

Math

التفوق

في الرياضيات

للفرع الأدبي / المستوى الرابع / جيل ٢٠٠٣

شرح مفصل & أمثلة محلولة & تدريبات علاجية وإثرائية
اسئلة الثانوية العامة مقسمة حسب الدروس & اختبار نهاية كل وحدة



إعداد

المشرفة التربوية : رائدة الصوص
الأستاذ.... بشار ابو العماش

٠٧٧٢٨٨٧٠٦٦

وما أوتيتهم من العلم الا قليلا

الوحدة الرابعة

التكامل وتطبيقاته

الدرس الاول : التكامل غير محدود



تهيئة

عزيمي الطالب :



ماذا لو طلبت منك ان تجد ق(س) للاقتران ق(س) = ٢س^٣ + ٥س - ٦

لقلت لي أن مشتقة هذا الاقتران هي ٦س^٢ + ٥

ثم سألتك مرة ثانية ما هو الاقتران الذي مشتقة ٦س^٢ + ٥ ؟

راح تجاوبني وبتقول ٢س^٣ + ٥س - ٦

طيب لو حكيت ممكن يكون الاقتران هو

٢س^٣ + ٥س + ٧ أو ٢س^٣ + ٥س - ١٠ الخ....

ومن هون نبدأ بالتكامل اللي هو أصلا عملية عكسية للاشتقاق



التكامل: هو ايجاد قاعدة الاقتران (ق) الذي مشتقته (ق) (س) ، ويرمز له (∫).

بدلالة المتغير س



مثلا : ∫ ٦س^٢ + ٥س



ومن هون نبدأ بالتكامل اللي هو أصلا عملية عكسية للاشتقاق

التكامل: هو ايجاد قاعدة الاقتران (\int) الذي مشتقته $(\overline{f}(s))$ ، ويرمز له (\int) .

مثلا: $\int (5s^2 + 6s) ds$ تقرأ **تكامل** $5s^2 + 6s$ بدلالة المتغير s

لاحظ معي أن كل الاقترانات التالية يمكن ان تكون مشتقتها $= 5s^2 + 6s$

$$9 - 5s^2 + 6s$$

$$10 + 5s^2 + 6s$$

$$15 - 5s^2 + 6s$$

لاحظ معي ان الاقترانات تختلف فقط في الحد الثابت

لذا يمكن كتابتها على شكل $5s^2 + 6s + \text{ج}$

ويمسى **ج** ثابت التكامل

العلاقة بين التكامل والاشتقاق



علاقة عكسية يعني وين ما شفت تكامل مع مشتقة ألغي مباشرة التكامل والمشتقة وخذ المقدار الأصلي كما هو



طيب نؤخذ مثال للتوضيح

مثال (١): اذا كان $\int (5s^2 + 6s) ds = \overline{f}(s)$ فجد $\overline{f}(s)$

الحل: (تذكر ان المشتقة تلغي التكامل)

~~$\int (5s^2 + 6s) ds = \overline{f}(s)$ ومنه يكون الجواب بان نأخذ المقدار الأصلي كما هو~~

اذا: $\overline{f}(s) = 5s^2 + 6s$

طيب نؤخذ كمان مثال :

مثال (٢): اذا كان $5 + 2s - 3s^2 = 0$ (س) فجد $s(1)$ ؟

الحل: (لا تنسى وين ما شفت تكامل ومشتقة خذ المقدار الأصلي)

يعني الجواب راح يكون ق (١) $5 + 2s - 3s^2 = 0$

$$5 + 1 \times 2 - (1) \times 3 =$$

$$8 =$$

$$8 = (1) \text{ اذا ق}$$

واجب (١): اذا كانت $s = \frac{3s^2 + 2s}{2 - s}$ ، $s \neq 2$ فجد $\frac{s}{s}$

حلك:

واجب (٢): اذا كان $6 + 3s = 0$ (س) فجد $s(2)$

حلك:

واجب (٣): اذا كانت $6 + 2s = 0$ (س) فجد $s(3)$

حلك:





طيب لما يكون عندي في السؤال مشتقتين وتكامل ، شو نعمل ؟

مثل هذا السؤال اذا كان $س(س) = ٣س٣ - ٢س٢ + ٥$ جد $س(٢)$ ؟

تذكر ان التكامل يلغي المشتقة، ويظل عندي مشتقة فنشتق الاقتران

يعني ... $س(س) = ٣س٣ - ٢س٢ + ٥$ جد $س(٢)$

ومنه $س(٢) = ٩س٢ - ٢$ (لاحظ معي انه اشتقتين الاقتران)

$$٩ \times (٢) - ٢ =$$

$$٣٤ = \text{اذا } س(٢) = ٣٤ \text{ وهو المطلوب}$$

واجب (١): اذا كان $س(س) = ٣س٣ + ٢س٢ + ٦$ جد $س(٢)$ ؟

حلك:

واجب (٢): اذا كان $س(س) = ٢س٢ + ٤س٢ - ٨$ جد $س(٢)$ ؟

حلك:

النجاح الذي تستمتع به
اليوم هو نتيجة الثمن
الذي دفعته في الماضي .



قواعد التكامل غير المحدود



القاعدة الاولى $\int s = \frac{s^2}{2} + C$ حيث C : عدد ثابت ، s : ثابت التكامل

يعني بالمختصر اذا طلب تكامل عدد ثابت
ما عليك غير تضيف للثابت $s + C$

مثال (١): جد كل من التكاملات الاتية ؟

(أ) $\int s = \frac{s^2}{2} + C$ (هذه الصورة تعني ان الثابت C هو الواحد)

(ب) $\int \frac{1}{s} = \ln |s| + C$

(ج) $\int s^\pi = \frac{s^{\pi+1}}{\pi+1} + C$ (تذكر ان π عدد وليس متغير)

واجب (١): جد كل من التكاملات الاتية ؟

(أ) $\int 3s = \frac{3s^2}{2} + C$

(ب) $\int k = ks + C$ حيث k عدد ثابت.

حلك:

يا بن آدم تبسم فإن الله

مأشقاك الا ليسعدك
وماأخذ منك الا ليعطيك
ومابكاك الا ليضحكك
وماحرملك الا ليتفضل عليك
وماابتلاك الا لأنه يحبك

$$\text{القاعدة الثانية} \left[\text{س}^n \text{ و } \text{س}^{1+n} = \text{ج} + \frac{\text{س}^{1+n}}{1+n} \right] \text{؛ حيث } n \neq -1, \text{ ج: ثابت التكامل}$$

يعني نضيف للأس واحد ونزله على المقام

طيب نؤخذ مثال للتوضيح

مثال (٢): جد كل من التكاملات الآتية ؟

$$\text{أ) } \int \text{س}^2 \text{ و } \int \text{س}^{1+1} = \int \text{س}^2 = \frac{\text{س}^3}{3} + \text{ج}$$

(عند عدم وجود أس على المتغير يعني ان الأس هو الواحد)

(لاحظ معي ان اس (س) = ١ اللي عملناه نضيف واحد للأس ونرجع نزله على المقام ولا تنسى ثابت التكامل ج)

مثال (٣): جد $\int \text{س}^{-2} \text{ و } \int \text{س}^{-1}$

$$\text{الحل: } \int \text{س}^{-2} = \int \frac{1}{\text{س}^2} = \int \text{س}^{-2} = \frac{\text{س}^{-2+1}}{-2+1} = \frac{\text{س}^{-1}}{-1} = -\frac{1}{\text{س}} + \text{ج}$$

واجب (٢): جد كل من التكاملات الآتية ؟

$$\text{أ) } \int \text{س}^2 \text{ و } \int \text{س}^3$$

$$\text{ب) } \int \text{س}^{-3} \text{ و } \int \text{س}^{-1}$$

مثال (٤): جد $\sqrt[3]{\sqrt{s}}$ **الحل:** (اولا يجب جعل الجذر على شكل أس) تذكر أن $\sqrt[n]{s^m} = s^{\frac{m}{n}}$ (الداخل على الخارج)ومنه $\sqrt[3]{\sqrt{s}} = s^{\frac{1}{2 \times 3}} = s^{\frac{1}{6}}$ تجهيز المقدار أولا**البسط + المقام**
المقام

(نضيف واحد للأس هنا وهو الكسر وفق القاعدة التالية)

 $s^{\frac{1}{6}} + s^{\frac{3+2}{6}} =$ ولا تنسى المقام الجديدنرجع المقدار على شكل جذر عكس القاعدة السابقة $\sqrt[6]{s^3} + \sqrt[6]{s^5} =$ مقلوب الأس الجديد

واجب (٣): جد كل من التكاملات الآتية؟

(أ) \sqrt{s} حلك:(ب) $\frac{5}{\sqrt{s}}$ (إثرائي)حلك:

الطموح

لا يصل الإنسان إلى حديقة النجاح
من دون أن يمر بمحطات التعب والفشل واليأس
وصاحب الإرادة القوية لا يطيل الوقوف عند هذه المحطات

القاعدة الثالثة = التكامل في حالة الجمع والطرح يوزع

بمعنى اذا كان $[ق(س) + هـ(س) . دس] = [ق(س) . دس + هـ(س) . دس]$

مثال (٥): جد $[٦س + ٢س\pi]$

الحل: (أولا نوزع التكامل بعد كل + أو -)

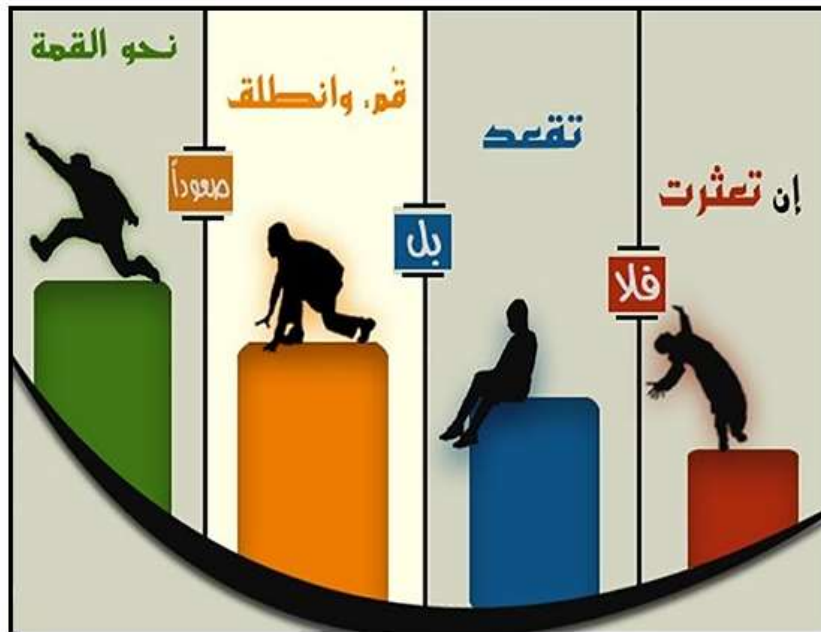
$$[٦س + ٢س\pi] = [٦س\pi + ٢س\pi] = ٦س\pi + ٢س\pi = ٨س\pi$$

واجب (٤): جد $[٣س - \frac{٥}{س} + ٦س]$ ، $س \neq ٠$

حلك:



القاعدة الرابعة = تكامل الضرب أو القسمة يجب عليك اولاً إجراء عملية القسمة أو الضرب ثم إجراء عملية التكامل



مثال (٧): جد التكاملات الآتية :

$$(أ) \int (س + ٤)(س - ٢) دس \quad (ب) \int (س + ٢ + س٣ + ١) دس$$

الحل:

$$(أ) \int (س + ٤)(س - ٢) دس \quad \text{أولا ن فك الأقواس ثم نوزع التكامل ثم نجري عملية التكامل}$$

$$\int (س + ٤)(س - ٢) دس = \int (س٢ - ٢س + ٤س - ٨) دس \quad \text{(أكمل الحل)}$$

$$(ب) \int (س + ٢ + س٣ + ١) دس \quad \text{أولا وزع س على ما داخل القوس ثم وزع التكامل ثم إجري عملية التكامل}$$

$$\int (س + ٢ + س٣ + ١) دس = \int (س٣ + س٢ + س + ١) دس \quad \text{(أكمل الحل)}$$

$$\text{واجب (٥):} \quad (أ) \int (س + ٢) دس \quad (ب) \int (س٣ + ٢) دس$$

حل:

$$\text{أمثلة على القسمة (أ) } \int \frac{س٢ + ١٥ - س}{س - ٣} دس \quad (ب) \int \frac{س٢ + ١٥ - س}{س} دس, س \neq ٠$$

$$\text{الحل:} \quad (أ) \int \frac{س٢ + ١٥ - س}{س - ٣} دس \quad \text{[نحل البسط "عبارة تربيعية" ثم نختصر، ثم نختصر ثم نجري التكامل]}$$

$$\int \frac{س٢ + ١٥ - س}{س - ٣} دس = \int \frac{س(س - ٣) + ١٨ - ٣س + ١٥ - س}{س - ٣} دس = \int (س + ٥ + \frac{س}{س - ٣}) دس$$

$$(ب) \int \frac{س٢ + ١٥ - س}{س} دس, س \neq ٠ \quad \text{(نستخرج عامل مشترك من البسط "س" ثم نختصر ثم نجري التكامل)}$$

$$\int \frac{س٢ + ١٥ - س}{س} دس = \int (س + ٥ - \frac{س}{س}) دس = \int (س + ٥) دس$$

واجب (٦): جد (أ) $\left[\frac{س^٣ - ٦٤}{س - ٤} \right]$ (ب) $\left[\frac{س^٢ + س}{س} \right]$

حلك:



أقوى فكرة

مثال (٨): جد $\left[\frac{س^٢ - ٥س}{س^٣} \right]$

الحل: $\left[\frac{س^٢ - ٥س}{س^٣} \right] = \left[\frac{س(س - ٥)}{س^٣} \right]$

(جهزت المقام على شكل اس ورفعته للبسط مع تحويل الإشارة الى سالب)

$\left[\frac{س^٢ - ٥س}{س^٣} \right] = \left[\frac{١-١ \times ٣}{س^٣} - \frac{١-٢ \times ٣}{س^٣} \right]$ (هون ضربت الـ ٣ في اس الرقم الاول بالقوس - بسط ما خارج القوس على مقام ما خارج القوس)

$\left[\frac{س^٢ - ٥س}{س^٣} \right] = \left[\frac{٣}{٨} - \frac{٣}{٨} \right] = \left[\frac{٣}{٨} \times \frac{٣}{٣} - \frac{٣}{٨} \times \frac{٣}{٣} \right] = \left[\frac{٣}{٨} - \frac{٣}{٨} \right] = ٠$

واجب (٧): جد $\left[\frac{س^٣ + س}{س} \right]$ (تدريب إثرائي)

حلك:



القاعدة الخامسة

$$[\text{جاس} \text{ س} = \text{جاس} - \text{جاس} + \text{ج}]$$

حيث ج ثابت التكامل

$$[\text{جاس} \text{ س} = \text{جاس} + \text{ج}]$$

$$[\text{قا}^2 \text{ س} \text{ س} = \text{ظاس} + \text{ج}]$$

(لاحظ معي ان معامل س في جميع الحالات كان ١)

طيب لو كان معامل س غير (١) نعمل وفق القواعد التالية

$$[\text{جا}^2 \text{ س} \text{ س} = \frac{\text{جنا}^2 \text{ س}}{\text{أ}} + \text{ج}]$$

$$[\text{جنا}^2 \text{ س} \text{ س} = \frac{\text{جا}^2 \text{ س}}{\text{أ}} + \text{ج}]$$

$$[\text{قا}^2 \text{ س} \text{ س} = \frac{\text{ظا}^2 \text{ س}}{\text{أ}} + \text{ج}]$$

وبالمثال يتضح المقال
جد [جا ٢س + ٤ جتا ٣س . دس]
(لا تنسى توزيع التكامل)

$$[جا ٢س + ٤ جتا ٣س . دس] = [جا ٢س . دس] + [٤ جتا ٣س . دس]$$

$$= \frac{1}{2} جتا ٢س + \frac{4}{3} جا ٣س + ج$$

واجب (٨): جد [قا ٣س - ٤س + ٢ جتا ٤س - ٧ . دس]



(١) اذا كان θ (س) = $(٣س - ٢س)$ دس ، فإن θ (٢) =

(أ) $\frac{2}{3}$

(ب) -٥

(ج) ٥

(د) ٨

(٢) [جتا ٢س - ٢س = أ] جا ٢س - ٢س + ج (ب) $\frac{1}{4}$ جا ٢س - ٢س + ج

(ج) جا ٢س + ٢س + ج (د) - جا ٢س - ٢س + ج

(٣) اذا علمت أن θ (ل) ثابت ، فإن [ل دس = أ] س + ج (ب) ل س + ج

(ج) $\frac{ل}{٢} + ج$ (د) $\frac{ل س}{٢} + ج$

(٤) [جا ٢س = أ] $\frac{جا ٢س}{٢} + ج$ (ب) جتا ٢س + ج

(ج) - جا ٢س + ج (د) - جتا ٢س + ج

طيب لما يكون عندي اقتران الزاوية اقتران خطي على صورة (أس + ب)



راح نطبق هاي القواعد ...

$$(1) \quad \text{ج} + \frac{\text{أس}^{1+n}}{(1+n)\text{أ}} = \text{أس}^n (ب + \text{أس})$$

$$(2) \quad \text{ج} + \frac{\text{جنا}(\text{أس} + ب) - \text{أ}}{\text{أ}} = \text{أس} \text{جنا} (ب + \text{أس})$$

$$(3) \quad \text{ج} + \frac{\text{جنا}(\text{أس} + ب)}{\text{أ}} = \text{أس} \text{جنا} (ب + \text{أس})$$

$$(4) \quad \text{ج} + \frac{\text{ظا}(\text{أس} + ب)}{\text{أ}} = \text{أس} \text{قا} (ب + \text{أس})$$

مثال للتوضيح: [قا^٢(٣ + ٢س) أس يساوي :

$$\text{الحل: [قا}^2(٣ + ٢س) أس = \frac{\text{ظا}(٣ + ٢س)}{٢} \text{ج} +$$

تدريب [جنا(١ + ٣س) أس يساوي :

$$\text{ب) } -٣\text{جنا}(١ + ٣س) + \text{ج}$$

$$\text{أ) } -\frac{\text{جنا}(١ + ٣س)}{٣} + \text{ج}$$

$$\text{د) } ٣\text{جنا}(١ + ٣س) + \text{ج}$$

$$\text{ج) } \frac{\text{جنا}(١ + ٣س)}{٣} + \text{ج}$$

جميع الأسئلة الوزارية على هذا الدرس من عام ٢٠٠٨ لغاية ٢٠١٩



(١) إذا كان ق (س) = $\left[(٢س^٢ - ٣) دس \right]$ ، فإن ق (٢) تساوي :

(أ) $\frac{٢}{٣}$ - (ب) ٥ - (ج) ٥ (د) ٨

(أ) أوجد التكاملات الآتية :

(١) $\int (٣س^٢ - ٢س) دس$. (٣ علامات)

(٣) $\int (جس - ٢) دس$ يساوي :

(أ) جس - ٢س + ج
 (ب) $\frac{١}{٢} جس - ٢س + ج$
 (ج) جس + ٢س + ج
 (د) - جس - ٢س + ج

(أ) جد كلاً من التكاملات الآتية :

(١) $\int (٦س^٢ - ٢س) دس$ (٣ علامات)

(١) $\int (٣س - ٢س) دس$ (٣ علامات)

(١) إذا علمت أن ل ثابت فإن $\int ل دس$ يساوي :

(أ) س + ج
 (ب) ل س + ج
 (ج) $\frac{ل}{٢} + ج$
 (د) $ل \frac{س}{٢} + ج$

(٤) $\int (١ - جس) دس$ هو :

(أ) س + جس + ج
 (ب) س - جس + ج
 (ج) جس + ج
 (د) - جس + ج

(٤) $\{ (١ - جاس) دس \}$ هو :

(أ) $س + جاس + ج$

(ب) $س - جاس + ج$

(ج) $جاس + ج$

(د) $- جاس + ج$

(١) إذا كان $ص = \{ ق (س) دس \}$ ، فإن $\frac{ص}{س}$ تساوي :

(أ) صفر

(ب) $ق (س)$

(ج) $ق (س)$

(د) $ق (س)$

(١) $\{ جاس دس \}$ يساوي :

(أ) $\frac{جاس}{٢} + ج$

(ب) $جاس + ج$

(ج) $- جاس + ج$

(د) $- جاس + ج$

(١) $\{ (س + ١) (س - ٣) دس \}$ (٥ علامات)

(١) $\{ س^٣ دس \}$ يساوي :

(أ) $\frac{س^٣}{٢} + ج$

(ب) $س^٤ + ج$

(ج) $٣ س^٢ + ج$

(د) $\frac{س^٤}{٤} + ج$

(١) إذا كان $ق (س) = \{ (٤ س^٣ + ٢ س) دس \}$ ، فإن $ق (١)$ تساوي :

(أ) ٢

(ب) ٦

(ج) ١٢

(د) ١٤

(١) $\{ \sqrt[٣]{س} دس \}$ ، $س < ٠$ ، يساوي :

(أ) $\frac{٥}{٢} س^{\frac{٥}{٢}} + ج$

(ب) $\frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + ج$

(ج) $\frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}} + ج$

(د) $\frac{٢}{٣} س^{\frac{١}{٢}} + ج$

(٢) $\{ (- جاس + ١) دس \}$ يساوي :

(أ) $جاس - س + ج$

(ب) $- جاس + س + ج$

(ج) $- جاس - س + ج$

(د) $جاس + س + ج$

(١) إذا كان $ق (س) = \{ ٣ دس \}$ ، فإن $ق (س)$ تساوي :

(أ) ٣ س

(ب) ٣

(ج) $\frac{٣}{٢} س^٢$

(د) صفر

$$(1) \quad] (6س^2 - 3س) دس (3 علامات)$$

(1) إذا كان ق (س) = $(س^2 + 5س) دس$ ، فإن ق⁻ (1-) تساوي :

■ ٤

■ ٣

■ ٦-

■ ٤-

$$(2) \quad] \frac{3}{س} دس يساوي :$$

■ $3س^2 + ج$

■ $\frac{3-}{س} + ج$

■ $س^2 + ج$

■ $س^2 - ج$

$$(1) \quad] (3 قأس - 2جأس) دس (1) (قأس - 2جأس) دس$$

$$(1) \quad] \left(\frac{قأس}{٤} \right) دس$$

(1) إذا كان ق اقترانًا متصلًا، وكان $ق(س) دس = 3س^2$ ، فإن ق⁻ (س) تساوي :

■ (د) $6س^2$

■ (ج) $6س$

■ (ب) $س^3$

■ (أ) $3س^2$

$$(1) \quad] (3 قأس - 3س^2) دس$$

(1) إذا كان ق اقترانًا متصلًا، وكان $ق(س) دس = 3س^2 + 2س$ ، فإن ق⁻ (س) تساوي :

■ (د) $6س$

■ (ج) $2 + 6س$

■ (ب) $3س^2 + 2س$

■ (أ) $2 + 3س^2$

(1) إذا كان ق اقترانًا متصلًا ، وكان $ق(س) دس = 3س^3 - 2$ ، فإن ق⁻ (2) تساوي :

■ (د) ١٢

■ (ج) ٤

■ (ب) ١٠

■ (أ) ٦

$$(1) \quad] (س^3 + ٤س) دس ، فإن ق⁻ (س) تساوي :$$

■ (د) $٤س^3$

■ (ج) $٤س^4$

■ (ب) $٣ + ٤س$

■ (أ) $٣ + ٤س^3$

$$(3) \quad] (جأس - 3س) دس يساوي :$$

■ (ب) $جأس + جتأس + ج$

■ (أ) $جأس - جتأس + ج$

■ (د) $جأس - جتأس + ج$

■ (ج) $جأس + جتأس + ج$

الدرس الثاني : التكامل المحدود



يسمى الحد العلوي



وه (س) \int_a^b = وه (ب) - وه (ا) ؛ حيث ان : ا: الحد السفلي للتكامل ، ب: الحد العلوي للتكامل

