 3س - 4)} ءس$

$\int \frac{26س + 20}{(س^2 - 3س - 4)} ءس$

$\frac{26س + 20}{(س^2 - 3س - 4)} = \frac{أ}{(س - 4)} + \frac{ب}{(س + 1)}$

$26س + 20 = أ(س + 1) + ب(س - 4)$

عند س =4

$26س + 20 = أ(س + 1) + ب(س - 4) \leftarrow 124 = 5أ \leftarrow أ = \frac{124}{5}$

عند س =-1

$26س + 20 = أ(س + 1) + ب(س - 4) \leftarrow -6 = -5أ \leftarrow أ = \frac{6}{5}$

$\therefore \frac{124}{5} \int \frac{1}{(س - 4)} ءس + \frac{6}{5} \int \frac{1}{(س + 1)} ءس$

$\therefore \frac{124}{5} لـو_هـ (س - 4) + \frac{6}{5} لـو_هـ (س + 1) + جـ$

$\therefore س^2 + 4س + \frac{124}{5} لـو_هـ (س - 4) + \frac{6}{5} لـو_هـ (س + 1) + جـ$

(٤) $\int \frac{س^{٣} + ٤س - ٨}{(س^{٢} - ٤)} ءس$

✍ الحل :

اجراء القسمة الطويلة اولا (خوارزمية القسمة)

$\int س ءس + \int \frac{٨س - ٨}{(س^{٢} - ٤)} ءس$

$\int \frac{٨س - ٨}{(س^{٢} - ٤)} ءس$

$\frac{٨س - ٨}{(س^{٢} - ٤)} = \frac{أ}{(س - ٢)} + \frac{ب}{(س + ٢)}$

$٨س - ٨ = أ(س + ٢) + ب(س - ٢)$

عند س =-٢

$٨س - ٨ = أ(س + ٢) + ب(س - ٢) \leftarrow -٢٤ = -٤ب \leftarrow ب = ٦$

عند س =٤

$٨س - ٨ = أ(س + ٢) + ب(س - ٢) \leftarrow ٨ = ٤أ \leftarrow أ = ٢$

$\therefore ٢\int \frac{١}{(س - ٢)} ءس + ٦\int \frac{١}{(س + ٢)} ءس$

$\therefore \frac{س^{٢}}{٢} + ٢لـو_{هـ}(س - ٢) + ٦لـو_{هـ}(س + ٢) + جـ$

---

(٥) $\int \frac{\sqrt{س}}{(س - ٤)} ءس$

✍ الحل :

نفرض ان ص $= \sqrt{س} \leftarrow ص^{٢} = س \leftarrow ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ١ \leftarrow ٢ص ءص = ءس$

$\int \frac{٢ص^{٢}}{(ص^{٢} - ٤)} ءس$　　اجراء القسمة الطويلة اولا (خوارزمية القسمة)

$\frac{٨}{(ص^{٢} - ٤)} = \frac{أ}{(ص - ٢)} + \frac{ب}{(ص + ٢)}$

$٨ = أ(ص + ٢) + ب(ص - ٢)$

عند ص $= ٢$

$٨ = أ(ص + ٢) + ب(ص - ٢) \leftarrow ٨ = ٤أ \leftarrow أ = ٢$

عند ص $= -٢$

$٨ = أ(ص + ٢) + ب(ص - ٢) \leftarrow ٨ = -٤ب \leftarrow ب = -٢$

$\therefore ٢ \int \frac{١}{(ص - ٢)} ءص - ٢ \int \frac{١}{(ص + ٢)} ءص$

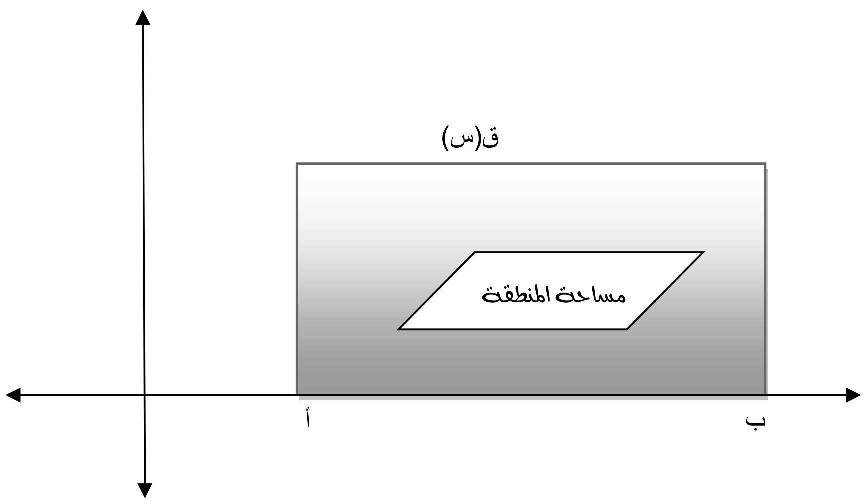
$\therefore ٢ص + ٢لـو_{هـ} (ص - ٢) - ٢لـو_{هـ} (ص + ٢) + جـ$

$\therefore ٢\sqrt{س} + ٢لـو_{هـ} (\sqrt{س} - ٢) - ٢لـو_{هـ} (\sqrt{س} + ٢) + جـ$

الفصل الثالث　　تطبيقات التكامل　　*Applications of the Integral*

اولا　حساب المساحة باستخدام التكامل

اولا :حساب مساحة منطقة محصورة بين منحنى اقتران ومحور السينات



قاعدة

اذا كان ق اقترانا قابلا للتكامل في [أ،ب] فإن مساحة المنطقة (م) المحدودة بمنحنى ق ومحور السينات في [أ،ب] تعطى بالقاعدة :

$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)| \, ءس$$

الامثلة

(١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ت(س) = ٢س − ١ ومحور السينات والمستقيمين $س_١ = ٠$ ، $س_٢ = ١$

الحل :

$$٢س - ١ = ٠ \leftarrow س = \frac{١}{٢}$$

++++++++++++++++++　　--------------------------------

١　　$\frac{١}{٢}$　　٠

$$م = \int_{٠}^{\frac{١}{٢}} |١ - ٢س|\, ءس + \int_{\frac{١}{٢}}^{١} |٢س - ١|\, ءس$$

$$\left[س - س^{٢}\right]_{٠}^{\frac{١}{٢}} + \left[س^{٢} - س\right]_{\frac{١}{٢}}^{١}$$

$$م = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٤} - (٠ - ٠) + ١ - ١ - \left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢}\right)$$

$$م = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} \leftarrow م = \frac{١}{٢}$$ وحدة مساحة

---

(٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ت(س) = $س^{٢}$ ومحور السينات والمستقيمين $س_١ = -٢$ ، $س_٢ = ٢$

الحل :

$$س^{٢} = ٠ \leftarrow س = ٠$$

++++++++++++++++++　　++++++++++++++++++

٢　　٠　　٢-

$$م = \int_{-٢}^{٠} |س^{٢}|\, ءس + \int_{٠}^{٢} |س^{٢}|\, ءس$$

$$\left[\frac{س^٣}{٣}\right]_{-٢}^{٠} + \left[\frac{س^٣}{٣}\right]_{٠}^{٢}$$

م = $-(-\frac{٨}{٣}) + \frac{٨}{٣} - ٠ \leftarrow$ م = $\frac{١٦}{٣}$ وحدة مساحة

(٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ت(س) = س^٢ - ٤س + ٣$ ومحور السينات في [١،٥]

