

"وقل رب زدني علما"

مدارس جوهرة عمان

أوراق عمل في

تطبيقات التفاضل



تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

عثمان حنيفة

مركز المملكة

طبربور

٠٧٩٧٩٥٧٥٧٥

مركز مسار التفوق للتدريب

خلدا

٠٧٩٥٥٦٢٤٤٤

مركز مسار التفوق للتدريب

٠٧٩٥٥٦٢٤٤٤

تطبيقات فيزيائية

إذا تحرك جسم في خط مستقيم فإن الكميات الفيزيائية التالية تعتبر مقترانات في الزمن n

$$① \text{ مقتران المسافة} = f(n)$$

$$② \text{ مقتران السرعة} = g(n)$$

$$③ \text{ مقتران التسارع} = h(n)$$

وهذه الكميات يمكن أن تكون:

موجب أو سالب أو صفر

أما الزمن $n \leq$ دائماً

العلاقة بينها:

$$f(n) \xrightarrow[\frac{dn}{dn}]{\text{اشتقاقه}} g(n) \xrightarrow[\frac{dn}{dn}]{\text{اشتقاقه}} h(n)$$

أي أن:

$$g(n) = f'(n) = \frac{df}{dn}$$

$$h(n) = g'(n) = \frac{dg}{dn} = f''(n)$$

الرمز المتوسط للجسم:

$$\text{رمزها } \bar{g} = \frac{\Delta f}{\Delta n} = \frac{f(n_2) - f(n_1)}{n_2 - n_1}$$

مرفقات:

$$① \text{ السرعة الابتدائية للجسم} = g(0)$$

② تكون سرعة الجسم:

③ موجب: إذا تحرك بنفس اتجاه الحركة الابتدائي

④ سالب: إذا تحرك بعكس اتجاه الحركة الابتدائي

⑤ صفراً: إذا ناله ساكناً

⑥ يعكس الجسم اتجاه حركته إذا تغيرت إشارة

سرته

⑦ في المقذوفات:

⑧ تسارع الجسم ثابت دائماً

⑨ يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع

لـ عندما سرته = صفر

⑩ يفقد الجسم من سرته وهو صاعداً للأعلى

ويكتسب سرعة وهو هابط للأسفل

① تحرك جسم في خط مستقيم حسب

$$\text{العلاقة: } f(n) = 3n^2 - 3n + 0$$

حيث f : المسافة بالامتار

n : الزمن بالثواني

جد:

$$① \text{ سرعة وكسار الجسم عندما } n = 0 \text{ ثواني}$$

$$② \text{ سرعة الجسم المتوسط في الفترة } [3, 4]$$

$$③ \text{ المسافة عندما تسارع } 18 \text{ م/ث}^2$$

$$④ \text{ تسارع الجسم عندما سرته } = 7 \text{ م/ث}^2$$

$$⑤ \text{ سرعة الجسم عندما المسافة} = 32 \text{ م}$$

الحل:

$$① \text{ ع } (n) = 3n^2 - 3n \quad \text{ ت } (n) = 6n - 3$$

$$① \text{ ع } (0) = 0 \quad \text{ ت } (0) = -3$$

$$\text{ع } (0) = 0 \quad \text{ ت } (0) = -3$$

$$② \text{ ع } = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3}$$

$$= \frac{12 - 3}{1} = 9$$

$$\text{ع } (n) = 3n^2 - 3n = 32 \Rightarrow n = 4 \text{ م/ث}^2$$

$$③ \text{ ت } (n) = 6n - 3 = 18$$

$$18 = 6n - 3 \Rightarrow n = 4$$

$$\text{ع } (n) = 3n^2 - 3n = 0 \Rightarrow n = 0 \text{ م/ث}^2$$

$$④ \text{ ع } (n) = 3n^2 - 3n = 72$$

$$3n^2 - 3n = 72 \Rightarrow n = 5$$

$$n = 5 \Rightarrow 3n^2 - 3n = 72$$

$$n = 5 \Rightarrow 3n^2 - 3n = 72$$

$$n = 5 \text{ أو } n = -4$$

$$n = 5$$

$$\text{ع } (n) = 3n^2 - 3n = 72$$

$$\text{ع } (n) = 3n^2 - 3n = 72 \Rightarrow n = 5 \text{ م/ث}^2$$

٥) ف (ن) = ٣٢

$$٣٢ = ٥ + ٣ن - ٣٢$$

$$٦٤ = ٥ + ٣ن - ٣٢$$

بالتجريب: نجد أحد الاضمار

$$٦٤ = ٥ + ٣(٣) - ٣٢$$

$$٦٤ = ٥ + ٩ - ٣٢ = ٤٠$$

$$\boxed{٣ = ن}$$

نجد بقیة الاضمار (ان وجدت) بالتم:

$$\begin{matrix} ٣ & ٥ & ٣ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٣ & ٢ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} ٢ & ٣ & ٣ \\ ٢٧ & ٩ & ٦ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} ٢ & ٣ & ٣ \\ ٩ & ٣ & ٢ \end{matrix}$$

$$٠ = ٩ + ٣ن + ٣٢$$

$$\Delta = ٥٢٤ - ٦٤ = ٤٦٠$$

$$٦٣ = ٩ \times ٢ \times ٤ - ٩ = ٦٣$$

لا يوجد اصفار اخرى

$$\therefore \text{ع (٣)} = ٣٦ = ٣ \times ٦ = ٩ \times ٤ = ٣٦$$

٦) اذالكنت:

$$١ + ٥٢٧ = (ن) ف$$

حيث ف: الماف بالاضمار

ن: الزمن بالتواني

$$\text{جد كارع الجسم عندما سرعت} = \frac{٤}{٣} \text{ م/ث}$$

اكل:

$$\text{ع (ن)} = \frac{٥٣}{١ + ٥٢٧} = \frac{٤}{٣}$$

$$\text{ب (ن)} = \frac{٤ \times ٣ - ١ \times ٥٢٧}{١ + ٥٢٧} = \frac{١٢ - ٥٢٧}{١ + ٥٢٧}$$

$$\text{ج (ن)} = \frac{٤ \times ٣ + ١ \times ٥٢٧}{١ + ٥٢٧} = \frac{١٢ + ٥٢٧}{١ + ٥٢٧}$$

$$\text{د (ن)} = \frac{٤ \times ٣ - ١ \times ٥٢٧}{١ + ٥٢٧} = \frac{١٢ - ٥٢٧}{١ + ٥٢٧}$$

$$\text{هـ (ن)} = \frac{٤ \times ٣ + ١ \times ٥٢٧}{١ + ٥٢٧} = \frac{١٢ + ٥٢٧}{١ + ٥٢٧}$$

$$\text{و (ن)} = \frac{٤ \times ٣ - ١ \times ٥٢٧}{١ + ٥٢٧} = \frac{١٢ - ٥٢٧}{١ + ٥٢٧}$$

$$\text{ز (ن)} = \frac{٤ \times ٣ + ١ \times ٥٢٧}{١ + ٥٢٧} = \frac{١٢ + ٥٢٧}{١ + ٥٢٧}$$

$$\text{ح (ن)} = \frac{٤ \times ٣ - ١ \times ٥٢٧}{١ + ٥٢٧} = \frac{١٢ - ٥٢٧}{١ + ٥٢٧}$$

$$\text{ط (ن)} = \frac{٤ \times ٣ + ١ \times ٥٢٧}{١ + ٥٢٧} = \frac{١٢ + ٥٢٧}{١ + ٥٢٧}$$

$$\text{ي (ن)} = \frac{٤ \times ٣ - ١ \times ٥٢٧}{١ + ٥٢٧} = \frac{١٢ - ٥٢٧}{١ + ٥٢٧}$$

$$\text{ك (ن)} = \frac{٤ \times ٣ + ١ \times ٥٢٧}{١ + ٥٢٧} = \frac{١٢ + ٥٢٧}{١ + ٥٢٧}$$

تدريب:

$$\text{اذالكنت ف (ن)} = ٨ + ٩ن + ٦ن^٣ - ٣ن$$

حيث ف: الماف بالاضمار ، ن: الزمن بالتواني

جد:

١) كارع الجسم عندما تتقدم سرعت

٢) الماف عندما كارع ١٣ م/ث

٣) سرعة الجسم عندما الماف = ٣١

٣) يعرله جسم في فط متيقم حسب اعدادهم

$$\text{ف (ن)} = \text{جان} - \text{قمان} ، ن \in [٢٥٠, ٣٠٠]$$

جد سرعة الجسم عندما يتقدم كارع

اكل:

$$\text{ع (ن)} = \text{قمان} + \text{جان}$$

$$\text{ب (ن)} = \text{جان} - \text{قمان}$$

$$\text{ج (ن)} = \text{جان} + \text{قمان}$$

$$\text{د (ن)} = \text{جان} = \text{قمان} / \text{قمان}$$

$$\text{هـ (ن)} = \text{قمان} = ١$$

$$\text{و (ن)} = \frac{\pi}{٤} = ٥ \text{ او } \frac{\pi}{٤} = ٥$$

$$\text{ع (ن)} = \frac{\pi}{٤} = \frac{١}{٢٧} + \frac{١}{٢٧} = \frac{٢}{٢٧} = \frac{٢}{٣٧٨}$$

$$\text{ب (ن)} = \frac{\pi}{٤} = \frac{١}{٢٧} - \frac{١}{٢٧} = \frac{٠}{٢٧} = ٠$$

٤) اذالكنت:

$$\text{ف (ن)} = \text{جان} + \text{قمان}$$

$$\text{جد كارع الجسم عندما ف} = ٣٢$$

اكل:

$$\text{ع (ن)} = ٣ \text{ جان} + ٣ \text{ قمان}$$

$$\text{ب (ن)} = ٩ \text{ جان} - ٩ \text{ قمان}$$

$$\text{و عندما ف} = ٢$$

$$\boxed{٢ = \text{جان} + \text{قمان}}$$

$$\text{ب (ن)} = ٩ - (\text{جان} + \text{قمان}) = ٩ - ٢ = ٧$$

$$\text{ج (ن)} = ٩ - ٢ = ٧$$

الرياضيات

عثمان حنيفة

٧) يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة

$$v = \frac{3}{x} \neq 8$$

جد تسارع الجسم عندما سرعته $\frac{1}{4} \text{ م/ث}$ الحل: عندما $v = \frac{1}{4}$

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{4}$$

$$3 = \frac{x}{4}$$

$$12 = x$$

$$x = 12$$

$$a = \frac{v}{t} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \text{ م/ث}^2$$

تدريب: يتحرك جسم حسب العلاقة:

$$v = (n) = \frac{3}{n} - 2 \text{ ، } n \in [1, 10]$$

حيث v : المسافة بالمتار ، n : الزمن بالثواني

جد تسارع الجسم لحظي تكونه .

٨) يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث أن سرعته

بعد n ثانية تعطى بالعلاقة

$$v = (n) = (n^2 - n) \text{ ، } v \text{ : المسافة بالمتار}$$

جد تسارع الجسم بعد (n) ثواني علماً بأن سرعتهعند $t = 0$ هي 2 م/ث الحل: $n = 0$ ، $v = 2$ ، $v = (n^2 - n)$ ؟

$$2 = (0^2 - 0) \Rightarrow 2 = 0 \text{ (غير صحيح)}$$

لكنه عندما $n = 0$ ، $v = 2$ ، $v = (n^2 - n)$ يكون

$$2 = (0^2 - 0) \Rightarrow 2 = 0 \text{ (غير صحيح)}$$

$$2 = (0^2 - 0) \Rightarrow 2 = 0$$

$$2 = (0^2 - 0) \Rightarrow 2 = 0$$

$$2 = (0^2 - 0) \Rightarrow 2 = 0$$

تدريب:

٩) يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة

$$v = (n) = (n^2 + 1) \text{ ، } v \text{ : المسافة بالمتار}$$

جد تسارع الجسم عندما سرعته $v = 10$ ، v : المسافة بالمتار

الزمن بالثواني

جد تسارع الجسم بعد ثلثي واحدة علماً

بأن المسافة التي تملكه اللحظة $t = 3$

١٠) يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة

$$v = \frac{n-9}{1+n} \text{ ، } v \text{ : السرعة}$$

جد تسارع الجسم عندما سرعته $v = 2 \text{ م/ث}$

الحل:

$$2 = \frac{n-9}{1+n}$$

$$2(1+n) = n-9$$

$$2 + 2n = n - 9$$

$$11 = -n$$

$$n = -11$$

$$a = \frac{v}{t} = \frac{2}{-11} = -\frac{2}{11} \text{ م/ث}^2$$

١١) يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة:

$$v = \frac{1}{x} \text{ ، } v < 8$$

فأذا كان تسارعه $a = 3 \text{ م/ث}^2$ عندماالمسافة $x = 1 \text{ م}$ نجد الثابت k

٩) قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح الأرض

$$\text{حيث } (ن) \text{ هي سرعة الجسم في } (ن) = ٦٠ - ٥ ن^٢$$

حيث $ق$: المسافة بالامتار ، $ن$: الزمن بالثواني
جد :

١) رسم الجسم عندما يكون على ارتفاع ٣٦٠ م عن سطح الأرض .

٢) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عن سطح الأرض

٣) ارتفاع الجسم عن الأرض عندما :

(أ) تبلغ سرعته نصف سرعته التي قذف بها

(ب) يفقد الجسم $\frac{1}{3}$ السرعة التي قذف بها

الحل :

$$ع (ن) = ٦٠ - ٥ ن^٢$$

$$١) \text{ ف } (ن) = ١٦٠$$

$$٥ ن^٢ - ٦٠ = ١٦٠ \quad / - ٥$$

$$٥ ن^٢ = ٢٢٠ + ١٤ ن$$

$$٥ ن^٢ - ١٤ ن - ٢٢٠ = ٠$$

$$٥ ن^٢ - ١٤ ن - ٢٢٠ = ٠$$

$$٤) \text{ ع } (٨) = ٦٠ - ٥ \times ٨^٢ = -٢٢٠$$

$$٤) \text{ ع } (٤) = ٦٠ - ٥ \times ٤^٢ = ٢٠$$

$$٥) \text{ ع } (٥) = ٦٠ - ٥ \times ٥^٢ = -٦٢٥$$

$$٦) \text{ ف } (٦) = ٦٠ - ٥ \times ٦^٢ = -١٠٨$$

$$٣) \text{ ع } (٥) = ٦٠ - ٥ \times ٥^٢ = -١٠٨$$

$$٣) \text{ ع } (٥) = ٦٠ - ٥ \times ٥^٢ = -١٠٨$$

$$٣) \text{ ع } (٥) = ٦٠ - ٥ \times ٥^٢ = -١٠٨$$

$$٣) \text{ ف } (٣) = ٦٠ - ٥ \times ٣^٢ = ١٥$$

$$٣) \text{ ف } (٣) = ٦٠ - ٥ \times ٣^٢ = ١٥$$

$$ب) \text{ ع } (٥) = ٦٠ - ٥ \times ٥^٢ = -١٠٨$$

$$٤) \text{ ف } (٤) = ٦٠ - ٥ \times ٤^٢ = ٢٠$$

$$٤) \text{ ف } (٤) = ٦٠ - ٥ \times ٤^٢ = ٢٠$$

٨) يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة

$$\text{ف } (ن) = ٣ ن^٢ - ٢ ن^٣ + ٣٦ ن + ٤$$

حيث $ق$: المسافة بالامتار ، $ن$: الزمن بالثواني

جد :

١) الرسم الابتدائي للجسم

٢) قيم $ن$ التي تكون عندها :

(أ) سرعة الجسم موجب

(ب) مسار الجسم سالب

الحل :

$$ع (ن) = ٣ ن^٢ - ٢ ن^٣ + ٣٦ ن + ٤$$

$$٥) \text{ ع } (٥) = ٣ \times ٥^٢ - ٢ \times ٥^٣ + ٣٦ \times ٥ + ٤ = ١٢٠$$

$$٤) \text{ ع } (٥) = ٣ \times ٥^٢ - ٢ \times ٥^٣ + ٣٦ \times ٥ + ٤ = ١٢٠$$

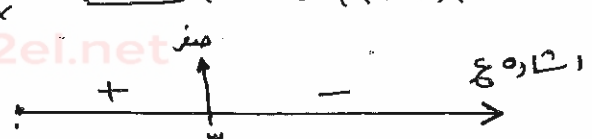
$$٥) \text{ ع } (٥) = ٣ \times ٥^٢ - ٢ \times ٥^٣ + ٣٦ \times ٥ + ٤ = ١٢٠$$

$$٦) \text{ ع } (٥) = ٣ \times ٥^٢ - ٢ \times ٥^٣ + ٣٦ \times ٥ + ٤ = ١٢٠$$

$$٦) \text{ ع } (٥) = ٣ \times ٥^٢ - ٢ \times ٥^٣ + ٣٦ \times ٥ + ٤ = ١٢٠$$

$$٦) \text{ ع } (٥) = ٣ \times ٥^٢ - ٢ \times ٥^٣ + ٣٦ \times ٥ + ٤ = ١٢٠$$

$$٦) \text{ ع } (٥) = ٣ \times ٥^٢ - ٢ \times ٥^٣ + ٣٦ \times ٥ + ٤ = ١٢٠$$



الرسم موجب في $(٣, ٠]$

$$٥) \text{ ع } (٥) = ٣ \times ٥^٢ - ٢ \times ٥^٣ + ٣٦ \times ٥ + ٤ = ١٢٠$$

$$\frac{1}{3} = ٥$$



الرسم سالب في $(-\infty, \frac{1}{3})$

تدريب :

إذا كان $ق(ن) = ٣ ن^٢ - ٢ ن^٣ + ٣٦ ن + ٤$

$$٥) \text{ ع } (٥) = ٣ \times ٥^٢ - ٢ \times ٥^٣ + ٣٦ \times ٥ + ٤ = ١٢٠$$

جد الفترة الزمنية التي تكونت فيها

سرعة الجسم سالب

عثمان حنيفة

الرياضيات

١١) قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح الأرض

حيث العلاقة $f(t) = 10 - 5t^2$

فأدركت أنه فقد $\frac{1}{4}$ السرعة التي قذف بها

وهو على ارتفاع ٣٥ م عن سطح الأرض .

جد ثابت P .

الحل : ع (١) $f(t) = 10 - 5t^2$

$$P = f(t)$$

$$\text{لأنه ع (١) } P = f\left(\frac{1}{4}\right) = P - \frac{5}{16}$$

$$\therefore 10 = \frac{P}{4} \leftarrow 10 - P = \frac{3P}{4}$$

$$\boxed{P = 40}$$

$$35 = 10 - 5t^2$$

$$35 = 10 - 5t^2 \leftarrow 25 = -5t^2$$

$$\therefore 5 = -t^2 \leftarrow 1 = t \leftarrow P = 1 \times 4 = 4$$

١٢) قذف جسم رأسياً للأسفل من ارتفاع

٣٥ م عن سطح الأرض . تقطره حسب العلاقة

ف (١) $f(t) = 5t^2 + 20t + 35$. جد :

(١) سرعة الجسم لحظة اصطدامه بالأرض .

(٢) سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع ٥٠ م

عن سطح الأرض .

الحل :

$$\text{ع (١) } f(t) = 5t^2 + 20t + 35$$

$$\text{ف (١) } f(t) = 5t^2 + 20t + 35$$

$$50 = 5t^2 + 20t + 35$$

$$15 = 5t^2 + 20t$$

$$\text{ع (٢) } f(t) = 5t^2 + 20t + 35$$

$$35 = 5t^2 + 20t + 35$$

$$\text{ف (٢) } f(t) = 5t^2 + 20t + 35$$

$$50 = 5t^2 + 20t + 35$$

$$15 = 5t^2 + 20t$$

$$\text{ع (٣) } f(t) = 5t^2 + 20t + 35$$

$$35 = 5t^2 + 20t + 35$$

١٠) قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح الأرض

حيث كان بعده عنها بعد ثا ثابت بالقدم

هو $f(t) = 16t - 5t^2$.

(١) جد قيم t التي تكون عندها السرعة سالبة

(٢) بين أن الجسم يفقد نصف السرعة التي

قذف بها وهو على ارتفاع ١٩٢ قدم

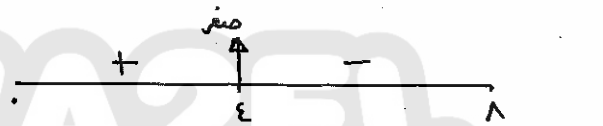
عن الأرض .

$$\text{ع (١) } f(t) = 16t - 5t^2$$

$$\text{ع (١) } f(t) = 16t - 5t^2$$

$$\therefore 0 = 16t - 5t^2$$

ولحظة وصوله الأرض $f(t) = 0$



السرعة سالبة $f(t) < 0$

$$\text{ع (٢) } f(t) = 16t - 5t^2$$

$$\text{ف (٢) } f(t) = 16t - 5t^2$$

$$16t - 5t^2 = 192$$

$$-5t^2 + 16t - 192 = 0$$

$$5t^2 - 16t + 192 = 0$$

$$\text{ع (٣) } f(t) = 16t - 5t^2$$

$$\text{ع (٣) } f(t) = 16t - 5t^2$$

$$\text{ع (٤) } f(t) = 16t - 5t^2$$

$$\therefore \text{ع (٤) } f(t) = 16t - 5t^2$$

مع مراعاة اتجاه الجسم

تدريب :

قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح الأرض حسب

العلاقة $f(t) = 5t^2 + 20t + 35$

حيث ع (١) السرعة الابتدائية للجسم

أدركت أن سرعة الجسم على ارتفاع ٣٨ م

السرعة تساوي ٣٣ م/ث . جد ع (٢)

الرياضيات

عثمان حنيفة

تدريب ①:

من نقطة على عمق ٣٥٥ تحت سطح الأرض
قذف جسم رأسياً لأعلى حسب العلاقة

$$v(t) = 60 - 9.8t \quad \text{ق! بالمتار}$$

جد سرعة الجسم لحظة وصوله سطح الأرض

تدريب ②:

من نقطة على سطح الأرض رمى لطفل حجراً
بسرعة ٣٣ تحت سطح الأرض حسب العلاقة

$$v(t) = 30 + 9.8t$$

بين أن الحجر يكتب نصف الرسم التوقف بها
عندما يكون الحجر على ارتفاع ٣٥ من قاع البئر.