يسمى الحد السفلي

الحد الثابت جـ في التكامل المحدود = صفراء، لذا فهو لا يكتب في هذا التكامل

وفي هذا الدرس قاعدتين

القاعدة الاولى \int_a^b جـ \int_a^b = جـ (ب - ا) ؛ حيث جـ: ثابت

مثال (١): \int_3^5 ٢ \int_3^5 = ٢ (٥ - ٣) = ٤

شوف شو إعملنا

(بس طرح الحد العلوي من السفلي وضربت الناتج بالثابت)

مثال (٢): \int_2^{-2} س \int_2^{-2} = (٢ - ٢-) ١ = س

هنا الثابت يساوي ١

إثراء \int_a^b ٥ \int_a^b الحل:

طيب كيف بدنا نجد المتغير بمثل هيك أسئلة ؟

نؤخذ مثال

مثال (٣): اذا كان $\left[\begin{matrix} 3 \\ ك \\ 1 \end{matrix} \right] س = ١٤$ جد قيمة (ك) ؟

الحل: (طبق على القانون (ك (٣ - ١) = ١٤)

أي أن $\left[\begin{matrix} 3 \\ ك \\ 1 \end{matrix} \right] س = ١٤ = (٣ - ١) ك$ (تعويض)

$$\frac{١٤}{٢} = \frac{ك٢}{٢} \quad (\text{قسمة الطرفين على العدد (٢)})$$

$$\boxed{٧ = ك}$$

تدريب إثرائي اذا كان $\left[\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \right] س = ١٥$ جد قيمة (٢) ؟

مثال (٤): اذا كان $\left[\begin{matrix} 3 \\ ق \\ 1 \end{matrix} \right] س = ١٠$ فجد $\left[\begin{matrix} 3 \\ ق \\ 1 \end{matrix} \right] س$

الحل: (تذكر أن المشتقة تلغي التكامل)

$$\text{ومنه } \left[\begin{matrix} 3 \\ ق \\ 1 \end{matrix} \right] س = ١٠ \Rightarrow \left[\begin{matrix} 3 \\ ق \\ 1 \end{matrix} \right] س = ١٣$$

$$١٣ = ٣ - - ١٠ =$$

تدريب اذا كان $ق(٥) = ٣$ ، $ق(٣) = ٥$ - فجد $ق(س) س$

اثراني إذا كان $ق(س)$ متصلا وكان $ق(١) = ٣$ ، $ق(٢) = ٤$

وكان $ق(س) س = ١٢$ حيث $س$ ثابت ، فجد قيمة $س$ ؟

$$\frac{١+٧ س - ١+٧ س}{١+٧} = ٤ \exists ٧ ، ١ \neq ٧ ؛ \left[\frac{١+٧ س}{١+٧} \right] = س^٧ س$$

بمعنى $\frac{ق(ب) - ق(أ)}{١ + ن}$ (بعد أخذ التكامل)

مثال (٥) : أوجد تكامل : $\int (٧ س + \sqrt{س}) س$

الحل: $\int (٧ س + \sqrt{س}) س = \int (س + \frac{١}{٣} س) س$ تجهيز المقدار

$\int (\frac{٢}{٣} س + \frac{١}{٣} س) س$ إجراء عملية التكامل

$$\frac{٧}{٣} = \frac{١}{٣} + \frac{٢}{٣} = \left(\frac{٢(٠)}{٣} \frac{١}{٣} + \sqrt{٠} \frac{٢}{٣} \right) - \left(\frac{٢(١)}{٣} \frac{١}{٣} + \sqrt{١} \frac{٢}{٣} \right) = \left(\frac{٢}{٣} س + \sqrt{س} \frac{٢}{٣} \right) =$$

تجهيز المقدار على شكل جذور

ق(١) - ق(صفر)

الجواب النهائي

يا بن آدم تبسم فإن الله

ما أشقاك إلا يسعدك
وما أخذ منك إلا يعطيك
وما أبكاك إلا ليضحكك
وما حرملك إلا ليتفضل عليك
وما ابتلاك إلا لأنه يحبك

تدريب إثرائي جد التكمالات الآتية :

$$(2) \int_1^2 \sqrt{x} \cdot dx =$$

$$(1) \int_1^4 (2\sqrt{x} + \sqrt{x}) \cdot dx =$$

$$(4) \int_1^4 \frac{6}{\sqrt{x}} \cdot dx =$$

$$(3) \int_1^2 x^2 \cdot dx =$$

أهلاً طيب لما يعطيني مجهول، كيف نحله؟! **أهلاً**

نؤخذ مثال ونشوف كيف ... إذا كان $\int_1^2 (x^2 + 3) \cdot dx = 0$ ، جد قيمة ج

الحل: (أولاً نؤخذ التكمال بشكل طبيعي زي ما تعلمنا)

$$0 = \int_1^2 (x^2 + 3) \cdot dx = \int_1^2 (x^2 + 3 + j - j) \cdot dx = \int_1^2 (x^2 + 3 + j) \cdot dx - \int_1^2 j \cdot dx = 0$$

$$0 = \int_1^2 (x^2 + 3 + j) \cdot dx - \int_1^2 j \cdot dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + 3x + jx \right) \Big|_1^2 - \left(jx \right) \Big|_1^2 =$$

عبارة تربيعية نحلها

$$0 = (4 + j) (4 - j)$$

ومنه ج = [-٤ ، ١] وهو المطلوب

أهلاً أهلاً أهلاً

تدريب إثرائي

(١) إذا كان $\begin{matrix} \text{ب} \\ \text{ا} \\ \text{ج} \end{matrix}$ $2س . دس = ٠$ ، جد قيمة ب

(٢) إذا كان $\begin{matrix} \text{ل} \\ \text{ا} \\ \text{ب} \end{matrix}$ $(١ - 2س) . دس = ٦$ ، جد قيمة ل

جميع الأسئلة الوزارية على هذا الدرس من عام ٢٠٠٨ لغاية ٢٠١٩ م

إذا كان $\begin{matrix} \text{ق} \\ \text{ا} \\ \text{ب} \\ \text{ج} \\ \text{د} \end{matrix}$ $(١) = ١٠$ ، $\text{ق} (٣) = ٦$ فجد $\begin{matrix} \text{ق} \\ \text{ا} \\ \text{ب} \\ \text{ج} \\ \text{د} \end{matrix}$ (س) دس .

(أ) ٢ (ب) -٤ (ج) ٤ (د) ١٦

(٣) إذا كان $\begin{matrix} \text{ح} \\ \text{ا} \\ \text{ب} \\ \text{ج} \\ \text{د} \end{matrix}$ $(٢س + ٣) دس = ٦$ ، فجد قيمة ج .

(٣) إذا كان $\begin{matrix} \text{ق} \\ \text{ا} \\ \text{ب} \\ \text{ج} \\ \text{د} \end{matrix}$ $(٢) = ٥$ ، $\text{ق} (١) = ٢$ ، فإن قيمة $\begin{matrix} \text{ق} \\ \text{ا} \\ \text{ب} \\ \text{ج} \\ \text{د} \end{matrix}$ (س + ١) دس تساوي :

(أ) ١ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

(٢) إذا علمت أن $\begin{matrix} \text{ق} \\ \text{ا} \\ \text{ب} \\ \text{ج} \\ \text{د} \end{matrix}$ (س) متصل، وكان $\text{ق} (١) = -٣$ ، $\text{ق} (٢) = ١$ ، فإن $\begin{matrix} \text{ق} \\ \text{ا} \\ \text{ب} \\ \text{ج} \\ \text{د} \end{matrix}$ (س) يساوي :

(أ) -٤ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) -٢

(٤) $\sqrt[1]{\sqrt{s}}$ دس يساوي :

- (أ) ١ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{3}{2}$ (د) ٢

(٣) إذا كان $\sqrt[1]{3^2} = 6 - s$ ، فإن قيمة الثابت ج تساوي :

- (أ) ٣- (ب) ٣ (ج) ١- (د) ١

(أ) جد التكمالات الآتية :

(٦) $\sqrt[1]{(s^3 + \sqrt{s})}$ دس .

(٢) قيمة: $\sqrt[2]{4}$ دس يساوي:

- (أ) ٢٤ (ب) ٢٤- (ج) صفر (د) ١٦-

(٢) إذا كان ق (٢) = ٨- ، ق (٤) = ١٢ ، فإن قيمة $\sqrt[2]{\sqrt[4]{(s)}}$ دس تساوي:

- (أ) ٤- (ب) ٤ (ج) ٢٠ (د) ٢٠-

(٥) إذا كان $\sqrt[0]{\sqrt[3]{(s)}} = \text{صفر}$ ، فإن قيمة الثابت ل تساوي:

- (أ) ٤- (ب) ٤ (ج) ٥- (د) ٥

(٧) $\sqrt[1]{(4 + s^3)}$ دس يساوي:

(أ) $\frac{\sqrt[1]{(4 + s^3)}}{4} +$ (ب) $\frac{\sqrt[1]{(4 + s^3)}}{3} +$

(ج) $\frac{\sqrt[1]{(4 + s^3)}}{4} +$ (د) $\frac{\sqrt[1]{(4 + s^3)}}{3} +$

الدرس الثالث : خصائص التكامل المحدود



الخاصية الاولى



مشتقة التكامل المحدود تساوي صفر لأن التكامل المحدود قيمة ثابتة

(يعني وين ما شفت تكامل محدود مع مشتقة الجواب مباشرة = صفر)

مثال: إذا كان $v = \int_1^2 (2s^2 - 3) ds$ أوجد $\frac{dv}{ds}$

الحل: $\frac{dv}{ds} = 0$ لأن التكامل المحدود قيمة ثابتة مشتقته صفر

لاحظ معي في تكامل محدود وطلب مشتقة مباشرة بدون اي تفكير اكتب الناتج = صفر

الخاصية الثانية



$$\int C ds = Cs + \text{صفرًا. (التشابه)}$$

يعني اذا تشابهات حدود التكامل الجواب = صفرًا

مثال: جد $\int_2^2 (s^2 + 5s - 7) ds$

الحل: (بما انه حدود التكامل متساوية (٢) فإن الجواب مباشرة = صفرًا)

ومنه $\int_2^2 (s^2 + 5s - 7) ds = 0$

الخاصية الثالثة



$$\left[\begin{array}{c} \text{أ} \\ \text{ب} \end{array} \right] \text{ق (س) دس} = - \left[\begin{array}{c} \text{أ} \\ \text{ب} \end{array} \right] \text{ق (س) دس} \text{ (القلب)}$$

يعني لما نقلب حدود التكامل بس نغير الإشارة فقط لا غير

نؤخذ مثال: إذا علمت أن $\int_1^7 \text{ (س) دس} = 6$ جد $\int_7^1 \text{ (س) دس}$.

الحل: (أول سؤال تسأله هل $\int_1^7 \text{ (س) دس} = 6$ جاهزة)

طبعا هون الجواب نعم، لانه ما في مع ق(س) ارقام لا قبلها ولا بعدها

$$\int_1^7 \text{ (س) دس} = 6 \text{ ومنه وحسب القاعدة نستنتج أن } \int_7^1 \text{ (س) دس} = -6$$

(لاحظ معي انه بس غيرنا الإشارة لانه قلب حدود التكامل)

النجاح الذي تستمتع به
اليوم هو نتيجة الثمن
الذي دفعته في الماضي .



(طيب نؤخذ مثال لما يكون التكامل مو جاهز)



$$\text{إذا كان } \left[\frac{ق(س)}{٢} \right]_{٢-}^٤ = ٣ \text{ فجد } \left[ق(س) \right]_{٤}^{٢-}$$

الحل: (نفس السؤال نبليش، هل $\left[\frac{ق(س)}{٢} \right]_{٢-}^٤ = ٣$ جاهزة)

طبعا هون الجواب لا، لانه بلا حظ انه ق(س) مقسومة على ٢

إذا راح نتخلص من ٢ أول بضرب الطرفين بالعدد ٢

$$\text{هيك صارت جاهزه } \left[\frac{ق(س)}{٢} \right]_{٢-}^٤ = ٢ \times ٣ = ٦$$

$$\text{ومنه } \left[ق(س) \right]_{٤}^{٢-} = ٦$$

مثال ثاني: إذا علمت أن $\left[ق(س) \right]_{١}^٣ = ٣ + س$ جد $\left[ق(س) \right]_{٣}^١$. (س) . (س)

الحل: (نفس السؤال نبليش، هل $\left[ق(س) \right]_{١}^٣ = ٣ + س$ جاهزة) الجواب لا لانه في ٣ مع ق(س)

أول خطوة حتى نتخلص من ٣ لازم نوزع التكامل (أو عى تطرح ٣ من الطرفين حتى نتخلص منها قبل ما توزع التكامل)

$$\left[ق(س) \right]_{١}^٣ = ٣ + س \quad \text{إذا } \left[ق(س) \right]_{١}^٣ = ٣ + س$$

الآن نطرح ٦ من الطرفين

$$\left[ق(س) \right]_{٣}^١ = ٨ - س \quad \text{ومنه } \left[ق(س) \right]_{٣}^١ = ٨ - س$$

الخاصية الرابعة: خاصية الإضافة



إذا كان (أ)، (ب)، (ج) اعداد حقيقية فان:

$$\left[\begin{array}{c} \text{أ} \\ \text{ب} \\ \text{ج} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{د} \\ \text{هـ} \\ \text{و} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{أ} + \text{د} \\ \text{ب} + \text{هـ} \\ \text{ج} + \text{و} \end{array} \right]$$

خطوات الحل: أولاً: نجهزي اي مقدار مش جاهز

ثانياً: نرسم مفتاح الإجابة كما في المثال ادناه

ثالثاً: نقلب الإشارة لاي مقدار مقلوب فيه حدود التكامل



نؤخذ مثال للتوضيح:



اذا كان $\begin{matrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٥ \\ ٣ & ٥ \end{matrix}$ ، $\begin{matrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٥ \\ ٣ & ٥ \end{matrix}$ ، $\begin{matrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٥ \\ ٣ & ٥ \end{matrix}$ ؛ جد $\begin{matrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٥ \\ ٣ & ٥ \end{matrix}$

$$\begin{matrix} \text{أكبر رقم} & & \text{الرقم الاوسط} & & \text{الرقم الاكبر} \\ \begin{matrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٥ \\ ٣ & ٥ \end{matrix} & = & \begin{matrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٥ \\ ٣ & ٥ \end{matrix} & + & \begin{matrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٥ \\ ٣ & ٥ \end{matrix} \\ \text{اصغر رقم} & & \text{اصغر رقم} & & \text{الرقم الاوسط} \end{matrix}$$

وفي سؤالنا هون

$$\begin{matrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٥ \\ ٣ & ٥ \end{matrix} + \begin{matrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٥ \\ ٣ & ٥ \end{matrix} = \begin{matrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٥ \\ ٣ & ٥ \end{matrix}$$

وبعد هيك بس نضع قيمة كل وحدة من معطيات السؤال
مع ملاحظة خاصية القلب (تبديل الاشارة في حال تبديل حدود التكامل)

$$\begin{matrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٥ \\ ٣ & ٥ \end{matrix} + \begin{matrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٥ \\ ٣ & ٥ \end{matrix} = \begin{matrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٥ \\ ٣ & ٥ \end{matrix}$$

خاصية القلب

$$٣ + ٤ =$$

$$\begin{matrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٥ \\ ٣ & ٥ \end{matrix} = ١ -$$

اختبر نفسك اذا كان $\left[\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right]_1 = 5$ ، $\left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right]_1 = 9$ ، فإن $\left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right]_1 = 5$

حلك:

تدريب إثرائي إذا كانت $\left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]_1 = 10$ ؛ $\left[\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right]_1 = 4$

جد $\left[\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right]_1 + 1$

حلك:

جميع الأسئلة الوزارية على هذا الدرس من عام ٢٠٠٨ لغاية ٢٠١٩ م

(٧) إذا علمت أن $\left\{ \begin{matrix} 6 \\ 4 \end{matrix} \right\}_q$ (س) دس = ٤ ، $\left\{ \begin{matrix} 6 \\ 12 \end{matrix} \right\}_q$ (س) دس = ١٢ ، فإن $\left\{ \begin{matrix} 6 \\ 6 \end{matrix} \right\}_q$ (س) دس يساوي :

(أ) ١٦ (ب) ١٦ (ج) ٦ (د) ٦

(١) إذا كان $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\}_q$ (س) دس = ١٢ ، فإن قيمة $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right\}_q$ (س) دس تساوي :

(أ) ٤ (ب) ٤ (ج) ٣ (د) ٣

(٣) $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} \right\}_q$ (س) دس يساوي :

(أ) ٢٢ (ب) ١٤ (ج) ١٠ (د) صفر

(٧) إذا علمت أن $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 8 \end{matrix} \right\}_q$ (س) دس = ٨ ، فإن $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 8 \end{matrix} \right\}_q$ (س) دس يساوي :

(أ) ١٦ (ب) ٨ (ج) ٨ (د) ١٦

(٢) قيمة $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\}_q$ (س) دس تساوي :

(أ) صفر (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٤

(٣) إذا علمت أن $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 6 \end{matrix} \right\}_q$ (س) دس = ٦ ، $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\}_q$ (س) دس = ٢ ، فإن قيمة $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\}_q$ (س) دس تساوي :

(أ) ٤ (ب) ٨ (ج) ١٢ (د) ٤

(٣) إذا كان $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right\}_q$ (س) دس = ٣- ، $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right\}_q$ (س) دس = ٤ ، فإن $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\}_q$ (س) دس يساوي :

(أ) ١ (ب) ٧- (ج) ١- (د) ٧

(٣) إذا علمت أن $\left[\begin{matrix} ٣ \\ ٤ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) دس = $\frac{٣}{٤}$ ، فإن $\left[\begin{matrix} ٢ \\ ٤ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) دس يساوي :

- (أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ - (ج) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٤}{٣}$ -

(٤) إذا علمت أن $\left[\begin{matrix} ٣ \\ ٣ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) دس = ٥ ، فإن $\left[\begin{matrix} ٣ \\ ٣ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) (٢ - س) دس يساوي :

- (أ) ٩ (ب) ٣ (ج) ١ (د) ١ -

(٢) إذا كان $\left[\begin{matrix} ٢ \\ ١ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) دس = ٦ ، فإن $\left[\begin{matrix} ١ \\ ٢ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) دس يساوي :

- (أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) ٦ - (د) $\frac{١}{٢}$ -

(٢) إذا كان $\left[\begin{matrix} ١ \\ ٢ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) دس = ٥ ، $\left[\begin{matrix} ٢ \\ ٣ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) دس = ٩ ، فإن $\left[\begin{matrix} ٣ \\ ١ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) دس يساوي :

- (أ) ٤ (ب) ٢ (ج) ٢ - (د) ٤ -

(٤) إذا كان $\left[\begin{matrix} ٢ \\ ٢ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) دس = ١٠ ، فإن $\left[\begin{matrix} ٢ \\ ٢ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) (٢ + س) دس يساوي :

- (أ) ١٦ (ب) ١٩ (ج) ١٢ (د) ٩

(ب) إذا كان $\left[\begin{matrix} ١ \\ ١ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) دس = ٦ ، $\left[\begin{matrix} ١ \\ ٢ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) دس = ٢ - ، فجد $\left[\begin{matrix} ١ \\ ١ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) (٥ + س) دس (٥ علامات)

(٢) إذا كان $\left[\begin{matrix} ٧ \\ ٦ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) دس = ١٠ ، فإن قيمة $\left[\begin{matrix} ١ \\ ٧ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) دس تساوي :

- (أ) ١٠ - (ب) ٥ (ج) ١٠ (د) ٥ -

(ب) إذا كان $\left[\begin{matrix} ١ \\ ٢ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) دس = ٤ ، $\left[\begin{matrix} ١ \\ ٢ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) دس = ١٢ ، فجد قيمة $\left[\begin{matrix} ١ \\ ٢ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) (٧ - س) دس

(ب) إذا كان $\left[\begin{matrix} ٦ \\ ١ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) (٢ - س) دس = ١٠ ، $\left[\begin{matrix} ١ \\ ٢ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) دس = ١٤ ، فجد $\left[\begin{matrix} ٢ \\ ١ \end{matrix} \right]_٢$ ق (س) دس

(ب) إذا كان $\int_0^2 (س) ق دس = 6$ ، $\int_0^2 \frac{1}{4} ع (س) دس = 4$ ، فجد

$$\int_0^2 (3 ق (س) + ع (س) - (س) دس)$$

(ب) إذا كان $\int_1^6 (س) ق دس = 8$ ، $\int_1^2 2 ق (س) دس = 10$

فجد $\int_1^6 (ق (س) + 2س) دس$

(ب) إذا كان $\int_1^6 (1 - \frac{ق(س)}{2}) دس = 6$ ، $\int_1^8 ق (س) دس = 10$ ، فجد $\int_1^8 (ق (س) + 2س) دس$
(٥ علامات)

(ب) إذا كان $\int_1^7 4 ق (س) دس = 8$ ، $\int_0^7 ق (س) دس = 9$ ، فجد $\int_1^7 (3 ق (س) - \frac{3}{2} س^2) دس$

(ب) إذا كان $\int_1^2 (ق (س) - 4) دس = 6$ ، $\int_1^3 ق (س) دس = 1$ ، فجد $\int_1^3 (ق (س) + 3س^2) دس$

(ب) إذا كان $\int_1^5 ق (س) دس = 2$ ، $\int_1^5 (1 - ق (س)) دس = 7$ ، فجد

$\int_1^2 (ق (س) - 6س^2) دس$

(٢) إذا كان $\int_1^6 ق (س) دس = 6$ ، $\int_1^2 ق (س) دس = 12$ ، فإن $\int_1^3 ق (س) دس$ يساوي:

- (أ) 6 (ب) 6- (ج) 18- (د) 18

(٢) إذا كان ق اقترانًا متصلًا، وكان \int_{-2}^2 ق(س) دس = ٦ ، فإن \int_{-2}^2 ق(س) دس يساوي:

- (أ) ٣- (ب) ٣ (ج) ٦- (د) ٦

(ب) إذا كان \int_{-2}^3 ق(س) دس = ٣ ، \int_0^3 ق(س) دس = ٤ ، فما قيمة \int_{-2}^0 (٣ ق(س) + ٢ س + ٤) دس؟

(٢) إذا كان ل اقترانًا متصلًا، وكان \int_{-2}^3 ل(س) دس = ٤- ، \int_{-4}^3 ل(س) دس = ٦ ،

فما قيمة \int_{-4}^3 $\frac{1}{3}$ ل(س) دس؟

- (أ) ٥- (ب) ٢ (ج) ١٠- (د) ١

(ب) إذا كان \int_{-2}^3 ق(س) دس = ٩- ، \int_1^2 (٤ س - ل(س)) دس = ٤ ،

فما قيمة \int_1^2 (ق(س) + ٢ ل(س) + ٣ س^٤) دس؟

(٢) إذا كان \int_1^6 ق(س) دس = ١٥ ، \int_2^6 ق(س) دس = ١٠- ، فإن \int_1^2 ق(س) دس تساوي:

- (أ) ٥ (ب) ١٣ (ج) ١٥ (د) ٢٥

(٣) إذا كان \int_{-2}^2 ق(س) دس = ٦ ، \int_0^2 ق(س) دس = ٢ ، فما قيمة \int_{-2}^0 ق(س) دس؟

- (أ) ٤- (ب) ٤ (ج) ١- (د) ١

الدرس الثالث : التكامل بالتعويض



يستخدم التكامل بالتعويض عندما لا نستطيع استخدام قواعد التكامل مباشرة ليجاد تكامل



طيب نؤخذ مثال للتوضيح :

جد ناتج كل من التكاملات الآتية: $\int (5 + 6s)(12 - 5s + 3s^2) ds$

الحل: لاحظ معي أن المقدار $(5 + 6s)$ مشتقة لـ $(12 - 5s + 3s^2)$

خطوات الحل: نفرض ان: $v = 12 - 5s + 3s^2$ نشتق الطرفين

$$\text{ومن الاشتقاق ينتج أن } ds = \frac{dv}{5 + 6s}$$

نرجع للسؤال ونعوض مكان $3s^2 - 5s + 12$ بـ v

$$\int (5 + 6s)v \times \frac{dv}{5 + 6s}$$

عوضت مكان دس قيمتها

$$\int v \times \frac{dv}{5 + 6s}$$

الآن نختصر

يظل عندي $\int v \cdot dv$ (نكامل حسب قواعد التكامل)

$$\int v \cdot dv = \frac{v^2}{2} + C$$

(نرجع قيمة v مكانها وسلامتك)

$$= \frac{(12 - 5s + 3s^2)^2}{2} + C$$

نؤخذ مثال ثاني: جد $\left[(س٢ + ٢س) \sqrt{١٠ - ٢س٣ + ٣س} \right]$ دس

الحل: نفرض أن $ص = ١٠ - ٢س٣ + ٣س$

$$\frac{دص}{٣س٣ + ٢س٦} = دس \quad \text{ومنه} \quad \frac{دص}{المشتقة} = دس$$

نرجع للسؤال ونضع مكان $١٠ - ٢س٣ + ٣س$ (ص) ومكان دس $\frac{دص}{٣س٣ + ٢س٦}$

$$\left[(س٢ + ٢س) \sqrt{ص} \right] \times \frac{دص}{٣س٣ + ٢س٦} \quad \text{نستخرج عامل مشترك } (س٢ + ٢س)٣$$

$$\left[(س٢ + ٢س) \sqrt{ص} \right] \times \frac{دص}{(س٢ + ٢س)٣}$$

$$\left[\sqrt{١٠ - ٢س٣ + ٣س} \right] \times \frac{٢}{٩} = \frac{دص}{٣} \times \frac{٢}{٣} \sqrt{ص} = \frac{دص}{٣} \times \frac{٢}{٣} \sqrt{ص}$$

الطموح

لا يصل الإنسان إلى حديقة النجاح

من دون أن يمر بمحطات التعب والفشل واليأس

وصاحب الإرادة القوية لا يطيل الوقوف عند هذه المحطات

نحاول نحل هالاسئلة ...