الحل :

$س^٢ - ٤س + ٣ = ٠ \leftarrow (س-١)(س-٣) = ٠ \leftarrow س = ١$ ، $س = ٣$

------------------------------ ++++++++++++++++++

١ ٣ ٥

م = $\int_{١}^{٣} |س^٢ - ٤س + ٣| ءس + \int_{٣}^{٥} |س^٢ - ٤س + ٣| ءس$

$$-\left[(\frac{س^٣}{٣} - \frac{٤س^٢}{٢} + ٣س)\right]_{١}^{٣} + \left[(\frac{س^٣}{٣} - \frac{٤س^٢}{٢} + ٣س)\right]_{٣}^{٥}$$

م = $-(\frac{٢٧}{٣} - ١٨ + ٩) - (\frac{١}{٢} - ٢ + ٣) + \frac{١٢٥}{٣} - ٥٠ + ١٥ - (٩ - ١٨ + ٩)$

م = $\frac{٢٤}{٣} = ٨$ وحدة مساحة

(٤) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ت(س) =$ جتا٢س ومحور السينات في $\left[\frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٢}\right]$

الحل :

جتا٢س $= ٠ \leftarrow ٢س = \frac{\pi}{٢} \leftarrow س = \frac{\pi}{٤}$

م = $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} |$جتا٢س$|$ ءس

$$-\left[\frac{\text{جا٢س}}{٢}\right]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} \leftarrow -\left(\frac{\text{جا}\pi}{٢} - \frac{\text{جا}\frac{\pi}{٢}}{٢}\right) = \frac{١}{٢}$$ وحدة مساحة .

(٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = س^{٢} + ١$ ومحور السينات والمستقيمين $س_{١} = -٢$ ، $س_{٢} = ٤$

الحل :

$س^{٢} + ١ = ٠$ لا تحلل في ح

++++++++++++++++++   ++++++++++++++++++

٢-   ٤

$$م = \int_{-٢}^{٤} |س^{٢} + ١| \, ءس$$

$$م = \left[\frac{س^{٣}}{٣} + س\right]_{-٢}^{٤} \leftarrow \frac{٦٤}{٣} + ٤ - \left(\frac{-٨}{٣} + -٢\right)$$

$$م = \left(\frac{٧٢}{٣}\right) + ٦ \leftarrow م = ٣٠$$ وحدة مساحة

(٦) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = ٣ - \sqrt{س}$ ومحوري السينات والصادات

الحل :

مجال الاقتران $[٠، \infty)$

$$٣ - \sqrt{س} = ٠ \leftarrow ٣ = \sqrt{س} \leftarrow س = ٩$$

$$م = \int_{٠}^{٩} |٣ - \sqrt{س}| \, ءس$$

$$م = \int_{٠}^{٩} |٣ - س^{\frac{١}{٢}}| \, ءس \leftarrow \left[\left(٣س - \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}}\right)\right]_{٠}^{٩}$$

$\left[(٣س - \frac{٢}{٣}\sqrt{س^{٣}})\right]_{٠}^{٩} \leftarrow (٢٧ - ١٨) - (٠ - ٠) = ٩$ وحدة مساحة

(٧) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ت(س) = س^{٢} - ٤$ ومحور السينات

الحل :

$س^{٢} - ٤ = ٠ \leftarrow س = \pm ٢$

$م = \int_{-٢}^{٢} |س^{٢} - ٤| \, ءس$

$م = \left[\frac{س^{٣}}{٣} - ٤س\right]_{-٢}^{٢} \leftarrow \frac{٨}{٣} - ٨ - (\frac{-٨}{٣} + ٨)$

$م = \left|(\frac{-٣٢}{٣})\right| \leftarrow م = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مساحة

اذا كانت الفترة غير معطاه ، فيجب المساواة بالصفر من اجل تحديد حدود التكامل

(٨) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ت(س) = س^{٢} - ٥س + ٤$ ومحور السينات

الحل :

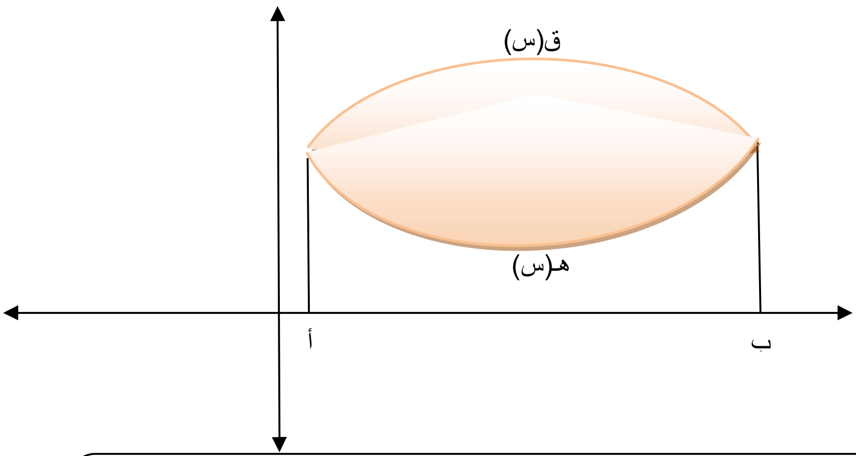
$س^{٢} - ٥س + ٤ = ٠ \leftarrow س = ١$ ، $س = ٤$

$م = \int_{١}^{٤} |س^{٢} - ٥س + ٤| \, ءس$

$م = \left[\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{٥س^{٢}}{٢} + ٤س\right]_{١}^{٤} \leftarrow \frac{٦٤}{٣} - ٤٠ + ١٦ - (\frac{١}{٣} - \frac{٥}{٢} + ٤)$

$م = \left|(\frac{-٩}{٢})\right| \leftarrow م = \frac{٩}{٢}$ وحدة مساحة

ثانيا : حساب مساحة منطقة محصورة بين منحنيين



قاعدة

اذا كان ق ، هـ اقترانا قابلا للتكامل في [أ،ب] فإن مساحة المنطقة المحدودة بين بمنحنييها تعطى بالقاعدة (م)

$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س) - هـ(س)| ء س$$

الامثلة

(١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = $س^٢ - ٤$ والمستقيم ص = ٣س .

الحل :

نفرض ان ق(س) = ص

$س^٢ - ٤ = ٣س \leftarrow س^٢ - ٣س - ٤ = ٠ \leftarrow س = ٤$ ، $س = -١$

$$م = \int_{-١}^{٤} |س^٢ - ٣س - ٤| ء س \leftarrow \left[\frac{-س^٣}{٣} + ٣ \times \frac{س^٢}{٢} + ٤س \right]_{-١}^{٤}$$

$$م = \frac{-٦٤}{٣} + ٣ \times \frac{١٦}{٢} + ١٦ - \left(\frac{١}{٣} + ٣ \times \frac{١}{٢} - ٤\right) = \frac{١٢٥}{٦}$$

(٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ن(س) = س^{٢} - ٤س + ٤$ والمستقيم $هـ(س) = س$.