⑬ قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح البحر

يرتفع ٣١٠ عن سطح الأرض فترد حينئذ

$$v(t) = 60 - 9.8t \quad \text{جد سرعة الجسم!}$$

٢ على ارتفاع ٣٦٠ فوق سطح البحر

٣ على ارتفاع ٣٥٥ فوق سطح الأرض

٤ لحظ اصطدامه بـ سطح الأرض

$$\text{الحل! في (١) } 100 + 9.8t - 4.9t^2 = 0$$

$$\text{ع (١) } 100 - 4.9t^2 = 0$$

$$\text{٢ في (١) } 160 = 9.8t$$

$$60 - 9.8t = 100 + 9.8t$$

$$9.8t - 9.8t = 100 - 60$$

$$0 = 100 - 40$$

$$0 = 60 - 9.8t$$

$$9.8t = 60 \quad t = 6.12$$

$$\text{ع (٢) } 9.8t = 60 - 9.8t = 9.8t$$

$$\text{ع (٣) } 9.8t = 60 - 9.8t = 9.8t$$

$$\text{ب) في (١) } 0 = 60 - 9.8t$$

$$9.8t = 60 \quad t = 6.12$$

$$9.8t = 60 - 9.8t$$

$$19.6t = 60 \quad t = 3.06$$

$$9.8t = 60 - 9.8t \quad t = 6.12$$

$$\text{ع (٤) } 9.8t = 60 - 9.8t = 9.8t$$

$$\text{ج) في (١) } 0 = 30 + 9.8t$$

$$9.8t = -30 \quad t = -3.06$$

$$9.8t = -30 - 9.8t$$

$$19.6t = -30 \quad t = -1.53$$

$$t = 1.53$$

$$\text{ع (١٠) } 9.8t = 30 - 9.8t = 9.8t$$

⑭ قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح البحر

بنائية حسب العلاقة!

$$v(t) = 25 - 9.8t$$

جد ارتفاع البناء إذا كانت سرعة الجسم

لحظة وصوله منتصف البناء هي ٣٥

$$\text{الحل! في (١) } 25 - 9.8t = 0$$

$$\text{ع (١) } 25 - 9.8t = 0$$

$$9.8t = 25 \quad t = 2.55$$

$$25 - 9.8t = 0 \quad t = 2.55$$

$$\text{لكنه في (٦) } \frac{1}{2} = 2.55$$

$$\frac{1}{2} = 2.55 \quad t = 5.1$$

$$\frac{1}{2} = 2.55 \quad t = 5.1$$

$$\frac{1}{2} = 2.55 \quad t = 5.1$$

تدريب:

قذف جسم من سطح بنائية ارتفاعها ٣٦٠ عن الأرض

رأسياً لأعلى حسب العلاقة في (١) $9.8t - 5 = 60 - 9.8t$

وقد قذفه بنائية أخرى ارتفاعها ٣٥٥ عن الأرض

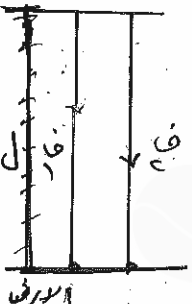
جد سرعة الجسم لحظة اصطدامه بـ سطح البناء الثاني

١٥) من نقطه على سطح الارض قذف جسم راسيا لادنى حسب العلاقة: $٤٠ - ٥٠ = ٢(٠) + ٢٠٠$ وحيث نفس الخطم سقط جسم اخر من نقطه يرتفع مباشرة ١٢٠ م عن نقطه انطلاقه اكبر الارتفاع حسب العلاقة في $(٠) = ٥٠$.
حيث سرع كل منهما كظم تصادمها .
اكل!



$٤٠(٠) = ٤٠ - ١٠$
 $٤٠(٠) = ١٠$
 كظم تصادمها يكون!
 $١٢٠ = (٠) + (٠)$
 $١٢٠ = ٤٠ - ٥٠ + ٥٠$
 $٣ = ٠$
 $٤(٣) = ٤٠ - ٣ = ٣٧$
 $٤(٣) = ٣ \times ١٠ = ٣٠$

١٦) اقط شخص جسا من اكون من سطح بنايب حسب العلاقة:
 $١٦(٠) = ١٦$ وحيث الخطم نفسها قذف شخص ثاني جسا راسيا لاسفل بسرع ابتدائية ٢٠ م/ث من سطح نفس حسب العلاقة في $(٠) = ٢٠ + ١٦$
 فاذا ارتطم الجسم الاول بالارض بعد $\frac{1}{2}$ ثاين من ارتطام الجسم الثاني بالارض .
 ا) سرع كل منهما كظم ارتطامها بالارض .
 ب) ارتفاع البنائيب .
 اكل!



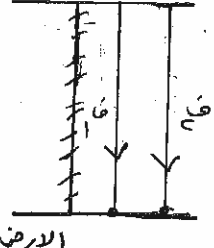
$٣٢(٠) = ٣٢$
 $٣٢(٠) = ٣٢ + ٢٠$
 كظم ارتطامها بالارض يكون:
 $٢(٠) = ٢٠ + ١٦$

$١٦(٠) = ٢٠ + ١٦$
 $١٦(٠) = ٤ + ١٦ + ٢٠$
 $٤ = ٤ - ٤ = ٠$

يصل الثاني الارض عندما $٠ = ١$
 والاول عندما $٠ = ١ + \frac{3}{4}$
 $٤(٣) = \frac{3}{4} \times ٣٢ = ٢٨$
 $٤(١) = ٣٢ + ٢٠ = ٥٢$

٢) $٣٦(٣) = \frac{4}{3} \times ٢٧ = ٣٦$
 او $٣٦(١) = ١٦ + ٢٠ = ٣٦$

١٦) سقط جسم من سطح بنايب حسب العلاقة! في $(٠) = ٥٠$ وبعد ثاين واحد قذف جسم اخر راسيا لاسفل من نفس الارتفاع حسب العلاقة في $(٠) = ١٥ + ٥٠$ فاصطدم الجسمان بالارض معاً .
 حيث سرع كل منهما كظم اصطدامها بالارض .
 اكل! $٤(٠) = ١٠$



$٤(٠) = ١٥ + ١٠$
 كظم اصطدامها بالارض يكون!
 $٢(٠) = (١ + ٠)$
 $٥(١ + ٠) = ٥ + ١٥ + ٥٠$
 $٥٠ = ٥ + ١٥ + ٥٠$
 $٠ = ٥ - ٥ = ٠$
 $٤(٢) = ٢ \times ١٠ = ٢٠$
 $٤(١) = ١٠ + ١٥ = ٢٥$

تدريب ١:

قذف جسم راسيا لادنى من سطح يرتفع ١٨ م عن الارض حسب العلاقة في $(٠) = ١٨ - ٥٠$ وحيث نفس الخطم قذف جسم اخر من الارض راسيا لادنى حسب العلاقة في $(٠) = ٥٠ - ٥٠$.
 الثابت ٢ ليصل كل منهما الى نفس الارتفاع عن الارض

التدريب ③

قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح الأرض
مقرله حسب العلاقة $(n) = 3n - 5$
وبعد ٢ ثانية قذف جسم آخر من الأرض
رأسياً لأعلى مقرله حسب العلاقة !
في $(n) = 5n - 5$. جد سرعة

كل منهما عندما يكون لهما الارتفاع نفسه عن الأرض
علماً بأنهما وصلتا انزياحاً لا ارتفاعاً في نفس اللحظة

تمرين ١

① يتحرك جسم في خط مستقيم حسب معادله
الزمنية التالية !

في $(n) = 3n^3 - 4n$ ، $n \leq 4$
حيث (n) : المسافة بالاصفار
 n : الزمن بالثواني

جد :

(أ) سرعة الجسم وكارعه عندما $n = 3$
(ب) الفترة الزمنية التي تكون فيها سرعة
الجسم سالبة .

⑤ انطلق جسم للحركة في خط مستقيم

بسرعة ابتدائية مقدارها ٢٢ م/ث حسب
العلاقة في $(n) = 2n^2 + 6n$
حيث P ، B : ثوابت .

فاذا كان كارعه بعد ٣ ثواني = ٣٨ م/ث
مجد : (أ) قيمة P ، B .
(ب) المسافة بعد ٣ ثواني .

③ يتحرك جسم في خط مستقيم حسب العلاقة

في $(n) = 2n^2 - 4n$

أثبت أن الجسم يبدأ في العودة إلى النقطة
التي بدأ منها الحركة بعد ٩ ثواني ثم يركعه في تلك اللحظة

④ يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث أن

بعده عن نقطة ثابتة بالاصفار بعد n من
الثواني من بدء حركته يُعطى بالعلاقة
في $(n) = \frac{1}{3}n^3 + 2n^2 - 11n + 10$
جد بعد وقتاً الجسم عن النقطة الثابتة
عندما تكون سرعته = كارعه .

⑤ انطلق جسم للحركة في خط مستقيم

من نقطة ثابتة فكان بعده عنها
بالاصفار بعد n ثانية يُعطى بالعلاقة
في $(n) = n^2 - 1$ ، $n \leq 4$
متى تكون المسافة = السرعة .

⑦ يتحرك جسم في خط مستقيم حسب معادله

في $(n) = \frac{1}{4}(n+2)^4 - 6n^2$
جد كارع الجسم عندما سرعته ٨٩ م/ث

⑦ يتحرك جسم في خط مستقيم حسب

العلاقة في $(n) = \frac{n}{1+n^2}$
في : المسافة بالاصفار

n : الزمن بالثواني .

جد كارع الجسم عندما تتغير سرعته

⑧ يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث أن

بعده عن نقطة الاصل بعد n ثانية
يُعطى بالعلاقة :

في $(n) = 2n^2 - \frac{1}{2}n$ ، $n \in [0, \frac{4}{3}]$

جد سرعة الجسم في اللحظة التي يتغير

فيها كارعه .

١٤) قذف جسم رأسياً لأعلى من قمة برج ارتفاعه ٣٦.٠ م عن الأرض فقرله حسب العلاقة:

$$f(n) = 5n^2 + 3n$$

حيث n : سرعة الابتدائية
فإذا كانت سرعة لحظ اصطدامه بالأرض هي ٦٠ م/ث - نجد n .

١٥) قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح بنائيه ارتفاعها ٦٠ م عن الأرض فقرله حسب العلاقة:

$$f(n) = 5n^2 - 2n$$

إذا علمت أنه اصطدم بالأرض بعد ٦ ثواني من قذفه وكانت سرعته آنذاك = -٢٤ م/ث - نجد الثوابت a و b .

١٦) سقط جسم من ارتفاع ١٢٥ م عن سطح الأرض فقرله حسب العلاقة:

$f(n) = 5n^2$ وبعد ثابته واحدة قذف جسم آخر من سطح الأرض رأسياً لأعلى حسب العلاقة $f(n) = 5n^2 - 50n$ جد سرعة كلا منهما عندما يكون لهما نفس الارتفاع عن سطح الأرض.

١٧) يتحرك جسم x خط مستقيم حسب العلاقة:

$$f(n) = \frac{1}{3}(n-3) - 3n^2 + 11$$

(١) بين أن الجسم يتوقف مرتين خلال مسيرته
(٢) ما الفترة الزمنية التي تتساقط فيها المسافة
(٣) ما كسرع الجسم عندما سرعته ٣٥ م/ث

١٨) يتحرك جسم حسب العلاقة $f(n) = 2n^2 - 4n$ جد سرعة الجسم لحظ الاصطدام التي يتبعدها منها

كسرع لأول مرة بعد تحركه

٩) يتحرك جسم x خط مستقيم بحيث أن سرعته تعطى بالعلاقة:

$$v(n) = \frac{n}{f(n)}$$

ف(ن): المسافة بالمتار
ن: الزمن بالثواني

جد كسرع الجسم عندما $n = 3$ ثواني علماً بأن سرعته عندئذ تساوي $\frac{1}{3}$ م/ث.

١١) يتحرك جسم حسب المعادلة:

$$v(n) = 5 + \frac{2}{n}$$

جد كسرع الجسم عندما تكون $v < 5$ م/ث = ٣٢ م/ث

١٢) قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح

بنائية فقرله حسب العلاقة:

$$f(n) = 5n^2 - 30n$$

إذا علمت أن سرعة الجسم لحظ اصطدامه بالأرض = -٦٠ م/ث - نجد:

(٢) ارتفاع البنائية

(٣) سرعة الجسم وهو على بعد ٨٠ م

تحت سطح البنائية

١٣) قذف جسم رأسياً لأعلى بحيث أن

ارتفاعه عند نقطه القذف بالمتار بعد n ثابته تعطى بالعلاقة:

$$f(n) = 5n^2 - 2n$$

إذا علمت أن أقصى ارتفاع وصل إليه الجسم هو ٢٥ م - نجد الثابت a .

١٤) يتحرك جسم x خط مستقيم حسب العلاقة:

$$f(n) = 2n^2 + \frac{n}{3} + 2n - 1$$

جد كسرع الجسم عندما سرعته ٣٧ م/ث

① جد معادله المماس والعمودي عليـه
المرسوم لمتى !

$$P) \quad 3 + u - v^3 = (u-1) \quad \text{عند النقطه } (3, -1)$$

الحل !

$$\text{قوة } (u) = 3 - v^3 = 3 - (-1)^3 = 3 + 1 = 4$$

$$\text{ميل المماس} = \text{قوة } (v) = 4 - 3 = 1$$

$$\text{معادله المماس} : 3 + u = 4 - (u-1) \Rightarrow 3 + u = 4 - u + 1 \Rightarrow 2u = 2 \Rightarrow u = 1$$

$$\text{ميل العمودي} = \frac{1}{4}$$

$$\text{معادله العمودي} : 3 + u = 4 - (u-1) \Rightarrow 3 + u = 4 - u + 1 \Rightarrow 2u = 2 \Rightarrow u = 1$$

ب) $2 = (u-1) \Rightarrow 2 = u - 1 \Rightarrow u = 3$ عند $u = 3$
الحل !

$$\text{قوة } (u) = 2 - 3 = -1 \Rightarrow \text{نقطه المماس } (3, -1)$$

$$\text{ميل المماس} = \text{قوة } (v) = 2 - 3 = -1$$

$$1 = \frac{1}{-1} \times 2 + 3 \times (-1) = -2 + 3 = 1$$

$$\text{معادله المماس} : 2 = (u-1) \Rightarrow 2 = u - 1 \Rightarrow u = 3$$

$$\text{ميل العمودي} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\text{معادله العمودي} : 2 = (u-1) \Rightarrow 2 = u - 1 \Rightarrow u = 3$$

ج) $2 = (u-1) \Rightarrow 2 = u - 1 \Rightarrow u = 3$

$$\text{عند النقطه } (3, -1)$$

الحل !

$$3 - 3 = 2 + 3 = 5 \Rightarrow \text{قوة } (u) = 5$$

$$\text{عند } (3, -1) \Rightarrow 2 - 3 = -1 \Rightarrow \text{ميل المماس} = -1$$

$$\text{ميل العمودي} = \frac{1}{-1} = -1$$

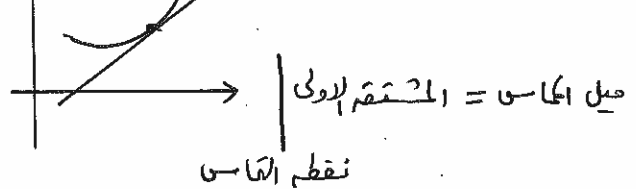
$$\text{معادله المماس} : 2 = (u-1) \Rightarrow 2 = u - 1 \Rightarrow u = 3$$

$$\text{معادله العمودي} : 2 = (u-1) \Rightarrow 2 = u - 1 \Rightarrow u = 3$$

تطبيقات هندسيه

اذا رسم مماس لمنحنى الاقتران $u = 3 - v^3$

عند نقطه كمال الشكل !
فان !



ميل المماس = المشتق الاول
لـ النقطه التي رسم عنها
المماس

ميل أي مستقيم عمودي على المماس

$$\frac{1}{\text{ميل المماس}} =$$

مثال : اذا رسم مماس لمنحنى الاقتران

$$u = \frac{4}{1+v^2}$$

عند نقطه المماس والعمودي عليه عند $(-1, 2)$

$$\text{الحل ! قوة } (u) = \frac{4 \times (-2)}{(1+(-1)^2)^2} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$\text{ميل المماس} = \text{قوة } (v) = -2 \Rightarrow \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ميل العمودي عليه} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

معادله المماس والعمودي عليه

لـ لإيجادها : يلزم

1) ميل : 3

2) نقطه المماس (u, v)

ثم نطبقه القانون :

$$u - v = 3(u - v)$$

عثمان حنيفة

الرياضيات

④ جد معادله التماسين المرسومين لخطي العلاقة $5x + 4y = 20$ عند نقطتي تقاطع منحنيها مع المحاور السينية.
الحل:

نقطة التماس = نقطة تقاطع منحنيين
لإيجادها: نعوض احد x في الاخر

$$\begin{aligned} 5x - 1 &= 4y \\ 20 &= 5(4y - 1) + 4y \\ 20 &= 5(4y - 1) + 4y \\ 20 &= 20y - 5 + 4y \\ 20 &= 24y - 5 \\ 25 &= 24y \\ y &= \frac{25}{24} \end{aligned}$$

$$= (5 - 4y)(4 - 5x)$$

$$3 = 4 - 5x \quad 4 = 5 - 4y$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$3 + 1 = 4 - 5x \quad 4 - 1 = 5 - 4y$$

$$4 = 4 - 5x \quad 3 = 5 - 4y$$

∴ نقطتا التماس: $(-4, 3)$ ، $(3, -4)$

$$= 2 + 5x + 4y$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{4y}{4}$$

$$\frac{5}{5} = \frac{4}{4}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{4}{3} = \text{ميل التماس الاول}$$

$$\text{معادلته: } 3 + 5x = 4 - 5y$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{5} = \text{ميل التماس الثاني}$$

$$\text{معادلته: } 4 - 5y = 3 + 5x$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

⑤ جد معادله التماس المرسوم لخطي العلاقة $5x + 4y = 20$ عند نقطة تقاطع منحنيها مع محور السينات.
الحل:

نقطة التماس = نقطة التقاطع مع محور x
لإيجادها: $5x = 20$

$$\frac{5x}{5} = \frac{20}{5} \rightarrow x = 4$$

$$2 = 4 \rightarrow 8 = 3 \rightarrow 2 = 4$$

$$\therefore \text{نقطة التماس } (4, 2)$$

$$\frac{17}{3} + 1 = \frac{5 \times 8}{4} + 1 = (5 - 4)$$

$$\therefore \text{ميل التماس} = 2 + 1 = (2)$$

$$\therefore \text{معادله التماس: } 4 = 5(2 - 5x)$$

⑥ جد معادلتين التماسين لخطي العلاقة $5x + 4y = 20$ عند نقطتي تقاطع منحنيها مع محور الصادات.
الحل:

نقطة التماس = نقطة التقاطع مع محور y
لإيجادها: $4y = 20$

$$4y = 20 \rightarrow y = 5$$

$$\therefore y = 5 \text{ أو } y = -5$$

∴ نقطتا التماس: $(0, 5)$ ، $(0, -5)$

$$1 = 2 + 5x + 4y$$

$$1 = 2 + 5x + 4y \rightarrow 5x + 4y = -1$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5} = \text{ميل التماس الاول}$$

معادلته:

$$5x - \frac{1}{5} = 4y$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5} = \text{ميل التماس الثاني}$$

معادلته:

$$5x - \frac{1}{5} = 4y$$

تدريب: جد معادله التماسين لخطي العلاقة $5x + 4y = 20$ عند نقطتي تقاطع منحنيها مع محور الصادات.

① لخطي العلاقة $5x + 4y = 20$ عند نقطتي تقاطع منحنيها مع المحاور السينية.
الحل:

عثمان حنفية

الرياضيات

⊙ يَبَيِّنُ أن المماسين المرسومين للمخمسين

ع-ع = 9 + 6 = 15 ، ع-ع = 4 - 6 = -2
مماسان عند نقطه تقاطع المخمسين
الربع الأول .

الكل :

نقطه التماس = نقطه تقاطع المخمسين

$$15 = 9 + 6$$

$$-2 = 4 - 6$$

$$15 = 9 + 6 \rightarrow 15 = 15 \rightarrow 1 = 1$$

$$-2 = 4 - 6 \rightarrow -2 = -2 \rightarrow 3 = 3$$

نقطه التماس (153)

$$15 = 9 + 6$$

$$15 = 9 + 6 \rightarrow 15 = 15 \rightarrow \frac{15}{3} = \frac{15}{3}$$

∴ ميل المماس الأول = $\frac{15}{3}$

$$15 = 9 + 6$$

$$15 = 9 + 6 \rightarrow 15 = 15 \rightarrow \frac{15}{4} = \frac{15}{4}$$

∴ ميل المماس الثاني = $\frac{15}{4}$

$$1 = \frac{15}{4} \times \frac{15}{3} = 15 \times 15 = 225$$

∴ المماسان متعامدان عند (153)

$$\text{Ⓐ إذا كان : } (15) = \frac{15}{3-15}$$

$$(15) = 15 - 15 = 0$$

جد النقطه التي تكون عندها مماسا متغيرين

الاقترابين ، ه متعامدين . ثم جد معادله

المماس المرسوم لمنحنى (15) عنده النقطه

الكل :

$$1 = (15) \times (15) = 15 = 15$$

$$1 = 15 - 15 \times \frac{15}{(3-15)}$$

$$1 = \frac{15-15}{(3-15)} \rightarrow 1 = \frac{0}{-12} \rightarrow 1 = 0$$

$$15 = 9 + 6$$

$$15 = (9-15) (15-15)$$

$$1 = 15 \quad \text{أو} \quad 9 = 15$$

$$1 = (15) \quad \frac{1}{3} = (9) \neq 15$$

$$1 = (15) \quad \sqrt{9} = (9) \neq 15$$

$$(15) \neq (15) \quad (9) \neq (9)$$

∴ نقطه التماس (1-1)

$$\frac{1}{3} = \frac{15}{4} = (15) \neq (15) = (15) \neq (15)$$

$$\text{معادلتهم : } 1 + 15 = 1 + 15$$

تدريب :

Ⓐ يَبَيِّنُ أن المماسين المرسومين

$$\text{للاقترابين : } (15) = \frac{15}{3-15} , 15$$

$$(15) = (15)$$

مماسان عند نقطه تقاطع منحناهما

Ⓒ إذا كانه (15) = (15-15)

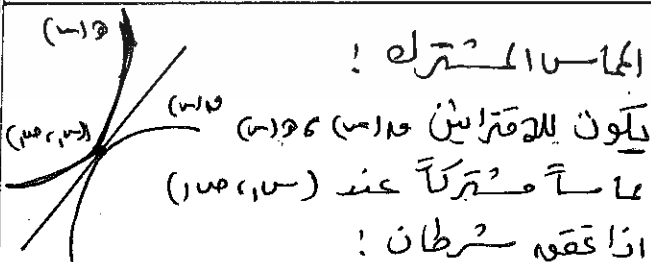
$$(15) = (15) - 15 = (15) \neq 15$$

جد النقطه التي يكون عندها مماس

متغيرين الاقترابين ، ه متعامدين

ثم جد معادله المماس المرسوم لمنحنى (15)

عنده النقطه .