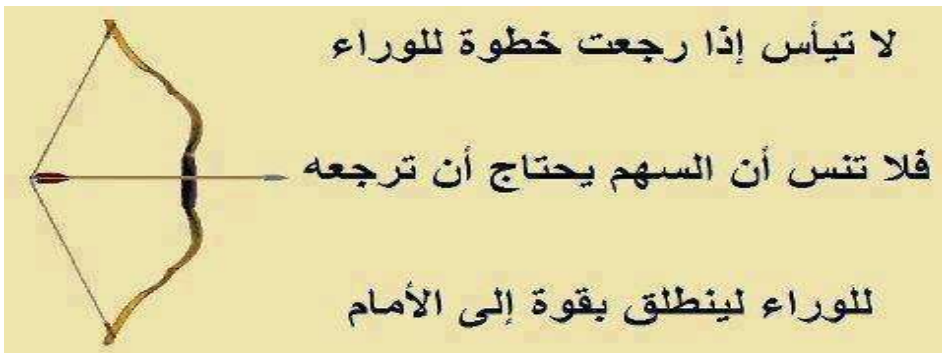


$$(أ) \left[(س^٢ + ٢س) (١٠ - ٢س + ٣س^٢) \right] س$$

الحل:

$$(ب) \left[\frac{س^٢}{(س^٢ + ٥)} \cdot س \right]$$

حلك:





طيب كيف نعمل لما يكون معنا تكامل محدود ؟

نؤخذ مثال للتوضيح : جد $\int_0^2 (s-4) s^2 ds$

الحل:

(النقطة الاساسية في التكامل المحدود، لا تنسى تغيير حدود التكامل حسب الفرض أي انه نجد حدود تكامل جديدة من خلال تعويض حدود التكامل الموجودة في قيمة (ص) المفروضة)

كما تعلمنا سابقا بالخطوات، اولا نفرض ص

$$ص = ٥ - س \quad \text{ومنه} \quad ص = ٥ - س \quad \Leftrightarrow \quad ص = ٥ - س \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{٥} = \frac{1}{ص}$$

(نجد حدود الجديدة بتعويض حدود التكامل في ص كالتالي ...)

الآن نجد حدود التكامل بعد الفرض:

$$\text{الحد السفلي (س = ٥) } \Leftrightarrow ص = ٥ - (٥) = ٠ \quad \Leftrightarrow \quad ٠ = ٤ - ٥$$

$$\text{الحد العلوي (س = ٢) } \Leftrightarrow ص = ٥ - (٢) = ٣ \quad \Leftrightarrow \quad ٦ = ٤ - (٢)$$

إذا راح تكون معنا الحدود الجديدة (-٤ ، ٦)

بعدها هيك نكمل مثل ما تعلمنا

$$\int_0^2 (s-4) s^2 ds = \int_3^0 \left(\frac{1}{ص} - \frac{4}{ص} \right) \frac{1}{ص} ds = \int_3^0 \left(\frac{1}{ص^2} - \frac{4}{ص^2} \right) ds$$

$$= \left(-\frac{1}{ص} + \frac{4}{ص} \right) \Big|_3^0 = \left(-\frac{1}{٤} + \frac{4}{٤} \right) - \left(-\frac{1}{٣} + \frac{4}{٣} \right) = \frac{3}{٤} - \frac{11}{٣} = \frac{9 - 44}{12} = -\frac{35}{12}$$

مثال : جد $\left[\text{جس} (\text{جا} (٢ \text{س} + ١)) \right] \text{س}$

الحل: نفرض ان $\text{ص} = ٢ \text{س} + ١$ (اقتران الزاوية)

(نشقق الطرفين) $\text{ص} = \text{جس}$

نستبدل : $٢ \text{س} + ١$ ب (ص)

$\text{جس} = \text{ص}$ ب (ص) في الاقتران:

$$\left[\text{جاص} = \text{ص} - \text{جناص} + \text{ج} = - \text{جنا} (٢ \text{س} + ١) + \text{ج} \right]$$

اهل **الهمة** لما يكون عندي اقتران خطي مرفوع لقوة

طبق القاعدة التالية

اذا كان $ق(س) = (أس + ب)$

$$\left[\text{فإن} \frac{ق(أس + ب)}{أ(أس + ب)} = \frac{ق(س)}{أ(أس + ب)} \right]$$

(يعني نزيد للأس واحد ونضربه بمعامل س)

الطموح

لا يصل الإنسان إلى حديقة النجاح
من دون أن يمر بمحطات التعب والفشل واليأس
وصاحب الإرادة القوية لا يطيل الوقوف عند هذه المحطات

مثال: جد $\int (1 + 3x^3)^4 dx$

الحل: (مباشرة نطبق على القاعدة السابقة بدون ان تفرض ص = ...)

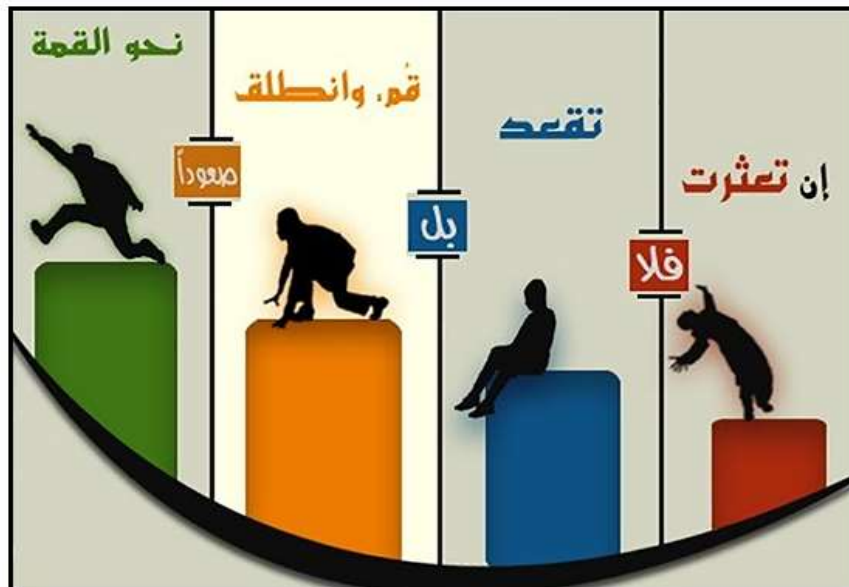
$$\int (1 + 3x^3)^4 dx = \int \frac{(1 + 3x^3)^{4+1}}{3 \times (1+4)} dx = \int \frac{(1 + 3x^3)^5}{15} dx$$

مثال: جد $\int \frac{1}{1 - (x^2 - 1)^2} dx$

الحل:

$$\int \frac{1}{1 - (x^2 - 1)^2} dx = \int \frac{1}{1 - (x^2 - 1)^2} dx$$

= ق(٢) - ق(١) (أكمل الحل) الجواب النهائي = صفر



جميع الأسئلة الوزارية على هذا الدرس من عام ٢٠٠٨ لغاية ٢٠١٩ م

$$(٢) \left[\text{س جا (س}^2 - 3) \text{ دس (٤ علامات)} \right]$$

$$(٢) \left[\text{س جا (س}^2 + 7) \text{ دس} \right]$$

$$(ب) \text{ جد } \left[\text{دس } \frac{1 + \text{س}^2}{\sqrt{1 - \text{س} + \text{س}^2}} \right]$$

$$(٢) \left[\text{دس } \frac{1 + \text{س}^3}{(\text{س}^3 + \text{س} + 7)^\circ} \right]$$

$$(٢) \left[\sqrt[3]{6\text{س} - \text{س}^2} (2 - \text{س}) \text{ دس} \right]$$

$$(٢) \left[\text{دس } \frac{6 - \text{س}^2}{\sqrt[5]{9 + \text{س} - 6\text{س}^2}} \right]$$

$$(٢) \left[\text{دس } \frac{6 - \text{س}^4}{\text{س}^3 - 4\text{س} + 1} \right]$$

$$(٢) \left[\text{س}^2 \text{ جا (س}^2 - 1) \text{ دس} \right] \quad (٢) \left[\text{س}^2 \sqrt{3 + \text{س}^2} \text{ دس} \right]$$

$$(٢) \left[\text{س}^2 (1 - \text{س}^3) \text{ دس} \right] \quad (٢) \left[\text{دس } \frac{1 - \text{س}^4}{\sqrt{1 + \text{س} - \text{س}^2}} \right]$$

$$\int (2) \frac{6s - 8}{\sqrt[3]{9 + 8s - s^2}} ds$$

$$\int (2) \frac{8s + 4}{(s^2 + s - 1)^3} ds \quad \int (2) \frac{6s + 4}{\text{جتا}^2(3s + 4s)}$$

$$\int (2) \frac{3s^4 \text{جتا}^4(s^2 + 2)}{ds} \quad \int (2) \frac{s^2 \text{جتا}(s^3 + 7)}{ds}$$

$$\int (2) \frac{2s^2 \text{قا}^2(s^4 + 1)}{ds} \quad \int (2) \frac{4s - 2}{\sqrt{1 + s - s^2}} ds$$

$$\int (2) \frac{s^2 (s^3 - 1)^2}{ds} ???$$

$$\int (2) \frac{6s - 8}{\sqrt[3]{9 + 8s - s^2}} ds ???$$

$$\int (2) \frac{8s + 4}{(s^2 + s - 1)^3} ds ???$$

وما أوتيتم من العلم الا قليلا

تطبيقات هندسية

في التطبيقات الهندسية يأتي السؤال ليطلب منك إيجاد قاعدة الاقتران كل ما عليك فعله هنا هو أن تأخذ التكامل للاقتران الموجود ثم تجد قيمة (ج) من خلال النقطة المعطيه بالسؤال



وفي المثال يتضح المقال

مثال اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س،ص)



يساوي $3س^2 + 5$ ، وكان ق(س) يمر بالنقطة $(-1, 2)$ ، فجد قاعدة

الاقتران ق(س).

الحل: كل ما عليك فعله هنا هو تكامل الاقتران ق(س)

قاعدة الاقتران = $ص(س) =$ ميل المماس $ص(س) =$ $3س^2 + 5$

ومنه $3س^2 + 5 =$ نجد قيمة ج من خلال النقطة $(-1, 2)$ أي ان ق(-1) = 2

$$2 = (-1) + 5 + 3ج = 8$$

اذا قاعدة الاقتران ق(س) = $3س^2 + 5س + 8$

لاحظ اننا عوضنا مكان ج قيمتها

مثال



إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ٧ (س) عند النقطة (س، ص) يساوي $(٢س + ٤)$ ؛ فجد ق (٢) علما ان منحنى الاقتران ٧ يمر بالنقطة $(١، ٠)$



الحل: لاحظ معي ان السءال لم يطلب قاعدة الاقتران في هذا السؤال

وإنما طلب ق (٢)، ولايجاد ذلك وجب اولا إيجاد قاعدة الاقتران ثم نعوض ٢ فيها

$$\text{قاعدة الاقتران } ٧ = (س) = \text{ميل المماس} = ٧(س)$$

$$= ٢س + ٤ = ٧س \Rightarrow ٢س + ٤ + ٧س = ٠ \Rightarrow ٩س + ٤ = ٠$$

$$\text{إذا قاعدة الاقتران } (س^٢ + ٤س - ٥)$$

بعد إيجاد قاعدة الاقتران نعوض فيها (٢)

$$\text{ق (٢)} = ٢ \times ٢ + ٤ - ٥ = ٧$$

إذا ق (٢) = ٧ وهو المطلوب



اختبر نفسك

(١) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران w (س) عند النقطة (س،ص) يساوي $(٣س^٢ + ٢س + ٢)$ ؛

فجد قاعدة الاقتران علما ان منحنى الاقتران w يمر بالنقطة (١ ، ٦) ؟

حلك:

(٢) اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران w (س) عند النقطة (س،ص) يساوي $\frac{٢س}{٣س^٢ + ٨}$

فجد ق (٢-) علما ان منحنى الاقتران w يمر بالنقطة (٠ ، ١) ؟

حلك:

قِفِ بِثِقَةٍ ؛
إِبْتَسِمِ بِقُوَّةٍ ؛
وَاجْعَلُهُمْ مَذْهُلِينَ
عَنْ سِرِّ تِلْكَ الْإِبْتِسَامَةِ .

تطبيقات فيزيائية


هنا سنعمل وفق القاعدة التالية

$$\left[\begin{array}{l} \text{السرعة} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} \\ \text{التسارع} = \frac{\text{السرعة}}{\text{الزمن}} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{السرعة} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} \\ \text{التسارع} = \frac{\text{السرعة}}{\text{الزمن}} \end{array} \right.$$



وسأقوم بتقسيم أفكار الدرس الى ٣ أفكار كالتالي

إذا كان المعطى في السؤال ع(ن) ، سيكون المطلوب موقع الجسم بعد ن ثانية 

هنا سنكامل السرعة ونجد قيمة ج من خلال ف(٠) والتي ستكون معطى بالسؤال أصلاً.



مثال يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث ان سرعته بعد (ن) ثانية تساوي ع(ن) = ٦ + ٢م/ث

جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور (٢) ث من بدا الحركة علما ان الموقع الابتدائي للجسم ف(٠) = ٢م ؟

الحل: لاحظ ان المعطى ع(ن) والمطلوب المسافة. ومنه المسافة = تكامل السرعة.

$$ف(ن) = \int (٦ + ٢٧) \, \gamma = ٦\gamma + \gamma^٣ = ٦ + ٢٧ = ٢٠$$

$$ف(٠) = ٦ + ٠ = ٦$$

إذا ف(ن) = ٦ + ٢٧ = ٢٠ المسافة المطلوب بعد ٢ ثانية ، اذا نعوض ٢ في هذا المقدار وهو المسافة المطلوبة

$$ف(٢) = ٦ + ٢ \times ٢ + ٢ \times ٣ = ١٨ \text{ م وهو المطلوب}$$



إذا كان المُعطي في السؤال ت(ن) أي التسارع، والطلب ع(ن) أي السرعة،
كل ما عليك فعله هنا أن تكامل التسارع، أي القمدار المعطي في السؤال،

وتجد قيمة ج من خلال ع(٠) السرعة الابتدائية



مثال يتحرك جسيم بحيث ان تسارع ت(ن) = $4n + 3$ م/ث^٢، جد سرعة الجسيم بعد ثانية واحدة من بدء الحركة علما بأن ع(٠) = 2 م/ث.

الحل: لاحظ أن السؤال أعطى التسارع وطلب سرعة، اذا السرعة = تكامل التسارع

$$ع(ن) = \int ت(ن) \, dn = \int (4n + 3) \, dn = 2n^2 + 3n + ج \quad (\text{نجد قيمة ج من خلال ع(٠)})$$

$$ع(٠) = 2 = \text{_____} \text{ ومنه ج} = 2 \text{ إذا } ع(ن) = 2n^2 + 3n + 2 \text{ السرعة}$$

لكن دائما ركز في السؤال واكلمه فالمطلوب السرعة بعد ثانية واحدة

$$ع(١) = 2 + 3 \times 1 + 2 \times 1^2 = 7 \text{ م/ث وهو المطلوب}$$

حكم و أقوال

من المحتمل ألا تستطيع التحكم في الظروف، ولكنك تستطيع التحكم في أفكارك، فالتفكير الايجابي يؤدي الى الفعل الايجابي والنتائج الايجابية.

إبراهيم الفقي

www.amrkhaled.net



بالفكرة الاخيرة يعطيني السؤال ت(ن) أي التسارع، ويطلب منك أحد الخيارين

(أ) يطلب السرعة، وهنا نكمل كما في الفكرة السابقة تماما

وتذكر دائما أن تعوض ع(٠) لايجاد قيمة ج

(ب) يطلب المسافة، وهنا يجب عليك أولا ان تجد السرعة ثم تعود

لتكامل السرعة من أجل إيجاد المسافة وتذكر دائما هنا انك ستجد في السؤال

ع(٠) = ؟؟ ، ف(٠) = ؟؟ ، حيث سنستخدم ع(٠) لايجاد ج في اول مرة (السرعة)،

ولايجاد ج في المرة الثانية نستخدم ف(٠) (المسافة)



مثال يتحرك جسيم على خط مستقيم وبتسارع ثابت مقداره ٦ ن + ٤ م/ث ، اذا كانت سرعته الابتدائية

ع(٠) = ٤ م/ث، وموقعه الابتدائي ف(٠) = ٥ م ؛ جد موقع الجسيم بعد مرور ٣ ثواني من بدء الحركة.

الحل: (لاحظ ان السؤال اعطى التسارع وطلب المسافة) (سنجد اولاً السرعة أي نكمل المقدار المعطى ونجد ج من خلال ع(٠))

$$ع(ن) = ٤ + ٦ن + ٤س = ٤ + ٦ن + ٤س \quad \text{ع(٠) = ٤} \quad \text{ومنه ج = ٤}$$

$$\text{اذا ع(ن) = ٤ + ٦ن + ٤س} \quad \text{(نرجع ونكمل هذا المقدار (السرعة) من أجل إيجاد المسافة)}$$

$$\text{(المسافة) ف(ن) = ٤ + ٦ن + ٤س = ٤ + ٦ن + ٤س} \quad \text{(هنا نجد قيمة ج) من خلال ف(٠) = ٥}$$

$$\text{ف(٠) = ٥} \quad \text{ومنه ج = ٥} \quad \text{وعليه فان المسافة = ٥ + ٦ن + ٤س}$$

لا تنسى تكمل السؤال لانه السؤال طلب المسافة بعد ٣ ثواني ف(٣) = ٦٢ م (بعد التعويض) وهو المطلوب

اختر نفسك

(١) يتحرك جسيم بتسارع ثابت (ت) مقداره ت (٧) = ٨ م/ث^٢ جد المسافة بعد مرور (٧) ثانية من الحركة علما ان سرعته الابتدائية ع (٠) = ٢ م/ث وموقعه الابتدائي ف (٠) = ٤ م ؟

حلك:

(٢) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان سرعته بعد (٧) ثانية تعطى بالعلاقة ع (٧) = ٦ (١ + ٧) م/ث^٢؛ جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة علما بان موقعه الابتدائي ف (٠) = ٩ م ؟

الحل:



الفشل يصيب
الذين يقعدون
دائما وينتظرون
النجاح ان ياتي

د. ابراهيم الفقي رحمه الله

جميع الأسئلة الوزارية على هذا الدرس من عام ٢٠٠٨ لغاية ٢٠١٩ م



ج) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تُعطى بالعلاقة :
 ع (ن) = $3n^2 - 2n$. جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (٣) ثواني
 علماً بأن موقعه الابتدائي ف (٠) = ٥ م .

ب) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) عند النقطة (س ، ص) هو (٦ - ٢ س)
 فجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن ق (١) = ٢ .

ج) يتحرك جسيم على خط مستقيم بتسارع ثابت مقداره ت (ن) = 12 م/ث^٢ . جد سرعة
 الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم هي
 ع (٠) = 7 م/ث .

ب) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تُعطى بالعلاقة
 ع (ن) = $3(1 + n)^2$ م/ث . جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانييتين من
 بدء الحركة علماً أن موقعه الابتدائي ف (٠) = ١ م .

ب) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تساوي ع (ن) = $(6n + 3)$ م/ث ،
 جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد (٣) ثوان، علماً بأن موقعه الابتدائي ف (٠) = (٢) م

ج) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) عند النقطة (س ، ص) يساوي (٤ س^٣ - ٦ س) ،
 فجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٢ ، ٥) . (٤ علامات)

أ) إذا كان تسارع جسيم ت بعد مرور ن من الثواني يُعطى بالعلاقة ت (ن) = $(8n)$ م/ث^٢ ، جد السرعة التي
 يقطعها الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة، علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع (٠) = (٣) م/ث
 (٥ علامات)

ب) يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث تكون سرعته ع مُعطاة بالعلاقة ع (ن) = $(8 + n)$ م/ث .
 جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة، علماً بأن الموقع الابتدائي
 للجسيم ف (٠) = ٣ م (٣ علامات)

ج) يتحرك جسيم في خط مستقيم بتسارع ثابت (ت) مقداره ت (ن) = ٨ م/ث^٢. جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع (٠) = ٢ م/ث وموضعه الابتدائي ف (٠) = ١٠ م.

أ) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي (٣س^٢ - ١) فجد قاعدة الاقتران ق، علماً بأن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٢، ٤).

أ) يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث تكون سرعته ع معطاة بالعلاقة ع(ن) = (٤ن + ٦) م/ث، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (٣) ثواني من بدء الحركة علماً بأن الموقع الابتدائي للجسيم ف(٠) = ١٠ م.

ج) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي (٢ - $\frac{1}{س}$) وكان المنحنى يمرّ بالنقطة ($\frac{1}{٣}$ ، ١)، فجد قاعدة الاقتران ق.

ب) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تُعطى بالعلاقة ع(ن) = ٦(٢ + ن) م/ث، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانيّتين من بدء الحركة. علماً أن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٥ م.

ب) إذا كان تسارع جسيم بعد مرور (ن) من الثواني يُعطى بالعلاقة ت(ن) = ٦ ن م/ث^٢، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع(٠) = ٢ م/ث وموقعه الابتدائي ف(٠) = ١٢ م. (٥ علامات)

ب) يتحرك جسيم على خط مستقيم بتسارع ثابت يُعطى بالقاعدة ت(ن) = ٦ سم/ث^٢، ن ≤ صفر. جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ثانيّتين من بدء الحركة، علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع(٠) = ٤ سم/ث، وموقعه الابتدائي ف(٠) = ١٠ سم. (٥ علامات)

ب) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد ن ثانية تُعطى بالعلاقة ع(ن) = ٦(١ + ن) م/ث. جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ثانيّتين من بدء الحركة علماً بأن موقعه الابتدائي ف(٠) = ٨ م (٤ علامات)

ج) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{٣س - ٣}{س}$

فجد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بأن منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (-١، ٦).