الحل :

نفرض ان ق(س) = هـ(س)

$$س^{٢} - ٤س + ٤ = س \leftarrow س^{٢} - ٥س + ٤ = ٠ \leftarrow س = ٤ \quad ، \quad س = ١$$

$$م = \int_{١}^{٤} \left| س^{٢} - ٥س + ٤ \right| ءس \leftarrow \left[\frac{-س^{٣}}{٣} + ٥ \times \frac{س^{٢}}{٢} - ٤س \right]_{١}^{٤}$$

$$م = \frac{-٦٤}{٣} + ٤٠ - ١٦ - \left(\frac{-١}{٣} + \frac{٥}{٢} - ٤\right) = \frac{٩}{٢}$$ وحدة مساحة .

(٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ن(س) = ٣س^{٢}$ ومنحنى $هـ(س) = ٦س$.

الحل :

نفرض ان ق(س) = هـ(س)

$$٣س^{٢} = ٦س \leftarrow ٣س^{٢} - ٦س = ٠ \leftarrow س = ٠ \quad ، \quad س = ٢$$

$$م = \int_{٠}^{٢} \left| ٣س^{٢} - ٦س \right| ءس \leftarrow \left[-س^{٣} + ٣س^{٢} \right]_{٠}^{٢} =$$

$$م = ١٢ - ٨ - (٠ - ٠) = ٤$$ وحدة مساحة .

(٤) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ن(س) = \frac{٤}{س}$ ومنحنى $هـ(س) = س$ في الفترة [١،٢] .

الحل :

نفرض ان ق(س) = هـ(س)

$$\frac{\text{٤}}{\text{س}} = \text{س} \leftarrow \text{س}^{\text{٢}} = \text{٤} \leftarrow \text{س} = \pm\text{٢}$$

$$\text{م} = \int_{\text{١}}^{\text{٢}} \left|\frac{\text{٤}}{\text{س}} - \text{س}\right| \text{ءس} \leftarrow \left[\text{٤ لوهـ س} - \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}}\right]_{\text{١}}^{\text{٢}}$$

$$\text{م} = \text{٤ لوهـ ٢} - \text{٢} - \left(\text{٤ لوهـ ١} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\right) = \text{٤ لوهـ ٢} - \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$$ وحدة مساحة .

(٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ن(س) = جاس ومنحنى هـ(س) = جتاس في الفترة $\left[\text{٠}، \frac{\pi}{\text{٢}}\right]$

الحل :

نفرض ان ق(س) = هـ(س)

$$\text{جاس} = \text{جتاس} \leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{\text{٤}}$$

$$\text{م} = \int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٤}}} |\text{جتاس} - \text{جاس}|\, \text{ءس} + \int_{\frac{\pi}{\text{٤}}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} |\text{جاس} - \text{جتاس}|\, \text{ءس}$$

$$\left[\text{جاس} + \text{جتاس}\right]_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٤}}} + \left[(-\text{جتاس} - \text{جاس})\right]_{\frac{\pi}{\text{٤}}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}}$$

$$\text{م} = \text{جا}\frac{\pi}{\text{٤}} + \text{جتا}\frac{\pi}{\text{٤}} - (\text{جا٠} + \text{جتا٠}) - \text{جتا}\frac{\pi}{\text{٢}} - \text{جا}\frac{\pi}{\text{٢}} - \left(-\text{جتا}\frac{\pi}{\text{٤}} - \text{جا}\frac{\pi}{\text{٤}}\right)$$

$$\text{م} = \frac{\text{٤}}{\sqrt{\text{٢}}} - \text{٢}$$ وحدة مساحة .

(٦) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ن(س) = هـ^{س}$ ومنحنى $هـ(س) = هـ^{-س}$ والمستقيم

س = ٢ في الربع الاول .

✍ الحل :

$$م = \int_{٠}^{٢} |هـ^{س} - هـ^{-س}| \, ءس$$

$$[هـ^{س} + هـ^{-س}]_{٠}^{٢} = (هـ^{٢} + هـ^{-٢} - ٢)$$ وحدة مساحة .

(٧) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ص = جتاس والقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين

$(٠،١)$ ، $(\frac{\pi}{٢}،٠)$

✍ الحل :

نجد اولا معادلة المستقيم.

$$م = \frac{١ - ٠}{٠ - \frac{\pi}{٢}} \leftarrow م = -\frac{٢}{\pi}$$

$$ص - ٠ = -\frac{٢}{\pi}(س - \frac{\pi}{٢}) \leftarrow ص = -\frac{٢}{\pi} س + ١$$

$$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} |جتاس + \frac{٢}{\pi} س - ١| \, ءس$$

$$م = [جاس + \frac{١}{\pi} س^{٢} - س]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} = جا\frac{\pi}{٢} + \frac{١}{\pi} \times \frac{\pi}{٤}^{٢} - \frac{\pi}{٢} = ١ - \frac{\pi}{٤}$$ وحدة مساحة .

الابداع في الرياضيات

تمرين

(١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٤س ^{٣} − ٣س ومنحنى هـ(س) = ٥س .

(٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ص ^{٢} = ٢٤ − ٨س ومحور السينات الواقعة في الربع الاول

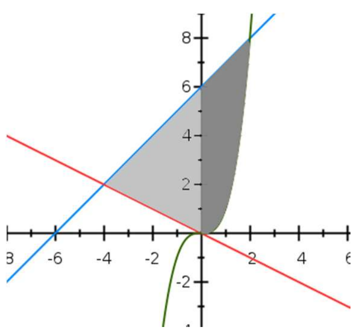
ثالثا : حساب مساحة منطقة محصورة بين ثلاث منحنيات

ملاحظة مهمة جدا : عند حساب المساحة بين ثلاث منحنيات
يجب اولا اجراء الرسم من اجل تحديد المنطقة ثم حساب المساحة

الامثلة

(١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات ص − س = ٦ ، ص = س ^{٣} ، ٢ص + س = ٠

الحل :



اولا ترتيب الاقترانات

ص$_١$ = س + ٦ ص$_٢$ = س ^{٣} ص$_٣$ = $\frac{-١}{٢}$ س

ثانيا المساواة بين كل اقترانين

ص$_١$ = ص$_٢$

س + ٦ = س ^{٣} ← س + ٦ = س ^{٣} − س − ٦ ← س = ٢ ← (٢،٨)

ص$_١$ = ص$_٣$

س + ٦ = $\frac{-١}{٢}$ س ← ٣س + ١٢ = ٠ ← س = −٤ ← (−٤،٢)

$ص_٢ = ص_٣$

$س^٣ = \frac{-١}{٢} س \leftarrow ٢س^٣ + س = ٠ \leftarrow س = ٠ \leftarrow (٠،٠)$

$م = \int_{-٤}^{٠} |س + ٦ + \frac{١}{٢}س| ءس + \int_{٠}^{٢} |-س^٣ + س + ٦| ءس$

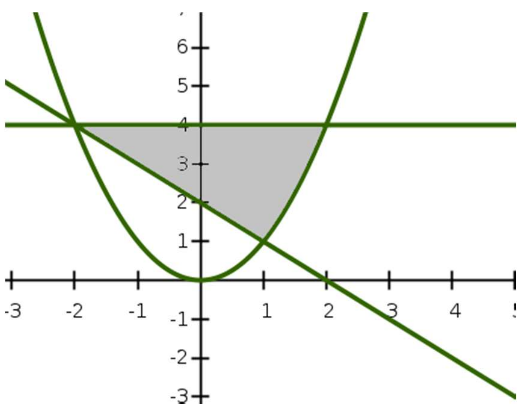
$م = \int_{-٤}^{٠} |\frac{٣}{٢}س + ٦| ءس + \int_{٠}^{٢} |-س^٣ + س + ٦| ءس$

$م = \left[\frac{٣}{٤}س^٢ + ٦س\right]_{-٤}^{٠} - \left[(\frac{-س^٤}{٤} + \frac{س^٢}{٢} + ٦س)\right]_{٠}^{٢}$

$م = ٢٢$ وحدة مساحة .

(٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات $ن(س) = س^٢$ ، $هـ(س) = ٢ - س$ ، $ل(س) = ٤$

الحل :



اولا ترتيب الاقترانات

$ن(س) = س^٢$ $هـ(س) = ٢ - س$ $ل(س) = ٤$

ثانيا المساواة بين كل اقترانين

$ن(س) = هـ(س)$

$س^٢ = ٢ - س \leftarrow س^٢ + س - ٢ = ٠ \leftarrow (س - ١)(س + ٢) = ٠$

$س = ١$ ، $س = -٢$

$(١،١)$ ، $(-٢،٤)$

$ن(س) = ل(س)$

$س^٢ = ٤ \leftarrow س = \pm٢ \leftarrow (س - ٢)(س + ٢) = ٠$

(٢،٤) ، (−٢،٤)

هـ(س) = ل(س)

$\text{٢} - \text{س} = \text{٤} \leftarrow \text{س} = \text{-٢} \leftarrow \text{س} = \text{-٢} \leftarrow (\text{-٢،٤})$

$$\text{م} = \int_{\text{-٢}}^{\text{١}} |\text{٤} - \text{٢} + \text{س}|\,\text{ءس} + \int_{\text{١}}^{\text{٢}} |\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}}|\,\text{ءس}$$

$$\text{م} = \int_{\text{-٢}}^{\text{١}} |\text{٢} + \text{س}|\,\text{ءس} + \int_{\text{١}}^{\text{٢}} |\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}}|\,\text{ءس}$$

$$\text{م} = \left[\text{٢س} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}}\right]_{\text{-٢}}^{\text{١}} + \left[\text{٤س} - \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٣}}\right]_{\text{١}}^{\text{٢}}$$

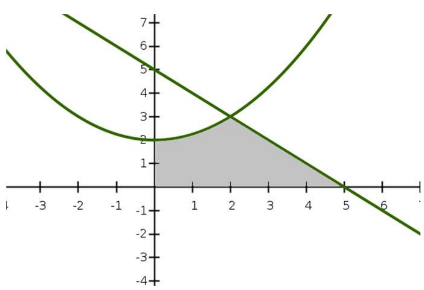
$$\text{م} = \text{٢} + \frac{\text{١}}{\text{٢}} - (\text{-٤} + \text{٢}) + \text{٨} - \frac{\text{٨}}{\text{٣}} - \left(\text{٤} - \frac{\text{١}}{\text{٣}}\right)$$

$\text{م} = \frac{\text{٣٧}}{\text{٦}}$ وحدة مساحة .

---

(٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات ص + س = ٥ ، ٤ص = س$^{\text{٢}}$ + ٨ ، س = ٠

ص = ٠



الحل :

اولا ترتيب الاقترانات

$\text{ص}_{\text{١}} = \text{٥} - \text{س}$ ، $\text{ص}_{\text{٢}} = \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٨}}{\text{٤}}$ ، $\text{ص}_{\text{٣}} = \text{٠}$

ثانيا المساواة بين كل اقترانين

$\text{ص}_{\text{١}} = \text{ص}_{\text{٢}}$

$٥ - س = \frac{س^٢ + ٨}{٤} \leftarrow س^٢ + ٤س - ١٢ = ٠$

$س = ٢ \leftarrow (٢،٣)$ ، $س = -٦ \leftarrow (-٦،١١)$

$ص_١ = ص_٣$

$٥ - س = ٠ \leftarrow س = ٥ \leftarrow (٥،٠)$

$ص_٢ = ص_٣$

$\frac{س^٢ + ٨}{٤} = ٠ \leftarrow س^٢ + ٨ = ٠$　لا تحلل في ح

$م = \int_{٠}^{٢} \left|\frac{١}{٤}س^٢ + ٢\right| ءس + \int_{٢}^{٥} |-س + ٥| ءس$

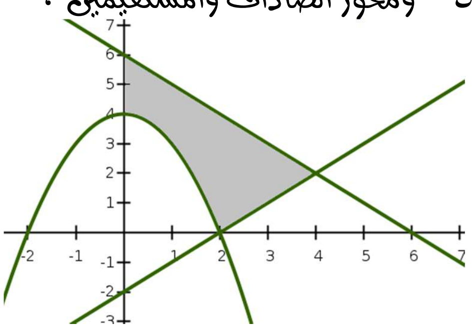
$م = \left[\frac{١}{١٢}س^٣ + ٢س\right]_{٠}^{٢} + \left[\left(\frac{-س^٢}{٢} + ٥س\right)\right]_{٢}^{٥}$

$م = \frac{٢}{٣} + ٤ + \frac{-٢٥}{٢} + ٢٥ - (-٢ + ١٠)$

$م = \frac{٥٥}{٦}$ وحدة مساحة .

(٤) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = ٤ - س^٢$ ومحور الصادات والمستقيمين ،

$ص = س - ٢$ ، $ص = ٦ - س$



الحل :

اولا ترتيب الاقترانات

$ق(س) = ٤ - س^٢$　　$ص_١ = س - ٢$　　$ص_٢ = ٦ - س$

ثانيا المساواة بين كل اقترانين

$ق(س) = ص_١$

٤ − س^{٢} = س − ٢ ← س^{٢} + س − ٦ = ٠

س = ٢ ← (٢،٠)   ،   س = −٣ ← (−٣،−٥)

ن(س) = ص$_{٢}$

٤ − س^{٢} = ٦ − س ← س^{٢} − س + ٢ = ٠ لا تحلل في ح

ص$_{١}$ = ص$_{٢}$

س − ٢ = ٦ − س ← ٢س = ٨ ← س = ٤ ← (٤،٢)

م = $\int_{٠}^{٢}$ |٦ − س − (٤ − س^{٢})| ءس + $\int_{٢}^{٤}$ |٦ − س − س + ٢| ءس

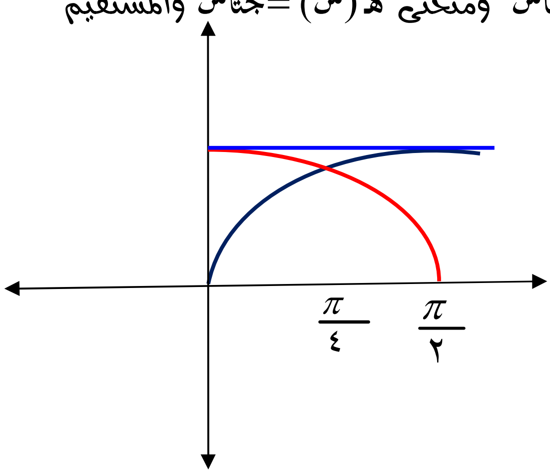
م = $\int_{٠}^{٢}$ |س^{٢} − س + ٢| ءس + $\int_{٢}^{٤}$ |٨ − ٢س| ءس

م = $\left[\frac{١}{٣}\right.$ س^{٣} − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٢س$\left.\right]_{٠}^{٢}$ + $\left[\right.$(٨س − س^{٢})$\left.\right]_{٢}^{٤}$

م = $\frac{٨}{٣}$ − ٢ + ٤ + + ٣٢ − ١٦ − (١٦ − ٤)

م = $\frac{٢٦}{٣}$ وحدة مساحة .

(٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ن(س) = جاس   ومنحنى هـ(س) = جتاس والمستقيم ص = ١ في الفترة $\left[٠، \frac{\pi}{٢}\right]$



الحل :

اولا ترتيب الاقترانات

ن(س) = جاس   هـ(س) = جتاس   ص = ١

ثانيا المساواة بين كل اقترانين

$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})$

$\text{جاس} = \text{جتاس} \leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{4} \leftarrow \left(\frac{\pi}{4} \text{،} \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{ص}$

$\text{جاس} = 1 \leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{2} \leftarrow \left(\frac{\pi}{2} \text{،} 1\right)$

$\text{هـ}(\text{س}) = \text{ص}$

$\text{جتاس} = 1 \leftarrow \text{س} = 0 \leftarrow (0 \text{،} 1)$

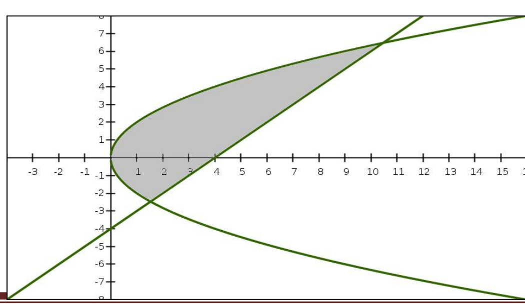
$$\text{م} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} |1 - \text{جتاس}| \, \text{ءس} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |1 - \text{جاس}| \, \text{ءس}$$

$$\left[\text{س} - \text{جاس}\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} + \left[(\text{س} + \text{جتاس})\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{م} = \frac{\pi}{4} - \text{جا}\frac{\pi}{2} - (0 - 0) + \frac{\pi}{2} + \text{جتا}\frac{\pi}{2}$$

$\text{م} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}$ وحدة مساحة .

(٦) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $\text{ص}^2 = 4\text{س}$ والمستقيم، $\text{س} - \text{ص} = 3$.



الحل :

$\text{ص}^2 = 4\text{س} \leftarrow \text{ص} = \pm 2\sqrt{\text{س}}$

اولا ترتيب الاقترانات

ص $_{1}$ = ٢ $\sqrt{س}$ ص $_{2}$ = −٢ $\sqrt{س}$ ص $_{3}$ = س − ٣

ثانيا المساواة بين كل اقترانين

ص $_{1}$ = ص $_{2}$

٢ $\sqrt{س}$ = −٢ $\sqrt{س}$ ← ٤ $\sqrt{س}$ = ٠ ← س = ٠ ← (٠،٠)

ص $_{1}$ = ص $_{3}$

٢ $\sqrt{س}$ = س − ٣ ← ٤س = س ^{2} − ٦س + ٩

س ^{2} − ١٠س + ٩ = ٠ ← س = ١ ، س = ٩

(٩،٦) ، (١،٢)،

ص $_{2}$ = ص $_{3}$

−٢ $\sqrt{س}$ = س − ٣ ← ٤س = س ^{2} − ٦س + ٩

س ^{2} − ١٠س + ٩ = ٠ ← س = ١ ، س = ٩

(٩،٦) ، (١،٢)

م = $\int_{0}^{1}$ |٢ $\sqrt{س}$ + ٢ $\sqrt{س}$| ءس + $\int_{1}^{9}$ |٢ $\sqrt{س}$ − س + ٣| ءس

م = $\int_{0}^{1}$ |٤س $^{\frac{1}{2}}$| ءس + $\int_{1}^{9}$ |٤س $^{\frac{1}{2}}$ − س + ٣| ءس

م = $\int_{0}^{1}$ |٤س $^{\frac{1}{2}}$| ءس + $\int_{1}^{9}$ |٤س $^{\frac{1}{2}}$ − س + ٣| ءس

م = $\left[\frac{8}{3}\right.$ س $^{\frac{3}{2}}$ $\Big]_{0}^{1}$ + $\left[(\frac{4}{3}\right.$ س $^{\frac{3}{2}}$ − $\frac{س^{2}}{2}$ + ٣ س) $\Big]_{1}^{9}$

$$م = \frac{٨}{٣}\left[\sqrt[٣]{س}\right]_{٠}^{١} + \left[\left(\frac{٤}{٣}\sqrt[٣]{س} - \frac{س^{٢}}{٢} + ٣س\right)\right]_{١}^{٩}$$

$$\frac{٨}{٣} + \frac{٤}{٣}\sqrt[٣]{٩} - \frac{٨١}{٢} + ٢٧ - \left(\frac{٤}{٣} - \frac{١}{٢} + ٣\right) = \frac{٦٤}{٣}$$ وحدة مساحة .

الابداع في الرياضيات

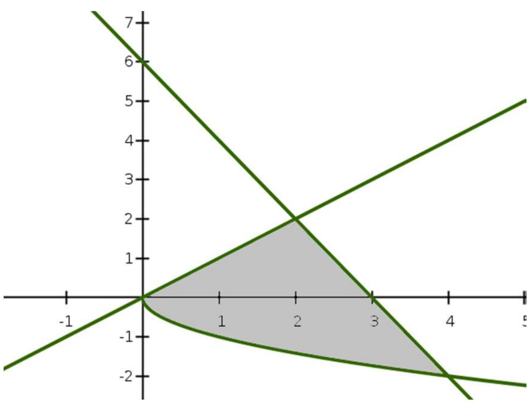
تمرين

(١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $ن(س) = ١٦ - س^{٢}$ ، و $هـ(س) = ٢س + ٨$ ومحور السينات .

(٢) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الاول والمحصورة بين محور الصادات ومنحنيات الاقترانات $ن(س) = س^{٢} - ١$ ، $هـ(س) = ٥ - س$ ، $هـ(س) = ١ - س$.