المماس المشترك !

يكون الاقترابين (15) و (15) مماساً مشتركاً عند (15, 15)

إذا تحققه شرطان :

$$(1) \quad (15) = (15) = (15) = (15) = (15)$$

$$(2) \quad (15) = (15) = (15) = 15$$

وهي الاقترابان لهذه ، كالمه متعامدين .

عثمان حنيفة

الرياضيات

$$\begin{aligned} \sqrt{c-b} &= (s) \quad b + c - 2 = (s) \\ \text{لكنه } (1) &= (1) \\ c - b &= b + 2 \\ \textcircled{1} \leftarrow c - b &= b + 2 \\ c &= (1) = (1) \quad \text{كذلك } c = (1) \\ c &= (1) \quad c = (1) \\ c &= 1 - b \quad \textcircled{2} \leftarrow c = b + 2 \\ \boxed{3 = b} \\ c &= 3 + b + 2, \quad c - b = 3 - b + 2 \\ 1 - b &= b + 2, \quad 1 = b + 2 \\ 1 &= b + 2 \\ \frac{1}{1} &= \frac{b+2}{1} \\ \frac{1}{1} &= \frac{b+2}{1} \\ \boxed{3 = b} \quad \leftarrow \quad \boxed{3 = b} \end{aligned}$$

④ جد معادله التماس لمبنى الاقتران
 د (س) = \sqrt{s} عند نقطه تماس مع
 مبنى الاقتران د (س) = $s^2 - 3s + \frac{4}{3}$
 الحل:
 د (س) = $\frac{1}{\sqrt{s}}$, د (س) = $s^2 - 3s + \frac{4}{3}$
 لكنه:
 د (س) = $\frac{1}{\sqrt{s}}$ ← د (س) = $s^2 - 3s + \frac{4}{3}$
 $\frac{1}{\sqrt{s}} = s^2 - 3s + \frac{4}{3}$
 $\frac{1}{\sqrt{s}} = s^2 - 3s + \frac{4}{3}$
 بالتحريب: $\boxed{1 = s}$

س	س	س	س
16	16	9	1
16	16	9	1

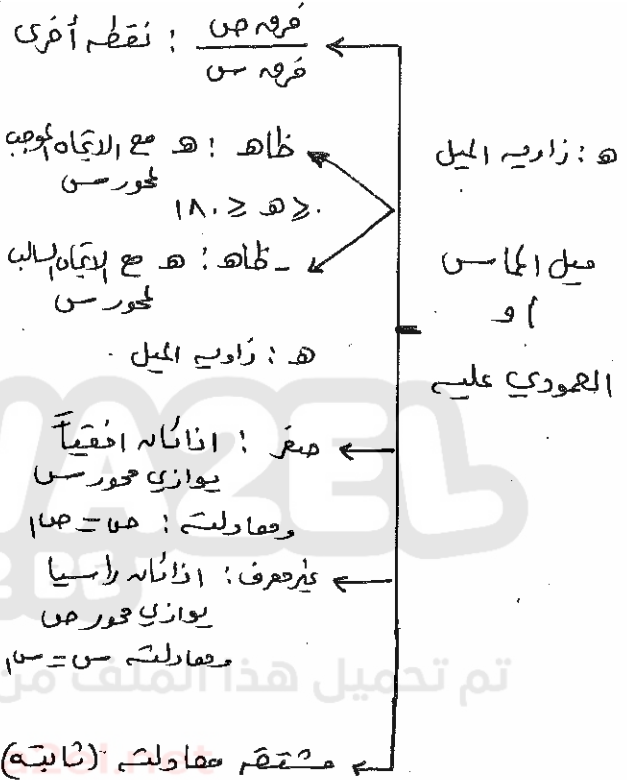
لتدريب:
 اذنان ا
 معنى الاقتران هو $s^2 + 1$
 معنى الاقتران هو $s^2 + (s+1)$
 عند نقطه متحد:
 (1) امكانيات نقطه التماس
 (2) قيمه الثابت ج
 (3) معادله التماس المشترك

①
 $\frac{1}{2} = s$
 د (1) = 1
 د (1) = 1
 د (1) = $\frac{1}{2}$
 لكنه $\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})$
 د (1) = $\frac{1}{2}$
 معادله: $\frac{1}{2} = 1 - s$

⑤ اذنانه مبنى الاقتران
 د (س) = $s^2 - b + c$
 معنى الاقتران د (س) = $s^2 - b + c$
 عند النقطه (1, 1)
 نجد الثوابت ب , ج
 الحل ←

قوانين الميل

ميل المماس = المشتقة الأولى للاقتران
نقطة المماس



⊙ إذا رسم مماس لمنحن $(y=f(x))$ عند النقطة $(a, f(a))$ الواقعة على منحناه .
فقط هذا المماس محور السينات عند $y=f(a)$
نجد P, Q
الحل : نقطه المماس $(a, f(a))$

فـ $(y=f(x))$ ميل المماس = $2 = f'(a)$
ميل المماس = $1 \times 2 = 2$
ميل المماس = $\frac{b}{1+a}$
ميل المماس = $\frac{b}{2}$

$\frac{b}{2} = 2 \Rightarrow b = 4$
نقطة على منحنى $(y=f(x))$ تقع عند $(4, 1)$
 $4 = f(4) = 4 + 2(4) = 12$

⊙ جد معادله المماس المرسوم لمنحن الاقتران $(y=f(x))$ عند النقطة التي يصنع عندها المماس زاوية $\frac{\pi}{3}$ مع الاتجاه السالب لمحور س .
الحل : نقطه المماس $(a, f(a))$

فـ $(y=f(x))$ ميل المماس = $2 = f'(a)$
ميل المماس = $2 = f'(a)$
ميل المماس = $2 = f'(a)$

$2 = f'(a) = 2a \Rightarrow a = 1$
ميل المماس = $2 = f'(1) = 2(1) = 2$
ميل المماس = $2 = f'(1) = 2(1) = 2$

⊙ جد معادله المماس المرسوم من النقطة $(-1, f(-1))$ لمنحن الاقتران $(y=f(x))$
الحل : نقطه المماس $(a, f(a))$

فـ $(y=f(x))$ ميل المماس = $\frac{f'(x)}{1+f'(x)}$
ميل المماس = $\frac{f'(x)}{1+f'(x)}$

ميل المماس = $\frac{f'(x)}{1+f'(x)}$
ميل المماس = $\frac{f'(x)}{1+f'(x)}$
ميل المماس = $\frac{f'(x)}{1+f'(x)}$

تدريب :
بين ان لمنحن $(y=f(x))$ مماسين مرصين من النقطة $(a, f(a))$
ثم جد معادله كل منهما .

④ جد قياس الزاوية التي يصنعها محاور

منحنى العلاقة $y = x^2 + 2x - 3$ مع الاتجاه الموجب لمحور x عند النقطة $(-2, 3)$ الكلي:

نقطة التماس $(-2, 3)$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x - 6 &= 2 - 6 + 3 + 2 \\ 2x^2 + 4x - 6 &= 1 - 3 + 3 + 2 \\ 2x^2 + 4x - 6 &= 3 \\ 2x^2 + 4x - 9 &= 0 \end{aligned}$$

من المحاور $x = -1$ من المحاور $x = 3$

∴ الظاه $= -1$

$$\frac{\pi}{2} = \theta$$

⑤ اذكر رسم منحنى النقطة $(\frac{9}{4}, 1)$ عمودي

على المحاور $x = 3$ $y = 1$ منحنى الإقتزان $(x, y) = (3, 1)$ نجد معادلته:

الكلي: نقطة التماس $(3, 1)$

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= 3 - 6 + 9 \\ x^2 - 6x + 9 &= 6 \\ x^2 - 6x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{x^2 - 6x + 3}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 - 6x + 3 = \frac{x}{3}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 18x + 9 &= x \\ 3x^2 - 18x + 8 &= 0 \end{aligned}$$

$$3x^2 - 18x + 8 = 0 \quad \text{أو} \quad 3x^2 - 18x + 8 = 0$$

$$x = 4 \quad \text{أو} \quad x = \frac{2}{3}$$

$$(4, 1) \quad \text{أو} \quad (\frac{2}{3}, 1)$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{من المحاور} \quad \text{معادلته}$$

$$3x^2 - 18x + 8 = 0 \quad \text{معادلته}$$

$$3x^2 - 18x + 8 = 0 \quad \text{معادلته}$$

⑥ يتبين أن لمنحنى الإقتزان:

$$y = x^2 - 6x + 9$$

الكلي:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

لكنه المحاور $x = 3$ من المحاور $x = 3$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 = 0$$

$$x = 3$$

$$(3, 1) \quad \text{أو} \quad (3, 1)$$

∴ يوجد محاور $x = 3$ من المحاور $x = 3$

معادلته $x = 3$ معادلته $x = 3$

⑦ ما قيم x التي يكون عندها العمودي على المحاور

$$y = x^2 - 6x + 9$$

يوازي محور x معادلته

الكلي:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

لكنه العمودي على المحاور $x = 3$ من المحاور $x = 3$

∴ المحاور $x = 3$ من المحاور $x = 3$ (افقي)

من المحاور $x = 3$ معادلته

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \text{أو} \quad x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \quad \text{من المحاور} \quad \text{معادلته}$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \quad \text{من المحاور} \quad \text{معادلته}$$

تدريب :

① جد التقاطع الواقف على صفحتي الاقتران

و (س) = $\frac{c+s}{c-s}$ ، $c \neq s$ ، والتي يوضع عندها المماس زاوية $\frac{\pi}{2}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

② بَيِّنْ أن لغني الاقتران $v = (s)$ = ϵ جاس

عاشان اقصيان في الفترة $[\pi, 0]$ ثم جد معادله كل منهما .

③ اذا تابه الاستقيم المار بالنقطتين $(-1, 2)$ ، $(1, 4)$

يحيى صفحتي $v = (s)$ = $c + s - 1$ ، $c = s$ ، $s = 1$ ، $c = 2$.
جد قيمه الثابت P .

اكن :

نقطه المماس = (s, c)

$$\begin{array}{l|l|l} \text{ميل المماس} & \text{ميل المماس} & \text{قوة (س)} \\ \frac{c+s}{c-s} = & \frac{c+7}{c-7} = & \epsilon + s - P = \\ \frac{1 + \sqrt{c+s-P}}{s} = & \epsilon = & c + s - P = \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \epsilon = \frac{1 + \sqrt{c+s-P}}{s} \\ \epsilon = c + s - P \\ c = s - P \\ s - \epsilon = 1 + \sqrt{c+s-P} \\ 1 - \epsilon = s - c - \epsilon - P \\ \text{①} \dots 1 = s - P \\ \text{②} \dots \end{array}$$

من $\frac{1}{s} = P$

من $1 - \epsilon = s - c - \epsilon - P$

$1 - \epsilon = s - c - \epsilon - P$

$1 - \epsilon = s - c - \epsilon - P$

$\frac{1}{s} = P$ ، $1 = s$

$1 = P$

④ اذا تابه المماس لغني الاقتران

و (س) = $c + s - P$ ، $c = s$ ، $s = 1$ ، $c = 2$.
والعمودي عليه يوضع زاوية $\frac{\pi}{2}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .
جد الثابت P .
اكن :

نقطه المماس = (s, c)

$$\begin{array}{l|l|l} \text{ميل المماس} & \text{ميل العمودي} & \text{قوة (س)} \\ \frac{1-s}{s} = & \frac{\pi}{2} = & s - P = \\ \frac{c+s-P}{s} = & 1 = & s - P = \\ & \text{ميل العمودي} & \end{array}$$

$1 - \epsilon = \frac{c+s-P}{s}$ ، $1 - \epsilon = s - P$

$s - \epsilon = c + s - P$ ، $\frac{1}{s} = P$

$s - \epsilon = c + s - P \times \frac{1}{s}$

$c - \epsilon = s + s - \frac{1}{s} - P$

$\frac{1}{s} = \frac{1 - \epsilon}{s} = P$ ، $\epsilon = s - P$

⑤ اذا تابه الاستقيم المار بالنقطتين $(-1, 2)$ ، $(1, 4)$

يحيى صفحتي الاقتران $v = (s)$ = $c + s - P$ ، $c = s$ ، $s = 1$ ، $c = 2$.
جد الثابتين P ، B .

اكن : نقطه المماس = (s, c)

$$\begin{array}{l|l} 1 = c + s - P & \text{قوة (س)} \\ = c + s + P & \text{ميل المماس} \\ \frac{P}{s} = c & \end{array}$$

$\frac{P}{s} = c$

$\frac{P}{s} = c$

$P = P^2 + c^2 \leftarrow \frac{P}{s} = P + 1$

$7 = P$

عندما $1 = s = c + s - P$

$\frac{P}{s} = c$

$\frac{P}{s} = c \leftarrow B + (1)7 - (1)4 = \frac{P}{s}$

11) اذلتان المستقيم $2 - s - 4p = 0$

يس من معنى الإقتران $0 = 2 - s - 4p$ $\frac{2}{4} = \frac{s}{-4}$

فجد قيم الثابت p

الكل :

$$2 - s - 4p = 0 \quad \left| \quad \frac{2}{4} = \frac{s}{-4} \right.$$

$$-4p = s - 2 \quad \left| \quad -4p = s - 2 \right.$$

$$p = \frac{s-2}{-4} \quad \left| \quad \frac{2}{4} = \frac{s}{-4} \right.$$

$$p = \frac{s-2}{-4}$$

$$1 = \frac{s-2}{-4} \leftarrow 2 = \frac{s-2}{-4}$$

$$-4 = s - 2 \quad \text{أو} \quad 1 = s - 2$$

$$s = 2 \quad \text{أو} \quad s = 1$$

$$(-1, 2) \leftarrow 2 = 2 + 2 + 4p \leftarrow 2 = 2 + 2 + 4p$$

$$(-2, 1) \leftarrow 1 = 2 - 2 - 4p \leftarrow 1 = 2 - 2 - 4p$$

12) جد معادله المماس المرسوم لمنحنى الإقتران

$$0 = (s-1) = \sqrt{3+2s} \quad \text{اذ علمت أن هذا المماس}$$

$$\text{يعاد المستقيم } 0 = 2 - s - 4p$$

$$0 = 2 - s - 4p \quad \text{الكل :}$$

$$-4p = s - 2 \quad \left| \quad \frac{s-2}{\sqrt{3+2s}} = \frac{s-2}{-4} \right.$$

$$-4 = \frac{s-2}{\sqrt{3+2s}} \quad \left| \quad -4 = \frac{s-2}{\sqrt{3+2s}} \right.$$

$$\frac{1}{4} = \frac{s-2}{\sqrt{3+2s}} \quad \left| \quad \frac{1}{4} = \frac{s-2}{\sqrt{3+2s}} \right.$$

$$1 = \frac{s-2}{\sqrt{3+2s}} \leftarrow \frac{1}{4} = \frac{s-2}{\sqrt{3+2s}}$$

$$1 = \frac{s-2}{\sqrt{3+2s}} \leftarrow 4 = \frac{s-2}{\sqrt{3+2s}}$$

$$1 = s - 2 \quad \text{أو} \quad 1 = s - 2$$

نقطة المماس (1, 2) X

$$\frac{1}{4} = \frac{s-2}{\sqrt{3+2s}} \leftarrow \frac{1}{4} = \frac{s-2}{\sqrt{3+2s}}$$

13) جد النقط الواقع على منحنى العلاقة

$$9 - s + 16p = 0 \quad \text{والتي يكون عندها}$$

$$\text{المماس موازيا للمستقيم } 9 - s - 4p = 1$$

الكل :

$$9 - s + 16p = 0 \quad \left| \quad 9 - s + 16p = 0 \right.$$

$$-s + 16p = -9 \quad \left| \quad -s + 16p = -9 \right.$$

$$\frac{9}{16} = \frac{s}{-16} \quad \left| \quad \frac{9}{16} = \frac{s}{-16} \right.$$

$$\frac{9}{16} = \frac{s}{-16} \quad \left| \quad \frac{9}{16} = \frac{s}{-16} \right.$$

$$\frac{9}{16} = \frac{s}{-16} \quad \left| \quad \frac{9}{16} = \frac{s}{-16} \right.$$

$$\frac{9}{16} = \frac{s}{-16} \leftarrow \frac{9}{16} = \frac{s}{-16}$$

$$\frac{9}{16} = \frac{s}{-16}$$

ومن العلاقة الأصلية

$$9 - s + 16p = 0$$

$$9 - s + 16p = 0 \leftarrow 9 - s + 16p = 0$$

$$-s + 16p = -9 \leftarrow -s + 16p = -9$$

$$(-1, 2), (-2, 1)$$

تدريب :

1) اذلتان المستقيم $3 - s - 4p = 9$

$$1 + s - 2 - s - 4p = 9$$

فجد الثابت p

2) اذلتان المستقيم $2 + s + 4p = 9$

عمودك المماس لمنحنى الإقتران

$$0 = (s-1) = \sqrt{3+2s} \quad \text{عند نقطه المماس}$$

فجد الثابت p

3) ما معادله المماس المرسوم لمنحنى الإقتران

$$0 = (s-1) = \sqrt{3+2s} \quad \text{عند}$$

النقطه التي يكون فيها حوزيا N مستقيم

$$1 = s - 2 - 4p$$

4) اذلتان المستقيم $2 + s = 4p$

معنى العلاقة $1 = s - 2 - 4p$ فجد الثابت p

١٦) جد مساحة المثلث المكون من محور السينات
والمحورين والعمودى عليه لفتى الوتران
من (٥,١) = (٥,١) = ٤ - ٥ = ١ عند النقطه (٤,١)
الحل:

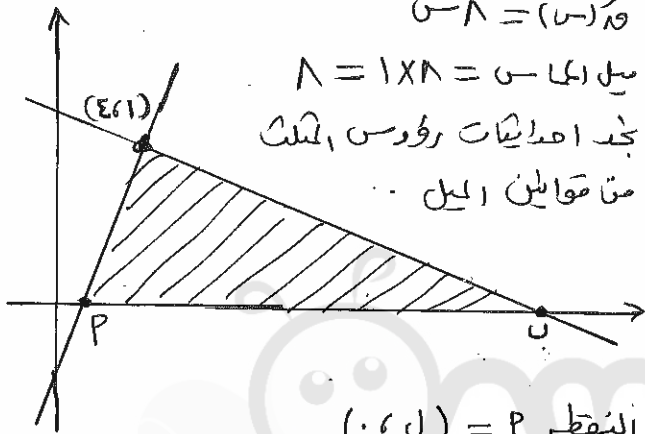
نقطه التماس (٤,١)

وه (٥,١) = ٨ - ٥

ميل التماس = ١ × ٨ = ٨

جد امكانيات رؤوس المثلث

من قوايين الميل



النقطه P = (٠,٤)

ميل التماس = $\frac{-4}{1-1} = \frac{-4}{0}$ ← $\frac{1}{1} = 1$

∴ P = (٠,٤)

النقطه B = (٠,٤)

ميل العمودى = $\frac{4}{1-1} = \frac{4}{0}$ ← $\frac{1}{8} = 8$

∴ B = (٠,٣٣)

مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times (8 - 33) \times \frac{1}{8}$

= $\frac{1}{2} \times 70 \times \frac{1}{8}$ وحدة مربع

١٧) جد مساحة المثلث المكون من المحاور
المنحرفه من (٤,٤) عند النقطه (٤,٤) ومحور
السينات والعمودى = ٧

الحل: نقطه التماس (٤,٤)

ميل التماس = $\frac{1}{4}$

ميل التماس = $\frac{1}{4}$

النقطه P = (٠,٤)

ميل التماس = $\frac{-2}{1-4} = \frac{2}{3}$

∴ $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ ← $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

النقطه B = (٤,٦) ← ميل التماس = $\frac{6-4}{4-1} = \frac{2}{3}$

∴ B = (٤,٦)

مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times (6+4) \times \frac{1}{2}$

١٤) اذا كان العمودى على التماس لفتى الوتران
من (٥,١) = ٣ + ٥ - ٢ = ٥ يوازيه المستقيم
٧ + ٥ + ١ = ١ = ١ - ٥ + ٧
الحل:

ميل التماس = ٧ + ٥ + ١ = ١

ميل التماس = $\frac{1}{7}$

ميل التماس = ٧

ميل التماس = ٣ + ٥ = ٨

ميل التماس = ٣ + ٥ = ٨

٤ = ٣ + ٥

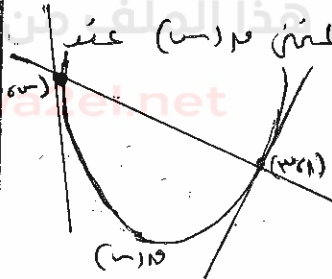
١ = ٥ ← ١ = ٣

نقطه التماس = ٣ + ٥ = ٨

∴ (٦,١) ←

معادله العمودى: $\frac{1}{7} = 7 - 5 = 2$

١٥) اذا كان العمودى على التماس لفتى
الوتران من (٥,١) = ٣ + ٥ = ٨ عند النقطه
(٣,١) يقطع منحنى من (٥,١) في نقطه اخرى
جد معادله التماس لفتى من (٥,١) عند
النقطه الاخرى.