(ب) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن تسارعه t بعد n ثانية يُعطى بالقاعدة
 $t(n) = 12 \text{ م/ث}^2$ ، فجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور n ثانية من بدء الحركة
 علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم $v(0) = 4 \text{ م/ث}$ ، وموقعه الابتدائي $f(0) = 6 \text{ م}$.
 أ) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد n ثانية تُعطى بالعلاقة $v(n) = 6(1+n) \text{ م/ث}$ ،
 جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور n ثانية من بدء الحركة علماً بأن موقعه الابتدائي $f(0) = 9 \text{ م}$
 أ) إذا كان تسارع جسيم بعد n ثانية يعطى بالقاعدة $t(n) = 8 \text{ م/ث}^2$ ، فجد المسافة التي يقطعها
 الجسيم بعد مرور n ثانية من بدء الحركة، علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم $v(0) = 4 \text{ م/ث}$ ،
 وموقعه الابتدائي $f(0) = 3 \text{ م}$ (٥ علامات)

أ) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $v = f'(s)$ عند النقطة (s, v) يساوي $(4s - 6)$ ،
 فجد قاعدة الاقتران v ، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة $(2, -1)$. (٤ علامات)
 (ب) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد مرور n ثانية من بدء الحركة تعطى بالعلاقة
 $v(n) = (3n + 5) \text{ م/ث}$ ، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (4) ثوان من بدء الحركة، علماً بأن
 موقعه الابتدائي $f(0) = 3 \text{ م}$ (٤ علامات)

(ب) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $v = f'(s)$ عند النقطة (s, v) يساوي $3(s + 4)$ ، فجد قاعدة
 الاقتران v ، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة $(1, 5)$. (٥ علامات)
 (ب) تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بتسارع ثابت t مقداره $t(n) = 14 \text{ م/ث}^2$ ، جد سرعتها بعد مرور n ثانية
 من بدء الحركة، علماً بأن سرعتها الابتدائية $v(0) = 5 \text{ م/ث}$. (٥ علامات)

أ) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $v = f'(s)$ عند النقطة (s, v) يساوي $(4s - 2)$ ،
 فجد قاعدة الاقتران v ، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة $(1, 8)$. (٤ علامات)
 (ب) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث أن سرعتها بعد مرور n ثانية من بدء حركتها تعطى
 بالعلاقة: $v(n) = (6n + 9) \text{ م/ث}$ ، جد موقع النقطة المادية بعد مرور (5) ثوان من بدء
 حركتها، علماً بأن موقعها الابتدائي $f(0) = 3 \text{ م}$ (٤ علامات)

(ب) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $v = f'(s)$ عند النقطة (s, v) يساوي $3s$ ، فجد قاعدة
 الاقتران v ، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة $(1, 0)$. (٤ علامات)
 (ب) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $v = f'(s)$ عند النقطة (s, v) يساوي $6(1 - 2s)$ ،
 فجد $v(1)$ علماً بأن منحنى الاقتران $v = f'(s)$ يمر بالنقطة $(0, \frac{1}{4})$. (٤ علامات)

ب) يتحرك جسيم في خط مستقيم بتسارع مقداره $t = (2n + \frac{1}{4})$ م/ث^٢ ، جد سرعة الجسيم بعد مرور n ثانية من بدء الحركة إذا علمت أن $t = 2 = 10$ م/ث

ب) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $v = c(t)$ عند النقطة (s, v) يساوي $(\frac{1}{4} - 3)$ ، فجد قاعدة الاقتران $c(t)$ علماً بأن منحناه يمر بالنقطة $(2, 8)$. (٥ علامات)

أ) يتحرك جسيم على خط مستقيم بتسارع مقداره $t = (2n + 1)$ م/ث^٢ ، جد سرعة الجسيم بعد مرور n ثانية من بدء الحركة، إذا علمت أن $t = 5 = 50$ م/ث. (٤ علامات)

إذا كان $f(n) = 3n - 6$ هي المسافة التي يقطعها جسيم ، حيث f المسافة بالأمتار ، n الزمن بالثواني ، ما سرعة الجسيم بعد ٣ ثوانٍ من بدء الحركة؟

أ) ١٨ م/ث (ب) ١٨ م/ث (ج) ٢١ م/ث (د) ٢١ م/ث

إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $v = c(t)$ عند النقطة (s, v) يساوي $(4s + 1)$ وكان منحنى الاقتران $c(t)$ يمر بالنقطة $(0, 4)$ ، فإن قيمة $c(1)$ تساوي:

أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٧

** تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث أن تسارعها بعد مرور n ثانية من بدء الحركة يعطى بالعلاقة $t = (6n - 5)$ م/ث^٢ ، إذا علمت أن سرعتها الابتدائية $t = 0 = 4$ م/ث ، وموقعها الابتدائي $t = 0 = 3$ م ، أجب على الفقرتين (٣٥) ، (٣٦) الآتيتين:

(٣٥) ما سرعة النقطة المادية بعد مرور ثانيتين من إنطلاقها؟

أ) ٢ م/ث (ب) ٦ م/ث (ج) ١٤ م/ث (د) ١٨ م/ث

(٣٦) ما موقع النقطة المادية بعد مرور ٤ ثوانٍ من بدء الحركة؟

أ) ٤٣ م (ب) ٤٠ م (ج) ٢٤ م (د) ١٩ م

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد مرور n ثانية من بدء الحركة تعطى بالعلاقة:

ع(ن) = $(6 - 3n)$ م/ث ، فما القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور n ثانية من بدء الحركة؟

أ) $f(n) = 6 - 3n + c$ (ب) $f(n) = 6 - 3n + c$

ج) $f(n) = 2 - 3n + c$ (د) $f(n) = 2 - 3n + c$

٨) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $v = c(s)$ عند النقطة (s, v) يساوي $(3s^2)$ ، وكان منحنى الاقتران c يمر بالنقطة $(0, 2)$ ، فإن قاعدة الاقتران هي:

أ) $c(s) = s^3$ ب) $c(s) = 3s^2$ ج) $c(s) = s^3 + 2$ د) $c(s) = s^3 - 2$

٩) يتحرك جسيم على خط مستقيم، ويتسارع ثابت مقداره t (ن) $= 4$ م/ث^٢ ، إذا كانت السرعة الابتدائية للجسيم $c(0) = 6$ م/ث ، فإن سرعة الجسيم بعد n ثانية تُعطى بالعلاقة:

أ) $c(n) = 6 - 4n$ ب) $c(n) = 6 + 4n$ ج) $c(n) = 6 - 4n$ د) $c(n) = 6 + 4n$



المساحة

خطوات الحل...

- (١) نجد تقاطع منحنى الاقتران مع محور السين أي نسوي ق(س) بالصفير ونجد قيمة س
(٢) نجد التكامل خلال الفترة المطلوبة [أ ، ب]



سنقوم بتقسيم الدرس الى أفكار ...



الفكرة الاولى ... اذا كانت قيمة س خارج الفترة المطلوب .

مثال : جد المساحة المحصورة بين ق(س) = $2س + 4$ ومحور السينات خلال الفترة [٣ ، ٠]

الحل: (كما قلنا اولاً نسوي ق(س) بالصفير لنجد قيمة س اذا كانت تقع ضمن الفترة [٣ ، ٠] أم لا)

$$2س + 4 = 0 \text{ ومنه } س = -2 \text{ نلاحظ أن } -2 \notin [٣ ، ٠] \text{ أي تقع خارجها}$$

اذا مباشرة نأخذ التكامل خلال الفترة [٣ ، ٠] ونجد قيمته فتكون هي المساحة المطلوبة.



المساحة المطلوبة = $\int_0^3 (2س + 4) دس$ (اكمل الحل) الجواب النهائي = ٢١ وحدة مربعة.

وكما تحلم
سكون

الفكرة الثانية: اذا كانت قيمة س تقع ضمن الفترة المطلوبة

مثال: جد المساحة المغلقة المحصورة بين ق(س) = ٢س - ٦ ومحور السينات خلال الفترة [١ ، ٦] .

الحل: (كما قلنا سابقاً نساوي ق(س) بالصفير ونجد قيمة س) ٠ = ٢س - ٦ ومنه س = ٣ نلاحظ أن ٣ ∈ الى الفترة [١ ، ٦]

لذلك سنقوم بتجزئة التكامل الى مساحتين ...

$$\text{المساحة الكلية} = \int_1^3 (2s - 6) \, ds + \int_3^6 (2s - 6) \, ds$$



$$\text{المساحة الاولى م} = \int_1^3 (2s - 6) \, ds = \text{ (الحل النهائي ٤) (أكمل الحل وتأكد بنفسك) }$$

(ملاحظة عند إجراء التكامل سيكون الجواب -٤ لكن كونه مساحة يجب اخذ القيمة المطلقة)

$$\text{المساحة الثانية م} = \int_3^6 (2s - 6) \, ds = \text{ (الحل النهائي ٩) (أكمل الحل وتأكد بنفسك) }$$

$$\text{المساحة الكلية} = ١م + ٢م$$

$$= ٩ + ٤ = ١٣ \text{ وحدة مربعة وهو المطلوب}$$

تريد النجاح ثق بالله ثم
بنفسك وتجاهل من يقول
هذا صعب وهذا مستحيل
الثقة بالله هي عقلية العظماء

الفكرة الثالثة: عند هذه الحالة يطلب منك المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور السينات
(يعني ما يكون معك فترة)

مثال: جد المساحة المحصور بين منحنى الاقتران ق(س) = $6س - س^2$ ومحور السينات

الحل: أولاً يجب ان نساوي ق(س) بالصفر حتى نجد الفترة المطلوبة

$$6س - س^2 = 0 = س(6 - س) = 0 \text{ ومنه}$$

$$س = 0 \text{ أو } س = 6 \text{ اذا الفترة المطلوبة هي } [0, 6]$$

المساحة المطلوبة هي $\int_0^6 (6س - س^2) دس$ (الحل النهائي = ٣٦ وحدة مربعة) (تأكد من الحل بنفسك)



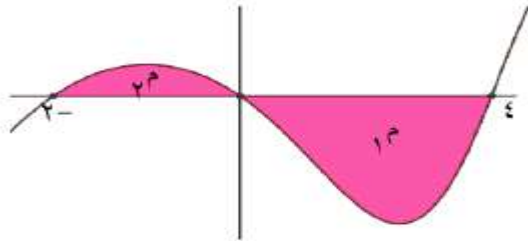
القلق لا يغير أي
شيء ، لكن الثقة
بالله تغير كل شيء

الفكرة الرابعة : المساحة من خلال الرسم

- ١- تذكر هنا أن الرسمة اذا كانت تحت محور السين تكون سالبة وفوق محور السين تكون موجبة
- ٢- تذكر ان المساحة دائما موجبة سواء كانت فوق محور السين او تحت محور السين
- ٣- لا تنسى خواص التكامل وخاصة خاصية قلب الحدود



مثال: من خلال الشكل المجاور إذا علمت ان $11 = 1$ م ، $6 = 2$ م



جد

(أ) $\int_{-2}^4 f(x) dx$ و $\int_{-2}^4 f(x) dx$

(ب) $\int_{-2}^4 f(x) dx$ و $\int_{-2}^4 f(x) dx$

(ج) المساحة المحصور $\int_{-2}^4 f(x) dx$ و $\int_{-2}^4 f(x) dx$

الحل: (أ) $\int_{-2}^4 f(x) dx$ و $\int_{-2}^4 f(x) dx$ (لاحظ انه يريد تكامل من -2 الى 4 ولدي مساحتين)

$$\int_{-2}^4 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx$$

(تحت محور السين)

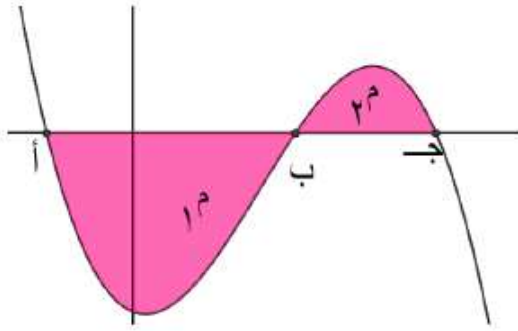
$$= 6 + (-11) = -5$$

(ب) $\int_{-2}^4 f(x) dx$ و $\int_{-2}^4 f(x) dx$ (فقط قلب الإشارة) = -11

(ج) المساحة المحصور $\int_{-2}^4 f(x) dx$ و $\int_{-2}^4 f(x) dx$ = $1 + 6 = 7$ وحدة مربعة

اختبر نفسك

(١) من خلال الشكل المجاور جد ما يلي اذا علمت أن $١٠ = ١م$ ، $٢م = ٤$ فجد ما يلي :



(١) أ ب
أ (س) . دس

(٢) أ ب
أ (س) . دس

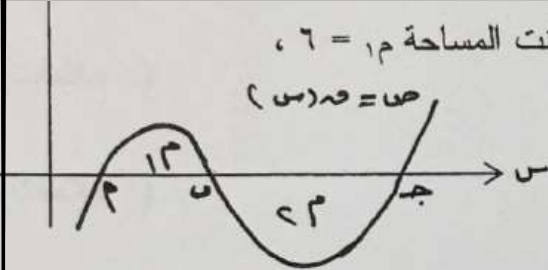
(٣) أ ب
أ (س) . دس

(٤) مساحة المنطقة المحصورة بين ومحور السينات في [أ ، ج]

بمجرد أن تخطيء ،
سينسى الجميع أنك
كنت رائعًا يومًا ما.

جميع الأسئلة الوزارية على هذا الدرس من عام ٢٠٠٨ لغاية ٢٠١٩ م

أ) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = $س^2 - ٢س$ ومحور السينات .



(١) بالاعتماد على الشكل الآتي الذي يمثل منحنى ق (س) ، إذا كانت المساحة $م_١ = ٦$ ،

المساحة $م_٢ = ١٠$ فإن ق (س) دس يساوي :

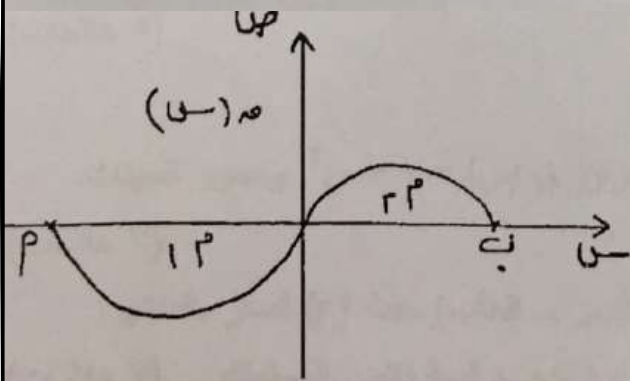
(أ) - ٤

(ب) ٤

(ج) ١٦

(د) ٦٠

أ) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = $س^2 - ٦س$ ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٤]



٤) يمثل الشكل المجاور المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) ومحور السينات في الفترة [٢ ، ٤] . إذا علمت أن مساحة $(م_١)$ تساوي (٥) وحدات مربعة ومساحة $(م_٢)$ تساوي (٣) وحدات مربعة، فإن ق (س) دس يساوي :

(أ) ٨

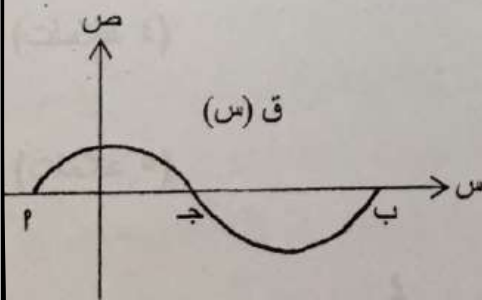
(ب) ٢

(ج) ٨

(د) ٢

أ) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = $س^2 - ١س$ ومحور السينات .

ب) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = $س^2 + ١س$ ومحور السينات والمستقيمين $س = ٠$ ، $س = ٢$ (٥ علامات)



٤) معتمداً الشكل المجاور والذي يُمثل منحنى الاقتران ق المُعرّف في الفترة [٢ ، ٤] ، إذا علمت أن مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات تساوي (١٤) وحدة

مربعة، وكان ق (س) دس = ٦ ، فما قيمة ق (س) دس ؟

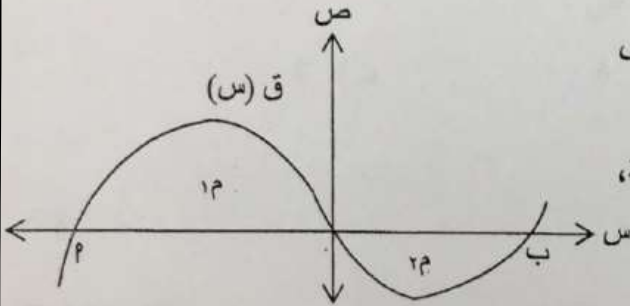
(أ) ٨

(ب) ٢٠

(ج) ٨

(د) ٢

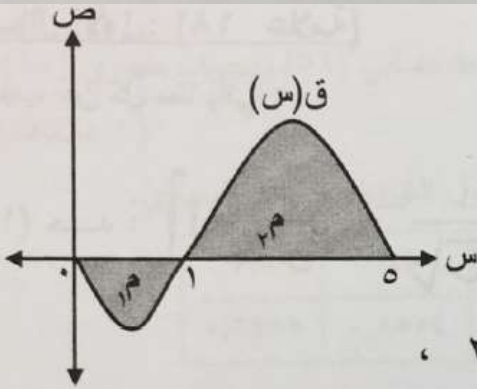
ج) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = ٣س + ٦$ ومحور السينات في الفترة $[٠, ٣]$



٢) يبين الشكل المجاور المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س)$ ومحور السينات في الفترة $[٢, ٤]$. إذا علمت أن $١م = ٩$ وحدات مربعة، $٢م = ٤$ وحدات مربعة، فإن $\int_٢^٤ ق(س) دس =$

أ) $١٣-$ ب) $٥-$ ج) ٥ د) ١٣

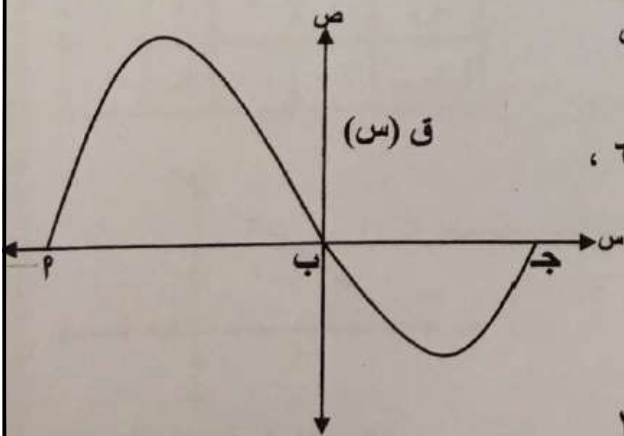
ج) احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = ٢س - ٤س$ ومحور السينات.



ب) اعتمادًا على الشكل المجاور الذي يمثل المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س)$ ومحور السينات في الفترة $[٠, ٥]$ ، إذا علمت أن مساحة المنطقة ٣ تساوي (٤) وحدات مربعة، وأن $\int_٠^٥ ق(س) دس = ٢٤$ ،

(٤ علامات)

جد مساحة المنطقة $٢م$



٤) معتمدًا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $ص = ق(س)$ ، إذا علمت أن $\int_٢^٤ ق(س) دس = ٦$ ، فإن $\int_٢^٤ ق(س) دس =$

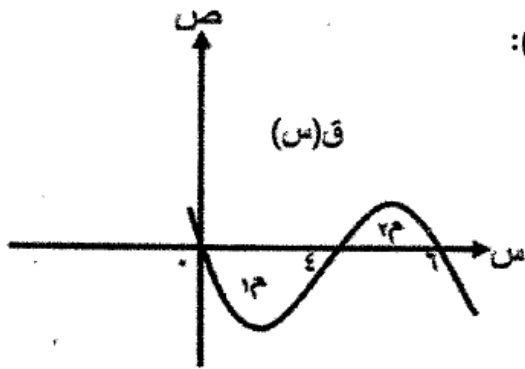
أ) $٢-$ ب) ٢ ج) ١٠ د) $١٠-$

أ) جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ص = ق(س) = ٢س - ٤س$ ومحور السينات في الفترة $[٠, ٣]$

(٥ علامات)

** معتمداً الشكل المجاور الذي يُمثل منحنى الاقتران ق(س) ، حيث المساحة $م = ١٣ = ٨$ وحدات مربعة، والمساحة

$٢م = ٤$ وحدات مربعة، أجب عن الفقرتين الآتيتين (٣٨) ، (٣٩):



(٣٨) ما مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق

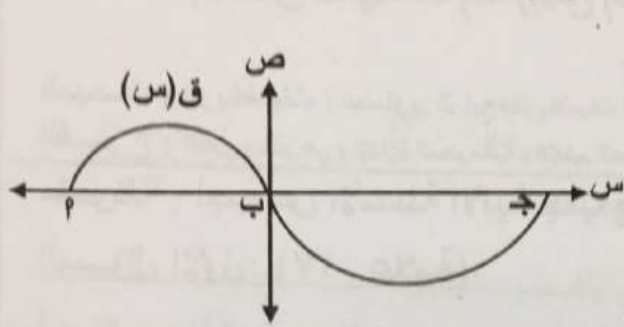
ومحور السينات على الفترة $[٠, ٦]$ ؟

- (أ) ١٢ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٣٢

(٣٩) ما قيمة \int_0^6 ق(س) دس ؟

- (أ) ١٢- (ب) ١٢ (ج) ٤- (د) ٤

(١) معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) ،



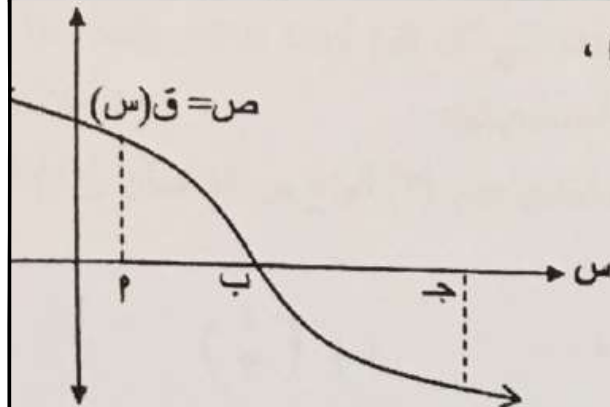
إذا كان \int_2^4 ق(س) دس = ٣ ، \int_4^6 ق(س) دس = ٥ ،

فما قيمة \int_2^6 ق(س) دس:

- (أ) ٢- (ب) ٨ (ج) ٢ (د) ٨-

(٦) يُمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران $ص = ق(س)$ ،

إذا كان \int_0^2 ق(س) دس = ٥ ، وكانت المساحة



المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات

في الفترة $[٢, ٤]$ تساوي ١٢ وحدة مربعة،

فما قيمة \int_0^4 ق(س) دس؟

- (أ) ٧ (ب) ٧- (ج) ١٧ (د) ١٧-

التردد ضعف
مردده إلى عدم
الثقة بالنفس



اختبار نهاية الوحدة



$$(1) \text{ اذا كان } f(x) = 10x^2 - 3x + 6, \text{ فإن } f(3) = \text{ (أ) } 2 \text{ (ب) } -4 \text{ (ج) } 4 \text{ (د) } 16$$

$$(2) \text{ اذا كان } f(x) = (3 - 2x)g(x), \text{ فإن } f(2) = \text{ (أ) } \frac{2}{3} - 5 \text{ (ب) } -5 \text{ (ج) } 5 \text{ (د) } 8$$

$$(3) \text{ (ج) } (2x + 3)g(x) = (x + 2)g(x) + \text{ (أ) } x^2 + 2x + 3 \text{ (ب) } \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$$

$$\text{ (ج) } x^2 + 2x + 3 \text{ (د) } -x^2 - 2x + 3$$

$$(4) \text{ اذا علمت أن } (x) \text{ ثابت، فإن } f(x) = \text{ (أ) } x + 3 \text{ (ب) } x + 2 \text{ (ج) } \frac{x^2}{4} + 3 \text{ (د) } x + \frac{x^2}{2}$$

$$(5) \text{ اذا كان } f(x) = 6x^2 - 3x + 8, \text{ فإن } f(3) = \text{ (أ) } 0 \text{ (ب) } 2 \text{ (ج) } 14 \text{ (د) } 14$$

$$(6) \text{ اذا كان } f(x) = 3x^2 - 6, \text{ فإن قيمة الثابت (ج) تساوي: (أ) } 3 \text{ (ب) } 3 \text{ (ج) } 1 \text{ (د) } 1$$

$$(7) \text{ اذا كان } f(x) = (5x^2 + 3)g(x), \text{ فإن } f(-1) = \text{ (أ) } -4 \text{ (ب) } -6 \text{ (ج) } 3 \text{ (د) } 4$$

$$\text{ (أ) } -4 \text{ (ب) } -6 \text{ (ج) } 3 \text{ (د) } 4$$

٨) يتحرك جسيم على خط مستقيم بتسارع ثابت $t = 2v$ ، اذا كانت السرعة الابتدائية

للجسيم $v = 0$ ، فإن سرعة الجسيم بعد t ثانية تعطى بالعلاقة :

أ) $v = 2t - 6$ ب) $v = 2t + 6$ ج) $v = 2t - 8$ د) $v = 2t + 8$

٩) $v^2 = 2as$

أ) $v^2 = 2as + 2$ ب) $v^2 = 2as - 2$ ج) $v^2 = 2as + 4$ د) $v^2 = 2as - 4$

١٠) اذا كان $v^2 = 2as - 12$ ، فإن قيمة الثابت a تساوي :

أ) -6 ب) 4 ج) -4 د) 6



رمز السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الاجابة	ب	ج	أ	ب	د	ج	أ	د	أ	أ

لولا وجود عكس المعنى

لما كان للمعنى معنى

فلولا وجود العسر

لما كان لليسر معنى

ولولا وجود التعب

لما كان للراحة معنى

ولولا وجود الحزن

لما كان للفرح معنى

ولولا وجود الظلام

لما كان للنور معنى

أهليّة الوحدة الثانية

الإحصاء والاحتمالات

مبدأ العد

مبدأ العد ينص على ...