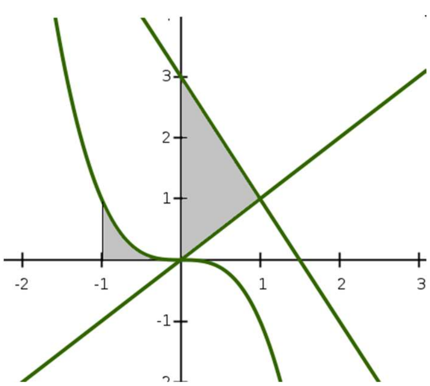
(٣) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث :

$ن(س) = -\sqrt{س}$ ، $هـ(س) = س$ ، $ل(س) = ٦ - ٢س$



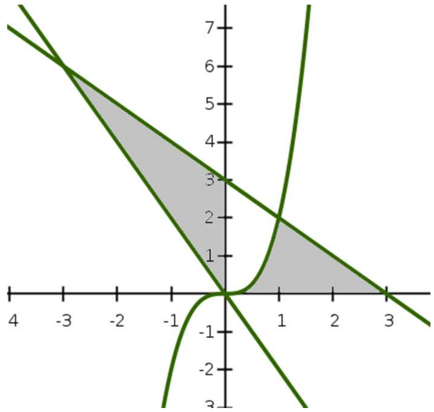
(٤) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور حيث :

$ن(س) = -س^{٣}$ ، $هـ(س) = س$ ، $ل(س) = ٣ - ٢س$



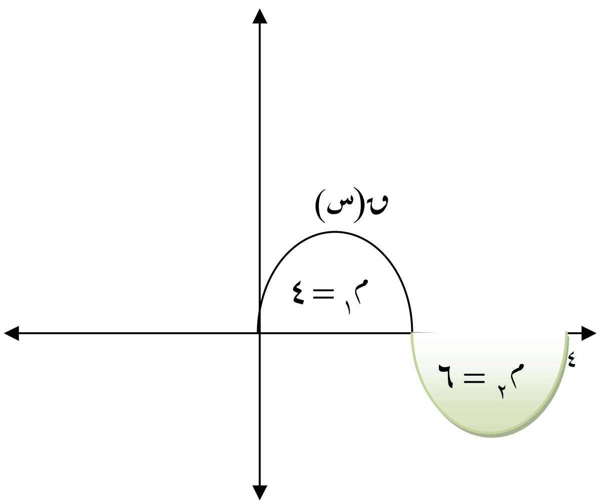
(٥) جد مجموع مساحتي المنطقتين المظللتين المبينتين في الشكل المجاور حيث :

ى(س) = ٢س^{٣} ، هـ(س) = ٣ − س ، ل(س) = −٢س



(٦) من خلال الشكل المجاور جد :

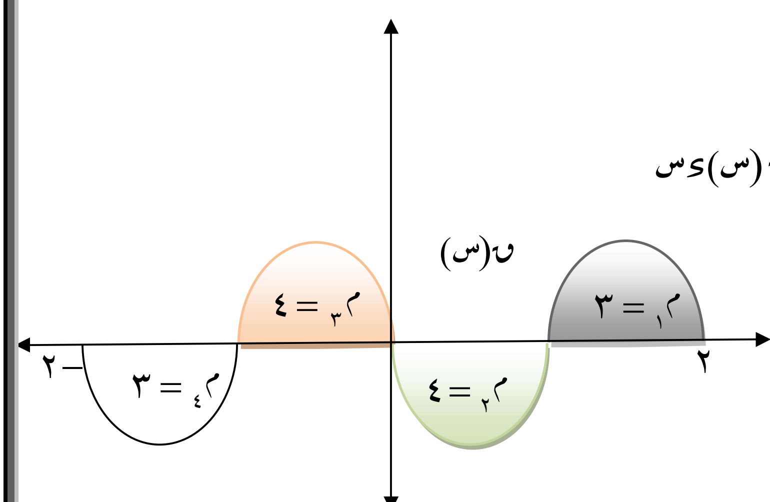
(أ) المساحة على [٠،٤] (ب) $\int_{٠}^{٤}$ ى(س) ءس



(٧) من خلال الشكل المجاور جد :

(أ) المساحة على [−٢،٢] (ب) $\int_{-٢}^{٢}$ ى(س) ءس

(ج) المساحة على [−١،٢]



الفصل الثالث

تطبيقات التكامل

Applications of the Integral

ثانيا المعادلات التفاضلية

Adel Awwad

تعريف

المعادلة التفاضلية: هي معادلة تحتوي على مشتقات أو تفاضلات .

حل المعادلة : يعني ايجاد علاقة تربيط بين المتغير س و المتغير ص بحيث تحقق المعادلة.

الامثلة

جد حل المعادلات التفاضلية التالية :

(١) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}}$

الحل :

الضرب التبادلي

$\text{ص ءص} = \text{س}^{٢}\text{ءس} \leftarrow \int \text{ص ءص} = \int \text{س}^{٢}\text{ءس}$

$\frac{\text{ص}^{٢}}{٢} = \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{جـ} \leftarrow \text{ص}^{٢} = \frac{٢\text{س}^{٣}}{٣} + \text{جـ}$

---

(٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س}^{٢}}{١ + \text{ص}^{٢}}$

الحل :

الضرب التبادلي

$(1+ص^2)ءص = س^2ءس \leftarrow \int(1+ص^2)ءص = \int س^2ءس$

$ص + \frac{ص^3}{3} = \frac{س^3}{3} + جـ$

(3) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(1-2س)}{ص^2}$

✍ الحل :

الضرب التبادلي

$ص^2ءص = (1-2س)ءس \leftarrow \int ص^2ءص = \int(1-2س)ءس$

$\frac{ص^3}{3} = س - س^2 + جـ \leftarrow ص^3 = 3س - 3س^2 + جـ$

(4) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{جتاس}{2ص}$

✍ الحل :

الضرب التبادلي

$2صءص = جتاسءس \leftarrow \int 2صءص = \int جتاسءس$

$ص^2 = جاس + جـ$

(5) $\frac{ءص}{ءس} = قا^2 3س$

✍ الحل :

الضرب التبادلي

$ءص = قا^2 3سءس \leftarrow \int ءص = \int قا^2 3سءس$

$$ص = \frac{ظا٣س}{٣} + جـ$$

(٦) $\frac{ءص}{ءس} = جتا^٢ س جتا^٢ ٢ص$

الحل :

الضرب التبادلي

$$\frac{ءص}{جتا^٢ ٢ص} = جتا^٢ س ءس \leftarrow \int قا^٢ ٢ص ءص = \int جتا^٢ س ءس$$

$$\frac{ظا٢ص}{٢} = \frac{١}{٢} \int (١ + جتا٢س) ءس \leftarrow \frac{ظا٢ص}{٢} = \frac{١}{٢}(س + \frac{جا٢س}{٢}) + جـ$$

(٧) $\frac{ءص}{ءس} + ص^٢ جاس = ٠$

الحل :

الضرب التبادلي

$$\frac{ءص}{ءس} + ص^٢ جاس = ٠ \leftarrow \frac{ءص}{ءس} = -ص^٢ جاس \leftarrow \int \frac{ءص}{ص^٢} = \int -جاس ءس$$

$$\int ص^{-٢} ءص = \int -جاس ءس \leftarrow \frac{ص^{-١}}{-١} = جتاس + جـ$$

$$\therefore \frac{١}{ص} = -جتاس + جـ \leftarrow ص = -قاس + جـ$$

(٨) $\frac{١}{٢} \sqrt{ص} \frac{ءص}{ءس} + ٦س - ١ = ٠$

الحل :

الضرب التبادلي

$\frac{1}{2}\sqrt{ص}\ \frac{ءص}{ءس} = ١ - ٦س \leftarrow \int \sqrt{ص}\,ءص = \int (٢ - ١٢س)\,ءس$

$\int ص^{\frac{1}{2}}\,ءص = \int (٢ - ١٢س)\,ءس \leftarrow \frac{ص^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = (٢س - ٦س^{٢}) + جـ$