الحل: نقطه التماس

الاولى

جد ميل العمودى:

وه (٥,١) = ٢ - ٥

ميل التماس = ٢ - ٥ = ٣

بلكه ميل العمودى = $\frac{3-5}{1-5} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

١ + ٥ = $\frac{(1+5)(1-5)}{1-5} = \frac{1-25}{-4} = \frac{24}{4} = 6$

∴ $\frac{1}{2} = 1 + 5 = 6$

∴ $\frac{3}{2} = 5$

نقطه التماس الثاني = (٥,٣)

٧ = ٢ + $\frac{9}{4} = 5$

ميل التماس الثاني = $\frac{3}{2} \times 2 = 3$

٣ - =

معادله التماس: $\frac{3}{2} = 3 - 5 = -2$

تمرين [2]

① جد معادله الهماس والعمودي عليه :
 (P) لمختلتي الإقتران $(x-5) = 3x + 2$ و $3x + 2 = 5 - x$
 عند $x = \frac{\pi}{4}$

(ب) لمختلتي الصراقم :

$$3x - 5 = 2 + x \Rightarrow x = 7$$

عند النقطه $(7, \frac{\pi}{4})$

② اذا كانه $(x-5) = 3x + 2$ و $3x + 2 = 5 - x$
 وكانه قياس زاوية ميل الهماس لمختلتي
 (P) عند النقطه $(5, 2)$ هو 135°
 فجد الثابت ج .

③ جد معادله الهماس المرسوم لمختلتي
 الإقتران $(x-5) = 3x + 2$ و $3x + 2 = 5 - x$ عند
 نقطه تقاطع معناه مع $x = 3$ و $y = 1$

④ ما قيم m التي تجعل الهماس لمختلتي
 $(x-5) = 3x + 2$ و $3x + 2 = 5 - x$ مارا بنقطه الأصل .

⑤ اذا كانه $(x-5) = 3x + 2$ و $3x + 2 = 5 - x$
 فجد معادله الهماس لمختلتي (P) اذا علمت
 انه يعاهد المستقيم $3x - 5 = 2$.

⑥ اذا كانه المستقيم $3x - 5 = 2$
 يمس مماسا لعمود $x = \frac{\pi}{4}$ و $y = \frac{\pi}{4}$
 فجد الثابت ج

⑦ أثبت أن الهماسين للمختلتي $3x - 5 = 2$ و $3x + 2 = 5 - x$
 تقاطعهما .

③١ اذا كانت $3x - 5 = 2$ و $3x + 2 = 5 - x$

معادله العمودي على الهماس لمختلتي
 (P) عند النقطه $(3, 1)$ وكان :

$$3x + 2 = 5 - x \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

الكل ا

نقطه الهماس $(3, 1) \leftarrow (3, 1) = 1 - 1$

$$\begin{array}{l} \text{ميل الهماس} = 3 \\ \text{ميل العمودي} = -\frac{1}{3} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{ميل الهماس} = 3 \\ \text{ميل العمودي} = -\frac{1}{3} \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \text{ميل الهماس} = 3 \\ \text{ميل العمودي} = -\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$3 = -3$$

$$3 = -3$$

$$\frac{(1-1)(3+2) - (3-1)(3+2)}{(3-1)^2} = 3$$

$$\frac{(1-1)(1+2) - (1-1)(2+1)}{(1-1)^2} = 3$$

$$3 = 1 + 2 = 3$$

تدريب : ①

$$\frac{(x-5) = 3x + 2}{(x-5)}$$

$$3x + 2 = 5 - x$$

وكانه للمختلتي $(x-5) = 3x + 2$ و $3x + 2 = 5 - x$
 مشتركا أفقيا عند النقطه $(3, 1)$
 فجد m

تدريب : ② اذا كانه الهماس المرسوم لمختلتي

$$(x-5) = 3x + 2 \text{ و } 3x + 2 = 5 - x$$

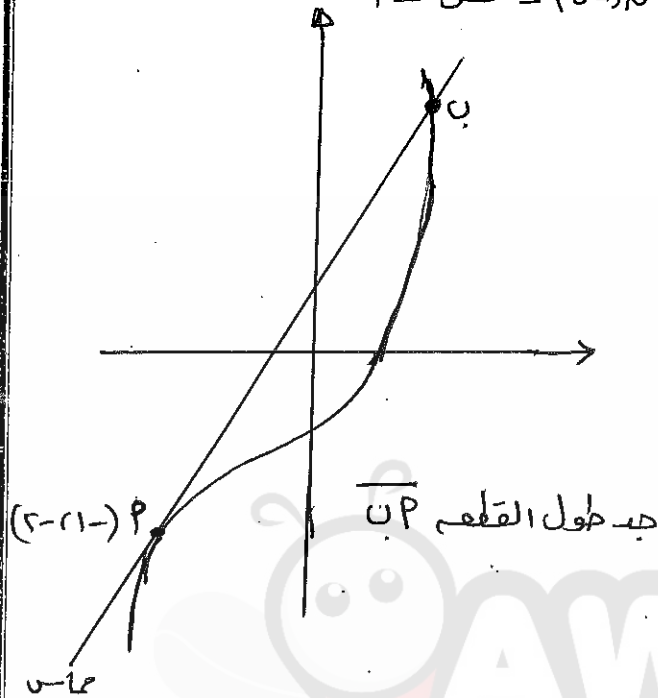
الساويه مع محوري السينات والصادات

في الربع الأول . فاذا كانت ماسه هذا

المثلث $= 32$ وجزء مربعه فجد الثابت m

١٤) الشكل المجاور يمثل منحنى الإقتزان

$$f(x) = (x-1)^3 - 1$$



جد طول القطع \overline{PQ}

١٥) اذا كان $1 = 3x^3 - 2x - 1$ فما \bar{x}

لمنحى العلاقه $x^3 - 2x - 1 = 0$ عند النقطه P

عند النقطه $(1, 2)$ جد التايين P, Q

١٦) اذا كانه المماس لمنحى الإقتزان

$$f(x) = (x-1)^3 - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$$

يمر بالنقطه $(-1, -1)$ ، جد قياس الزاويه

التي يصنعها هذا المماس مع الاتجاه الموجب لمحور

١٧) اذا كانه للإقتزان :

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$$

فما مشتركاً عند النقطه $(1, 1)$

جد : ١) قيم P, Q ، ٢

٣) معادله المماس المشترك

٨) رسم من النقطه $(-1, 4)$ مماساً

لمنحى العلاقه $x^3 + 8 = 0$

جد معادله

٩) اذا رسم لمنحى الإقتزان :

$$f(x) = (x-1)^3 - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$$

فكانت معادله أحد هـ $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$

جد معادله المماس الآخر

١٠) ما قيم x التي يكون عندها المماس

لمنحى الإقتزان $f(x) = (x-1)^3 - 1$

موازيًا للمستقيم $x^2 + 4x + 4 = 0$

١١) جد قاعدة إقتزان كثير حدود من الدرجة

الثانيه يمر بالنقطه $(3, 0)$ وله مماسان

الاول عند $x = 1$ ويصنع زاويه 45° مع

الاتجاه الموجب لمحور السينات

والثاني عند $x = 2$ ويصنع زاويه 135° مع

الاتجاه الموجب لمحور السينات

١٢) اذا كانت $0 = x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ مع معادله

المعدي للمماس لمنحى $f(x) = (x-1)^3 - 1$ عند

$x = 1$ وكانه $0 = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

جد $h(1)$

١٣) اذا كانه المستقيم المار بالنقطتين

$(1, 1)$ ، $(2, 2)$ معدي للمماس

لمنحى $f(x) = (x-1)^3 - 1$ ، $x \neq 1$

عند نقطه المماس . جد التايين

معدل التغير عند نقطة

هو المستقيم الواصل للإقتران عند هذه النقطة

① صيغة معدلي مربع الشكل تتحدد بانتظام

محافظ على شكلها . جد معدل تغير صامتها

بالنسبة الى طولها عندما يكون محيطها ٢٤ سم

الحل :

نفرض صامتها = م وطولها = ل ومحيطها = ٢٤

$$المطلوب : \frac{m}{l} = ?$$

$$٢٤ = ٢$$

صام المربع = (طول ضلع)²

$$٢٤ = ٢ \quad \text{عندما} \quad ٢ = ل$$

$$٢٤ = ٤ \quad \text{عندما} \quad ٢ = ل$$

$$٦ = ل \quad \text{عندما} \quad ١٢ = ٦ \times ٢ =$$

② انبوب معدني اسطواني الشكل يريد

ارتفاعه عن طول نصف قطر قاعدته مقدار وحدتين

اذا حدد محافظاً على شكله جد معدل تغير

صاحته الكائلي بالنسبة لطول نصف قطر

قاعدته عندما يكون طول نصف قطر قاعدته ٦ سم

الحل :

نفرض صامته = م وارتفاعه = ع ونصف قطر

نصفه =

$$المطلوب : \frac{m}{\frac{c}{2}} = ?$$

$$٦ = نصفه$$

$$٣ = ٢ \times نصفه \quad \text{لكنه} \quad ٢ + نصفه = ٤$$

$$٣ = ٢ \times نصفه \quad \text{عندما} \quad نصفه = ٢$$

$$٣ = ٢ \times نصفه \quad \text{عندما} \quad نصفه = ٢$$

$$\frac{٣}{٢} = ٢ \times نصفه \quad \text{عندما} \quad نصفه = ٣$$

$$١٤ = ٢ \times نصفه \quad \text{عندما} \quad نصفه = ٧$$

$$١٤ \times ٢ = ٢٨$$

③ اذ ارسم من النقطة P (٣، ١) عمودان

لعمودي الإقتران هـ (١، ٣) = ٣ - ١ - ٣ + ١

فيان هـ في النقطتين ب ، ج نجد

صامتة المثلث P ب ج

④ يتبين أن المماسين المرسومين من

النقطة (٣، ١) لعمودي العلاقات :

$$٣ - ١ = ٢ - ١$$

⑤ جد النقطة الواقعة على عمودي العلاقات

صامتة - ٣ - ١ + ٣ = ٣ - ١ والتي يكون

العمودي على المماس عند هـ أفقياً .

⑥ اذ اننا المقيّم ٣ - ١ - ٣ + ١ = ٤ - ١

يتم عمودي هـ (٣، ١) عند النقطة (٣، ١)

والمقيّم ٣ + ١ - ٣ + ١ = ٤ عمودي هـ

المماس لعمودي هـ (٣، ١) عند النقطة (٣، ١)

جد (٣، ١) (٣، ١)

⑦ الشكل المجاور هـ صامتة المثلث

المكون من المماس المرسوم من النقطة

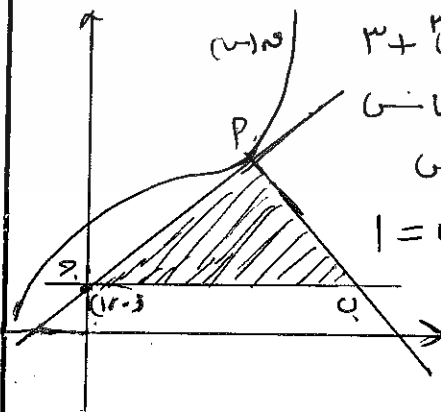
(١، ٠) لعمودي الإقتران

$$٣ - ١ = ٣ + ١$$

والعمودي هـ المماس

عند نقطة المماس

$$\text{والمقيّم} \quad ٣ = ١$$



عثمان حنيفة

الرياضيات

المعدلات المرتبطة بالزمن

هي المشتقات بالنسبة للزمن
مثلاً:

$$\text{معدل تغير المسام } م = \frac{م\text{س}}{\text{دس}}$$

$$\text{معدل تغير المسافة } ف = \frac{ف\text{م}}{\text{دس}} = \text{سرعة الجسم}$$

تذكر أن:

مع مرور الزمن إذا كانت قيمة المتغير:

- (1) تزداد ← مشتقته موجب
- (2) تنقص ← مشتقته سالب

① تحركه نقطه على صحنه الصراجه:

$$س = ٥٠ + ٣٠٠٠٠٠ - ٣٠٠٠٠٠٠٠$$

فإذا كانه معدل تغير اعدادها السني ٣٠٠٠٠٠

عند النقطه (٢٠١) نجد معدل تغير اعدادها

الصادق عند النقطه نفسها

الكل:

نقوض أن النقطه المعركه = (٢٠١)

$$٣ = \frac{س}{\text{دس}}$$

$$\text{المطلوب } ؟ = \left| \frac{٥٠٠٠٠٠}{\text{دس}} \right|$$

(٢٠١)

الكل: نضعه بالنسبه لن

$$٢٠٠٠٠٠٠٠ + \frac{س}{\text{دس}} - \frac{٥٠٠٠٠٠٠٠}{\text{دس}} + \frac{س}{\text{دس}} =$$

نقوض!

$$= \frac{س}{\text{دس}} + ٣ \times ٥٠ - \frac{٥٠٠٠٠٠٠}{\text{دس}} + ٣ \times ٢$$

$$= \frac{س}{\text{دس}} + ١٥ - \frac{٥٠٠٠٠٠٠}{\text{دس}} + ٦$$

$$= ٩ - \frac{٥٠٠٠٠٠٠}{\text{دس}}$$

$$\frac{٩}{\text{دس}} = \frac{٥٠٠٠٠٠٠}{\text{دس}} \Rightarrow ٩ = ٥٠٠٠٠٠٠$$

② ما معدل التغير في حجم مكعب بالنسبه

الى صامتة اكلية عندما يكون

طول ضلعه ٣ م.

الكل:

نقوض أن: حجم = ح ومسامه = م
وطول ضلعه ل

$$\text{المطلوب } ؟ = \left| \frac{ح\text{س}}{م\text{س}} \right|$$

$$ل = ٣$$

$$٦ = م$$

$$١٢ = \frac{م\text{س}}{\text{دس}}$$

$$٢ \times ١٢ =$$

$$٢٤ =$$

$$٣ = ح$$

$$٣ = \frac{ح\text{س}}{\text{دس}}$$

$$٤ \times ٣ =$$

$$١٢ =$$

$$\frac{١}{٦} = \frac{١}{٢٤} \times ١٢ = \frac{\text{دس}}{٣٥} \times \frac{\text{دس}}{\text{دس}} = \frac{\text{دس}}{٣٥} \Rightarrow$$

تمرين ٣

① مخروط من التاج يزود بانتظام بحيث

يبقى ارتفاعه ثلاثة اضعاف قطره

جد معدل تغير حجمه بالنسبه الى ارتفاعه

عندما يكون طول نصف قطره ١٠ م

② ما معدل تغير حجم كره بالنسبه الى مسامه

لحجمها عندما يكون طول نصف قطرها ١٣ م

③ مستطيل طولك ثلاثة اضعاف عرضه

جد معدل تغير مسامته بالنسبه الى طولك

عندما يكون محيطه ١٦ م

④ اسطوانه دائريه قائمه حجمها ١٨ م^٣

تتغير ابعادها بحيث يبقى حجمها ثابتا . جد

معدل تغير ارتفاعها بالنسبه لطول نصف

قطرها عندما يكون ارتفاعها ٣ م

٤) تزداد مساحة سطح كرة بعد ٤٨ كـ/٣

جد معدل تغير مجهرها عندما يكون طول نصف قطرها ٣ م

الحل:

نروض مجهرها = ع ومساحتها = م
ونصف قطرها = نه

$$\pi 48 = \frac{M}{n}$$

$$? = \left| \frac{E}{n} \right| \text{ المطلوب}$$

$$n = 2$$

$$3 = \frac{E}{3} \Rightarrow E = 9$$

$$\frac{E}{n} = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$3 \times 9 \times \pi = \frac{E}{n}$$

$$\pi 27 = \frac{E}{n}$$

$$\pi 4 = M \text{ لكنه}$$

$$\frac{\pi 8}{n} = \frac{M}{n}$$

$$\pi 24 = \frac{M}{n}$$

$$3 = \frac{n}{n}$$

$$3 \times 9 \times \pi = \frac{E}{n}$$

$$\pi 27 = \frac{E}{n}$$

٥) يتحدد مركز معطى دائري بالحزارة محافظاً

على شكله بحيث تزداد مساحة سطحه بعد ٦ كـ/٣

نصف قطر القرص عندما يكون طول نصف قطره ٣ م

الحل:

نروض مساحته = م ونصف قطره = نه

$$6 = \frac{M}{n}$$

$$? = \left| \frac{E}{n} \right| \text{ المطلوب}$$

$$n = 3$$

$$\pi = M$$

$$\frac{\pi}{n} \times \pi 3 = \frac{M}{n}$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{n}{n} \leftarrow \frac{n}{n} \times 3 \times \pi 3 = 6$$

٥) قطع من الناجح أطواله الشكل تدوب

محافظاً على شكلها بعد ٦ كـ/٣ حيث

يبقى ارتفاعها ثلاثة أمثال نصف قطر قائمتها

جد معدل تغير مساحتها الجائبة عندما يكون

الحل:

نروض مجهرها = ع ومساحتها الجائبة = م
ونصف قطرها = نه وارتفاعها = ع

$$6 = \frac{M}{n}$$

$$? = \left| \frac{E}{n} \right| \text{ المطلوب}$$

$$n = 2$$

$$3 = \frac{E}{2} \Rightarrow E = 6$$

$$\pi 3 \times 3 = E$$

$$\pi 9 = E$$

$$\frac{\pi 9}{n} = \frac{E}{n}$$

$$\frac{\pi 9}{2} = \frac{E}{n}$$

$$\frac{1}{\pi 6} = \frac{n}{n}$$

٥) مكعب من الناجح يتناقص طول ضلعه

بعد ١٠... و... كـ/٣ . جد معدل تغير

حجم ومساحته الكلية عندما طول ضلعه ٣ م

الحل:

نروض حجم = ع ومساحته = م وضلعه = ل

$$\frac{E}{n} = 10 \dots$$

$$? = \left| \frac{M}{n} \right| \text{ المطلوب}$$

$$n = 1$$

$$3 = E$$

$$\frac{E}{n} \times 3 = \frac{E}{n}$$

$$3 \dots = \frac{1}{1} \times 3 \dots =$$

$$3 = M$$

$$\frac{E}{n} \times 3 = \frac{M}{n}$$

$$\frac{1}{1} \times 3 \dots =$$

$$3 \dots =$$

عثمان حنيفة

الرياضيات

$$10 = 20 \quad 3 = \frac{5}{5}$$

$$? = \left| \frac{25}{5} \right| \text{ المطلوب}$$

$$1 = 5$$

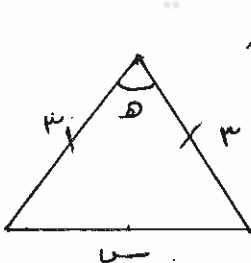
$$10 = 40 \text{ س } \left. \begin{array}{l} \text{لكنه س} \\ \frac{10}{5} = 40 \rightarrow \end{array} \right\} \begin{array}{l} 502 + 5 - 2 = 8 \\ \frac{170}{5} + 5 - 2 = 8 \end{array}$$

$$\frac{5}{5} \times 170 - \frac{5-5}{5} 2 = \frac{25}{5}$$

$$0 - 2 = \frac{9 \times 170}{74} - 2 \times 2 =$$

$$0/3 - 1 =$$

18) إذا كان طول كل من ضلعي مثلث متساوي الساقين 3-3 بينما يزداد الضلع الثالث يجعل 2-3-3 فاصعد تغير زاوية رأسه عندما يكون طول قائمته = 4-3
 اكل: نغرض زاوية رأسه = هـ
 طول قائمته = س



$$? = \left| \frac{9}{5} \right| \text{ المطلوب}$$

$$4 = 3$$

$$3 = \frac{5}{5}$$

$$س = (3) + (3) - 3 \times 3 \times 2 = 3 \times 3 \times 2 \text{ جابها}$$

$$س = 18 - 18 = 0$$

$$س = 18 - (1 - \text{جابها})$$

$$2-3-3 \text{ جابها } \frac{5}{5} \times 18 = \frac{5}{5}$$

عندما س = 4

$$18 = 17 - (1 - \text{جابها})$$

$$\frac{1}{9} = \text{جابها} - 1$$

$$\frac{1}{9} = \text{جابها}$$

$$1 = \text{جابها} + \text{جابها}$$

$$1 = \frac{1}{11} + \text{جابها}$$

$$\frac{10}{9} = \text{جابها}$$

$$س = \frac{5}{5} \times 9 = \frac{5}{5} \text{ جابها}$$

$$\frac{10}{9} \times \frac{5}{5} \times 9 = 2 \times 4$$

$$\frac{10}{10} = \frac{5}{5} \text{ رادون}$$

$$3 = 2\pi r \text{ نقه } \quad \text{لكنه } 8 = 2\pi r$$

$$3 = 2\pi r \times 3 \text{ نقه}$$

$$3 = 2\pi r \text{ نقه}$$

$$\frac{35}{5} = \frac{2\pi r}{5} \text{ نقه}$$

$$3 - 2 = \frac{1}{\pi r} \times 2 \times \pi r =$$

7) يقرب الرجل من ثقب في كيبس على الارض مكونا كوسه على شكل مخروط قائم بحيث تبقى زاوية رأسه = 60° دائما. فاذا علمت أن ارتفاعه يزداد بمعدل 2/3 د/س فاصعد تناقص حجم الرجل في الكيبس عندما يكون نصف قطر قائمته المخروط 6-3

نغرض: هـ: حجم الرجل
 3: ارتفاعه
 6: نصف قطر قائمته

$$? = \left| \frac{125}{5} \right| \text{ المطلوب}$$

$$6 = \frac{5}{5}$$

$$3 = \frac{\pi}{3} \text{ نقه } 6$$

$$6 \times \frac{5}{13} \times \frac{\pi}{2} = 3$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{\pi}{9} = 3$$

$$\frac{25}{5} \times \frac{\pi}{3} = \frac{25}{5}$$

لكنه 3 = نقه

$$\frac{3}{3} = \text{نقه}$$

$$3 \times 3 \times 3 \times \frac{\pi}{3} =$$

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$\frac{125}{5} = \frac{25}{5}$$

9) يزداد احد بعدي مستطيل بمعدل 3/4

بينما ينقص الاخر بحيث يبقى الشكل مستطيل

صاحبه ثابتة مقدارها 10-3 فاصعد

تغير محيط المستطيل عندما يكون البعد المتزايد 8-3

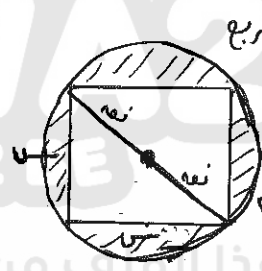
اكل: نغرض: 3: صاحبه
 هـ: محيطه
 س: رادون

$$3 = 2 \times 8 = 16$$

⑨ تتحدد أضلاع مربع بعدد ϵ سم حيث رسمت دائرة حول المربع بحيث يتغير رؤوسها واقترنت بتحدد مع المربع بحيث تبقى محافظه على شكلها ووضعا ، جد معدل التغير في مساح المنطقه المحصوره بين المربع والدائرة عندما يكون طول ضلع المربع 10 سم اكل !