عند إجراء اي عمل على خطوتين

حيث ان الخطوة الاولى ن ١

والخطوة الثانية تمثل ن ٢

فيمكن إجراء العمل بطرق عددها

$$١ \times ٢ \text{ ن}$$



مثال: دخل أحد الأشخاص مطعم لتناول وجبة الفطور ، وهذا المطعم يقدم وجبتان من الطعام (حمص أو فول) وثلاث أنواع من المشروبات (شاي ، قهوة ، حليب) . بكم طريقة يمكن لهذا الشخص ان يختار وجبة مكونه من وجبة طعام ومشروب واحد ؟ .

الحل: لمعرفة عدد الطرق التي يمكن ان يختار بها هذا الشخص وجبة الفطور المكونة من طعام وشراب علينا ان نحدد كم نوعا من الطعام موجود وكم نوعا من الشراب موجود .

عدد طرق اختيار الطعام ... ٢ .

اذا عدد طرق اختيار الوجبة كاملة = $١ \times ٢ \text{ ن}$

عدد طرق اختيار الشراب ... ٣ .

وهو المطلوب $٦ = ٣ \times ٢ =$ طرق

مثال: نجحت في الثانوية العلة وأردت ان تكمل دراستك الجامعية فوجدت أمامك ٨ جامعات وفي كل جامعة ٥ كليات وفي كلية ٣ تخصصات ترغب ان تكمل دراستك بها ، بكم طريقة يمكن لك ان تكمل دراستك الجامعية في التخصص الذي تحبه ؟.

الحل:

ن ١ - عدد طرق اختيار الجامعة = ٨ .

ن ٢ - عدد طرق اختيار الكلية = ٥ .

ن ٣ - عدد طرق اختيار التخصص = ٣ .

ومنه طرق اختيار العينة كاملة = $٨ \times ٥ \times ٣$

$$= ١٢٠ = ٣ \times ٥ \times ٨ \text{ طريقة .}$$

مثال: اذا كان لديك (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤) كم عدد مكون من منزلتين يمكن تكوينه من هذا الرقم .

أ- اذا سمح بتكرار الرقم .

ب- اذا لم يسمح بتكرار الرقم .

الحل:

أ- اذا سمح بتكرار الرقم (اي الرقم الذي نختاره أول مرة يمكن ان نختاره مرة اخرى) .

عدد مرات اختيار الرقم الاول \times عدد طرق اختيار الرقم الثاني

$$= ١٦ = ٤ \times ٤ \text{ طريقة .}$$

ب- اذا لم يسمح بتكرار الرقم (اي الرقم الذي نختاره اول مرة لا يمكن اختياره المرة الثانية)

بمعنى عدد مرات الرقم الثاني تقل عن الرقم الاول وهكذا ...

عدد مرات اختيار الرقم الاول \times عدد طرق اختيار الرقم الثاني

$$= ١٢ = ٣ \times ٤ \text{ طريقة .}$$

وكما تحلم
سككون

مثال: بكم طريقة يمكن ان يجلس بها اربع اشخاص على اربع مقاعد مرقمة .

الحل: (لاحظ معي ان المقعد الذي يجلس عليه شخص لن يجلس عليه شخص اخر)



(لاحظ ان الشخص الاول لديه ٥ مقاعد يجلس على ايا يشاء منها، بينما الشخص الثاني يبقى امامه ٤ مقاعد للجلوس والثالث يبقى امامه ٣ والرابع يبقى امامه ٢ اما الشخص الخامس فيبقى امامه مقعد واحد فقط)

عدد الطرق التي يمكن لهؤلاء الاشخاص الجلوس بها = $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ طريقة

يطلق على العملية السابقة $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ مضروب العدد ويكتب (!٥) ويقرأ خمسة مضروب



قانون المضروب = $n! = (n) \times (n-1) \times (n-2) \dots \times 3 \times 2 \times 1$.

إن لم تكن سعيدا داخليا له تكون سعيدا خارجيا ..
 إن لم تكن سعيدا كما أنت الآن له تكون سعيدا
 عندما تصبح ما تريد .. إن لم تكن سعيدا بما عندك
 الآن له تكون سعيدا عندما تحصل على ما تريد .. إن
 لم تكن سعيدا بحياتك الآن له تكون سعيدا بأي حياة

الدكتور إبراهيم الفقي

القيمة العددية	مضروب العدد الصحيح
١	!٠
١	!١
٢	!٢
٦	!٣
٢٤	!٤
١٢٠	!٥
٧٢٠	!٦
٥٠٤٠	!٧



مثال: جد قيمة ما يلي : - (!٢) - (!٠) - (!٣-٤) × !٣

الحل :

$$١ = (!٠) - \quad ٢ = ١ \times ٢ = (!٢) -$$

$$٦ = ٦ \times ١ = ١ \times ٢ \times ٣ \times !١ = !٣ \times (!٣-٤) -$$

مثال: جد قيمة n في كل مما يلي .

$$٣٦٠ = !٣٣ \quad (٣) \quad ١ = !٢ \quad (٢) \quad ٦ = !١ \quad (١)$$

$$١٢٠ = !(١ + ٢) \quad (٥) \quad ٤ = !٣ - !١ \quad (٤)$$

الحل: (١) $n = ٦$. (نبحث عن مجموعة ارقام متتالية حاصل ضربها ٦ .. وهي ١ ، ٢ ، ٣

$$١ \times ٢ \times ٣ = !٣ \quad \text{ومنهن} \quad !٣ = !٣ \quad \text{اذان} \quad \boxed{٣ = ٣}$$

(٢) $n = ١$ هنا يوجد رقمان مضروبهما ١ وهما (١ ، ٠) اذا $١ = !٠$ ، $١ = !١$

$$\text{ومنهن} \quad \boxed{(١ ، ٠) = ١}$$

(٣) $٣٦٠ = !٣٣$. (بقسمة الطرفين على ٣)

$١٢٠ = !١٢٠$. لمعرفة مضروب ١٢٠ نقسمة ١٢٠ على اعداد بدأ من العدد ١ كالتالي

1	120
2	120
3	60
4	20
5	5
	1

$$\text{ومنهن} \quad \boxed{١٢٠ = !٥} \quad \text{اذان} \quad ٥ = ٥$$

$$(٤) \quad ٩٦ = !٤ - !٤ \quad . \quad ٩٦ = !٤ \quad . \quad ٩٦ = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ = !٤$$

$$٩٦ = ٢٤ - !٢٤ \quad . \quad (جمع ٢٤ من الطرفين)$$

$$٩٦ + ٢٤ = !٢٤$$

$١٢٠ = !١٢٠$ (استخرجنا ١٢٠ على شكل مضروب بالسؤال السابق وهو ٥)

$$\text{ومنهن} \quad \boxed{١٢٠ = !٥}$$

$$(٥) \quad ١٢٠ = !(١ + ٢)$$

$$\text{ومنهن} \quad !٥ = !(١ + ٢)$$

$$٥ = ١ + ٢ \quad (\text{طرح ١ من الطرفين})$$

$$\text{ومنهن} \quad \boxed{٢ = ٢}$$

اختبر نفسك

جد قيمة ن في كل من :

$$١ - (٣ن)! = ٧٢٠$$

$$٢ - (١ - ٣ن)! = ١٢٠$$

$$٣ - ٣ \times ن! = ٧٢$$

$$٤ - (١ - ن)! = ٢٤$$

$$٥ - ن! + ٣! = ٨$$

مثال: جد قيمة ن في المعادلات التالية

$$٣٠ = \frac{!(١ + ن)}{!(١ - ن)} \quad (ب)$$

$$١٢ = \frac{ن!}{!(١ - ن)} \quad (أ)$$



الحل: تذكر أن $(ن!) = ن \times (١-ن) \times (٢-ن)!$

$$١٢ = ن! \quad \text{ومنه } ١٢ = \frac{ن!}{!(١ - ن)} = ١٢ = \frac{ن!}{!(١ - ن)}$$

$$٣٠ = (١ + ن) \times ن! = ٣٠ = \frac{!(١ + ن) \times ن!}{!(١ - ن)} = ٣٠ = \frac{!(١ + ن)}{!(١ - ن)} \quad (ب)$$

ادخل الن على القوس لتشكل معادلة تربيعية وحلها

(الحل النهائي (٥ ، ٦) يهمل الساب فيكون الحل (٥))

جميع الأسئلة الوزارية على هذا الدرس من عام ٢٠٠٨ لغاية ٢٠١٩ م

٥) في أحد الأسواق يباع (٤) أنواع من الخضار هي { بندورة ، خس ، ملفوف ، فاصوليا } و (٣) أنواع من اللحوم هي { لحم خاروف ، سمك ، دجاج }. أراد أحمد أن يشتري نوعاً واحداً من الخضار ونوعاً واحداً من اللحم، فإن عدد الطرق المختلفة التي يستطيع بها اختيار ذلك هي :

(أ) 2×4 (ب) 3×4 (ج) $4 \times 3!$ (د) $3, 4$

٦) إذا علمت أن $(n - 1)!$ ، فإن قيمة n تساوي :

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٢٥

٦) كم عدد مكوّن من منزلتين يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام { ٢، ٤، ٦ } إذا لم يُسمح بتكرار الأرقام ؟

(أ) $2, 3$ (ب) 3×3 (ج) $6 \times 4 \times 2$ (د) $\binom{3}{2}$

٧) إذا كان $n! = 24$ ، فإن قيمة n تساوي :

(أ) $24!$ (ب) ٢٤ (ج) $4!$ (د) ٤

٧) قيمة $12 + 13!$ تساوي :

(أ) ٨ (ب) ١٨ (ج) ٥ (د) ١٥

٨) تباع إحدى المكتبات (٣) أنواع من الأقلام و(٤) أنواع من الدفاتر. بكم طريقة يمكن لأحد الطلبة شراء قلم ودفتر من هذه المكتبة ؟

(أ) $\frac{14}{(3-4)!}$ (ب) 4×3 (ج) $\frac{14}{13!(3-4)}$ (د) 14×13

٦) بكم طريقة يمكن اختيار كتابين من بين سبعة كتب مختلفة ؟

٧ ■ ١٤ ■ ٢١ ■ ٤٢ ■

١) كم عدد مكوّن من منزلتين يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام { ٥ ، ٧ ، ٨ } إذا لم يُسمح بتكرار الأرقام؟

(أ) 3×3 (ب) $2, 3$ (ج) $\binom{3}{2}$ (د) $8 \times 7 \times 5$

١) بكم طريقة يمكن اختيار قميص وحذاء لشرائهما من محل تجاري يبيع (٣) أنواع من القمصان و(٤) أنواع من الأحذية؟

(أ) 14×13 (ب) $3, 4$ (ج) 4×3 (د) $\binom{4}{3}$

التباديل

- عندما يتأهل لمباراة نهائية ٣ أفرقة مثلاً فريق (**الأردن ومصر وفلسطين**) لتحديد المركز الاول والثاني منهم ، فإن الترتيب (**الأردن وفلسطين**) يختلف عن الترتيب (**فلسطين والأردن**) لان في الاول تعني ان الاردن هي المركز الاول وفلسطين هي في المركز الثاني ويمكن حل هذا السؤال بمبدأ العد عدد طرق اختيار المركز الاول × عدد طرق اختيار المركز الثاني

$$٣ \times ٢ = ٦ \text{ طرق (لاحظ ان الترتيب مهم)}$$


ويمكن حل هذا السؤال بالتباديل حيث تكتب :

ل (٢ ، ٣) وتقرأ تباديل ٣ مأخوذه ٢ في كل مرة

وتحل وفق القانون التالي :

حيث **ن** تمثل عدد العناصر الكلي
ل (ن، ر) = $\frac{n!}{(n-r)!}$ تمثل عدد الحدود المطلوبة

ففي السؤال السابق ..

(ن) = ٣ (عدد الأفرقة الكلي المشاركة في التصفيات)

(ر) = ٢ (عدد الأفرقة التي ستعطب مباراة في كل مرة)



ووفق القانون سيكون الحل ...

$$ل(٢،٣) = \frac{٣!}{!(٢-٣)} = \frac{٦}{!١} = ٦ \text{ طرق}$$

ويمكن استخدام القانون التالي ..

$$L(n, r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

(أي نطرح واحد من قيمة n في كل مرة)



$$L(3, 2) = 2 \times 3 = 6$$

(لاحظ اننا قمنا بفرض العدد ٣ بناء على العدد الثاني وهو (٢) اي سيكون لدي منزلتين فقط)

$$L(5, 3) = 3 \times 4 \times 5 = 60$$

مثال جد قيمة ما يلي ...



$$L(6, 4) = 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 840$$

عدد الحدود

لاحظ ان هذه الاعداد تمثل !٦

$$(ب) L(9, 3) = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{1 \times 2 \times 3} = \frac{9!}{(9-3)!} = 840$$

$$L(9, 3) = 7 \times 8 \times 9 = 504$$

قِف بِثِقَةٍ ;

إِبْتِسِمَ بِقُوَّةٍ ;

وَإِجْعَلُهُمْ مَذْهُلِينَ

عَنْ سِرِّ تِلْكَ الْإِبْتِسَامَةِ .

$$(ج) L(8, 2) = 8 \times 7 = 56$$

قوانين يجب حفظها ...

$ل(ن، ١) = ن$ 

$ل(ن، ن) = ن!$ 

$ل(ن، ٠) = ١$ 

$ل(ن، ن-١) = ن!$ 



أ) $ل(١٠، ٠) =$

ب) $ل(٦، ٤) =$

ج) $ل(٥، ٥) =$

د) $ل(١٠، ٣) =$

و) $ل(٥، ٤) + ٣ = !$

إجمل من براك
يدعو لمن ربك

المجاهيل في التباديل

مثال.. جد قيمة المتغير (ن، ر) فيما يلي.



(أ) $L(8, r) = 1680$ **الحل..** (ابحث عن ارقام اكبرها الـ ٨ وحاصل ضربها = ١٦٨٠)

$1680 = 8 \times 7 \times 6 \times 5$ عدد الارقام المضروبه = ٤ ومنه $r = 4$

(ب) $L(6, r) = 90$ (بالقسمة على ٣) $L(6, r) = 30$ (أعداد متتالية اكبرها ٦ وحاصل ضربها ٣٠)

$30 = 5 \times 6$ ومنه $r = 2$ (عدد الأرقام الذي حاصل ضربها ٣٠ وأكبرها ٦)

(ج) $L(n, 2) = 72$ (نبحث عن رقمين متتالين حاصل ضربهما ٧٢) $72 = 8 \times 9$ ومنه $n = 9$

(د) $L(2, n) = 60$ (بالقسمة على ٢) $L(2, n) = 30$ (عددين متتالين حاصل ضربهما ٣٠) $30 = 5 \times 6$ ومنه $n = 6$

(و) $L(3, n) = 210$ (نبحث عن ٣ أرقام متتالية حاصل ضربها ٢١٠) $210 = 5 \times 6 \times 7$ ومنه $n = 7$

(د) $L(3, n) = L(2, n) = 2$ في هذه الحالة نقوم بفرط الحد الاول حسب قيمة ر (هنا ٣ حدود) ونفرط الحد الثاني حسب قيمة ر (هنا ٢)

$L(3, n) = (n-1)(n-2) = L(2, n) = 2 = n(n-1)$ (لاحظ انه يوجد ٣ حدود قمنا بفتحها)

$n(n-1)(n-2) = n(n-1)$ (نختصر)

يبقى ... $(n-2) = 2$ ومنه $n = 4$ وهو المطلوب

(هـ) ما عدد تباديل ٤ عناصر ماخوذ ٢ في كل مرة.

الحل. $L(4, 2) = 4 \times 3 = 12$

(ز) بكم طريقة يمكن جلوس ٤ أشخاص على ٤ مقاعد مرقمة.

الحل. $L(4, 4) = 4! = 24$

اختبر نفسك

- (أ) إذا علمت أن $(n-1) = 24$ ، فإن قيمة (n) تساوي
- (ب) عدد التباديل الثلاثية المأخوذة من مجموعة سداسية هو
- (ج) كم عدد تباديل مجموعة من (7) عناصر مأخوذة (3) عناصر كل مرة
- (د) إذا كان $n = 24$ ، فإن قيمة (n) تساوي : $2 + 3$! تساوي
- (ز) بكم طريقة يمكن اختيار كتابين من بين سبعة كتب مختلفة
- (ر) بكم طريقة يمكن اختيار قميص وحذاء لشرائهما من محل تجاري يبيع (3) أنواع من القمصان و (4) أنواع من الأحذية

تحديد أوقات الاستراحة

كل من يتعب له الحق أن يستريح بل أن الاستراحة هي واجب حتى يستطيع الطالب أن يتابع مهماته بنشاط وكفاءة وبعض الطلاب ينسون حقهم في الاستراحة فيرتكبون أحد الأخطاء التالية :-

1 - بعض الطلاب يذكرون على حساب علاقاتهم الاجتماعية فلا أصدقاء لهم ولا زيارات اجتماعية يقومون بها وهذا قد يسبب لهم مشكلات في التكيف الاجتماعي مستقبلا

2 - بعض الطلاب يذكرون لمدة خمس ساعات وهذا إرهاق ويمكن أن تتخذ الاستراحة أشكالاً متنوعة منها :-

أ - إن تناول وجبة الطعام وهو شكل من أشكال الاستراحة من المذاكرة

ب - إن أداء الصلاة هو أيضا استراحة من المذاكرة

ج - إن الاستحمام هو أيضا استراحة من المذاكرة

د - إن الاستماع الى كل ما هو مفيد سواء من الإذاعة أو عن طريق التلفاز يعد من أشكال الاستراحة

هـ - إن ممارسة الرياضة هي أيضا استراحة من

التوفيق

مفهوم التوافيق



ان ترتيب العناصر كان مهماً في التباديل بمعنى ان أي اختلاف في ترتيب العناصر يعد تبديلاً مختلفاً ولكن في التوافيق الترتيب غير مهم وللتوصل الى مفهوم التوافيق تتبع المثال التالي :

قرر معلم العلوم في مدرسة ما اختيار طالبين فقط من مجموعة طلاب {أ، ب، ج، د} لمساعدته في اجراء تجربة ما لاحظ ان المجموعات التي يمكن تكوينها

$$\{س، ج، د\} ، \{س، ج، د\} ، \{س، ج، د\} ، \{س، ج، د\} ، \{س، ج، د\} ، \{س، ج، د\}$$

حيث تسمى كل واحدة من هذه المجموعات توفيقاً

لاحظ ان ترتيب العناصر هنا ليس مهماً ، مثلاً المجموعة {أ، ب} هي نفسها {ب، أ}

وبشكل عام... توافيق = $\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$ مجموعة عدد عناصرها (ن) مأخوذة منها (ر) عنصر

$$\geq r \geq n ، حيث ن ، ر عدنان طبيعيان . \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

(تستخدم أياً شئت منهما)



جد ما يلي ...

$$(أ) \binom{5}{2} \text{ لو طبقنا القانون } \dots = \frac{L(5, 2)}{2!} = \binom{5}{2}$$

$$10 = \frac{4 \times 5}{2} = \frac{L(5, 2)}{2!}$$

$$\text{ولو طبقنا القانون } \dots = \frac{L(n)}{(r-n)!r!} = \binom{n}{r}$$

$$10 = \frac{\cancel{13} \times 4 \times 5}{\cancel{13} \times 12} = \frac{!5}{!3 \times !2}$$

$$1 = \frac{\cancel{7}}{(\cancel{7})^1} = \frac{!7}{!(0-7)!0} = \binom{7}{0} \text{ (ب)}$$

$$7 = \frac{\cancel{7} \times 7}{\cancel{7} \times !1} = \frac{!7}{(!6)!1} = \frac{!7}{!(1-7)!1} = \binom{7}{1} \text{ (ج)}$$

$$1 = \frac{!7}{!0 \times !7} = \frac{!7}{!(7-7)!7} = \binom{7}{7} \text{ (د)}$$



الفشل يصيب
الذين يقعدون
دائماً وينتظرون
النجاح ان ياتي

د. إبراهيم الفقي رحمه الله

قوانين مهمة يجب استخدامها

$$n = \binom{n}{1-n} \quad (٣)$$

$$1 = \binom{n}{n} \quad (١)$$

$$1 = \binom{n}{0} \quad (٤)$$

$$n = \binom{n}{1} \quad (١)$$



أمثلة محلولة ..