(٩) $٣ص^{٢}ظا^{٢}س\ \frac{ءص}{ءس} = ١$

الحل :

الضرب التبادلي

$٣ص^{٢}ظا^{٢}س\ \frac{ءص}{ءس} = ١ \leftarrow ٣ص^{٢}ءص = \frac{ءس}{ظا^{٢}س}$

$\int ٣ص^{٢}ءص = \int \frac{ءس}{ظا^{٢}س} \leftarrow ص^{٣} = \int ظتا^{٢}س\,ءس \leftarrow \int (قتا^{٢}س - ١)ءس$

$\int (قتا^{٢}س - ١)ءس = -ظتاس - س + جـ$

(١٠) $جا٢س\,ءس + جتا٣ص\,ءص = ٠$

الحل :

ترتيب

$\int جا٢س\,ءس = \int -جتا٣ص\,ءص \leftarrow \frac{-جتا٢س}{٢} = \frac{-جا٣ص}{٣} + جـ$

(١١) $جتا^{٢}ص\,ءس = جا^{٢}٥س\,ءص$

الحل :

$\frac{ءس}{جا^{٢}٥س} = \frac{ءص}{جتا^{٢}ص} \leftarrow \int قتا^{٢}٥س\,ءس = \int قا^{٢}ص\,ءص$

$\dfrac{-\text{ظتا}^5\text{س}}{5} = \text{ظا ص} + \text{جـ}$

(١٢) $\text{ءس} + 3\,\text{ءص} = \text{جتا س ءس}$

✍ الحل :

$\text{ءس} - \text{جتا س ءس} = -3\,\text{ءص} \leftarrow \text{ءس}(1 - \text{جتا س}) = -3\,\text{ءص}$

$\int (1 - \text{جتا س})\,\text{ءس} = -\int 3\,\text{ءص} \leftarrow \text{س} - \text{جا س} = -3\text{ص} + \text{جـ}$

(١٣) $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \sqrt{\dfrac{\text{س}}{\text{ص}}}$ ، $\text{س، ص} > 0$

✍ الحل :

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{ص}}} \leftarrow \int \sqrt{\text{ص}}\,\text{ءص} = \int \sqrt{\text{س}}\,\text{ءس}$

$\int \text{ص}^{\frac{1}{2}}\,\text{ءص} = \int \text{س}^{\frac{1}{2}}\,\text{ءس} \leftarrow \dfrac{2}{3}\text{ص}^{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} + \text{جـ}$

(١٤) $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \sqrt{1 + \text{س} + \text{ص} + \text{س ص}}$ ، $\text{س، ص} > 0$

✍ الحل :

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \sqrt{(1 + \text{س}) + \text{ص}(1 + \text{س})}$

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \sqrt{(1 + \text{س})(1 + \text{ص})} \leftarrow \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \sqrt{(1 + \text{س})}\sqrt{(1 + \text{ص})}$

$\dfrac{\text{ءص}}{\sqrt{(1 + \text{ص})}} = \sqrt{(1 + \text{س})}\,\text{ءس} \leftarrow \int \dfrac{\text{ءص}}{\sqrt{(1 + \text{ص})}} = \int \sqrt{(1 + \text{س})}\,\text{ءس}$

$\int (1 + \text{ص})^{-\frac{1}{2}}\,\text{ءص} = \int (1 + \text{س})^{\frac{1}{2}}\,\text{ءس} \leftarrow 2(1 + \text{ص})^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(1 + \text{ص})^{\frac{3}{2}} + \text{جـ}$

الابداع في الرياضيات

تمرين

(١) جد حل المعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص}^{٢} + ٢\text{سص}}{\text{س}^{٢}}$$ ************

(٢) جد حل المعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{س}}$$ ********

(٣) جد حل المعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س} - \text{هـ}^{-\text{س}}}{\text{ص} - \text{هـ}^{\text{ص}}}$$

(٤) جد حل المعادلة التفاضلية التالية

$$\text{س}\,\text{ءس} + \text{ص}\,\text{هـ}^{-\text{س}}\,\text{ءص} = ٠$$

تطبيقات هندسية على المعادلات التفاضلية

الابداع في الرياضيات

الامثلة

(١) اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س،ص) يساوي $\frac{\text{جاس} - \text{قا}^{٢}\text{س}}{٣\text{ص}^{٢}}$ جد قاعدة العلاقة علما ان النقطة $\left(\frac{\pi}{٤} ، ٤\right)$ تقع على منحناها .

الحل :

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{جاس} - \text{قا}^{٢}\text{س}}{٣\text{ص}^{٢}} \leftarrow \int ٣\text{ص}^{٢}\,\text{دص} = \int (\text{جاس} - \text{قا}^{٢}\text{س})\,\text{دس}$$

$$\text{ص}^{٣} = -\text{جتاس} - \text{ظاس} + \text{جـ}$$

$$(٤)^{٣} = -\text{جتا}\frac{\pi}{٤} - \text{ظا}\frac{\pi}{٤} + \text{جـ} \leftarrow \text{جـ} = ٦٥ + \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\text{ص}^{٣} = -\text{جتاس} - \text{ظاس} + ٦٥ + \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

---

(٢) جد معادلة المنحنى الذي ميله عند النقطة (س،ص) يساوي $٣\text{س}\,\text{ص}^{٢}$ اذا علمت ان المنحنى يمر بالنقطة $\left(٠ ، \frac{١}{٢}\right)$.

الحل :

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}\,\text{ص}^{٢} \leftarrow \int \frac{\text{دص}}{\text{ص}^{٢}} = \int ٣\text{س}\,\text{دس}$$

$$\int ص^{-2}\,ءص = \int ٣س\,ءس \leftarrow -ص^{-1} = \frac{٣س^{2}}{٢} + جـ$$

$$\frac{-١}{ص} = \frac{٣س^{2}}{٢} + جـ \leftarrow -٢ = جـ$$

(٣) اذا كان ميل المماس لمنحنى ق عند النقطة (س،ص) يساوي $\sqrt{\frac{س}{ص}}$ ، س،ص $>$ ٠ جد قاعدة الاقتران ق علما ان ق(٠) = ٣ .

✍ الحل :

$$\frac{ءص}{ءس} = \sqrt{\frac{س}{ص}} \leftarrow \int \sqrt{ص}\,ءص = \int \sqrt{س}\,ءس \leftarrow \int ص^{\frac{1}{2}}\,ءص = \int س^{\frac{1}{2}}\,ءس$$

$$\frac{٢}{٣}ص^{\frac{3}{2}} = \frac{٢}{٣}س^{\frac{3}{2}} + جـ \leftarrow \frac{٢}{٣}\sqrt{ص^{3}} = \frac{٢}{٣}\sqrt{س^{3}} + جـ$$

$$\frac{٢}{٣}\sqrt{٢٧} = \frac{٢}{٣}\sqrt{٠} + جـ \leftarrow جـ = \frac{٢}{٣}\sqrt{٢٧}$$

$$\frac{٢}{٣}\sqrt{ص^{3}} = \frac{٢}{٣}\sqrt{س^{3}} + \frac{٢}{٣}\sqrt{٢٧}$$

(٤) جد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة (– ٢،٨) وميل المماس له عند النقطة (س،ص) يساوي (٣س – ٢)(س + ٢) .