نروض ان : طول ضلع المربع = s
 نصف قطر الدائرة = نصفه
 والمساح بينهما = m

$\epsilon = \frac{ds}{dt}$ والمطلوب : $\frac{dm}{dt}$ $s = 10$



$m = \text{مساح الدائرة} - \text{مساح المربع}$
 $m = \pi r^2 - s^2$
 لكن

$\frac{dm}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} - 2s \frac{ds}{dt}$
 $2 = 2\pi r \frac{dr}{dt} - 2s \frac{ds}{dt}$
 $1 = \pi r \frac{dr}{dt} - s \frac{ds}{dt}$
 $\frac{dr}{dt} = \frac{1 + s \frac{ds}{dt}}{\pi r}$
 $\frac{dr}{dt} = \frac{1 + 10 \times \frac{ds}{dt}}{\pi \times 10}$
 $(2 - \pi) \epsilon = \frac{ds}{dt} \times 10 \times (2 - \pi)$

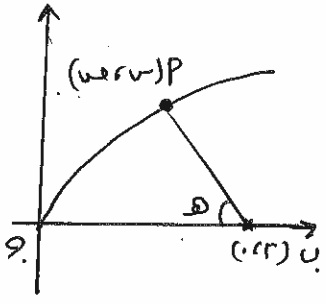
$f = \sqrt{4 + 6s}$
 لكن $\sqrt{2 + 6s} = 4$

$4 + 6s = 16$
 $6s = 12$
 $s = 2$

عنها $f = 4$
 $\sqrt{2 + 6s} = 4$
 $2 + 6s = 16$
 $6s = 14$
 $s = \frac{7}{3}$

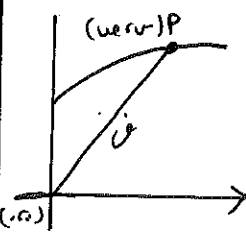
$\frac{df}{ds} = \frac{3}{\sqrt{2 + 6s}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$

⑩ تحركه النقطه P على منحنى الاقتران $y = \sqrt{1-x}$ ، حيث يزداد لإحداثي السين لها بمعدل ϵ وحدات / ث . ما معدل تغير الزاويه θ حيث $P(0.2, 0.4)$ عندما يكون الإحداثي السين لها = 3 وحدات .
 ج : نقطه الأصل



الكل : $\epsilon = \frac{dy}{dt}$
 المطلوب : $\frac{d\theta}{dt}$ $s = 3$
 ميل $OP = \frac{y}{x} = \frac{0.4}{0.2} = 2$
 لكن $\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{1-x}}{x}$
 $\frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{1-x}}{x} \right) = \frac{1-x - \sqrt{1-x}}{x^2}$
 $\frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{1-x}}{x} \right) = \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x^2}$
 $\frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{1-x}}{x} \right) = \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x^2}$
 $\frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{1-x}}{x} \right) = \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x^2}$

⑪ تحركه النقطه P على منحنى الاقتران $y = \sqrt{1-x}$ ، حيث يزداد بعدها عن نقطه الأصل بمعدل 3 سم / ث . ما معدل تغير الاقتران السيني لها عندما يكون بعدها عن نقطه الأصل ϵ سم



الكل : $\frac{ds}{dt} = 3$
 المطلوب : $\frac{dx}{dt}$ $\epsilon = 6$

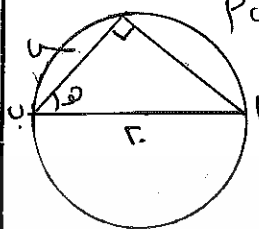
عثمان حنيفة

الرياضيات

لكن

$$\begin{aligned} (8-13) \frac{\pi}{3} &= 2 \\ (28-613) \frac{\pi}{3} &= 2 \\ \frac{85}{3} (83-824) \frac{\pi}{3} &= \frac{25}{3} \\ \frac{1}{3} \times (12-48) \frac{\pi}{3} &= \\ 3-37 &= 18 \times \frac{\pi}{3} = \end{aligned}$$

13) في الشكل المجاور \overline{OP} قطر في دائرة طولها $2r$. تتحرك النقطة P على القوس \widehat{BP} بحيث يزداد قياس الزاوية $\angle POB$ بمعدل 3° / دقيقة. حدد معدل تغير مساحه المثلث $\triangle POB$ عندما يكون قياس الزاوية $\angle POB = 30^\circ$ لكل:



$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{180} \times 3 = \frac{55}{35}$$

المطلوب: $\frac{dS}{dt} = ?$
 $\frac{\pi}{3} = \theta$

$$3 = \frac{1}{3} \times r \times \theta \times \text{جاه}$$

$$3 = 1 \times \text{جاه} \quad \text{لكن جناه} = \frac{55}{3}$$

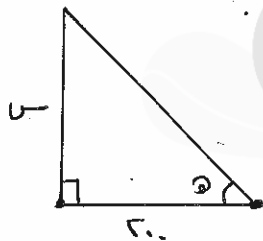
$$3 = 2 \times \text{جاه} \times 1 \rightarrow \text{جاه} = \frac{3}{2}$$

$$3 = 2 \times \text{جاه} \times 1 = 2 \times \text{جاه}$$

$$\frac{35}{35} = \frac{25}{35} \times \text{جاه}$$

$$= \frac{\pi}{3} \times \text{جاه} \times \frac{25}{3} = \frac{25\pi}{3}$$

14) أطلقه صاروخ رأسياً ليعلى بسرعة 100 m/s وعلى بعد 2000 m من نقطة انطلاق الصاروخ كان شاهد جالاً على الارض ينظر الى الصاروخ. حدد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد عندما يكون الصاروخ على ارتفاع 4000 m عن سطح الارض.



$$100 = \frac{ds}{dt}$$

المطلوب: $\frac{d\theta}{dt} = ?$
 $4000 = s$

عندما $s = 4000$

$$\frac{4000}{2000} = \text{جاه}$$

$$2 = \text{جاه}$$

$$\text{جاه} + 1 = \text{جاه}$$

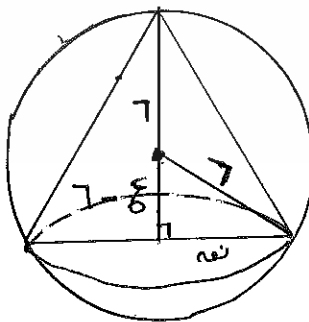
$$0 =$$

$$\frac{ds}{dt} = \text{جاه} \times \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{25}{35} \times \frac{1}{2000} = \frac{ds}{dt} \times \frac{d\theta}{dt}$$

$$100 \times \frac{1}{2000} = \frac{ds}{dt} \times \frac{d\theta}{dt}$$

15) الشكل المجاور يمثل مخروط دائري قائم موضوع داخل كرة نصف قطرها 6 cm . بدأ المخروط يتدد مع بقاء على نفس الهيئة المبينة في الشكل.



المبينة في الشكل

اذنا ارتفاع المخروط

يتردد بمعدل $\frac{1}{3} \text{ cm/s}$

حدد معدل تغير حجم المخروط

عندما يكون ارتفاعه 3 cm .

الكل:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{25}{35} \quad \text{والمطلوب: } \frac{dV}{dt} = ?$$

$$r = 6$$

$$2 = \frac{d\theta}{dt}$$

16) يرتكز سلم طوله 50 m على طرفه العلوي على حائط عمودي وبطرفه السفلي على ارض مستوية

اذا تحرك الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل $\frac{1}{3} \text{ m/s}$

فجد سرعة انخفاض الطرف العلوي للسلم عندما يكون

قياس الزاوية بين السلم والارض $\frac{\pi}{3}$

الكل:

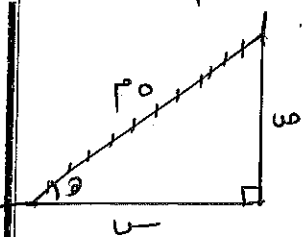
$$\frac{1}{3} = \frac{ds}{dt}$$

المطلوب: $\frac{d\theta}{dt} = ?$

$$\frac{\pi}{3} = \theta$$

$$50 = s + h$$

$$2 = \frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{dt} + \frac{dh}{dt}$$



عثمان حنفية

الرياضيات

ب) المطلوب: $\frac{ق}{س} = ?$
 $س = 3$

الحل: نصل S بالنقط P و $ق = 3$
 $9P = 3 - 9 = 0$
 $3,4 = 9P$
 $ق = 3 + (3,4)$

عندما $س = 3$
 $ق = 3 + (3,4) = 6,4$
 $ق = 9 + 11,4 = 20,4$
 $ق = \frac{20,4}{3}$

$\frac{ق}{س} = \frac{ق}{3} = 6,8$
 $3 \times 3 = \frac{ق}{س}$
 $\frac{7}{3,067} = \frac{ق}{س}$

عندما $س = 5$
 $\frac{ق}{س} = 5$
 $\frac{ق}{3} \times 5 = 5$
 $\frac{ق}{3} = 1$
 $ق = 3$

عندما $س = 1$
 $\frac{ق}{س} = 1$
 $ق = 1$

$س = \frac{ق}{س} + \frac{ق}{س} = \frac{ق}{س} + \frac{ق}{س}$
 $س = \frac{ق}{س} + \frac{ق}{س}$
 $س = \frac{ق}{س} + \frac{ق}{س}$
 $س = \frac{ق}{س} + \frac{ق}{س}$

تدريب: في المثال السابق! حدد معدل تغير الزاوية SP و $س = 3$

١٦ رجل طوله $1,7$ م يسير على أرض مستوية بسرعة $3,2$ م/ث متبعًا عن عمود كهرباء في قمته مصباح يرتفع 4 م عن سطح الأرض. حدد معدل تغير طول ظل الرجل عند P حدد معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد 3 م من عمود الكهرباء.

١٧ مصباح كهربائي معلق فوق مركز طاولة دائرية نصف قطرها 3 م وترتفع 4 م عن سطح الأرض إذا تحرك المصباح رأسيًا أسفل بسرعة 3 م/ث حدد معدل تغير زاوية ظل الطاولة على الأرض عندما يكون المصباح على ارتفاع 3 م من مركز الطاولة.

الحل: $\frac{س}{س} = 3$

المطلوب: $\frac{ق}{س} = ?$

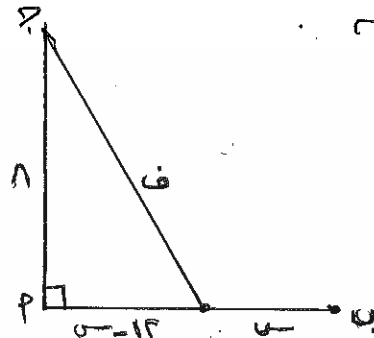
$\Delta P \text{ و } \Delta S$ يشابه ΔS
 $\frac{س}{3} = \frac{س + 4}{س}$
 $س = \frac{س + 4}{3}$
 $3س = س + 4$
 $2س = 4$
 $س = 2$
 $\frac{ق}{س} = \frac{س}{س} = \frac{س}{س}$
 $\frac{ق}{س} = 1$

الحل: $\frac{س}{س} = 3$

المطلوب: $\frac{ق}{س} = ?$

$\Delta P \text{ و } \Delta S$ يشابه ΔS
 $\frac{س}{3} = \frac{س + 4}{س}$
 $س = \frac{س + 4}{3}$
 $3س = س + 4$
 $2س = 4$
 $س = 2$
 $\frac{ق}{س} = \frac{س}{س} = \frac{س}{س}$
 $\frac{ق}{س} = 1$

١٨) P, B و P طريقان متعامدان في النقطة P
 $BP = 8$ كم ، $BP = 3$ كم . حركه رجل من
 ب مقتربا عن P بسرعة 3 كم/س ، جد معدل
 تغير المساف بين الرجل والنقطه P بعد
 ساعتين من الحركه



الحل !

$$3 = \frac{dv}{dt}$$

$$? = \left| \frac{df}{dt} \right|$$

$$2 = u$$

$$f^2 = (u)^2 + (v)^2$$

$$2 = \frac{d}{dt}(u^2 + v^2)$$

$$2 = 2u \frac{du}{dt} + 2v \frac{dv}{dt}$$

$$1 = u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt}$$

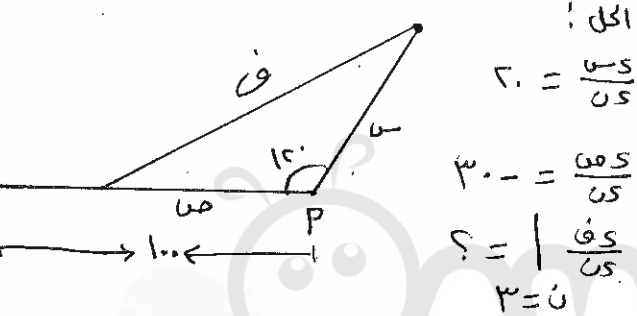
$$1 = 2 \times \frac{du}{dt} + v \times 3$$

$$1 = 2 \times \frac{du}{dt} + 3 \times 2$$

$$1 = 2 \times \frac{du}{dt} + 6$$

$$-5 = 2 \times \frac{du}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{5}{2}$$



الحل !

$$2 = \frac{dv}{dt}$$

$$30 = \frac{du}{dt}$$

$$? = \left| \frac{df}{dt} \right|$$

$$3 = u$$

$$f^2 = u^2 + v^2$$

$$2f \frac{df}{dt} = 2u \frac{du}{dt} + 2v \frac{dv}{dt}$$

$$f \frac{df}{dt} = u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt}$$

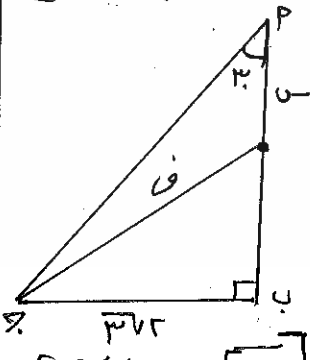
$$\frac{df}{dt} = \frac{u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt}}{f}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{3 \times 30 + 2 \times 2}{\sqrt{3^2 + 2^2}}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{90 + 4}{\sqrt{13}}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{94}{\sqrt{13}}$$

١٩) P, B و P مثلث قائم الزاوية في B في
 قياس الزاوية $P = 30^\circ$ ، $B = 37.2$ سم
 حركت كرهه من P مقتربا من B بسرعة 3 كم/س
 جد معدل اقترابها من النقطة P بعد 2 ثانية



الحل !

$$c = \frac{dv}{dt}$$

$$3 = \left| \frac{df}{dt} \right|$$

$$2 = u$$

$$\frac{37.2}{BP} = 3$$

$$BP = 37.2 \times 3 = 111.6$$

$$c = 3$$

$$2 = c \times c = u$$

$$12 + (c-6) = f$$

$$16 = f$$

$$c = 4$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt}}{f}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{2 \times 3 + 4 \times 3}{16}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{6 + 12}{16}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{18}{16}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{9}{8}$$

$$u = 3 \times 2 = 6$$

$$v = 100 + 3 \times 2 = 106$$

$$u = 6$$

$$f^2 = 100 + 36 = 136$$

$$10 \times 6 +$$

$$60 = f^2$$

$$\sqrt{136} = f$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt}}{f}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{6 \times 3 + 106 \times 3}{\sqrt{136}}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{18 + 318}{\sqrt{136}}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{336}{\sqrt{136}}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{336}{11.66}$$

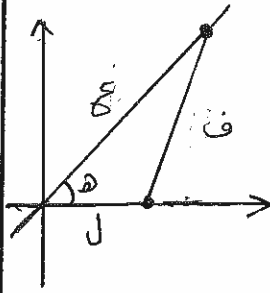
$$\frac{df}{dt} = 28.8$$

تدريب ا
 P, B و P طريقان متعامدان في النقطة P
 $BP = 9$ ، $BP = 7$. بدأ رجلان
 الحركه في نفس الوقت باتجاه P . الاول بدأ من B
 بسرعة 6 /د والاخر من P بسرعة 8 /د
 ما معدل تغير مسام المثلث المكون من حركتهما
 والنقطه P بعد 8 دقائق من حركتهما

187.00 -

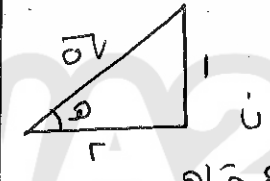
عندما $f = 10$	$10 \frac{df}{ds} = 7(20 + 25)$
$74 + (u + v) = 100$	$20 \times 7 = \frac{df}{ds}$
$36 = (u + v)$	$27 = \frac{df}{ds}$ ميل u
$7 = u + v$	

٢١) بدأت نقطتان المحرك معاً من نقطة الأصل فارت الأولى بالاتجاه الموجب لمحور السينات بسرعة ٢ سم/ث وارت الثانية في الربع الأول على التتبع $u = \frac{1}{3}v$ سرعة الأولى $2v$ سم/ث . جد معدل تغير البعد بينهما .



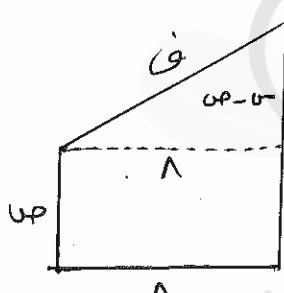
الكل !
 $\frac{dl}{ds} = 2$ ، $\frac{de}{ds} = \frac{2}{3}$
 $\frac{df}{ds} = ?$

الزاوية θ ثابتة حيث :
 $\tan \theta = \frac{e}{l} = \frac{1}{3}$
 $\frac{e}{v} = \frac{1}{3}$



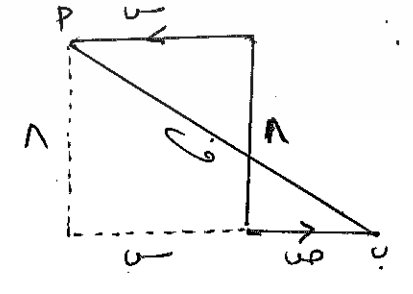
$l = 3e$ ، $2e = v$ ، $l = 3v$
 $f^2 = l^2 + e^2 = 9v^2 + v^2 = 10v^2$
 $2f \frac{df}{ds} = 20v$
 $\frac{df}{ds} = \frac{10v}{f} = \frac{10v}{\sqrt{10}v} = \sqrt{10}$

٢٣) مصعدان كهربائيان متقاربان في الطابق الأرضي والمسافة الأفقية بينهما ٨ م بدأ المصعد الأول يرتفع إلى الأعلى بسرعة ٣ م/ث وبعد ثانيتين بدأ المصعد الثاني في الارتفاع بسرعة ٤ م/ث . جد معدل تغير المسافة بينهما بعد ثانيتين من بدء حركة المصعد الثاني .



الكل !
 $\frac{du}{ds} = 3$
 $\frac{dv}{ds} = 4$
 $\frac{df}{ds} = ?$
 $f^2 = 8^2 + (v - u)^2$
عندما $t = 2$ ، $e = 10$ ، $l = 8$
 $100 = 64 + (v - u)^2$
 $36 = (v - u)^2$
 $6 = v - u$
عندما $t = 2$ ، $u = 6$ ، $v = 10$
 $\frac{df}{ds} = \frac{1}{\sqrt{100}} (2 \times 8 \times 3 + 2 \times (10 - 6) \times 4) = \frac{1}{10} (48 + 32) = 8$

٢٤) تقع السفينة P على بعد ٨ ميل شمال السفينة B . تحركت السفينة P غرباً بسرعة ٢٥ ميل/س وفي نفس الوقت تحركت السفينة B شرقاً بسرعة ٢٠ ميل/س . جد معدل تغير البعد بينهما عندما يكون هذان



البعد ١٠ ميل
الكل !
 $\frac{du}{ds} = 20$
 $\frac{dv}{ds} = 25$
 $\frac{df}{ds} = ?$
عندما $t = 0$ ، $u = 0$ ، $v = 0$
 $f^2 = 8^2 + 8^2 = 128$
 $2f \frac{df}{ds} = 2 \times 8 \times 20 + 2 \times 8 \times 25 = 160 + 400 = 560$
 $\frac{df}{ds} = \frac{560}{\sqrt{128}} = \frac{560}{8\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$

تدريب : بدأت كرتان P ، B المحرك معاً من نفس النقطة . فارت P شمالاً بسرعة ٣ م/ث وارت B غرباً لمدة ثانيتين بسرعة ٦ م/ث ثم اتجهت جنوباً بنفس السرعة . جد معدل تغير المسافة بينهما بعد ٣ ثواني من هركتهما .