(أ) عدد توافيق ٦ عناصر مأخوذة (٣) عناصر في كل مرة؟

$$\text{الحل.} \quad ٢٠ = \frac{L(٣, ٦)}{!٣} = \binom{٦}{٣}$$

(ب) عدد توافيق ٥ عناصر مأخوذة (٣) عناصر في كل مرة؟

$$\text{الحل.} \quad ١٠ = \frac{L(٣, ٥)}{!٣} = \binom{٥}{٣}$$

(ج) ما عدد المجموعة الجزئية الثنائية التي يمكن تكوينها من بين ٥ عناصر

$$\text{الحل.} \quad ١٠ = \frac{L(٢, ٥)}{!٢} = \binom{٥}{٢}$$



التردد ضعف
مردده إلى عدم
الثقة بالنفس

المجاهيل في التوافيق



أولاً: المجهول فوق الحل : المجهول = حاصل جمع الي تحت

أمثله



(أ) جد قيمة س ، $\binom{س}{٥} = \binom{س}{٧}$ الحل .. س = ٥ + ٧ = ١٢

(ب) جد قيمة س ، $\binom{س}{٢} = \binom{س}{٣}$ الحل ... س = ٢ + ٣ = ٥

(ج) $\binom{س٢}{١} = \binom{س٢}{٧}$ الحل ... س٢ = ١ + ٧ = ٨ ومنه س = ٤

لاحظ انه يوجد حل وحيد فقط جمع اللي تحت



كل مياه البحر لا تقدر
على إغراق السفينه إلا اذا
.... تسلل الماء داخلها
كذلك الفشل لا يستطيع أن
يسيطر عليك، إلا إذا تسلل
.... التشاؤم إلى نفسك

الحل ٢	الحل ١
المجهول = حاصل طرح الي قبالي	مجهول = الي قبالي

ثانياً: المجهول تحت هنا يكون لدينا حلان وهما ..

أمثلة ...

(أ) جد قيمة ك ، $\binom{5}{2} = \binom{5}{ك}$ الحل الاول .. ك = ٢

الحل الثاني.. ك + ٢ = ٥ ومنه ك = ٣



(ب) جد قيمة س ، $\binom{6}{2} = \binom{6}{س٢}$ الحل الاول .. س٢ = ٢ ومنه س = ١

الحل الثاني.. س٢ + ٢ = ٦ ومنه س = ٢

(ج) جد قيمة ل ، $\binom{10}{4} = \binom{10}{ل٢}$ الحل الاول .. ل٢ = ٤ ومنه ل = ٢

الحل الثاني.. ل٢ + ٤ = ١٠ ومنه ل = ٣



اختبر نفسك

جد قيمة (س) فيما يلي ..

(ج) $\binom{8}{6} = \binom{8}{س٢}$

(أ) $\binom{س}{7} = \binom{س}{3}$

(د) $\binom{12}{1+س} = \binom{12}{٥+س٢}$

(ب) $\binom{10}{1+س} = \binom{10}{س٢}$

سيكرهونك لفشلك
وسيكرهونك لنجاحك
في الحالتين تجاهلهم

المسائل المفصلة



في التوفيق والتبادل

مثال: جد عدد طرق اختيار لجنة ثلاثية من بين ٤ طلاب و ٦ معلمين في الحالات الآتية ؟

(أ) رئيس اللجنة من المعلمين. **الحل.** (بما ان رئيس معناته الترتيب مهم أي تبادل ..)

عدد طرق اختيار الرئيس × عدد طرق اختيار الباقي

$$ل (١, ٦) \times \binom{٩}{٢}$$

(لاحظ ان السؤال لم يحدد الباقي هل من الطلبة أم من المعلمين لذلك سيكون لدينا ٩ أي (٤+٥) لنختار منهم ٢ لنكمل اللجنة كون اللجنة ثلاثية)

الـ ٥ ما تبقى من المعلمين بعد اختيار الرئيس منهم

(ب) رئيس اللجنة من المعلمين والباقي من الطلبة. **الحل.** (بما ان رئيس معناته الترتيب مهم أي تبادل ..)

عدد طرق اختيار الرئيس × عدد طرق اختيار الباقي

$$ل (١, ٦) \times \binom{٤}{٢}$$

(لاحظ ان السؤال بعد تحديد الرئيس حدد ان الباقي من الطلبة عكس فرع (أ) من السؤال، لهذا كان تكملة اللجنة سنختارهم من الطلبة فقط)

(ج) جميع أعضاء اللجنة من المعلمين. **الحل...** (لاحظ انه اللجنة جميعها من المعلمين اي لن تختار اي طالب فيها)

$$طريقة ٢٠ = \binom{٦}{٣}$$

(د) رئيس اللجنة من المعلمين ونائبة من الطلبة. (لاحظ ان الرئيس من المعلمين أي تبادل والنائب من الطلبة كمان تبادل)

عدد طرق اختيار الرئيس (من المعلمين) × عدد طرق اختيار نائبه (من الطلبة) × باقي اللجنة (لم يحدد هل هم من الطلبة أم من المعلمين)

$$ل (١, ٦) \times ل (١, ٤) \times \binom{٨}{١}$$

(الـ ٨ هي مجموع ما تبقى من المعلمين والطلبة بعد اختيار الرئيس والنائب)

(الـ ١ هي مجموع ما تبقى من اللجنة حيث اننا اخترنا اثنان منها فيبقى واحد)

أسئلة: على الأقل ، على الأكثر




دائماً على التوافق



مجموعة مكونة من ٥ معلمين و ٤ طلاب يراد تكوين لجنة ثلاثية في الحالات التالية .

(أ) تتكون من معلم واحد على الأقل؟ الحل:


(على الأقل معناها زيادة، عثمان هيكل نرسم مفتاح الحل بدأ من الرقم المعطى بالسؤال وهو واحد ...)

(أكتب رمز التوافق مرتين تحت كل رقم) ٣ + ٢ + ١ 

$$(\quad) \times (\quad) + (\quad) \times (\quad) + (\quad) \times (\quad)$$


(كتبنا عدد المعلمين ثم الطلبة على جميع رموز التوافق الموجودة)

$$(\quad) \times (\quad) + (\quad) \times (\quad) + (\quad) \times (\quad)$$

ننزل المفتاح بدء من ١ في رمز التوافق الاول ونكملة لعدد اللجنة الكلي وفي هذا السؤال ثلاثية 

$$(\quad) \times (\quad) + (\quad) \times (\quad) + (\quad) \times (\quad)$$

الباقي من اللجنة الثلاثية بعد اختيار الاول

(ب) تتكون من طالب واحد على الأكثر الحل: 

على الأكثر تعني نقصان

$$(\quad) \times (\quad) + (\quad) \times (\quad)$$

(المقصود احتمال ان يكون في اللجنة طالب واحد

فقط واثنان من المعلمين)

(المقصود احتمال ان يكون ولا طالب في اللجنة)

اختبر نفسك

(أ) مجموعة كتب مكونة من ٨ كتب علمية و ٦ كتب أدبية يرغب طالب في اختيار ثلاثة كتب منها بكم طريقة يمكن اختيار الكتب الثلاثة بحيث يكون من بينها كتاب علمي على الأقل؟

(ب) مجموعة مكونة من ٦ معلمين و ٤ إداريين بكم طريقة يمكن تكوين لجنة ثلاثية منهم بحيث تتكون اللجنة من معلمين اثنين على الأكثر؟

(ج) مجموعة مكونة من ٣ نساء و ٤ رجال بكم طريقة يمكن تكوين لجنة رباعية منهم بحيث رئيس اللجنة من الرجال ونائبه من النساء؟

(د) من مجموعة الأرقام { ١ ، ٧ ، ٥ ، ٢ } كم عدداً يمكن تكوينه من ٣ منازل بحيث لا يسمح تكرار الرقم؟

(و) بكم طريقة يمكن أن يجلس ٥ طلاب على خمس مقاعد موضوعة في صف واحد؟

(ز) بكم طريقة يمكن أن يجلس ٥ طلاب على ٣ مقاعد موضوعة في صف واحد؟



الفشل يصيب
الذين يقعدون
دائماً وينتظرون
النجاح ان ياتي

د. إبراهيم الفقي رحمه الله

جميع الأسئلة الوزارية على هذا الدرس من عام ٢٠٠٨ لغاية ٢٠١٩م

٤) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار لجنة مكونة من مدير ونائب له وأمين سرّ من بين (٥) مرشحين؟

- (أ) ٦ (ب) ١٠ (ج) ٦٠ (د) ١٢٠

(ج) جد قيمة : $\frac{L(3, 8)}{3!}$

٢) إذا كان $\binom{n}{3} = \binom{n}{5}$ ، فإن قيمة (ن) تساوي :

- (أ) ٣ (ب) ٥ (ج) ٨ (د) ١٥

٣) بكم طريقة يمكن اختيار (٣) معلمين وطالبين لتشكيل لجنة في إحدى المدارس من بين (٥) معلمين ، (٨) طلاب؟

(ج) جد قيمة (ن) التي تحقق المعادلة $L(3, n) = L(2, n)$

(٤) قيمة $\binom{7}{1}$ تساوي :

- (أ) ١٧ (ب) ٧ (ج) ١٦ (د) ٦

(أ) جد قيمة (ن) إذا علمت أن : $L(2, 5) + \binom{4}{1} = n$

(أ) جد قيم س التي تحقق المعادلة $\binom{8}{6} = \binom{8}{s}$

(٥) $L(2, 7)$ تساوي :

- (أ) $\frac{17}{12}$ (ب) $\frac{17}{12!15}$ (ج) $\frac{17}{15}$ (د) ١٢ ١٧

(أ) إذا علمت أن $\binom{8}{6} = \binom{8}{s}$ فجد قيم س .

٦) في إحدى الكليات الجامعية (٣١) مدرساً أرادت الإدارة أن تختار منهم عميداً للكلية ونائباً للعميد فإن عدد الطرق الممكنة لذلك هو :

- (أ) ١٣١ (ب) $\binom{31}{2}$ (ج) ١٢ (د) $L(2, 31)$

٦) إذا علمت أن $(1 - n) = 24$ ، فإن قيمة n تساوي :

- أ) ٣ ب) ٤ ج) ٥ د) ٢٥

٧) عدد التباديل الثلاثية المأخوذة من مجموعة سداسية هو :

- أ) 3×6 ب) 6×3 ج) $\binom{6}{3}$ د) $(3, 6)$

٥) بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة طلاب من بين (١٠) طلاب لتشكيل لجنة للمشاركة في إحدى المؤتمرات؟

- أ) $(3, 10)$ ب) ١٣ ج) $\binom{10}{3}$ د) ١١٠

٧) بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب من بين (٨) موظفين في إحدى الشركات؟

- أ) $\binom{8}{2}$ ب) ١٢ ج) 8×17 د) $(2, 8)$

أ) حل المعادلة الآتية : $\binom{9}{2} = \binom{9}{s}$

٥) كم عدد تباديل مجموعة من سبعة عناصر مأخوذة ثلاثة عناصر كل مرة ؟

- أ) 7×3 ب) $(3, 7)$ ج) $\binom{7}{3}$ د) 7×3

٦) $\binom{7}{2}$ تساوي :

- أ) $\frac{(2, 6)}{16}$ ب) $\frac{16}{14}$ ج) $\frac{(2, 6)}{12}$ د) $\frac{16}{12}$

أ) إذا كان $2 \text{ ل } (r, 6) = 60$ ، فجد قيمة r

ب) جد قيمة : $13 \times \binom{7}{5}$

٥) بكم طريقة يمكن اختيار (٤) طلاب و (٣) طالبات لتشكيل لجنة في إحدى الكليات من

بين (١٠) طلاب و (٥) طالبات؟

- أ) $\binom{10}{4} \binom{5}{3}$ ب) $\binom{10}{3} \binom{5}{4}$

- ج) $(4, 10) \times (3, 5)$ د) $(3, 10) \times (4, 5)$

(٧) إذا كان $\binom{s}{5} = \binom{s}{4}$ ، فإن قيمة s تساوي :

- أ (٤) ب (٥) ج (٩) د (٢٠)

ج) إذا كان $3^n + !3 = 366$ ، فجد قيمة n .

٨) ما عدد تبديل مجموعة عدد عناصرها (٥) مأخوذة (٣) من العناصر في كل مرة ؟

- أ) $\frac{!5}{!2}$ ب) $\frac{!5}{!2!3}$ ج) $\frac{!5}{!3}$ د) 3×5

(٧) إذا كان $l(3, n) = 60$ ، فإن $\binom{n}{3}$ يساوي :

- أ (٣٦٠) ب (١٨٠) ج (٢٠) د (١٠)

أ) حل المعادلة الآتية:

$$l(n, 3) = \binom{n}{4} \times !4 \text{ ، حيث } n \text{ عدد صحيح موجب.}$$

أ) حل المعادلة الآتية:

$$l(n, 3) = 5 \times l(n, 2) \times \binom{4}{3} \text{ ، حيث } n \text{ عدد صحيح موجب.}$$

أ) حل المعادلة الآتية:

$$n! = l(n, 3) \times !6$$

أ) حل المعادلة الآتية:

$$\frac{l(n, 4)}{!5} = \binom{n}{5}$$

ب) جد قيمة المقدار الآتي:

$$\frac{\binom{5}{2} + !3}{l(4, 1)}$$

(١) بكم طريقة يمكن اختيار (٣) طلاب من بين (٥) طلاب للعمل في مشروع علمي؟

- (أ) ل (٣، ٥) (ب) $\binom{5}{3}$ (ج) 15×13 (د) 5×3

(٢) إذا كان ل (ن، ٢) = ١٢ ، فإن قيمة ن تساوي:

- (أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ١٢

(١٢) إذا كان ن! + ١٤ = ١٤٤ ، فما قيمة ن ؟

- (أ) ٤ (ب) ٣ (ج) ٦ (د) ٥

(١٣) بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ومساعد له وأمين سر مختلفين من بين (٩) موظفين في إحدى الشركات؟

- (أ) $\binom{9}{3}$ (ب) ل (٣، ٩) (ج) 3×9 (د) ١٣

(١٤) إذا كان ل (ن، ٣) = ٦٠ ، فإن قيمة $\binom{ن}{٣}$ تساوي:

- (أ) ٣٦٠ (ب) ١٨٠ (ج) ٢٠ (د) ١٠

(٢٨) إذا كان $\binom{٥}{١} + ٣(ن!) = ١١$ ، فإن قيمة ن تساوي:

- (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٦

(٢٩) بكم طريقة يمكن اختيار (٤) طلاب و (٣) طالبات لتشكيل لجنة في إحدى الكليات من بين (١٠) طلاب و (٥) طالبات؟

- (أ) $\binom{١٠}{٤} \binom{٥}{٣}$ (ب) $\binom{١٠}{٣} \binom{٥}{٤}$

- (ج) ل (٤، ١٠) × ل (٣، ٥) (د) ل (٣، ١٠) × ل (٤، ٥)

(٣٠) إذا كان ل (ن، ٣) = ٦٠ ، فإن $\binom{ن}{٣}$ يساوي:

- (أ) ٣٦٠ (ب) ١٨٠ (ج) ٢٠ (د) ١٠

المتغير العشوائي المنفصل وتوزيع ذي الحدين

قانون توزيع ذو الحدين

$$P(X=r) = \binom{n}{r} (1-p)^{n-r} p^r$$

n : عدد مرات إجراء التجربة

r : عدد مرات نجاح التجربة

p : احتمال نجاح التجربة في المحاولة الواحدة

ملاحظة : لا يمكن استخدام القانون إلا إذا كانت ل (س = رقم)



إيجاد المجهول في جدول التوزيع الاحتمالي

(كل ما عليك فعله هو جمع الارقام بدون فواصل ثم تكمل للعشرة وتضع الفاصلة العشرية)

مثال: اذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س)
معطى بالمجموعة

$$\{(0, 2), (1, 4), (2, 0)\}$$

الحل: أجمع الارقام (٠, ٢ + ٠, ٤) كأنك تحكي (٤+٢)

نلاحظ ان الناتج = ٦ ... ارجع مرة ثانية وا طرح ١٠ - ٦ = ٤

$$\boxed{٠, ٤ = ب}$$



(ب) يمثل الجدول التالي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) ، ما قيمة الثابت (ب)

٢	١	٠	(س)
٠,٥	ب	٠,٢	ل(س)

الحل: ($٧ = ٥ + ٢$) ... ($٣ = ٧ - ١٠$) اذا $ب = ٠,٣$



(ج) اعتمد على جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) في ايجاد قيمة (أ)

٢	١	٠	(س)
٠,٠٢	أ	٠,٨١	ل(س)

الحل: ($٨٣ = ٢ + ٨١$) ... ($١٧ = ٨٣ - ١٠٠$) اذا $أ = ٠,١٧$

(لاحظ لانه هنا من ١٠٠ وليس من عشرة)



إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س معطى بالجدول، جد قيمة المتغيرات؟

٣	٢	١	٠	س
٠,١	ج	٠,٤	٠,٣	ل(س)

(أ)

٣	٢	١	٠	س
٠,١	ب	٠,٢	٠,٦	ل(س)

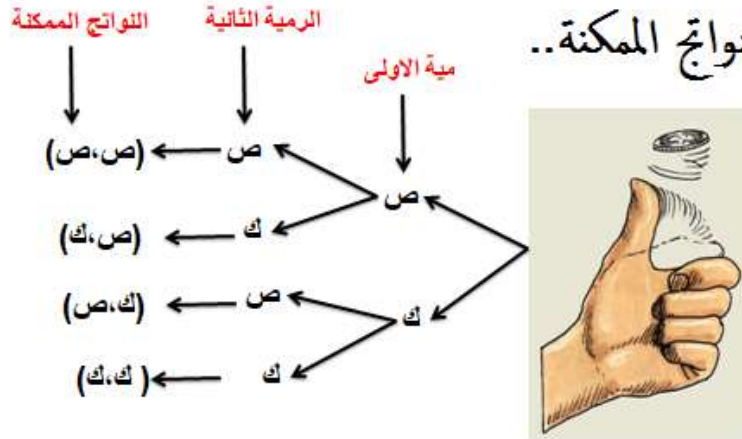
(ب)

٣	٢	١	٠	س
أ	٠,١	٠,٣	٠,٢	ل(س)

(ج)

مثال: اذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد مرات ظهور الصورة عند رمي قطعة نقود مرتين ، اكتب الفضاء العيني للتجربة ، ثم جد القيم الممكنة للمتغير العشوائي (س) واكتب التوزيع الاحتمالي

الحل: التمثيل بطريقة الشجرة لمعرفة النواتج الممكنة..



الفضاء العيني = { (ص،ص) (ص،ك) (ك،ص) (ك،ك) }

اذا جدول التوزيع الاحتمال لظهور صورة في احد المرات

س	٠	١	٢
ل(س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

لاحظ معي

- العدد صفر يعني عدم ظهور الصورة في أي رمية

- العدد ١ تعني ظهور الصورة مرة واحدة فقط

- العدد ٢ تعني ظهور الصورة في الرمتين معا

لاحظ كذلك ان مجموع ل(س) = واحد صحيح

اختبر نفسك

(١) اذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الاطفال الاناث في تجربة اختيار عشوائي لعائلة لديها طفلان ، وتسجيل النتائج حسب الجنس وتسلسل الولادة ، فجد القيم الممكنة للمتغير العشوائي واكتب التوزيع الاحتمالي ؟

مثال إذا كان (س) متغيرا عشوائيا ذا حدين معاملاته $n = 5$ ، $p = 0.3$ ، فجد :

الحل : أولا نكتب قيم $n = 5$ ، $p = 0.3$ ، $q = 1 - p = 0.7$ معطى من السؤال معطى من السؤال نكمل للعشرة

$$P(X=2) = \binom{5}{2} (0.3)^2 (0.7)^3 = \binom{5}{2} (0.09) (0.343) = 10 \times 0.03087 = 0.3087$$

$$P(X=1) = \binom{5}{1} (0.3)^1 (0.7)^4 = 5 \times 0.3 \times 0.2401 = 0.36015$$

$$P(X=0) = \binom{5}{0} (0.3)^0 (0.7)^5 = 1 \times 1 \times 0.16807 = 0.16807$$

$$P(X=4) = \binom{5}{4} (0.3)^4 (0.7)^1 = 5 \times 0.0081 \times 0.7 = 0.2835$$

$$P(X=5) = \binom{5}{5} (0.3)^5 (0.7)^0 = 1 \times 0.00243 \times 1 = 0.00243$$

اختبر نفسك

(١) مصنع يحتوي على (٥) آلات من نوع واحد إذا كان احتمال أن تحتاج أي آلة إلى اصلاح في السنة الخامسة من عمرها هو (٠,٢) ، احسب احتمال

(أ) ألا تحتاج أي من الآلات إلى اصلاح

(ب) أن تحتاج اثنتان فقط إلى اصلاح

(ج) أن تحتاج اثنتان على الأكثر إلى اصلاح

(د) أن تحتاج واحدة على الأقل إلى اصلاح

السؤال الثاني: صندوق يحوي (٥) كرات ، (٣) منها حمراء ، والبقية زرقاء اللون . إذا سحبت من الصندوق كرتان على التوالي مع الإرجاع ، ودل المتغير العشوائي (س) على عدد الكرات الحمراء المسحوبة ، فأنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) .

٢	١	٠	س
			ل (س)

الحل: $n =$ عدد الكرات المسحوبة $\left[\quad \right]$
 $a =$ عند ما يدل عليه المتغير العشوائي $\frac{\text{العدد الكلي}}{\text{العدد الكلي}} = n$

$$ل (س = ٣) = \binom{n}{r} \times 1^r \times (1-1)^{n-r} = 1 - n$$

$$ل (س = ٢) = \binom{n}{r} \times 1^r \times (1-1)^{n-r} = 1 - n$$

$$ل (س = ١) = \binom{n}{r} \times 1^r \times (1-1)^{n-r} = 1 - n$$

$$ل (س = ٠) = \binom{n}{r} \times 1^r \times (1-1)^{n-r} = 1 - n$$



جميع الأسئلة الوزارية على هذا الدرس من عام ٢٠٠٨ لغاية ٢٠١٩م

٦) إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (س) معطى بالجدول التالي :

س	٠	١	٢	٣
ل (س)	٠,٢	ج	٠,٣	٠,١

فإن قيمة (ج) تساوي :

أ) ٠,١ ب) ٠,٢ ج) ٠,٣ د) ٠,٤

ب) إذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذو الحدين، معاملته $n = ٤$ ، $p = ٠,٣$

أوجد كلاً مما يلي :

١) $P(S = ٢)$.

٢) $P(S \leq ٣)$.

ب) سجلت إحدى القابلات في أحد المستشفيات ولادة ثلاثة أطفال في نفس اليوم حسب الجنس وتسلسل الولادة.

فإذا علمت أن الأطفال ولدوا من ثلاث أمهات وأن احتمال ولادة الطفل ذكراً يساوي احتمال ولادته أنثى :

١) إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الأطفال الذكور المسجلين في ذلك اليوم في المستشفى،

فاكتب قيم س الممكنة. (٤ علامات)

٢) ما احتمال أن يكون جميع المواليد من الإناث؟ (٣ علامات)

٧) إذا كان احتمال نجاح زراعة التفاح في منطقة جرش $(٠,٨)$ ، زرع شخص (٣) شجرات

تفاح في حديقة بيته، ما احتمال نجاح زراعتها جميعاً؟

أ) ٠,٢ ب) $(٠,٢)^٢$ ج) $(٠,٨)^٢$ د) ٠,٢٤

أ) أجريت ثلاث عمليات جراحية في أحد المستشفيات الأردنية وكان احتمال نجاح العملية

الواحدة يساوي ٨٠٪ .

١) إذا دل المتغير العشوائي س على عدد العمليات الجراحية الناجحة فاكتب قيم س الممكنة. (٤ علامات)

٢) ما احتمال نجاح عملية جراحية واحدة فقط؟ (علامتان)

ب) إذا كانت نسبة القطع المعيبة في إنتاج أحد المصانع ١٠٪ ، فإذا أخذت (٤) قطع عشوائياً

من إنتاج المصنع فما احتمال أن تكون بينها قطعة واحدة على الأكثر معيبة؟

ج) يحتوي صندوق (٤) كرات حمراء و (٣) كرات بيضاء، سحبت من الصندوق كرتان على التوالي مع الإرجاع. إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الكرات الحمراء المسحوبة فاكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س).

(٦ علامات)

أ) في تجربة رمي قطعة نقد مرتين إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد مرات ظهور الصورة :

(١) اكتب الفضاء العيني لهذه التجربة.