✍ الحل :

$$\frac{ءص}{ءس} = (٣س-٢)(س+٢) \leftarrow \int ءص = \int (٣س-٢)(س+٢)\,ءس$$

$$\int ءص = \int (٣س^{2} + ٤س - ٤)\,ءس \leftarrow ص = س^{3} + ٢س^{2} - ٤س + جـ$$

$$٨ = ٨ + ٨ - ٨ + جـ \leftarrow جـ = ٠$$

$$\therefore ص = س^{3} + ٢س^{2} - ٤س$$

(٥) اذا كان ميل المماس لمنحنى ق عند اي نقطة (س،ص) هو $ق'(س) = ٦س^{٢} - ٣٠س + ٣٦$ جد معادلة هذا المنحنى علما ان له قيمة عظمى محلية مقدارها ٢٨ .

الحل :

$$\frac{ءص}{ءس} = ٦س^{٢} - ٣٠س + ٣٦ \leftarrow \int ءص = \int (٦س^{٢} - ٣٠س + ٣٦)ءس$$

$$ص = ٢س^{٣} - ١٥س^{٢} + ٣٦س + جـ$$

عند $س_{١}$ قيمة عظمى محلية فإن $ق'(س_{١}) = ٠$

$$٦س^{٢} - ٣٠س + ٣٦ = ٠ \leftarrow س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠$$

$$\therefore س_{١} = ٢ \text{ ، } ٣$$

$$ق''(س) = ١٢س - ٣٠$$

$ق''(٢) = ١٢ \times ٢ - ٣٠ = -٦ < ٠$ قيمة عظمى محلية

$ق''(٣) = ١٢ \times ٣ - ٣٠ = ٦ > ٠$ قيمة صغرى محلية

$$٢٨ = ٢ \times ٨ - ١٥ \times ٤ + ٣٦ \times ٢ + جـ \leftarrow \therefore جـ = ٠$$

الابداع في الرياضيات

تمرين

(١) اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س،ص) يساوي ٢س ص فجد قيمة (قيم) ص عندما س = ٣ علما ان منحنى العلاقة يمر بالنقطة (٢،١)

---

(٢) اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س،ص) يساوي $\frac{-ص(س^{٢} - ١)}{س^{٢}}$ فجد قاعدة العلاقة اذا علمت ان منحناها يمر بالنقطة (١،-١)

(٣) اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س،ص) يساوي $\frac{هـ^{-ص}(س+٤)(س-٣)}{(س^٢-٣س)}$ فجد قاعدة العلاقة اذا علمت ان منحناها يمر بالنقطة (١،٠)

(٤) اذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س،ص) يساوي $\frac{\sqrt{هـ^{ص}}}{(١-جتا^٢س)}$ فجد قاعدة العلاقة اذا علمت ان منحناها يمر بالنقطة $\left(\frac{\pi}{٤}،٠\right)$

تطبيقات فيزيائية على المعادلات التفاضلية

(١) قذف جسم راسيا للاعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٠ م/ث وبتسارع مقداره -١٠م/ث^{٢} اذا كان ارتفاعه عن سطح الارض بعد ثانية من حركته يساوي ٨٠ م فجد أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم .

الحل :

ع(٠) = ٤٠ م / ث ، ت(ن) =-١٠ م / ث^{٢} ، ف(١) = ٨٠ م

ت(ن) =-١٠ م / ث^{٢}

ت(ن) = ٠ ← دع / دن = -١٠ ← ∫دع = ∫-١٠ دن

ع = -١٠ن + جـ ← ع(٠) = ٤٠ ← جـ = ٤٠

دف / دن = -١٠ن + ٤٠ ← ∫دف = ∫(-١٠ن + ٤٠)دن

ف = (-٥ن^{٢} + ٤٠ن) + جـ ← ف(١) = (-٥ + ٤٠) + جـ ← جـ = ٤٥

لكن عند اقصى ارتفاع ع(ن) = ٠ ← ن = ٤

ف = -٥ن^{٢} + ٤٠ن + ٤٥ ← ف(٤) = ١٢٥م

(٢) اذا كان تسارع جسم ت بعد ن من الثواني يعطى بالقاعدة ت =(٦ن+٤) م/ث^{٢} فجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ٣ ثواني من بدء الحركة علما ان السرعة الابتدائية للجسم ٢ م / ث وانه قطع مسافة (٢١) م في اول ٢ ثانية من بدء الحركة .

الحل :

$ت(ن) = ٦ن + ٤ \leftarrow \int ءع = \int (٦ن + ٤)ءن \leftarrow ع = ٣ن^{٢} + ٤ن + جـ$

$ع(٠) = ٠ + ٠ + جـ \leftarrow جـ = ٢$

$\int ءع = \int (٣ن^{٢} + ٤ن + ٢)ءن \leftarrow ف(ن) = ن^{٣} + ٢ن^{٢} + ٢ن + جـ$

$٢١ = ٨ + ٨ + ٤ + جـ \leftarrow جـ = ١$

$ف(٣) = ٢٧ + ١٨ + ٦ + ١ \leftarrow ف(٣) = ٥٢$

الابداع في الرياضيات

تمرين

(١) اذا كان تسارع جسم ت بعد ن من الثواني يعطى بالقاعدة ت = ٤ م/ث^{٢}، اذا كانت سرعة الجسم ١٣م/ث جد سرعته الابتدائية .

(٢) اذا كان تسارع جسم ت بعد ن من الثواني يعطى بالقاعدة ت = $(١٢ن^{٢} - ٢)$م/ث^{٢}، فجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ٥ ثواني من بدء الحركة علما ان السرعة الابتدائية للجسم ٢٨ م / ث وانه قطع مسافة (٢٨) م في اول ٣ ثانية من بدء الحركة .

(٣) يتحرك جسم بحيث تسارعه ت $= ٢\sqrt{ع}$ ، وكانت سرعته الابتدائية ٩م/ث وكانت المسافة عند ن = ١ ث ، تساوي ٥ م جد المسافة عند ن = ٣ ثانية .

(٤) يتحرك جسم بحيث تسارعه ت $= ٢\sqrt{ع}$ ، $ع > ٠$، وكانت سرعته الابتدائية ٩م/ث وكانت المسافة عند ن = ٤ ث ، تساوي ٨٠ م جد المسافة عند ن = ٣ ثانية .

تطبيقات عامة على المعادلات التفاضلية

(١) الة صناعية قيمتها عند الشراء (٢٥٠٠) دينار اذا علمت ان قيمتها تتناقص بمرور الزمن وفق العلاقة $\frac{ءق}{ءن} = \frac{-٥٠٠}{(ن+١)^{٢}}$ حيث ق : قيمة الالة بعد ن سنة من شرائها فاحسب قيمة هذه الالة بعد ٣ سنوات من شرائها .

(٢) يزداد عدد سكان مدينة حسب العلاقة $\frac{ءع}{ءن} = (٠,٠٢٥ \times ع)$ حيث ع : عدد السكان ن: الزمن بالسنوات ، اذا علمت ان عدد سكان المدينة بلغ (٢٠٠٠٠٠) نسمة عام ٢٠١٥ فجد عدد سكانها بعد ٤٠ عام .