130
3797

عثمان حنيفة

الرياضيات

$${}^c(0+5)\pi - {}^c(0-3)\pi = 3$$

عندما $= 3$

$${}^c(0+5) = {}^c(0-3)$$

$$0+5 = 0-3$$

$$0+5 = 0-3$$

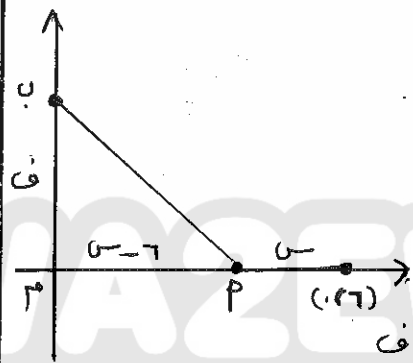
$$0 = 0$$

$$10 \times \pi 4 - 10 \times \pi 3 = \frac{35}{5}$$

$$\pi 40 - \pi 30 = \frac{35}{5}$$

$$\pi 10 = \frac{35}{5}$$

٢٤) من النقطه (٠،٦) بدأت النقطه P الحركه بالاتجاه السالب لمحور السينات بسرعه ٢ سم/ث و في نفس اللحظه بدأت النقطه ب الحركه من نقطه الاصل ٣ بالاتجاه الموجب لمحور السينات حسب العلاقات فان ${}^c(0-3) = {}^c(0+5)$ حيث معدل تغير صام المثلث P ب عندما تكون النقطتان P و ب على بعدين متساويين من نقطه الاصل ٣ الكل!



$$3 = \frac{35}{5}$$

$$3 = \left| \frac{35}{5} \right|$$

$$3 = 7$$

$$\frac{1}{4}(5-6) = 3$$

$$3 = 5 - 6$$

$$\frac{1}{4}(5-6)(5-6) = 3$$

$$(5-6)(5-3) = 3$$

$$5^2 - 6^2 - 3^2 = 3$$

$$25 - 36 - 9 = \frac{35}{5}$$

$$-20 - 9 = 12 - 3 - 16 =$$

عندما $P = 3$

$${}^c(0-3) = {}^c(0+5)$$

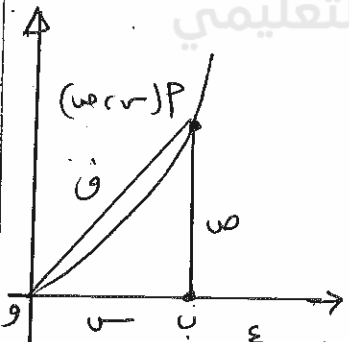
$$0-3 = 0+5$$

$$-3 = 5$$

$$3 = 5$$

$$3 = 5$$

٢٦) بدأت النقطتان P و ب الحركه معاً من نقطه الاصل (0) بحيث تحركت ب بالاتجاه الموجب لمحور السينات بسرعه ٢ سم/ث وتحركت P في الربع الاول على منحنى الاعتدال ${}^c(0+5) = {}^c(0-3)$ بحيث تبقى P و ب دائماً عموديين على محور السينات . حيث بعد ثابته واحده من الحركه معدل تغير صام المثلث P و ب معدل تغير طول وتر المثلث P و ب الكل!



$$3 = \frac{35}{5}$$

$$3 = \left| \frac{35}{5} \right|$$

$$3 = 7$$

$$\frac{1}{4}(5-6) = 3$$

$$3 = 5 - 6$$

$$\frac{1}{4}(5-6)(5-6) = 3$$

$$(5-6)(5-3) = 3$$

$$5^2 - 6^2 - 3^2 = 3$$

$$25 - 36 - 9 = \frac{35}{5}$$

$$-20 - 9 = 12 - 3 - 16 =$$

عندما $1 = 1$

$$1 \times 2 = 2$$

$$2 = 2$$

$$3 = \left| \frac{35}{5} \right|$$

$$3 = 5 + 6 = 11$$

$$\frac{35}{5} = \frac{35}{5}$$

$$\frac{196}{784} = \frac{2 \times 196}{784 \times 2}$$

$$\frac{196}{784} = \frac{196}{784}$$

تدريجاً في المثال السابق :
حيث معدل تغير الزاويه ب P و بعد ٢ ثابته من الحركه

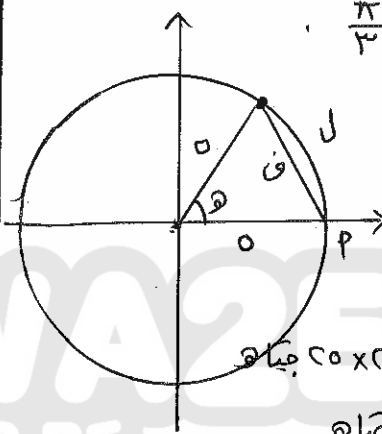
٢٥) دائرتان متحدتان في المركز طول نصف قطريهما ٥ سم ، ٥ سم . بدأت الدائره الصفري تتسع بحيث يزداد طول نصف قطرها بمعدل ٢ سم/د وفي اللحظه نفسها اخذت الدائره الكبرى تصغر بحيث يتناقص طول نصف قطرها بمعدل ١ سم/د . حيث معدل التغير في المساحه المحصوره بينهما في اللحظه التي تنطبقه الدائرتان على بعضهما

$$\text{الحل: نعم} = 5 + 5 = 10, \text{نعم} = 5 - 5 = 0$$

$$\text{المطلوب: } 3 = \left| \frac{35}{5} \right|$$

$$3 = 7$$

٢٧) بدأت نقطة الحركة على دائرة مركزها نقطة الاصل من النقطة P (0, 5) باتجاه عكس عقارب الساعة بحيث يزداد طول القوس الدائري الذي ترسمه النقطة في أثناء حركتها بمعدل 10 م/ث. حدد معدل ابتعاد النقطة المحركة عن النقطة P عندما يقابل القوس الذي ترسمه النقطة زاوية مركزية مقدارها $\frac{\pi}{3}$.



الحل:

$$10 = \frac{ds}{dt}$$

$$? = \left| \frac{dP}{dt} \right|$$

$$\frac{\pi}{3} = \theta$$

$$s = (0) + (0) - 5 \times 2 = -10 \text{ جهاه}$$

$$s = 0 - 0 = 0 \text{ جهاه}$$

$$s = 0 = (1 - 1) \times 5 \text{ جهاه}$$

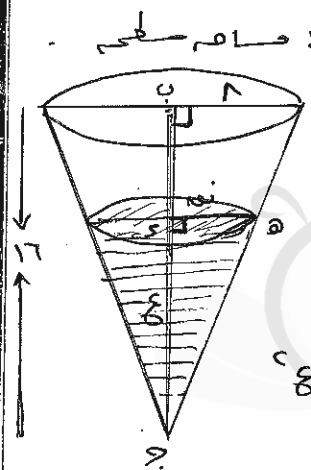
$$10 = \frac{ds}{dt} \times 0 = \frac{dP}{dt} \times 0$$

$$10 = \frac{dP}{dt} \times \frac{\pi}{3} \times 5$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{10}{\frac{\pi}{3} \times 5} = \frac{6}{\pi}$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{10}{0} = \frac{ds}{dt}$$

٢٨) قمع على شكل مخروط دائري قائم قاعدته للأعلى. إذا كان ارتفاعه 16 م وطول نصف قطر قاعدته 8 م. صب في القمع ماء بمعدل 12 م³/ث. حدد معدل تغير مساح سطح القمع عندما يكون ارتفاع الماء 8 م.



$$12 = \frac{dV}{dt}$$

$$? = \left| \frac{dS}{dt} \right|$$

$$8 = h$$

$$12 = \frac{dV}{dt}$$

$$12 = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3} \pi (2rh) \frac{dr}{dt} + \frac{1}{3} \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$12 = \frac{1}{3} \pi (2 \times 8 \times 8) \frac{dr}{dt} + \frac{1}{3} \pi (8^2) \frac{dh}{dt}$$

$$12 = \frac{160\pi}{3} \frac{dr}{dt} + \frac{64\pi}{3} \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{160\pi}{3} \frac{dr}{dt} + \frac{64\pi}{3} \frac{dh}{dt} = 12$$

$$\frac{160\pi}{3} \frac{dr}{dt} + \frac{64\pi}{3} \frac{dh}{dt} = 12$$

$$\frac{160\pi}{3} \frac{dr}{dt} + \frac{64\pi}{3} \frac{dh}{dt} = 12$$

$$\frac{160\pi}{3} \frac{dr}{dt} + \frac{64\pi}{3} \frac{dh}{dt} = 12$$

$$\frac{160\pi}{3} \frac{dr}{dt} + \frac{64\pi}{3} \frac{dh}{dt} = 12$$

تدريب:

وعاء على شكل مخروط دائري قائم رأسه للأسفل ارتفاعه 16 م. صب في القمع ماء بمعدل 12 م³/ث. حدد معدل تغير ارتفاع الماء في الوعاء عندما يكون ارتفاع الماء 8 م.

التدريب:

P قطر في طريق دائري. بدأت دراجة الحركة من P على هذا الطريق بعكس عقارب الساعة بحيث يزداد طول قوس الطريق بمعدل 10 كم/س. حدد معدل ابتعاد الدراجة عن النقطة P عندما يقابل القوس الذي ترسمه الدراجة زاوية مركزية مقدارها $\frac{\pi}{3}$.

تمرين [٤]

① مثلث متطابقه الضلعين طول كل من ضلعيه المتطابقين ٣٨ . يزداد قياس الزاويه المحصوره بينهما بمعدل 3° . جد معدل التغير في ماسه المثلث عندما يكون قياس الزاويه المحصوره بينهما 90° .

② انطلقت فينتان من الميناء نفسه في اتجاهين مختلفين على شكل خطين متجهين قياس الزاويه بينهما 90° . اذا كانت سره الاولى ٣ كم/ساعه وسره الثانيه ٤ كم/ساعه جد معدل تغير البعد بينهما عندما يكون بعدها عن نقطه الانطلاقه ٦ كم ، ٨ كم على الترتيب .

③ P و Q ملعب على شكل مستطيل فيه : $OP = ٣٤$ ، $QP = ١٠$. بدأ للاعب الحركه من P باتجاه S برعه ٤ م/ث و Q نفس اللخط حركه للاعب آخر من Q باتجاه B برعه ٣ م/ث . جد معدل تغير المسافه بينهما بعد ١ ثواني من حركتهما .

④ سلم طوله ١٠ م يرتكز بطرفه العلوي على حائط رأسي ويطرفه السفلي على أرض أفقيه . انزله الطرف السفلي مبتعدا عن الحائط بمعدل ٣ م/ث . جد معدل تغير الزاويه بين السلم والأرض عندما يكون طرفه العلوي على بعد ٦ م عن الأرض .

⑤ تتمد كل من أضلاع مثلث متساوي لإضلاع بمعدل ٣ سم/د . وسعت دائرة داخل المثلث بحيث تمس أضلاعه وأخذت تتمد مع المثلث محافظه على شكلها ووضعها . جد معدل تغير ماسه المنطقه المحصوره بين المثلث والدائرة عندما يكون طول ضلع المثلث ٣٣ م .

⑥ بدأت النقطتان B ، C الحركه معاً من نقطه الاصل P بحيث تتحركه النقطه B في الاتجاه الموجب لمحور السينات وتتحركه النقطه C في الاتجاه الاكبر على محورى الاقتران $CA = CB = ٤$. جد معدل تغير ماسه المثلث P ب C بعد ٢ ثانيه من الحركه

⑦ سقطت كره من سطح برج ارتفاعه ٩٠ م عن الارض فتحركت حسب العلاقات $(٥٠) = ٩٠ - ٥t^2$ وفي نفس اللخط تحركه رجل من نقطه تبعد ٣٠ م عن قاعدة البرج مقربا منه برعه ٣ م/ث . جد معدل تغير زاويه ارتفاع نظر الرجل للكره بعد ٤ ثواني من الحركه .

⑧ يقع بالون على ارتفاع ٣٤ م عن سطح الأرض اذا بدأ يتخففه رأسيلا أسفل بمعدل ٣ م/ث وفي نفس اللخط تحركت من تحتها مباشرة سيارة في خط مستقيم برعه ٥ م/ث . جد معدل اقتراب البالون من السيارة عندما يكون البالون على ارتفاع ٢٤ م عن سطح الأرض .

٩) إناى على شكل مخروط دائري قائم زاوية رأسه 60° وقاعدته للأعلى . يُصب فيه الماء بمعدل 378 سم^3 / د . جد معدل تغير ماسه سطح العلوي للماء عندما يكون عمقه الماء 3 سم .

١٠) تتمدد قطفه من المعدن على شكل متوازيين متوازيين متطيلات طولها يزيد 3 سم عن عرضها وارتفاعها أربعة أمثال عرضها بحيث تبقى أبعادها محفوظة بهذه النسبة . في لحظة معينة كان معدل تغير حجمها يساوي $3 - \frac{1}{3} \text{ د}$ ومعدل تغير عرضها $\frac{1}{33} \text{ سم/د}$. جد أبعاد القطفه في تلك اللحظة .

١١) مثلث مساوي الساقين طول قاعدته 6 سم . إذا كان ارتفاعه يزداد بمعدل $\frac{1}{3} \text{ سم/د}$. جد معدل تغير زاوية رأسه عندما يكون ارتفاعه 4 سم .

١٢) مستطيل طوله 15 سم وعرضه 3 سم بدأ طوله يتناقص بمعدل 2 سم/د وعرضه يزداد بمعدل 4 سم/د . جد معدل تغير مساحته عندما يصبح المستطيل مربعاً .

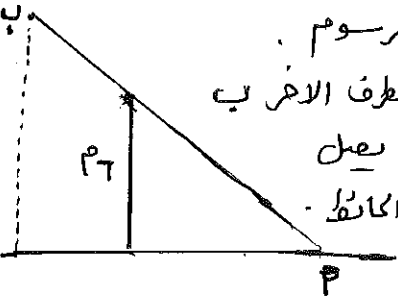
١٣) دائرة مركزها M ونصف قطرها 8 سم تتحرك النققتان P ، Q على محيطها بحيث يزداد قياس الزاوية MPQ بمعدل $3^\circ/\text{د}$. جد معدل تغير ماسه المثلث MPQ عندما يكون طول الوتر $PQ = 10 \text{ سم}$.

١٤) P ب قطفه مستقيم يتحرك طرفها P على محور السينات الموجب بينما يتحرك طرفها Q على محور الصادات الموجب مقرباً من نقطة الأصل O بسرعة 3 سم/د . بحيث تبقى المسافة العمودية الواصلة بين نقطه الاصل O والقطفه P ثابتة $= 6 \text{ سم}$. جد معدل ابتعاد الطرف Q عن نقطه الاصل عندما يكون الطرف Q على بعد 10 سم من O .

١٥) تطير طائرة في خط مستقيم بسرعة ثابتة على ارتفاع 8 ميل عن سطح الارض فأذا كان مسار الطائرة يمر فوقه نقطه M على سطح الارض بحيث أن معدل ابتعاد الطائرة عن M يساوي 4 ميل/ساعه . جد معدل تغير زاوية ارتفاع الطائرة عن النقطة M عندما يكون قياس هذه الزاوية 30° .

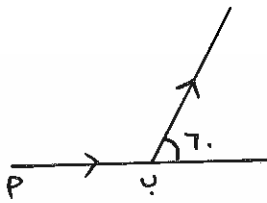
١٦) وعاء على شكل نصف كرة قطرها 30 سم يُصب فيه الماء بحيث يزداد ارتفاعه بمعدل 2 سم/د . جد معدل تغير ماسه سطح العلوي للماء عندما يكون ارتفاعه 6 سم .

١٧) يتند سلم طوله 10 م بإحدى طرفيه P على ارضنا افقيه ويرتكز على حافه حائط رأسي ارتفاعه 6 م . إذا تحرك الطرف P مبتعداً عن الحائط بمعدل 2 م/د كما في الشكل المرسوم .



جد معدل هبوط الطرف الاخر Q للسلم عندما يصل هذا الطرف حافه الحائط .

١٨) يمثل الشكل المجاور مسار إحدى الطرق إلى مدينة ما . إذا انطلقت سيارة من النقطة P باتجاه النقطة B بسرعة ٣ كم/د لتصل إليها خلال ٣ دقائق .



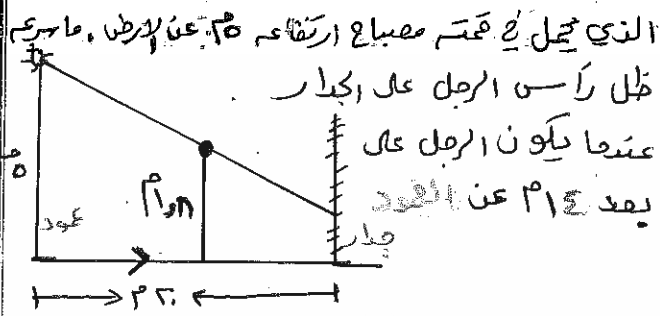
ثم انحرفت عن مسارها للطريق الآخر ونبتعدت إلى حد بعيد تغير المسار بين السيارة والنقطة P بعد ٨ دقائق من بدء حرکتها .

١٩) تتحدد سفينة معدنية متطيلة الشكل بحيث يبقى طولها $\frac{4}{5}$ طول قطرها وتبقى محافظه على شكلها . فإذا كانت مسافتها تزداد بمعدل ١٠ كم/س في حد بعيد تغير طولها عندما تكون مسافتها ٣ كم .

٢٠) إذا كان طول اضلاع القائم في مثلث قائم الزاوية ٩ ، ٨ ، ٦ ، وكان طول الضلع الاكبر يتناقص بمعدل $\frac{1}{2}$ كم/س والثاني يزداد بمعدل ١ كم/س فيجوز الزمن الذي تتوقف فيها مساحته عن الزيادة .

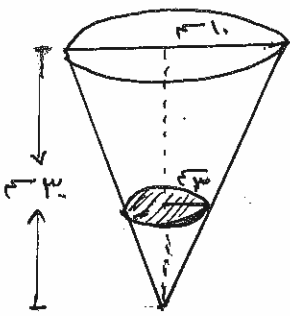
٢١) يقع مصباح في قمة عمود كهرباء ارتفاعه ٣٣ م عن الارض ، قدفنت كرة راسيا للاعلى من نقطة تبعد ٢٠ م عن قاعدة العمود فحركت حسب الصلة $f(t) = 20 - 5t^2$ ، حد سرعة ظل الكرة عند الارض عندما تكون الكرة عند ارتفاع ١٥ م عن الارض وهي صاعدة للأعلى .

٢٢) يمشي رجل طول ٨ ، و ٣ م على ارضين أفقيتين متبعيا عن عمود كهرباء بسرعة ٣ م/س كما في الشكل المجاور ومتجهها نحو جانب رأسه يبعد ٣٠ م عن العمود الذي يمثل في قمته مصباح ارتفاعه ٣٥ م عن الارض ، ما سرعة ظل رأس الرجل على الجدار عندما يكون الرجل على بعد ١٤ م عن العمود .



٢٣) وعاء على شكل مخروط دائري قائم قطره ٨ دسم وارتفاعه ٩ دسم يصب فيه الماء من ثقب في رأسه بمعدل ٣٨ دسم^٣/د . حد معدل ارتفاع الماء في الوعاء عندما يكون ارتفاعه ٦ دسم .

٢٤) يمثل الشكل المجاور إناء على شكل مخروط دائري قائم نصف قطره ١٠ م وارتفاعه ٣ م . أعلف جزئ منه بقرص معدني دائري رفيعه طول نصف قطره ٣ م يوازي قاعدة المخروط ، ويمنع وصول اي مادة للجزء السفلي من الاناء .



إذا حسب سائل في هذا الاناء بمعدل $\frac{3}{5}$ م^٣/ث فيجوز سرعة ارتفاع السائل في الاناء عندما يكون حجم السائل في الاناء ٣٧ م^٣ .

حل التمارين

حل تمرين 1

Ⓐ $6n - 3 = (n) \cdot 8$

$6n - 6 = (n) \cdot 8$

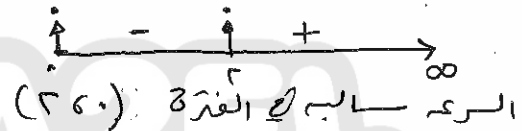
$9 = 3 \times 6 - 9 \times 3 = (3) \cdot 8$ (P)

$12 = 7 - 3 \times 6 = (3) \cdot 8$

ب) $6n - 3 = 0$

$n = 3$

$n = 0$ أو $n = 2$



Ⓒ $2n + 3 = (n) \cdot 8$

$2n = (n) \cdot 8$

$2 = 8 \rightarrow n = 2$

$n = 0$

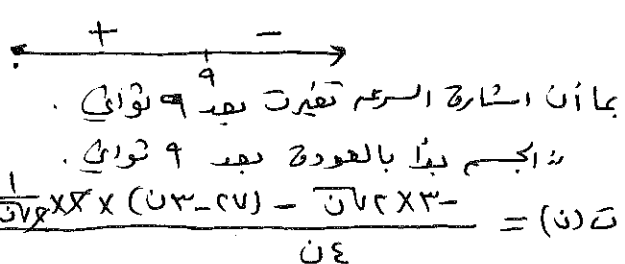
Ⓓ $24 = 3 \times 2 + (3) \cdot 8 = (3) \cdot 8$

Ⓔ $1 - 2n + (n - 2) \cdot \frac{1}{2} = (n) \cdot 8$

$2n - \frac{n - 2}{2} =$

$= \frac{4n - 2n + 2}{2} = \frac{2n + 2}{2} = (n) \cdot 8$

$9 = n \rightarrow n = 3 - 2 = 1$



$\frac{1}{2} \times 3 \times (3 - 2) - \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$