(٢) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س).

٨) إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الأطفال الذكور في تجربة اختيار عشوائي لعائلة لديها (٣) أطفال

وتسجيل النتائج حسب الجنس وتسلسل الولادة، فإن القيم الممكنة للمتغير العشوائي (س) هي :

أ) (١، ٢، ٣) ب) (١، ٢، ٣) ج) (١، ٢) د) (١، ٢، ٣، ٤)

ب) إذا كان احتمال أن يصيب شخص ما هدفاً في كل طلقة يطلقها على الهدف يساوي (٠,٦) ، فإذا أطلق (٤)

طلقات على الهدف، فما احتمال أن يصيب الهدف مرة واحدة على الأقل؟

ج) إذا كان س متغيراً عشوائياً ذا الحدين معاملاه $n = 2$ ، $p = 0,1$ ، اكتب جدول التوزيع

(٦ علامات)

الاحتمالي للمتغير العشوائي س

أ) إذا كان س متغيراً عشوائياً ذا الحدين معاملاه $n = 3$ ، $p = 0,6$ ، فجد ل (س) $(2 \leq)$

٦) إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س معطى بالمجموعة

$\{(1, 0, 4), (2, 0, 5), (3, 0, 6)\}$ فما قيمة ب ؟

أ) (١) ب) (٠,٩) ج) (٠,١) د) (٠,٠١)

ب) إذا كان س متغيراً عشوائياً ذا الحدين معاملاه $n = 2$ ، $p = 0,3$ ، فجد :

(١) قيم س.

(٢) جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س .

ب) زرع شخص شجرتين في حديقة منزله، إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الأشجار الناجحة

وكان احتمال نجاح زراعة الشجرة الواحدة (٠,٨) ، فأجب عما يأتي:

(١) اكتب قيم س

(٢) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

(ج) إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الأطفال الذكور في تجربة اختيار عشوائي لعائلة لديها (٣) أطفال وتسجيل النتائج حسب الجنس وتسلسل الولادة وأن احتمال ولادة الطفل ذكراً يساوي احتمال ولادته أنثى، اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س . (٥ علامات)

(ب) قررت إحدى شركات استيراد مصابيح كهربائية رفض أية شحنة من مستورداتها إذا وُجِدَت وحدتان معيبتان أو أكثر في عينة عشوائية مكونة من (٨) وحدات. إذا كانت نسبة المعيب في إنتاج الشركة الموردة ١٠٪، فما احتمال قبول الشركة للشحنة؟ (٦ علامات)

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	٠,٣	٠,٤	ج	٠,١

(٢) إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ع معطى بالجدول المجاور، فما قيمة الثابت ج؟
 (أ) ٠,٨ (ب) ٠,٠٢ (ج) ٠,٠٨ (د) ٠,٢

(ج) إذا كان س متغيراً عشوائياً ذا الحدين، معاملاته $n = ٢$ ، $p = ٠,٩$ ، فاكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س . (٦ علامات)

(١٦) غرس مزارع (٤) شجرات تفاح، وكان احتمال نجاح زراعة الشجرة الواحدة (٠,٨)، ما احتمال نجاح زراعتها جميعاً؟

(أ) (٠,٨) (ب) (٠,٢) (ج) ٠,٢ (د) ٠,٣٢

(١٥) إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) معطى بالمجموعة الآتية:

$\{ (١, ٣, ٠), (٢, ٥, ٠), (٣, ٢, ٠) \}$ ، فما قيمة الثابت ل ؟

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,١ (ج) ٠,٤ (د) ٠,٨

(ب) إذا كان س متغيراً عشوائياً ذا حدين معاملاته $n = ٣$ ، $p = ٠,٩$ ، فجد كلاً مما يأتي: (٦ علامات)

(١) ل (س = ٢)

(٢) ل (س ≤ ١)

العلامة المعيارية

معنى العلامة المعيارية

إذا كان الوسط الحسابي لعينة عشوائية (\bar{s}) وكان الانحراف المعياري لها (e) ، فإن العلامة المعيارية لمشاهدة قيمتها في هذه العينة (s) هي : نسبة انحراف المشاهدة (s) عن وسطها الحسابي (\bar{s}) الى الانحراف المعياري (e) ويرمز لها بالرمز (z) أي ان :

$$z = \frac{s - \bar{s}}{e} \quad , \quad e \neq 0$$



أما إشارة (z) فتدل على موقع المشاهدة (s) فوق الوسط او تحته موجب سالب



كل مياه البحر لا تقدر
على إغراق السفينه إلا اذا
....تسلل الماء داخلها
كذلك الفشل لا يستطيع أن
يسيطر عليك، إلا إذا تسلل
....التشاؤم إلى نفسك

مثال: اذا كانت علامة سناء في اللغة العربية (٨٠) وفي اللغة الانجليزية (٧٠) وكان الوسط الحسابي لعلامات اللغة العربية (٦٨) والانحراف المعياري لها (٨) اما الوسط الحسابي لعلامات اللغة الانجليزية (٥٠) والانحراف المعياري لها (١٠) ففي أي المادتين كان مستوى تحصيل سناء افضل

الحل: كون جدول العلاما والانحرافات المعيارية لتسهيل عملية الحل

الانحراف المعياري	الوسط الحسابي	العلامة	
٨	٦٨	٨٠	اللغة العربية
١٠	٥٠	٧٠	اللغة الانجليزية

$$\frac{3}{2} = \frac{12}{8} = \frac{68 - 80}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$2 = \frac{50 - 70}{10} = \frac{-20}{10} = -2$$

ومنه تحصيل الطالبة في اللغة العربية أفضل

القلق لا يغير أي
شيء ، لكن الثقة
بالله تغير كل شيء

اختبر نفسك

(١) اذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ما في اللغة الانجليزية (٩٠)

والانحراف المعياري لها (١٠) ، فجد :

(أ) العلامة (س) التي قيمتها المعيارية (١,٥)

(ب) العلامة التي تنحرف فوق الوسط انحرافين معيارين

(ج) العلامة التي تنحرف تحت الوسط انحرافاً معيارياً واحداً

(٢) اذا ان الوسط الحسابي لعلامات صف ما في اللغة العربية يساوي (٧٠)

والانحراف المعياري للعلامات يساوي (٥) فجد العلامات المعيارية لعلامات

(اسامة ، رامي ، حمزة) اذا كانت علاماتهم في اللغة العربية على الترتيب

هي (٨٢ ، ٧٠ ، ٦٤) ؟

أنا
إجابي

مثال: اذا كانت العلامات المعيارية للطلبة (احمد ، جاسر ، وائل) هي (١,٥ ، ١- ، ٢-) على الترتيب وكان الوسط الحسابي لعلامات الصف (٧٠) والفرق بين علامتي احمد وجاسر (١٠) علامات ، فما العلامات الفعلية للطلبة الثلاث



الحل: (لاحظ معي ان السؤال اعطى العلامات المعيارية ولم يعطي الانحراف المعياري) هنا يوجد طريقتان للحل ..



الطريقة الاولى: (تشكيل معادلتين من خلال قانون العلامة المعيارية)



$$1م \quad \frac{70 - س}{ع} = ز \quad (\text{الضرب التبادلي}) \quad \frac{70 - س}{ع} = 1,5 \quad \text{علامة أحمد}$$

$$2م \quad \frac{70 - س}{ع} = ز \quad (\text{الضرب التبادلي}) \quad \frac{70 - س}{ع} = 1- \quad \text{علامة جاسر}$$

$$70 - س = 1,5ع$$

$$70 - س = 1ع$$

طرح ١م من ٢م

$$10 = 2,5ع - 1ع \quad \text{الفرق بين علامة أحمد وعلامة جاسر (مُعطى من السؤال) = 10}$$

$$\text{(اكمل الحل وجد العلامات الفعلية للطلبة)} \quad 10 = 1,5ع$$

الطريقة الثانية (استخدام قانون الانحراف المعياري والذي يقول ...)



علامة الطالب الاول — علامة الطالب الثاني

= ع

العلامة المعيارية للطالب الأول — العلامة المعيارية للطالب الثاني

علامة الطالب أحمد — علامة الطالب جاسر

وفي هذا المثال ع =

العلامة المعيارية للطالب أحمد — العلامة المعيارية للطالب جاسر

$$\text{(اكمل الحل بعدما تم إيجاد الانحراف المعياري)} \quad ع = \frac{10}{2,5} = \frac{10}{1 - 1,5}$$



اختبر نفسك

على نفس الفكرة السابقة ..



صف مكون من ١٥ طالبة، إذا علمت ان علامات الطالبات
(هدى ، رائدة ، سناء) على الترتيب (٩٠ ، ٨٠ ، ٨٠)
وعلامتهن المعيارية (٣ ، ٢ ، ١)، فما علامة سناء ؟

جميع الأسئلة الوزارية على هذا الدرس من عام ٢٠٠٨ لغاية ٢٠١٩ م

٢) إذا كان الوسط الحسابي لعلامات طلبة في مادة الجغرافيا (٦٠) والانحراف المعياري لها (٤)، فإن العلامة المعيارية التي تقابل العلامة (٥٦) هي:

١- (أ) (ب) -٤ (ج) ١ (د) ٤

٢) إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة مشاهدات يساوي (١)، وكانت المشاهدة (١٢) تقابل العلامة المعيارية (٢)، فإن المتوسط الحسابي لهذه المشاهدات يساوي:

أ) ١٥ (ب) ١٤ (ج) ١٠ (د) ٦

٤) معتمداً الجدول المجاور الذي يُبين العلامات المعيارية لطالب في أربعة مباحث، ما المبحث الذي يكون

تحصيل الطالب فيه أفضل؟

أ) الرياضيات (ب) التاريخ

ج) الجغرافيا (د) اللغة العربية

أ) إذا كانت علامتا طالبين من الصف نفسه في مبحث اللغة العربية ٩٠ ، ٧٥، والعلامتان المعياريتان المقابلتان لهاتين العلامتين هما ٢ ، ١- على الترتيب، فجد الوسط الحسابي لعلامات الطلبة في مبحث اللغة العربية في هذا الصف.
(٤ علامات)

أ) في توزيع تكراري إذا كانت العلامة الخام (٦٨) تقابل العلامة المعيارية (٥,٠)، وكان الوسط الحسابي (٦٥)، جد الانحراف المعياري للتوزيع.

(١) إذا كان الوسط الحسابي لعلامات طالبة في أحد الصفوف في مادة العلوم (٦٠) والانحراف المعياري لها (٦)،
أجب عما يأتي : (٤ علامات)

(١) جد العلامة التي تتحرف انحرافين معياريين فوق الوسط الحسابي.

(٢) إذا كان الفرق بين علامتي طالبين من الصف نفسه في مادة العلوم ٩ ، فما الفرق بين العلامتين
المعياريتين المناظرتين لهاتين العلامتين ؟

(٥) في توزيع تكراري إذا كانت العلامة الخام (٧٨) تقابل العلامة المعيارية (٣) وكان الوسط الحسابي
للتوزيع (٦٠) ، فإن الانحراف المعياري للتوزيع يساوي :

١٨ ■ ١٢ ■ ٩ ■ ٦ ■

(٥) إذا كان الوسط الحسابي لأعمار مجموعة من الأشخاص ٤٢ سنة والانحراف المعياري لها (٤) ، فإن العمر
الذي ينحرف انحرافين معياريين تحت الوسط الحسابي هو :

٣٤ (أ) ٥٠ (ب) ٤٠ (ج) ٣٨ (د)

(ب) إذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ما، في مادة الرياضيات (٦٠) والانحراف المعياري لها (٤)،
وكانت العلامة المعيارية لعلامة الطالب أحمد تساوي (-٣)، فجد علامته الفعلية التي حصل عليها.
(٦) إذا كان الوسط الحسابي لعلامات طالبة أحد الصفوف في مبحث الرياضيات (٧٠) والانحراف المعياري (٥)،
فإن العلامة المعيارية للعلامة (٦٠) هي :

٢- (أ) ١٠ (ب) ٢ (ج) ١٠- (د)

(٥) إذا كان الوسط الحسابي لعلامات اللغة العربية (٦٠) والانحراف المعياري لها (٥)،
فإن العلامة المعيارية للعلامة (٥٨) تساوي :

٢ (أ) ٠,٤ (ب) ٠,٤- (ج) ٢- (د)

(١٧) إذا كان المتوسط الحسابي لعلامات طلاب صف ما في مادة اللغة العربية (٦٢) ، والانحراف المعياري لها (٥)
فإن العلامة المعيارية للعلامة (٥٩) تساوي:

٣- (أ) ٣ (ب) ٠,٦ (ج) ٠,٦- (د)

(٨) في توزيع تكراري إذا كانت العلامة الخام (٦٠) تقابل العلامة المعيارية (٣)، وكان الوسط الحسابي (٥٤)
فإن الانحراف المعياري لهذا التوزيع يساوي :

٢- (أ) ٢ (ب) ٦ (ج) ٦- (د)

التوزيع الطبيعي

{ركز فيهم لانه احيانا بيجو ضع دائرة}

التوزيع الطبيعي المعياري : هو توزيع طبيعي وسطه الحسابي صفر وانحرافه المعياري يساوي (١) ومتغيره العشوائي العلامة المعيارية (ز) ويتم ايجاد احتمال وقوع المتغير العشوائي (ز) تحت قيمة ما او فوقها او محصورة بين قيمتين من خلال جدول التوزيع الطبيعي .



سنستخدم القواعد التالية في التوزيع الطبيعي....

(أ) اذا كانت $L (z \geq 1)$ ، حيث $1 \leq 0$ ، مباشرة من الجدول

(ب) اذا كانت $L (z \leq 1) = 1 - L (z \geq 1)$ نطرح من القيمة المستخرجة من الجدول واحد صحيح



في حال كانت قيمة (أ) سالبة ...

كل ما عليك فعله هنا عكس إشارة المقارنة (الأصغر والاكبر) ثم طبق القاعدتين (أ أو ب)

$$(1) L (z \geq 1) = L (z \leq 1) = 1 - L (z \geq 1)$$

اذا كانت سالب وأصغر نطرح واحد

$$(2) L (z \leq 1) = L (z \geq 1)$$

اذا كانت سالب واكبر مباشرة من الجدول

وما أوتيتم من العلم الا قليلا

مثال

وفي المثال يتضح المقال

ز	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠
٠,١	٠,٨٩٣٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧

(-) بالاعتماد على جدول التوزيع الطبيعي جد ما يلي..

أ) ل(ز) $(z \geq 0,52)$ لاحظ انه المقارنة أصغر (إذا مباشرة من الجدول)

كيفية استخراج الرقم من الجدول...

(اي رقم نريد استخراجة يتكون من (ج ب أ) حيث نجد الرقمين (أ ج)

بشكل أفقي والرقم (ب) عمودي ونقطة التقاطع هي المطلوبة)

هنا... ل(ز) $(z \geq 0,52)$ لاحظ أ = صفر ، ب = ٠,٥ ، ج = ٠,٢

إذا الـ ٥ نأخذها بشكل عمودي والـ ٢ بشكل أفقي

ونقطة التقاطع هي (٠,٦٩٨٥) وهو المطلوب

مثال

وفي المثال يتضح المقال

ز	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠
٠,١	٠,٨٩٣٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧

ب) ل(ز) $(z \leq 0,43)$ (لاحظ انه أكبر وموجب إذا نجد القيمة ونطرح واحد صحيح منها)

القيمة ٠,٤٣ = من الجدول (٠,٦٦٦٤) الآن نطرح واحد صحيح

(الطريقة أكمل أول رقم من اليمين الى العشرة ثم اكمل الباقي للعدد ٩)

$$\text{فتكون } 1 - 0,6664 = 0,3336$$

٠,٤٣

مثال

وفي المثال يتضح المقال

ز	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣
٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٥٠٤٠	٠,٥٠٨٠	٠,٥١٢٠
٠,١	٠,٨٩٣٨	٠,٥٤٣٨	٠,٥٤٧٨	٠,٥٥١٧
٠,٢	٠,٥٧٩٣	٠,٥٨٣٢	٠,٥٨٧١	٠,٥٩١٠
٠,٣	٠,٦١٧٩	٠,٦٢١٧	٠,٦٢٥٥	٠,٦٢٩٣
٠,٤	٠,٦٥٥٤	٠,٦٥٩١	٠,٦٦٢٨	٠,٦٦٦٤
٠,٥	٠,٦٩١٥	٠,٦٩٥٠	٠,٦٩٨٥	٠,٧٠١٩
٠,٦	٠,٧٢٥٧	٠,٧٢٩١	٠,٧٣٢٤	٠,٧٣٥٧

ج) ل(ز) $(z \leq 0,2)$ (لاحظ معي ان إشارة أ سالبة إذا نقلب إشارة المقارنة)

ل(ز) $(z \leq 0,2) =$ ل(ز) $(z \geq 0,2)$ (مباشرة من الجدول) = ٠,٥٠٨٠

مثال: اذا كان (س) متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي (٦٥) وانحرافه المعياري (٦) ، جد

(أ) ل (س ≥ ٦٨) (ب) ل (س ≤ ٥٥)

الحل: (أ) ل (س ≥ ٦٨) نجد العلامة المعيارية اولاً ... $٠,٥ = \frac{٣}{٦} = \frac{٦٥ - ٦٨}{٦}$

اذا ل (س ≥ ٦٨) = ل (س ≥ ٥٥) (من الجدول مباشرة) = ٠,٦٩١٥

(ب) ل (س ≤ ٥٥) (نجد العلامة المعيارية) ... $٢- = \frac{١٠-}{٥} = \frac{٦٥ - ٥٥}{٥}$

اذا ل (س ≤ ٥٥) = ل (س ≤ ٢٠) (بما انه سالب نقلب الاشارة) ل (س ≥ ٢٠) (مباشرة من الجدول) = ٠,٩٧٧٢

**لولا وجود عكس المعنى
لما كان للمعنى معنى**

**فلولا وجود العسر
لما كان لليسر معنى
ولولا وجود التعب
لما كان للراحة معنى
ولولا وجود الحزن**

**لما كان للفرح معنى
ولولا وجود الظلام
لما كان للنور معنى**

مسائل كلامية على التوزيع الطبيعي



مثال إذا كان س متغير عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي ٦٥



وانحرافه المعياري ٦ فجد ... (١) $P(Z \geq 68)$ (٢) $P(Z \leq 55)$

الحل: (بداية يجب تحويل القيمة (٦٨ ، ٥٥) الى معيارية كالتالي ...)

$$P(Z \geq 68) = P\left(\frac{Z - 65}{6} \geq \frac{68 - 65}{6}\right) = P\left(\frac{Z - 65}{6} \geq \frac{3}{6}\right) = P(Z - 65 \geq 3) = P(Z \geq 68) = 0.2915$$

$$P(Z \leq 55) = P\left(\frac{Z - 65}{6} \leq \frac{55 - 65}{6}\right) = P\left(\frac{Z - 65}{6} \leq -\frac{10}{6}\right) = P(Z - 65 \leq -10) = P(Z \leq 55) = 0.025$$

باستخدام القسمة الطويلة
لتحويله لكسر عشري

لولا وجود عكس المعنى
لما كان للمعنى معنى

فلولا وجود العسر
لما كان لليسر معنى
ولولا وجود التعب
لما كان للراحة معنى
ولولا وجود الحزن

لما كان للفرح معنى
ولولا وجود الظلام
لما كان للنور معنى

مثال إذا كانت (١٠٠٠٠) طالب في جامعة ما تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي مقداره (٦٥). وانحراف معياري (٥). فكم يبلغ عدد الطلبة الناجحين ، علماً بأن علامة النجاح (٦٠) ؟

ملاحظة: يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي الذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري .

٢	١,٥	١	٠,٦٧	٠,٥	٠,٤٤	٠	ز
٠,٩٧٧٢	٠,٩٣٣٢	٠,٨٤١٣	٠,٧٤٨٦	٠,٦٩١٥	٠,٦٧٠٠	٠,٥٠٠٠	ل (ل ≥ ١)

الحل : العدد الكلي = ١٠٠٠٠ طالب

$$\bar{س} = ٦٥$$

$$ع = ٥$$

$$س = \text{علامة النجاح} = ٦٠$$

في البداية نجد احتمال الناجحين ل ($س \leq ٦٠$) نحول $س \leftarrow$ إلى ل

لأنه أي طالب يحصل على علامة ٦٠ أو أكثر يعتبر ناجح

نحول العلامة ٦٠ الى علامة معيارية

$$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$$

$$ز = \frac{٦٥ - ٦٠}{٥}$$

$$ز = \frac{٥}{٥} = ١$$

$$ل (س \leq ٦٠) = ٠,٨٤١٣ = \text{اذا احتمال النجاح} = ٠,٨٤١٣$$

(من الجدول مباشرة)

عدد الطلبة الناجحين = العدد الكلي × احتمال الناجحين

$$= ٠,٨٤١٣ \times ١٠٠٠٠ = ٨٤١٣ \text{ طالب}$$

قِف بِثِقَةٍ ;

إِبْتِسِمٍ بِقُوَّةٍ ;

وِ اجْعَلْهُم مَذْهُلِينَ

عَنْ سِرِّ تِلْكَ الْإِبْتِسَامَةِ .

جميع الأسئلة الوزارية على هذا الدرس من عام ٢٠٠٨ لغاية ٢٠١٩م

ج) إذا كانت أوزان طلبة إحدى المدارس تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي يساوي (٤٥) كغم وانحرافه المعياري (٤) كغم. اختير أحد الطلبة عشوائياً، ما احتمال أن يكون من الطلبة الذين تنحصر أوزانهم بين (٤٣) كغم ، (٤٩) كغم ؟ (٦ علامات)

* ملاحظة : يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري .

ز	صفر	٠,٥	١	١,٥	٢
ل (ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢

١) تقدم (٥٠٠٠) طالب لامتحان ما، وكان توزيع نتائجهم يتخذ شكل التوزيع الطبيعي المعياري بوسط

حسابي (٧٠) وانحراف معياري (٥) ، وكانت علامة النجاح (٦٠). اختير أحد الطلبة عشوائياً :

(١) ما احتمال أن يكون الطالب من بين الناجحين ؟ (٥ علامات)

(٢) ما عدد الطلبة الناجحين في هذا الامتحان ؟ (علامتان)

ملاحظة : يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

ز	صفر	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل (ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

ب) إذا كانت أوزان الأطفال عند الولادة تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي (٣,٢) كغم وانحرافه المعياري

(٠,٤) كغم. اختير أحد الأطفال عشوائياً عند الولادة ما احتمال أن يكون وزنه أكثر من (٤) كغم ؟

ملاحظة : يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

(٥ علامات)

ز	صفر	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل (ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

١) تقدم لامتحان عام (٥٠٠٠) طالب وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٤١) ، وانحراف

معياري (٦) . جد عدد الطلبة الناجحين في الامتحان علماً بأن علامة النجاح (٥٠) . (٧ علامات)

(ملاحظة : يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي)

ز	صفر	٠,٥	١	١,٥	٢	٢,٥
ل (ز)	٠,٥٠٠٠	٠,٦٩١٥	٠,٨٤١٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨

ج) تقدم لامتحان الثانوية العامة في إحدى السنوات (٢٠٠٠) طالب من طلبة أحد الفروع المهنية ، وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٥٧) وانحراف معياري (١٦). إذا علمت أنه لا يسمح للطالب الذي معدله أقل من (٦٥) بتقديم طلبات للجامعات الحكومية، جدد عدد طلبة ذلك الفرع الذين يحق لهم تقديم تلك الطلبات.