Ⓔ $11 - 4n + n = (n) \cdot 8$

$11 - 3n = (n) \cdot 8$

لكن $(8n) = (n) \cdot 8$

$11 - 4n + n = 11 - 3n$

$10 - 3n + n = 10 - 2n$

$3 = n \rightarrow n = (3 - 0) \cdot (8 + 0)$

$1 + 33 - 18 + 27 \times \frac{1}{2} = (3) \cdot 8$

$3 \cdot 8 = 1 + 33 - 27 =$

Ⓕ $1 - 2n = (n) \cdot 8$

$\frac{1}{1 - 2n} \times n + \frac{1}{1 - 2n} \times 1 = (n) \cdot 8$

$\frac{n}{1 - 2n} + \frac{1}{1 - 2n} = (n) \cdot 8$

$\frac{1 - 2n}{1 - 2n} = \frac{n + (1 - 2n)}{1 - 2n} = (n) \cdot 8$

لكن $(8n) = (n) \cdot 8$

$\frac{1 - 2n}{1 - 2n} = \frac{n + (1 - 2n)}{1 - 2n}$

$1 - 2n = (1 - 2n) \cdot 8$

$1 - 2n = 8 - 16n$

$15 = (8 - 2n) \cdot (1 - 2n)$

$15 = 8 - 16n$

Ⓖ $12 - 3(n + 0) = (n) \cdot 8$

$12 - 3n = (n) \cdot 8$

لكن $12 = 12 - 3(3 + 0)$

$12 = 12 - 9 + 9 + 6 + 3$

$3 = 0$ بالتجريب $12 = 12 - 9 + 6 + 3$

0	3	6	9
12	9	6	3
12	9	6	3

$12 = 12 - 9 + 6 + 3$

له محيزها سالب $12 - 9 = 3$

عثمان حنيفة

الرياضيات

11 في (ن) $ل + ٥٥ - ٥٣ = (ن)$

$٥١ - ٣ = (ن) ٤$

12 في (ن) $٥١ - ٣ = ٦ - (ن)$

$٩ = ٥١ - ٣$

$٩ = ٥١ - ٣$

لحظ اصطلاح بالارض

له في = صفر

$٥١ - ٣ = ٦ - (ن)$

$١٣٥ = ل + ٥١ - ٣$

13 في (ن) $٣٥٥ = ٨٠ - ١٣٥ = (ن)$

$٥٥ = ١٣٥ + ٥٥ - ٥٣$

$٥٠ = ٨٠ - ٥٣ - ٥٥$

$١٦ = ٥٥ - ٥٣ - ٥٠$

$٨ = ٥٠ - (٥٠ + ٨) = (ن)$

$٣٥٥ = ٨٨٠ - ٣ = (ن) ٤$

14 في (ن) $٥٣ \times ٥ - (١ + ٥٣) \times ١ = (ن) ٤$

$= \frac{٥٣ \times ٥ - (١ + ٥٣)}{٥(١ + ٥٣)} = (ن) ٤$

$٥٣ \times ٥ - (١ + ٥٣) \times ١ = (ن) ٤$

$٣ \frac{١}{٣} - \frac{٤ \times ٢ - ٤}{١٦} = (ن) ١$

15 في (ن) $٥٣ \times ٥ - (١ + ٥٣) \times ١ = (ن) ٤$

$٥٣ \times ٥ - (١ + ٥٣) \times ١ = (ن) ٤$

$٥٣ \times ٥ - (١ + ٥٣) \times ١ = (ن) ٤$

$٥٣ \times ٥ - (١ + ٥٣) \times ١ = (ن) ٤$

$٥٣ \times ٥ - (١ + ٥٣) \times ١ = (ن) ٤$

$٥٣ \times ٥ - (١ + ٥٣) \times ١ = (ن) ٤$

$٥٣ \times ٥ - (١ + ٥٣) \times ١ = (ن) ٤$

$٥٣ \times ٥ - (١ + ٥٣) \times ١ = (ن) ٤$

16 في (ن) $٥٥ - ٥٣ = (ن) ٤$

$٥١ - ٣ = (ن) ٤$

$٥١ = ٣$

$٥٥ - ٥٣ = ٢$

$٥٥ - ٥٣ \times ٥١ = ٢$

$٤ = ٥٥ - ٥٣$

$٤ = ٥٥ - ٥٣$

$٤ \times ٥١ = ٣$

$٤ = ٣$

17 في (ن) $(٥٣ \times ٥ - (١ + ٥٣) \times ١) = (ن) ٤$

$٣ = ٥٣$

$\frac{٣}{٣} = (٣) ٤$

$\frac{٣}{٣} = \frac{١}{٣}$

$٧ = (٣) ٤$

$\frac{١}{٣} \times ٣ - ٧ = (٣) ٤$

$\frac{١}{٣٦} \times \frac{٩}{٣} = (٣) ٤$

$٣ \frac{١}{٣} =$

18 في (ن) $٤ + \frac{٤ \times ٤}{٣} = ٤ ٤ ٤$

$٤ + \frac{٤}{٣} = ٤$

$\frac{٤}{٣} = ٤$

$١ = ٤$

$١ = ٤$

$٤ + \frac{٤}{٣} = ٤ ٤ ٤$

$٤ + \frac{٤}{٣} = ٤ ٤ ٤$

$٤ + ٤ = ٤ ٤$

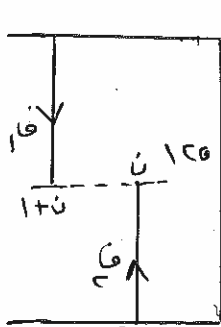
$\frac{٤}{٣} = ٤ \leftarrow ٤ = ٤ ٤$

الرياضيات

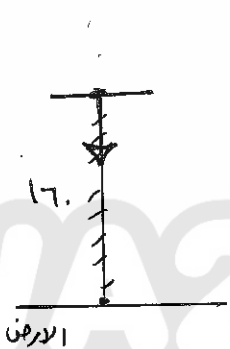
عثمان حنيفة

$$\begin{aligned} \textcircled{15} \dots 1. - &= 07 - P \\ \text{ع.} &= 07 + P \\ \hline 0 &= 0 \leftarrow 3 = 07 \\ 1. - &= 07 - P \dots \\ \hline 2. &= P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{16} \text{ع} &= (07) \text{ع} = 07 \times \frac{1}{3} \text{جبان} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} = 07 \times \frac{1}{3} \text{جبان} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} = 07 \times \frac{1}{3} \text{جبان} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} = 07 \times \frac{1}{3} \text{جبان} \\ \frac{P}{3} &= 07 \leftarrow \frac{07}{3} = \text{جان} \\ \text{جان} &= (07) \text{ع} \\ \text{جان} &= \frac{07}{3} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \textcircled{17} \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \end{aligned}$$

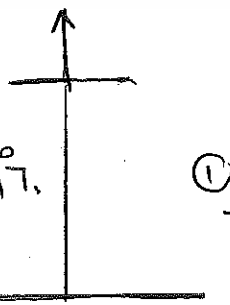


$$\begin{aligned} \textcircled{18} \text{فا} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{19} \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{20} \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \textcircled{21} \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \\ \text{ع} &= (07) \text{ع} \end{aligned}$$

حل تمرين 3

1) نقطة التماس: $\frac{\pi}{4} = s$

$0 = 2 + 1 \times 3 = s$

$(0, \frac{\pi}{4})$

قوس (s) = $3 - \text{قوس} + 2 \times \text{قوس} - \text{قوس}$

ميل التماس = $1 \times 2 \times 2 + 2 \times 3 - = s$

معادلة التماس: $0 = s - (s - \frac{\pi}{4}) \times 2 = 0$

ب) $0 = 2 \times s + s - 2 + \pi \times s + s - 2 = 0$
عند النقطة $(\frac{\pi}{4}, 1)$

$\frac{\pi}{4} = s \leftarrow 0 = 2 + s + \pi$

ميل التماس = $\frac{\pi}{4}$

معادلة التماس: $0 = \frac{\pi}{4} - (1 - s) \times \frac{\pi}{4} = 0$

2) قوس (s) = $s + 2 = 0$

ميل التماس = $0 + 2 \times 2 = 0$

ميل التماس = $1 \times 3 = 0$

$0 = 0 \leftarrow 1 = 0$

3) نجد نقطة التقاطع (التماس)

$1 - s - 3 = 7 + s - 6 - s$

$0 = 8 + s - 9 - s$

$0 = (1 - s)(8 - s)$

$1 = s$ أو $8 = s$

بوجود هاتان

$(2, 1)$ و $(8, 8)$

قوس (s) = $7 - s - 2 = 0$

$7 - 1 \times 2 = 0$

$7 - 8 \times 2 = 0$

$0 = 0$

$0 = 0$

معادلة التماس:

$0 = (1 - s) \times 2 = 0$

$0 = (8 - s) \times 1 = 0$

4) نقطة التماس = (s, s)

قوس (s) = $3 - (s - s) = 0$

ميل التماس = $3 - (s - s) = 0$

$\frac{3}{1} = 0$

$3 - (s - s) = 0$

$3 - (s - s) = 0$

$3 - (s - s) = 0$

$3 - (s - s) = 0$

$3 - (s - s) = 0$

$3 - (s - s) = 0$

5) قوس (s) = $s - 3 = 0$

ميل التماس = $s - 3 = 0$

$3 = 0$

ميل التماس = $\frac{3}{2} = 0$

قوس (s) = $\frac{3}{2} - s = 0$

ميل التماس = $\frac{3}{2} = 0$

$\frac{1}{2} = 0 \leftarrow \frac{\pi}{4} = s$

نقطة التماس = $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$

معادلة التماس: $0 = \frac{1}{2} - (s - \frac{\pi}{4}) \times \frac{3}{2} = 0$

6) قوس (s) = $\frac{4}{s} + \frac{3}{s} = 0$

ميل التماس = $\frac{4}{s} + \frac{3}{s} = 0$

$7 = 0$

ميل التماس = $7 = 0$

$7 = \frac{4}{s} + \frac{3}{s}$

$7 = \frac{4}{s} \leftarrow \frac{1}{s} = \frac{4}{7}$

$7 \times 4 = 4 \leftarrow 7 \times 4 = 4 \times s$

$\frac{1}{s} - 4 \times \frac{4}{7} = 0 \leftarrow 7 = 0$

$7 = 0$

$7 \times 4 = 4 \leftarrow 7 = 0$

عثمان حنيفة

الرياضيات

9) $\frac{c \times u - (1+u^2)x}{c(1+u^2)} = (u)$

على انكاس $\frac{1}{c(1+u^2)} = \frac{1}{c}$
 $\frac{1}{c} = \frac{1}{c}$
 $\frac{1}{c} = \frac{1}{c}$

$3 \pm = 1 + u^2 \leftarrow 9 = c(1+u^2)$
 $c = u \quad 1 = u$

لكنه $\frac{c}{u} = (u)$ $\frac{c}{u} = 8 + 4u^2 - 2 = \frac{c}{u}$
 نقطة انكاس $(\frac{c}{u}, u)$
 نقطة انكاس $(\frac{1}{u}, u)$

معايير انكاس الاخر هي: $\frac{1}{u} = \frac{1}{u} \leftarrow \frac{1}{u} = \frac{1}{u}$

10) نجد نقطه تقاطعها:

$\frac{c}{u} = \frac{3-6\sqrt{x}}{u}$

$\frac{c}{u} = \frac{3-6\sqrt{x}}{u} \leftarrow \frac{c}{u} = \frac{3-6\sqrt{x}}{u}$
 $\frac{c}{u} = \frac{3-6\sqrt{x}}{u} \leftarrow \frac{c}{u} = \frac{3-6\sqrt{x}}{u}$
 $\frac{c}{u} = \frac{3-6\sqrt{x}}{u} \leftarrow \frac{c}{u} = \frac{3-6\sqrt{x}}{u}$

نقطه التقاطع $(1, 2)$

$\frac{c}{u} = \frac{3-6\sqrt{x}}{u} \leftarrow \frac{c}{u} = \frac{3-6\sqrt{x}}{u}$

$\frac{c}{u} = \frac{3-6\sqrt{x}}{u} \leftarrow \frac{c}{u} = \frac{3-6\sqrt{x}}{u}$

$\frac{c}{u} = \frac{3-6\sqrt{x}}{u} \leftarrow \frac{c}{u} = \frac{3-6\sqrt{x}}{u}$

انكاسان متساويان

11) نقطه انكاس (u, u)

$u = u$

$\frac{u}{u} = \frac{u}{u}$

على انكاس $\frac{u}{u} = \frac{u}{u}$

$\frac{u}{u} = \frac{u}{u}$

$u = u$ $\frac{u}{u} = \frac{u}{u}$

$u = u$ $\frac{u}{u} = \frac{u}{u}$

$u = u$ $\frac{u}{u} = \frac{u}{u}$

$u = u$ $\frac{u}{u} = \frac{u}{u}$

يوجد نقطتان انكاس: $(\sqrt{17}, 1)$ $(1, \sqrt{17})$

$\frac{c}{u} = \frac{c}{u}$ ومعاييرته:

$(c-u) \frac{c}{u} = \sqrt{17} - u$

$\frac{c}{u} = \frac{c}{u}$ ومعاييرته:

$(c-u) \frac{c}{u} = \sqrt{17} + u$

10) $u = u$ $\frac{u}{u} = \frac{u}{u}$

على انكاس $\frac{u}{u} = \frac{u}{u}$

$\frac{u}{u} = \frac{u}{u}$

$u = u$ $\frac{u}{u} = \frac{u}{u}$

$u = u$ $\frac{u}{u} = \frac{u}{u}$

بالجريب: $u = u$

1	1	1	1
1	1	1	1

$u = u$ $\frac{u}{u} = \frac{u}{u}$

$0 = |x-1| \times 3x - 1 = 3x^2 - 2x - 1 = \Delta$

$\frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{3} = u$

11) $u = u$ $\frac{u}{u} = \frac{u}{u}$

$u = u$ $\frac{u}{u} = \frac{u}{u}$

$u = u$ $\frac{u}{u} = \frac{u}{u}$

$u = u$ $\frac{u}{u} = \frac{u}{u}$

$u = u$ $\frac{u}{u} = \frac{u}{u}$

$u = u$ $\frac{u}{u} = \frac{u}{u}$

بالجريب $\frac{1}{u} = u$

$\frac{1}{u} = u$ $\frac{1}{u} = u$

عثمان حنيفة

الرياضيات

١٣) عتفا س = 1 -

$$\begin{aligned}
 & 3 = 1 - 3s \leftarrow 0 = 1 - 3s \\
 & 3 = (1-s) \leftarrow (2, 1-s) : \text{نقطة التقاطع} \\
 & \frac{1}{3} = s \leftarrow 1 = 1 + 3s \\
 & \text{من ميل الخط } 3 = \\
 & \text{لكن ميل الخط } = (1-s) \leftarrow (1-s) \\
 & (1-s) \times 3 = (1-s) \times 3 + (1-s) \times 2 \times 3 \\
 & 3 \times 2 \times 7 - (1-s) \times 3 = (1-s) \\
 & 42 - 3 = 12 =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 0 = (1+s)(r-s) \\
 & 1-s = s, \quad r = s \\
 & \sqrt{1-s^2} = s \\
 & (1-s^2) = s^2 \\
 & \sqrt{(1+s)(1-s)} = s \\
 & \sqrt{1-s^2} = \sqrt{1+s^2} =
 \end{aligned}$$

١٥) $u = 5p - 3r$

$$\begin{aligned}
 & = 5p - 3r \\
 & = 5p - 3r \\
 & \frac{5}{r-p} = 5p - 3r \\
 & \frac{5}{r-p} = u \text{ ميل الخط }
 \end{aligned}$$

لكن:

$$\frac{5}{3} = 5p - 3r$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{5}{3} = 5p - 3r \\
 & 3 = 5p - 3r \leftarrow \frac{5}{3} = \frac{5}{r-p} \\
 & 0 = p =
 \end{aligned}$$

نقطة التقاطع (1, 2)

$$1 = 0 \leftarrow 0 = 1 \times 0 - 1 \times 2 =$$

١٣) $\frac{p}{1+s} = (1-s)$ نقطة التقاطع (s, s)

$$\begin{aligned}
 & \frac{p}{1+s} = (1-s) \\
 & \frac{1}{3} = \frac{1-s}{1+s} \\
 & \text{ميل الخط } =
 \end{aligned}$$

$$3 = (1+s) \leftarrow 2 = \frac{p}{1+s}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1-s}{1+s} = \frac{1-s}{s} = \text{ميل الخط }$$

$$s = 2 - \frac{p}{1+s}$$

$$s = 2 - \frac{(1+s) \cdot 2}{1+s}$$

$$\frac{1}{3} = s \leftarrow s = 2 + 3 = 4$$

$$\frac{1}{3} = (1+s) \cdot 2 = 2$$

١٤) $3 = (1-s)$

$$\begin{aligned}
 & 3 = (1-s) \\
 & \text{نقطة التقاطع } = (s, s)
 \end{aligned}$$

$$\frac{1+s}{1+s} = \frac{s+s}{1+s} = \text{ميل الخط }$$

$$\frac{(1+s)(1-s)}{1+s} =$$

$$\begin{aligned}
 & 3 = 1 + s \\
 & 2 = 2 - s - s
 \end{aligned}$$

١٦) $0 + s - 2 = (1-s)$

$$0 + s - 2 = (1-s)$$

نقطة التقاطع (s, s)

$$\frac{0 + s - 2 + s}{1+s} = \frac{2-s}{1+s} = \text{ميل الخط }$$

$$0 + s - 2 = \frac{0 + s - 2 + s}{1+s}$$

$$0 + s - 2 + s = 0 + s - 2 + s$$

$$= (2+s)s \leftarrow s = 2 + s$$

$$r = s \text{ او } s =$$

$$1 = 0 + 2 - 2 = \text{ميل الخط }$$

$$0 \cdot 2 = 0 \leftarrow 1 = 0$$

عثمان حنيفة

الرياضيات

19) نفرض نقطه المماس (س، ر)

$$س - ر = س - ٤ = س - ٤$$

$$\text{من المماس} \quad س - \frac{1}{٤} = س$$

$$س - \frac{1}{٤} = \frac{س}{\frac{٣}{٤} - س}$$

$$\text{من} \quad (س - \frac{1}{٤}) = س$$

$$\text{لكه} \quad (٤ + س) \frac{1}{٤} = س$$

$$\text{ع.م.} \quad 1 + س \frac{1}{٤} = \frac{٣س}{٤} - س \frac{1}{٤}$$

$$٤ + س = ٣س - س$$

$$٠ = ٤ - ٣س - س$$

$$٠ = (١ + س)(٤ - س)$$

$$١ - س = ٠ \quad \text{او} \quad ٤ - س = ٠$$

$$١ - س = ٠ \quad \text{ع.م.} \quad ٤ \times \frac{1}{٤} = ١$$

$$\frac{1}{٤} - س = ٠ \quad \text{ع.م.} \quad ٤ = ٠$$

$$١ - س = \frac{1}{٤} - س = ٠ \quad \text{ع.م.} \quad ١ = \frac{1}{٤}$$

من المماسان متعامدان

$$٠ = س + (١ + س) - س - ٤ \quad (٢٠)$$

$$٠ = س + ١ + س - س - ٤$$

$$س - ٤ - س = (س - س) + ١ - ٤$$

$$\text{من المماس} = \frac{س - ٤ - س}{س - س} = س$$

$$\text{من المماس} = \frac{س - ٤ - س}{س - س} = س$$

$$\text{من} \quad (١) \quad س = س$$

بالقوتين في العلاقه الاصليه

$$٣ = س + س - ٤$$

$$٣ = س + س - ٤$$

$$٩ = س \quad \text{ع.م.} \quad ٣ = س$$

$$٣ = س \quad \text{او} \quad ٣ = س$$

$$٦ = س \quad \text{او} \quad ٦ = س$$

$$(٣ - (٦ -)) \quad \text{او} \quad (٣ (٦))$$

$$١٧) \quad س + س - ٤ + س = س$$

$$س + س - ٤ = س$$

$$س - ٤ = س - س - ٤ = س$$

لكه

$$س - ٤ = س + ٤ \quad \text{ع.م.} \quad س = ٤$$

$$\text{من} \quad (١) \quad س - ٤ = س - ٤$$

$$٠ = س \quad \text{ع.م.} \quad س = ٤$$

$$٠ = ١ - ٤ \quad \text{ع.م.} \quad ١ = ٤ + ٤$$

$$١ = ٤ \quad \text{ع.م.} \quad ١ = ٤ + ٤$$

$$٤ = ١ - ٤ \quad \text{ع.م.} \quad ١ = ٤ + ٤$$

$$٣ = ٤ \quad \text{ع.م.} \quad ٤ = ٤$$

18) نقطه المماس (س، ر)

$$س - ٤ - ٤ = (س)$$

$$\text{من المماس} \quad س - ٤ - ٤ = س$$

$$\text{لكه} \quad \frac{٣ - س}{١ - س} = س$$

$$\frac{٣ - س - س - ٤}{١ - س} = س$$

$$\frac{٣ - س - س - ٤}{١ - س} = س$$

$$\cancel{٣ - س - س - ٤} = \cancel{٣ - س - س - ٤} - \cancel{٤} - \cancel{٤}$$

$$٠ = (٣ - س) - ٤ - ٤$$

$$٣ = س \quad \text{او} \quad ٣ = س$$

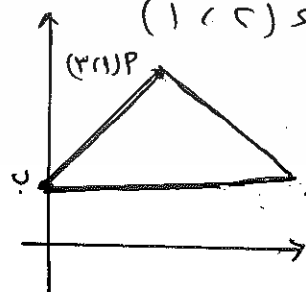
$$١ (٣) \quad \text{او} \quad ١ (٣)$$

من المماس

$$(١ - ٣) \times ٤ \times \frac{1}{٤} =$$

$$٤ \times \frac{1}{٤} =$$

$$٤ = ٤$$



حل تمرين ١٣

① تفرضا حجم = 2 ، ارتفاع = 8

نصف قطر قاعدة = نصف

$$r = \frac{25}{8}$$

نصف = 8 ، نصف = 3

$$\frac{8}{3} = \text{نصف}$$

$$2 = \frac{\pi}{3} \times \text{نصف}^2 \times 8$$

$$2 = 8 \times \frac{\pi}{9} \times \frac{64}{9} = 2$$

عندما نصف = 1

$$3 = 8$$

$$8 \times \frac{\pi}{9} = \frac{25}{8}$$

$$\pi \times 1 = 9 \times \frac{\pi}{9} =$$

② تفرضا مجيها = 2 ، ماصها = 3

نصف قطرها = نصف

$$r = \frac{25}{15}$$

$$3 = \pi \times \text{نصف}^2$$

$$2 = \frac{\pi}{3} \times \text{نصف}^2$$

$$\frac{3}{\pi} = \text{نصف}^2$$

$$\frac{25}{\pi} = \text{نصف}^2$$

$$12 \times \pi \times 8 = 144 \times \pi \times 2 =$$

$$\frac{1}{12 \times \pi \times 8} = \frac{\text{نصف}^2}{\pi}$$

$$7 = \frac{25}{12 \times \pi \times 8} = \frac{25}{\pi}$$

③ تفرضا طولها = 1 و عرضها = 8 ومحيطها = 2

وماصتها = 3

$$r = \frac{15}{17}$$

نصف = 1 ، نصف = 8

$$\frac{1}{3} = 8$$

$$\frac{1}{3} \times 1 = 8 \times 1 = 3$$

$$17 = 2 \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

$$17 = \frac{1}{3} + 1$$

$$17 = \frac{1}{3} + 1$$

$$7 = 1$$

④ تفرضا ارتفاعها = 8 ونصف قطرها = نصف

$$r = \frac{8}{3} = \frac{\pi \times 18}{\pi}$$

$$\frac{18}{3} = 8$$

$$r = \frac{8}{3} = \frac{\pi \times 18}{\pi}$$

$$\frac{8 \times 18}{3} = \frac{\pi \times 18}{\pi} = \frac{8}{3}$$

عندما 8 = 3

$$18 = \frac{8}{3}$$

$$9 = \frac{8}{3}$$

$$3 = \frac{8}{3}$$

$$\frac{8}{3} = \frac{8 \times 18}{3} =$$

① نقطة التماس (3, 3) ← (3, 3) = 3

$$3 - 3 = 0 \leftarrow 3 = 3$$

$$3 = (3) \leftarrow 3 = 3$$

$$1 = (3) \leftarrow (1-3) \leftarrow (3) \leftarrow 1 = 3$$

$$\frac{1}{3} = 3 \leftarrow 1 = 1 + 3$$

$$3 = (3) \leftarrow 3 = 3$$

$$(3) \times (3) + (3) \times (3) = (3) \times (3)$$

$$2 = 3 \times 2 + 1 - 2 =$$

② نقطة التماس = (3, 3)

$$3 - 3 = 0$$

$$3 - 3 = 0$$

$$\frac{3+3}{3} = \frac{1-3}{3} = 3 - 3$$

$$3 - 3 = \frac{3+3}{3}$$

$$1 = 3 \leftarrow 3 + 3 = 3 - 3$$

$$2 = 3 \leftarrow 1 = 3$$

$$\text{نقطة التماس} = (3, 3)$$

النقطة = (1, 1)

$$\frac{3}{1-1} = \frac{1-2}{1-1} =$$

$$\frac{1-1}{3} = 3 - 3$$

$$3 = (1) \times 3 = 3 - 3$$

$$1 = 1 \leftarrow 3 = \frac{1-1}{3}$$

$$(1, 1) = 3$$

$$(1-2) \times 1 \times \frac{1}{3} =$$

$$3 \times 1 \times \frac{1}{3} =$$

$$10 = \text{وهرة مربع}$$

عثمان حنيفة

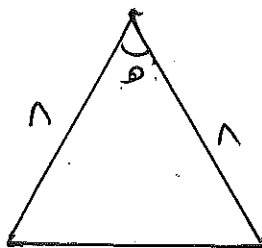
الرياضيات

حل تمرين 4

ع = $\frac{5}{5}$
 ح = $\frac{5\sqrt{3}}{5}$
 ق = $\frac{5\sqrt{3}}{5}$
 10 = 5

ع² = (ع.1) + (ع.ع)
 (ع.ع) = (ع.ع) + (ع.ع)