(٧ علامات)

ملاحظة : يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي

٢,٥	٢	١,٥	١	٠,٥	صفر	ز
٠,٩٩٣٨	٠,٩٧٧٢	٠,٩٣٣٢	٠,٨٤١٣	٠,٦٩١٥	٠,٥٠٠٠	ل (ز)

د) تتخذ أعمار ١٠٠٠٠ شخص شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٥٢) سنة وانحراف معياري (٨) سنوات، ما عدد الأشخاص الذين تزيد أعمارهم عن ٦٠ سنة ؟

(٥ علامات)

ملاحظة : يمكن الاستفادة من الجدو

١,٣	١,٢	١,١	١,٠	٠,٩	٠,٨	ز
٠,٩٠٣٢	٠,٨٨٤٩	٠,٨٦٤٣	٠,٨٤١٣	٠,٨١٥٩	٠,٧٨٨١	ل (ز)

ج) إذا كانت أوزان الأطفال عند الولادة تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٣,٥) كغم وانحراف معياري (٠,٥) كغم. إذا اختير طفل عشوائياً عند الولادة، فما احتمال أن يكون وزنه أكبر من (٣) كغم؟

ملاحظة : يمكن الاستفادة من الجدول الآتي :

(٦ علامات)

١	٠,٩	٠,٨	٠,٧	٠,٦	٠,٥	ز
٠,٨٤١٣	٠,٨١٥٩	٠,٧٨٨١	٠,٧٥٨٠	٠,٧٢٥٧	٠,٦٩١٥	ل (ز)

ج) إذا كانت أوزان ١٠٠٠٠ طالب تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٤٥) كغ وانحراف معياري (٤) كغ ، ما عدد الطلبة الذين تزيد أوزانهم عن (٥٠) كغ ؟

ملاحظة: يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي :

٠,٨	١,٥٢	١,٢٥	١,٢	٢,٥	٠,٢٥	ز
٠,٧٨٨١	٠,٩٣٥٧	٠,٨٩٤٤	٠,٨٨٤٩	٠,٩٩٣٨	٠,٥٩٨٧	ل (ز)

ج) إذا كانت رواتب (١٠٠٠٠) موظف في إحدى الوزارات تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٣٠٠) دينار شهرياً، وانحراف معياري (١٠) دينار، فما عدد الموظفين الذين تتحصر رواتبهم بين ٢٨٠ ديناراً و ٣٢٠ ديناراً ؟

٠,٢	١,٥	٢	٢,٥	٣	ز
٠,٥٧٩٣	٠,٩٣٣٢	٠,٩٧٧٢	٠,٩٩٣٨	٠,٩٩٨٧	ل (ز)

ملاحظة: يمكن الاستعانة بالجدول المجاور.

ب) إذا كانت رواتب (١٠٠٠٠) موظف تتخذ شكل التوزيع الطبيعي، وكان الوسط الحسابي لرواتبهم (٣٥٠) ديناراً، والانحراف المعياري لها (٢٥) ديناراً، فما عدد الموظفين الذين تتحصر رواتبهم بين (٣٢٥) ديناراً و (٤٠٠) ديناراً؟ (٧ علامات)

ملاحظة: يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

٢,٥	٢	١,٥	١	٠,٥	٠	ز
٠,٩٩٣٨	٠,٩٧٧٢	٠,٩٣٣٢	٠,٨٤١٣	٠,٦٩١٥	٠,٥٠٠٠	ل (ز ≥ أ)

ب) تقدم (١٥٠٠٠) طالباً لامتحان ما، وكانت نتائجهم تتخذ شكل التوزيع الطبيعي وكان الوسط الحسابي لعلاماتهم (٦٥) والانحراف المعياري (٥) وعلامة النجاح (٦٠). جد عدد الطلبة الناجحين في الامتحان. (٧ علامات)

ملاحظة: يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

٢	١,٥	١	٠,٥	٠	ز
٠,٩٧٧٢	٠,٩٣٣٢	٠,٨٤١٣	٠,٦٩١٥	٠,٥٠٠٠	ل (ز ≥ P)

ج) يخضع معامل الذكاء للطلبة المسجلين في إحدى الجامعات وعددهم (٦٠٠٠) طالباً لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي (١٠٨) وانحرافه المعياري (١٠)، فما عدد الطلبة الذين ينحصر معامل ذكائهم بين (١٠٣) و (١١٨)؟

ملاحظة: يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي والذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

٢	١,٥	١	٠,٥	٠	ز
٠,٩٧٧٢	٠,٩٣٣٢	٠,٨٤١٣	٠,٦٩١٥	٠,٥٠٠٠	ل (ز ≥ P)

ج) تتبع علامات طلبة في امتحان عام توزيعاً طبيعياً متوسطه الحسابي (٧٥)، وانحرافه المعياري (٥) إذا اختير طالب عشوائياً، فما احتمال أن تكون علامته أقل من أو يساوي (٨٠)؟ (٤ علامات)

ملاحظة: يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي الذي يُمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

٢	١	٠,٢	٠,١	٠	ز
٠,٩٧٧٢	٠,٨٤١٣	٠,٥٧٩٣	٠,٥٣٩٨	٠,٥٠٠٠	ل (ز ≥ P)

الإرتباط ومعامل الإرتباط

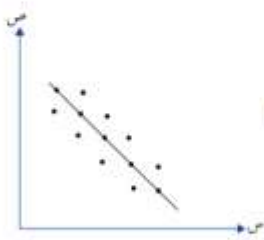
ركز في أشكال معامل الإرتباط من خلال الرسم ...



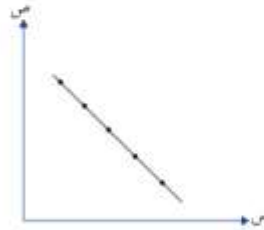
٢- طردي (إيجابي)



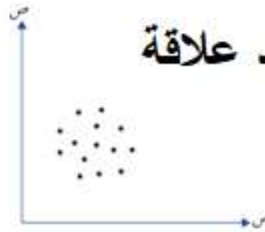
١- طردي تام



٤- عكسي



٣- عكسي تام



٥- لا يوجد علاقة

اختبر نفسك

يمثل الشكل المجاور الانتشار بين المتغيرين س ، ص ، أجب عما يلي:

قيمة معامل الارتباط	قيمة معامل الارتباط	قيمة معامل الارتباط
(أ) عكسي (ب) طردي	(أ) ١- (ب) ١	(أ) ١ (ب) ١-
(ج) تام (د) لا يوجد ارتباط	(ج) ٠,٩- (د) ٠,٨	(ج) ٠,٧- (د) ٠,٧

في محاضرة ألقاها خبير زراعي أوضح أنه في معظم الأحيان كلما ترتفع أجور عمال الزراعة (س) فإن ذلك يؤدي إلى ارتفاع أسعار البطيخ

(ص) فأَي مما يلي يمثل معامل ارتباط بين س ، ص حسب قول الخبير:

(د) ٠,٧٢

(ج) ٠,١٣

(ب) ١,٢

(أ) ٠,٨٨-

وما أوتيتم من العلم الا قليلاً

ملاحظة اذا كان المتغير (س) المتغير (ص) لهما نفس الإشارة يبقى معامل الارتباط كما هو

اذا كان المتغير (س) والمتغير (ص) لهما عكس الإشارة، مباشرة نعكس إشارة معامل الارتباط

مثال: إذا كان معامل الارتباط بين س ، ص هو (٠,١) ، فإن قيمة معامل الارتباط بين س* ، ص* ، حيث

$$س* = س - ١ ، ص* = ص + ٣$$

يساوي:

(أ) -٠,١ (ب) ٠,١ (ج) ٠,٤ (د) -٠,٤

الحل: نلاحظ ان معامل س = -١ ، ومعامل ص = -٣ (لهما نفس الإشارة) اذا معامل الارتباط يبقى كما هو

فيكون الجواب (ب) ٠,١

مثال بين الجدول الآتي علامات (٥) طلاب في امتحان الجغرافيا (س) والحاسوب (ص) ،

جغرافيا س					حاسوب ل (ص)				
٥	٩	٦	٧	٨	٤	٨	٧	٥	٦

الحل: (في البداية نجد الوسط الحسابي لقيم س ، والوسط الحسابي لقيم ص)

$$\text{الوسط الحسابي لـ س} = \bar{س} = \frac{٣٥}{٥} = ٧ ، \text{الوسط الحسابي لـ ص} = \bar{ص} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$$

س	ص	$(س - \bar{س})$	$(ص - \bar{ص})$	$(س - \bar{س})^2$	$(ص - \bar{ص})^2$	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$
٨	٦	١	٠	١	٠	٠
٧	٥	٠	-١	٠	١	-١
٦	٧	-١	١	١	١	-١
٩	٨	٢	٢	٤	٤	٤
٥	٤	-٢	-٢	٤	٤	٤
٣٥	٣٠	٠	٠	٧	١٠	٧٠

ثم نكون الجدول

ثم نطبق على القانون ...

$$r = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2 \times \sum (ص - \bar{ص})^2}}$$

$$r = \frac{٧٠}{\sqrt{١٠ \times ١٠}} = \frac{٧}{١٠}$$

اذا معامل ارتباط بيرسون = $\frac{٧}{١٠}$



إذا كان $\sum (s - \bar{s})(v - \bar{v}) = 24$ ، وكان $\sum (s - \bar{s})^2 = 80$ ، $\sum (v - \bar{v})^2 = 20$ فإن معامل ارتباط بيرسون =

- (أ) ٠,٦ (ب) -٠,٦ (ج) ٠,٦ (د) -٠,٦

من خلال الجدول التالي فإن معامل ارتباط بيرسون =



$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	ص	س
	١		٢		١٠	٧
	٤		١		٩	٨
	١		١		٧	٥
	٤		٢		٦	٤
	٠		٠		٨	٦
	١٠		٠			

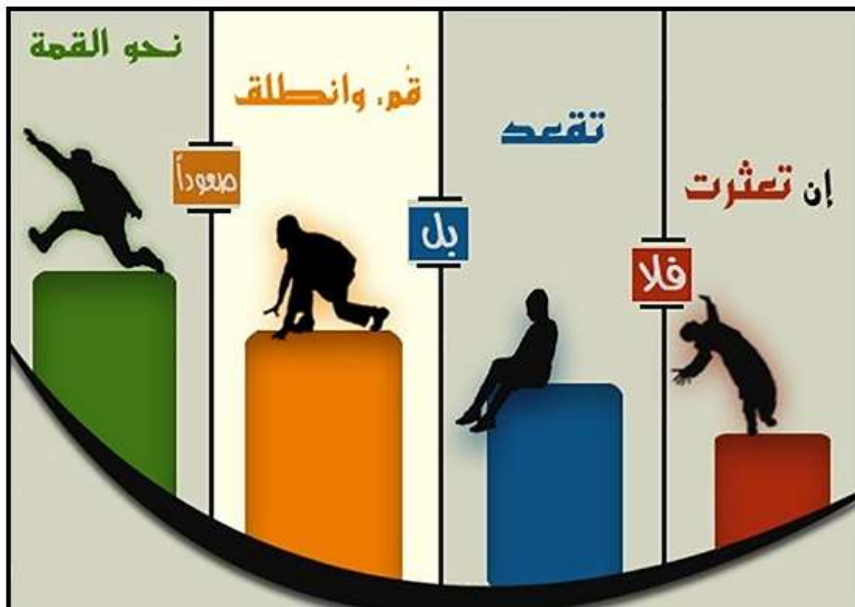
(أ) -٠,٩ (ب) ٩

(ج) -٠,٨ (د) ٠,٩

أقوى ارتباط من الارتباطات التالية هو ...



- (أ) -٠,٩ (ب) ٠,٣ (ج) ٠,٨ (د) -٠,٨



معادلة خط الانحدار

مثال: يبين الجدول الآتي علامات (٦) طلاب في امتحان الجغرافيا (س) والحاسوب (ص)، جد

جغرافيا س	٦	٤	٨	٧	٢	٣
حاسوب ل(ص)	٩ <td>٨ <td>١٠ <td>٨ <td>٥ <td>٢</td> </td></td></td></td>	٨ <td>١٠ <td>٨ <td>٥ <td>٢</td> </td></td></td>	١٠ <td>٨ <td>٥ <td>٢</td> </td></td>	٨ <td>٥ <td>٢</td> </td>	٥ <td>٢</td>	٢

(أ) معادلة خط الانحدار للتنبؤ بـ (ص) إذا علمت قيم (س).

(ب) تبنأ بعلامة طالب حصل في امتحان الجغرافيا على ٨ علامات

(ج) الخطأ بالتنبؤ لطالب حصل في الجغرافيا على ٧ علامات

الحل: في البداية حتى نجد معادلة خط الانحدار يجب إيجاد قيمة (أ): نجدها من خلال الجدول

س	ص	(س - $\bar{س}$)	(ص - $\bar{ص}$)	(س - $\bar{س}$) ^٢	(س - $\bar{س}$)(ص - $\bar{ص}$)
٦	٩	١	٢	١	٢
٤	٨	-١	١	١	-١
٨	١٠	٣	٣	٩	٩
٧	٨	٢	١	٤	٢
٢	٥	-٣	-٢	٩	٦
٣	٢	-٢	-٥	٤	١٠
٣٠	٤٢	صفر	صفر	٢٨	٢٨

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{٣٠}{٦} = ٥$$

$$\bar{ص} = \frac{\sum ص}{ن} = \frac{٤٢}{٦} = ٧$$

$$١ = \frac{٢٨}{٢٨} = \frac{(\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص}))}{(\sum (س - \bar{س})^2)}$$

ثم نجد قيمة ب ومنه ب = $\bar{ص} - \bar{س} \times ١$

$$٥ \times ١ - ٧ =$$

$$٢ =$$

(أ) إذا معادلة الانحدار هي: $\hat{ص} = س + ب$

$$س + ٢ =$$

(ب) التنبؤ بعلامة طالب حصل في الجغرافيا على ٨ علامات فيكون في الحاسوب

$$= س + ٢ = ١٠$$

(ج) الخطأ بالتنبؤ لطالب حصل في الجغرافيا على ٧ علامات ...

$$\text{نجد التنبؤ ... من معادلة خط الانحدار} = ٧ + ٢ = ٩$$

$$\text{الخطأ} = \text{الحقيقية} - \text{المتوقعة}$$

$$= ٩ - ٨ = ١ \text{ هو الخطأ بالتنبؤ}$$

جميع الأسئلة الوزارية على هذا الدرس من عام ٢٠٠٨ لغاية ٢٠١٩

(ب) توصل باحث تربوي إلى معادلة خط الانحدار البسيط للعلاقة بين عدد ساعات الدراسة (س) والمعدل في الثانوية العامة (ص) فكانت $\hat{ص} = ٣س + ٦٥$.

(١) ما قيمة كل من أ، ب؟ (علامتان)

(٢) درست طالبة (٨) ساعات يومياً وحصلت على معدل (٨٦). احسب الخطأ في التنبؤ للمعدل

الذي حصلت عليه الطالبة ومعتمداً على معادلة خط الانحدار المعطاة. (علامتان)

(ج) إذا كان س، ص متغيرين وعدد قيم كل منهما (٨) وكان:

$$\sum_{i=1}^8 (س_i - \bar{س})(ص_i - \bar{ص}) = ١٢٠, \quad \sum_{i=1}^8 (ص_i - \bar{ص})^2 = ١٢٨, \quad \sum_{i=1}^8 (س_i - \bar{س})^2 = ٢٠٠$$

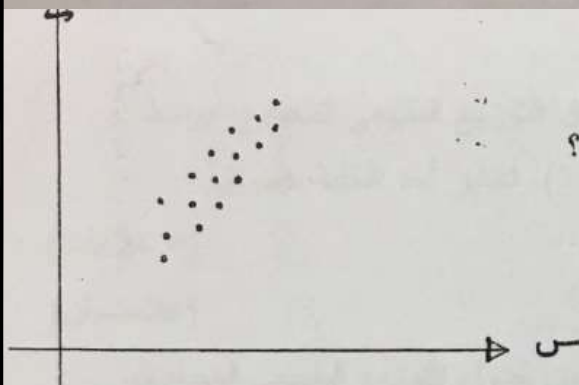
أوجد معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين س، ص. (٤ علامات)

(٥) إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص يساوي ٠,٨، عُدلت قيم

كل من المتغيرين س، ص حسب العلاقة $س = ٢س - ١$ ، $ص = ٤ص - ١$ ،

فإن معامل ارتباط بيرسون بين س*، ص* يساوي:

(أ) ٠,٢ - (ب) ٠,٢ (ج) ٠,٨ (د) ٠,٨ -



(٨) يمثل الشكل المجاور شكل الانتشار بين المتغيرين س، ص

ما هي أقرب قيمة لمعامل الارتباط بين المتغيرين س، ص؟

(أ) ١ (ب) ١ -

(ج) ٠,٧ - (د) ٠,٧

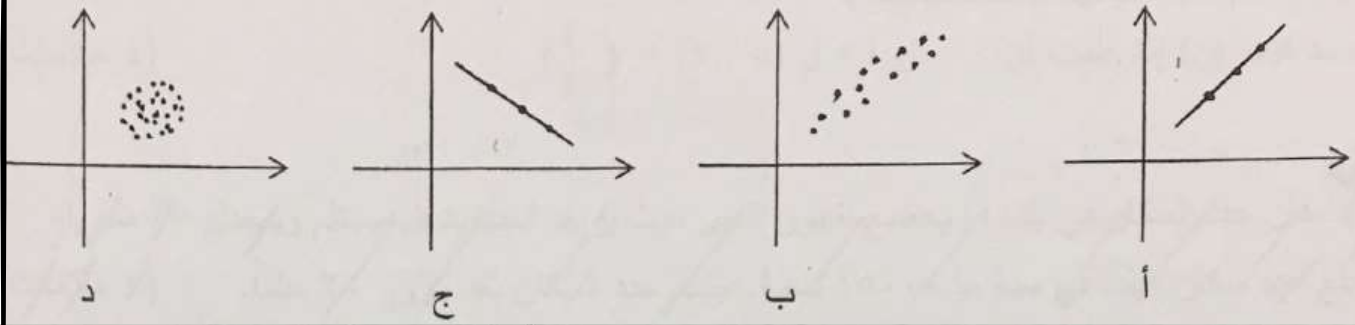
(ب) إذا كان س، ص يمثلان متغيرين عدد قيم كل منهما (٥) وكان:

$$\bar{س} = ٥, \quad \bar{ص} = ٧٥, \quad أ = ٣$$

(١) جد معادلة خط الانحدار الخطي البسيط للتنبؤ بقيم ص إذا عُلِمَت س.

(٢) جد الخطأ في التنبؤ إذا كانت س = ٨، وقيمة ص الحقيقية المناظرة لها (٨٢).

(٨) الشكل الممثل للارتباط الخطي العكسي بين المتغيرين س ، ص هو شكل :



ج) يبين الجدول الآتي علامات خمسة طلاب في مبحثي الرياضيات (س) والعلوم (ص) في امتحان قصير نهايته العظمى (١٠).

س	ص	(س - $\bar{س}$)	(ص - $\bar{ص}$)	(س - $\bar{س}$)(ص - $\bar{ص}$)	(س - $\bar{س}$) ^٢	(ص - $\bar{ص}$) ^٢
٦	٥					
٧	٦					
٥	٤					
٣	١					
٤	٤					

١) انقل الجدول إلى دفتر إجابتك ثم املأ الأعمدة الواردة فيه.

٢) معتمداً على الجدول احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين س ، ص . (١٠ علامات)

ج) معتمداً المعلومات الواردة في الجدول الآتي جد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص . (٦ علامات)

س	ص	س - $\bar{س}$	ص - $\bar{ص}$	(س - $\bar{س}$)(ص - $\bar{ص}$)	(س - $\bar{س}$) ^٢	(ص - $\bar{ص}$) ^٢
٣	١٠	٢-	٢-	٤-	٤	٤
٤	٩	١-	١-	١-	١	١
٥	٧	٠	١-	٠	٠	١
٦	٨	١	٠	٠	١	٠
٧	٦	٢	٢-	٤-	٤	٤

ب) يبين الجدول الآتي علامات ٦ طلاب في امتحاني العلوم (س) والرياضيات (ص). جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) إذا علمت قيم (س).

العلوم س	٦	٤	٨	٧	٢	٣
الرياضيات ص	٩	٨	١٠	٨	٥	٢

(إذا كان s ، v متغيرين عدد قيم كل منهما (١٠) ، وكان $\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2 = 81$

$$\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2 = 400 ، \sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})(v_i - \bar{v}) = 135$$

احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين s ، v (٤ علامات)

ب) معتمداً الجدول التالي حيث (س) عدد ساعات الدراسة اليومية لخمس طلاب،
(ص) علامة كل منهم في امتحان ما.

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
عدد ساعات الدراسة (س)	٣	٤	٧	٥	١
العلامة (ص)	١٤	١٦	٢٠	١١	٩

اكتب معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) إذا علمت قيم (س).

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
الفيزياء (س)	٢	٥	٣	٦	٤
الجغرافيا (ص)	٥	٦	٣	٧	٩

أ) يبين الجدول المجاور علامات (٥) طلاب في مبثني الفيزياء والجغرافيا في امتحان قصير، النهاية العظمى له (١٠). احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين s ، v .

$$\text{ملاحظة: } r = \frac{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})(v_i - \bar{v})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2 \times \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2}}$$

(١٠ علامات)

ب) في دراسة أجراها أحد طلبة الدراسات العليا توصل إلى معادلة خط الانحدار الخطي للعلاقة بين عدد ساعات الدراسة (س) والمعدل التحصيلي (ص) لطلبة إحدى الجامعات فكانت: $\hat{v} = 53 + 5s$ ، معتمداً معادلة خط الانحدار أجب عن الأسئلة الآتية:

(١) جد قيم r ، b . (علامتان)

(٢) قدر معدل طالب إذا كانت ساعات الدراسة اليومية له (٥) ساعات. (علامة)

(٣) إذا كان معدل طالب درس (٨) ساعات يومياً هو (٩٥) ، جد الخطأ في التنبؤ. (٣ علامات)

(ب) إذا كان س ، ص متغيرين ، عدد قيم كل منهما (٧) ، وكان

$$\sum_{ك=١}^٧ (س_ك - \bar{ص}) = ١٠ ، \sum_{ك=١}^٧ (س_ك - \bar{س}) = ٢٠ ،$$

(ج) إذا كان س ، ص يُمثَلان عدد ساعات الدراسة اليومية (س) ، والمعدل التحصيلي (ص) لخمسة طلاب ، فاحسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين س ، ص (٣ علامات)

$$\sum_{ر=١}^٥ (س_ر - \bar{ص}) = ٨٢ ، \sum_{ر=١}^٥ (س_ر - \bar{س}) = ١٣٠ ،$$

(د) إذا علمت قيم س ، ص فجد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س (٥ علامات)

(١) احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص في الجدول الآتي: (٨ علامات)

س	٣	٤	٥	٤
ص	٨	٧	٥	٨

(ب) إذا كانت معادلة خط الانحدار للعلاقة بين قيمة رأس المال (س) والأرباح السنوية لشركة بآلاف الدينانير (ص) هي: $\hat{ص} = ٠,٥س + ٨$ ، فجد:

(١) الخطأ في التنبؤ بأرباح شركة رأس مالها (٥٠) ألف دينار وأرباحها السنوية (٣٠) ألف دينار.

(٢) إذا كان الربح المتوقع لشركة ما يساوي (٢٨) ألف دينار ، فما رأس مال هذه الشركة؟



(١) إذا كانت $\hat{ص} = ٠,٢س + ٥$ معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيمة $ص$ إذا عرفت قيم $س$ ، وكانت إحدى قيم $س$ تساوي (١٠٠) وقيمة (ص) الحقيقية المناظرة لها تساوي (٣٠) ، فإن الخطأ في التنبؤ بقيمة (ص) يساوي:

(أ) -٥ (ب) ٥ (ج) ١١ (د) ٢٥

(٢) أي أشكال الانتشار الآتية تُمثل علاقة ارتباط طردي تام بين المتغيرين $س$ ، $ص$ ؟