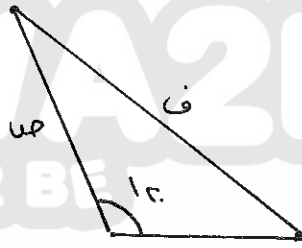
عندما ن = 10
 ع = 10 × 4 = 5
 ح = 10 × 3 = 5
 ق = (ح) + (ع) = 5
 0 = ق



1
 ع = $\frac{5\sqrt{3}}{5}$
 ح = $\frac{5\sqrt{3}}{5}$
 ق = $\frac{5\sqrt{3}}{5}$
 10 = 5

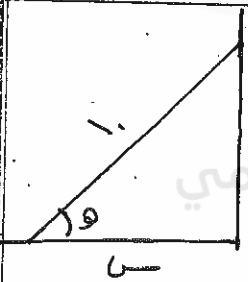
ع² = (ع.ع) + (ع.ع)
 (ع.ع) = (ع.ع) + (ع.ع)

عندما ن = 10
 ع = 10 × 4 = 5
 ح = 10 × 3 = 5
 ق = (ح) + (ع) = 5
 0 = ق



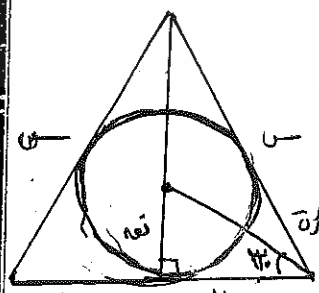
ع = $\frac{5\sqrt{3}}{5}$
 ح = $\frac{5\sqrt{3}}{5}$
 ق = $\frac{5\sqrt{3}}{5}$
 10 = 5

ع² = (ع.ع) + (ع.ع)
 (ع.ع) = (ع.ع) + (ع.ع)



ع = $\frac{5\sqrt{3}}{5}$
 ح = $\frac{5\sqrt{3}}{5}$
 ق = $\frac{5\sqrt{3}}{5}$
 10 = 5

ع² = (ع.ع) + (ع.ع)
 (ع.ع) = (ع.ع) + (ع.ع)



ع = $\frac{5\sqrt{3}}{5}$
 ح = $\frac{5\sqrt{3}}{5}$
 ق = $\frac{5\sqrt{3}}{5}$
 10 = 5

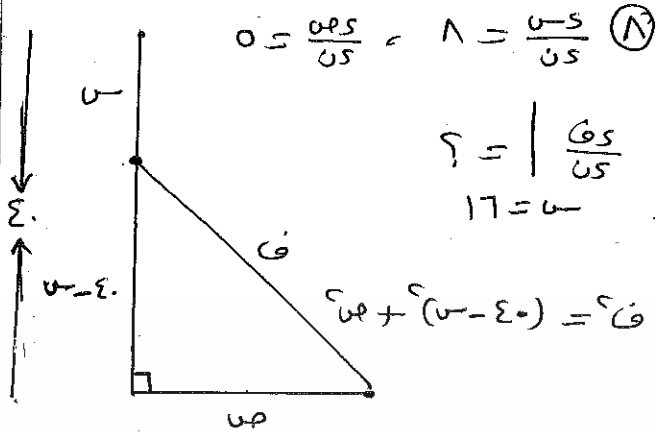
ع² = (ع.ع) + (ع.ع)
 (ع.ع) = (ع.ع) + (ع.ع)

ع² = (ع.ع) + (ع.ع)
 (ع.ع) = (ع.ع) + (ع.ع)

عندما ن = 10
 ع = 10 × 4 = 5
 ح = 10 × 3 = 5
 ق = (ح) + (ع) = 5
 0 = ق

عثمان حنفية

الرياضيات



$\frac{u-4}{u} \times u + \frac{u-4}{u} \times (u-4) = \frac{17}{u}$

عندما $u=17$

$u \times \frac{u-4}{u} = u$

$17 = 17$

$u=17$

$10 = 10 = u$

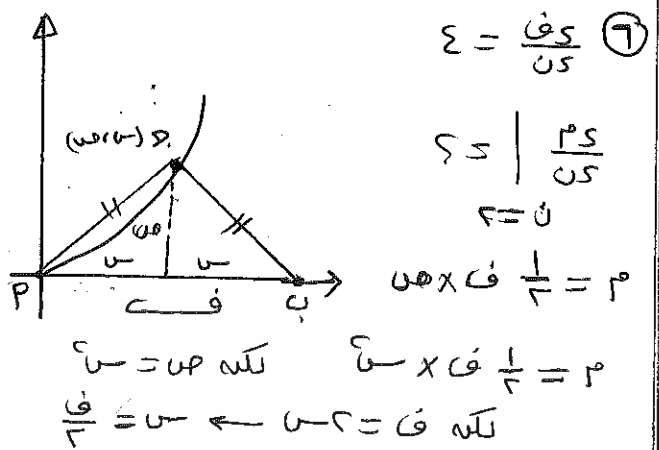
$u^2 + (10)^2 = 17^2$

$17 = u$

$0 \times 17 + 17 - 4 = \frac{17}{17}$

$13 = \frac{17}{17}$

$\frac{17}{13} = \frac{17}{17}$



$\frac{1}{u} \times \frac{1}{u} = \frac{1}{u^2} = 1$

عندما $u=13$

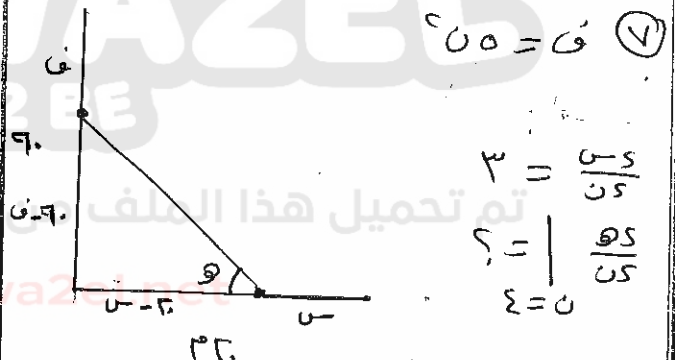
$13 \times \frac{1}{13} = 1$

$1 = 1$

$\frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$

$1 \times 13 = 13$

$13 = 13$



لكن $9 \neq 13$

$9 \times \frac{u-9}{u} = u$

$9 \times \frac{13-9}{13} = 13$

$3 \times (13-9) - (13-9) \times (13-9) = \frac{9 \times 13}{13}$

عندما $u=13$

$0 = \frac{1}{13} = \frac{1}{13}$

$9 + 1 = 10$

$1 + \frac{9}{13} = \frac{22}{13}$

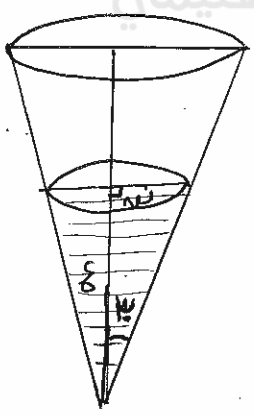
$\frac{9}{13} = \frac{9}{13}$

$\frac{13 + 13 - 1}{13} = \frac{25}{13}$

$\frac{13 - 9}{13} = \frac{4}{13}$

$\frac{9 - 1}{13 \times 4} = \frac{8}{52}$

$\frac{130 - 1}{13} = \frac{129}{13}$



$\frac{13}{17} = \frac{25}{17}$ (F)
 $\alpha = \left| \frac{13}{17} \right|$
 $13 = 13$
 $13 \times \frac{13}{17} = 13$
 $13 \times \frac{13}{17} = \frac{169}{17}$
 $\frac{169}{17} = \frac{169}{17}$

$\frac{13}{17} \times \frac{13}{17} = \frac{169}{289}$

$\frac{13}{17} \times \frac{13}{17} = \frac{169}{289}$

$\frac{13}{17} \times \frac{13}{17} = \frac{169}{289}$

$\frac{13}{17} \times \frac{13}{17} = \frac{169}{289}$

$\frac{13}{17} \times \frac{13}{17} = \frac{169}{289}$

$\frac{169}{17} = \frac{169}{17}$

10) طول القطر = 10 - 10

عرضه = 3 + 4

$$S = \frac{35}{55}$$

10 - 10 = 10 - 10 ← 4 + 3 = 10 - 10
C = 0

$$S = \frac{35}{55}$$

(10 + 3)(10 - 10) = 3

10 - 10 + 40 = 3

17 - 04 = $\frac{35}{55}$

17 - 04 = 13 - 04 = 9

11) ثمن طولها = س وعرضها = ع

ارتفاعها = ع وعرضها = ع

س ع = ع ، 3 + س = س

$\frac{1}{32} = \frac{س ع}{55}$ ، 3 = $\frac{25}{55}$

ع × س × س = 2

س ع × س × (3 + س) = 2

س ع × س × 3 + س ع × س × س = 2

$\frac{س ع}{55} (س ع × 3 + س ع × س) = \frac{25}{55}$

3/ $\frac{1}{32} \times (س ع × 3 + س ع × س) = 3$

$\frac{س ع × 3 + س ع × س}{32} = 1$

2/ س ع × 3 + س ع × س = 32

= 32 - س ع × س + س ع × س

× س ع = س ← (س - س) (ع + س)

C = س

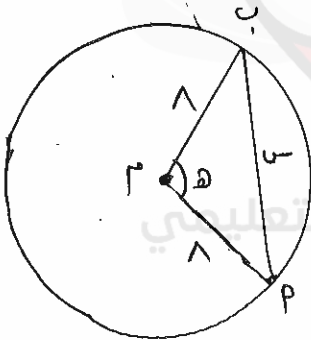
س × ع = ع

3 + س = س

س = ع

0 = س

بافتراضها: 10 ، 5 ، 4 ، 3



12) $\frac{\pi}{18} \times 9 = \frac{س}{55}$

بدرج $\frac{\pi}{9} = \frac{س}{55}$

$$S = \frac{35}{55}$$

1 = س

س × س × س = 3

س × س = 3

$\frac{س}{55} \times 3 = \frac{35}{55}$

عند س = 1

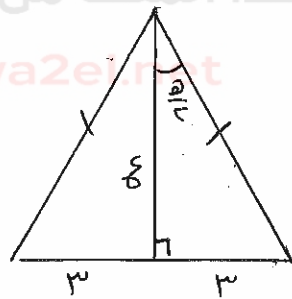
س × س × س - (س) + (س) = 1

س × س - س + س = 1

$\frac{س}{32} = \frac{س}{55} = س$

~~$\frac{س}{32} \times \frac{\pi}{9} \times 3 = \frac{س}{55}$~~

بدرج $\frac{\pi}{9} =$



1/ $\frac{س}{55}$

$$S = \frac{35}{55}$$

$\frac{3}{8} = \frac{س}{55}$

عند س = ع $\frac{س}{55} \times 3 = \frac{س}{55} \times س$

$\frac{3}{8} = س$

$\frac{س}{55} + 1 = س$

$\frac{3}{8} + 1 = س$

$\frac{11}{8} = س$

بدرج $\frac{3}{8} = \frac{س}{55}$

عثمان حنيفة

الرياضيات

(١٧) الضلع الأول = $\frac{1}{2} - 8 = 0$

مربعات = $7 + 0 = 7$

المطلوب :

عندما $0 = 7$ $\frac{1}{2} = \frac{14}{7}$

$(0 + 7) (\frac{1}{2} - 8) \frac{1}{2} = 7$

$(\frac{1}{2} + 7) (\frac{1}{2} - 8) = 7$

$\frac{1}{2} - 0 + 14 = 7$

$\frac{1}{2} - \frac{14}{7} = \frac{14}{7}$

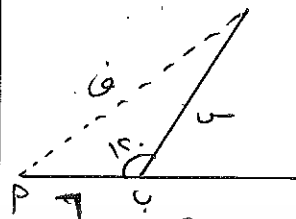
$0 = 7 \leftarrow \frac{14}{7} = \frac{1}{2}$

(١٨) بعد ٣ دقائق

$7 = 3 \times 2 = 6$

$0 = \frac{6}{7}$

$0 = 3 - 8 = 0$



$6 \times 7 - 3 \times 6 - 3 \times 6 + 6 = 6$

$7 + 3 \times 6 + 6 = 6$

$\frac{6}{7} + \frac{6}{7} = \frac{6}{7}$

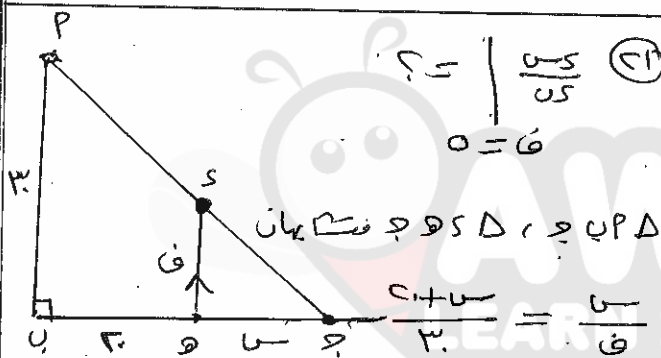
عندما $0 = 0$

$0 \times 0 = 0 \quad 7 \times (7 + 3 \times 6) = \frac{6}{7} \times 14 \times 7$

$1 = 0 \quad 0 \times 7 = \frac{6}{7} \times 7$

$14 = 6 \quad \frac{6}{7} \times 7 = \frac{6}{7}$

$\frac{6}{7} = \frac{6}{7}$



(١٩) $0 = \frac{6}{7}$

$0 = 6$

في ΔPDS و ΔSDS و ΔSDS بيان

$\frac{6+6}{7} = \frac{6}{7}$

$6 + 6 = 6 - 3$

$6 = (6 - 3) \times 6$

$\frac{(600 - 60) \times 6}{(600 - 60) - 3} = \frac{6}{6 - 3} = 6$

$\frac{600 - 60}{600 + 60 - 3} = 6$

$(600 + 60) \times \frac{600 - 60}{600 + 60 - 3} = 6$

$\frac{(600 - 60) - (600 + 60 - 3)(600 - 60)}{6(600 + 60 - 3)} = \frac{6 - 6}{6}$

عندما $6 = 10$

$10 = 600 - 60$

$10 = 3 + 60 - 60$

$1 = (1 - 0)(3 - 0)$

لأنها صاعدة $1 = 0, 3 = 0$

$\frac{1 - 3 \times 10 - 10 \times 6}{6(10)} = \frac{6 - 6}{6}$

$\frac{1}{6} = \frac{7}{60} =$

(١٩) طول $u = 1$ و عرض $v = 1$

$1 = 1$

$1 = \frac{6}{7}$

$0 = \frac{6}{7}$

$3 = 3$

$6 \times 6 = 6$

$6 \times \frac{6}{7} \times 6 = 6$

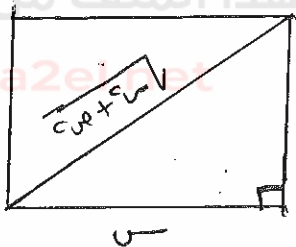
$6 - \frac{6}{7} = 6$

$\frac{6}{7} \times 6 - \frac{6}{7} = \frac{6}{7}$

$\frac{6}{7} \times 6 \times \frac{6}{7} = 1$

$\frac{6}{7} \times 3 = 1$

$\frac{1}{2} = \frac{6}{7}$



$\sqrt{6^2 + 6^2} \times \frac{6}{7} = 6$

$\sqrt{6^2 + 6^2} \times 17 = 6 - 6$

$(6^2 + 6^2) \times 17 = 6 - 6$

$6^2 \times 17 = 6 - 6$

$6 \times 17 = 6$

عندما $3 = 3$

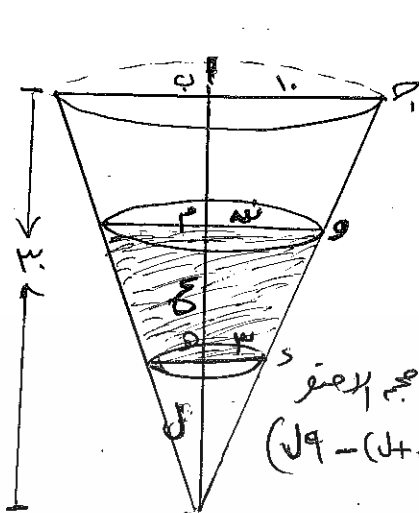
$6 - \frac{6}{7} = 3$

$6 = 6$

$6 = 6$

عثمان حنيفة

الرياضيات



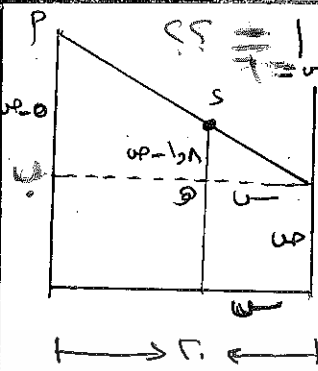
(٤٤) $\pi R = \frac{25}{55}$
 $R = \frac{25}{55}$
 $\pi R^2 H = 2$

حجم الأكبر - حجم الأصغر = 2
 $\frac{\pi}{3} (7^2 \cdot 11 - 3^2 \cdot 3) = 2$

ΔPDS و ΔPDS متشابهان
 $\frac{3}{7} = \frac{11-3}{11}$
 $3 = 8$

ΔPDS و ΔPDS متشابهان
 $\frac{3}{9+8} = \frac{3}{9}$
 $9+8 = 17$
 $9-3 = 6$

$\frac{3}{17} \cdot 3 = \frac{25}{55}$
 $\frac{9}{17} = \frac{25}{55}$
 $\frac{9}{17} = \frac{5}{11}$
 $\frac{9}{17} = \frac{5}{11}$



(٤٣) $\frac{3}{7} = \frac{11-3}{11}$
 نضل ج ب
 ΔPDS و ΔPDS متشابهان
 $\frac{3-0}{7} = \frac{11-3}{11}$

$3 \cdot 11 - 0 \cdot 7 = 3 \cdot 11 - 0 \cdot 7$
 $33 - 0 = 33 - 0$
 $33 - 0 = (3 \cdot 11 - 0 \cdot 7)$
 $\frac{33 - 0}{11 - 0} = 3$
 $\frac{33 - 0}{11 - 0} = \frac{33}{11} = 3$
 $\frac{33 - 0}{11 - 0} = \frac{33}{11} = 3$



(٤٣) $\pi R = \frac{25}{55}$
 $R = \frac{25}{55}$
 $T = 8$
 حجم الوعاء - حجم الفراع = 2
 $\frac{\pi}{3} (4^2 \cdot 9 - 3^2 \cdot 3) = 2$
 $\frac{\pi}{3} (16 \cdot 9 - 9 \cdot 3) = 2$
 $\frac{\pi}{3} (144 - 27) = 2$
 $\frac{\pi}{3} \cdot 117 = 2$
 $\frac{117\pi}{3} = 2$
 $39\pi = 2$
 $\frac{39\pi}{3} = \frac{2}{3}$
 $13\pi = \frac{2}{3}$

ΔPDS و ΔPDS متشابهان
 $\frac{3}{4} = \frac{9-3}{9}$
 $(4-3) \cdot \frac{3}{4} = 3$
 $\frac{3(4-3)}{4} = 3$
 $\frac{3 \cdot 1}{4} = 3$
 $\frac{3}{4} = 3$
 $\frac{3}{4} = 3$

النقطة الحرجة للاقتران

تسمى النقطة (ج، هـ) نقطة حرجة للاقتران (د، س) اذا تحققه الشرطان التاليان معاً :

$$1) \quad \exists \text{ مجال للاقتران } (د، س)$$

لـ g عالم تعني فترة

ماعدا : الجذر التربوي واليسري

$$2) \quad \text{قوة } (ج، هـ) = \text{صفر}$$

أو فيرموجورث

← الاطراف المغلقة

أو ← اجنفاً وفقاً للمتقمة

جد النقطة الحرجة للاقتانات التاليين :

$$1) \quad \text{هـ } (د، س) = 3 - س^2 - س^3 + 1$$

حيث $س \in [3, 1]$

اقل : مجال $هـ = [3, 1]$

$$\text{قوة } (د، س) = 6 - س - 3 - س^3$$



$$\begin{aligned} 3/0 &= 6 - 3 - 3 - 27 = -27 \\ &= 6 - 3 - 27 = -24 \\ &= 6 - (3 - 27) = 30 \\ &= 30, 1, 3 \end{aligned}$$

$$3 = 30, 1, 3$$

خ
مجال

النقطة الحرجة : (3, 1), (1, 3), (0, 3)

$$2) \quad \text{هـ } (د، س) = \sqrt[3]{9 - س^3}$$

اقل : مجال $هـ = 1$

$$\frac{1}{3} (9 - س^3) = \text{هـ } (د، س)$$

$$\text{قوة } (د، س) = س - 2 - x \cdot \frac{1}{3} (9 - س^3)$$

$$\frac{س - 2}{\sqrt[3]{(9 - س^3)}} =$$

$$\begin{aligned} \downarrow \text{صفر} & & \downarrow 3 \\ = 5 - 2 & & = 9 - 3 \\ = 3 & & 3 \pm = 3 \end{aligned}$$

النقطة الحرجة : (0, 3), (0, 3), (0, 3)

$$3) \quad \text{هـ } (د، س) = \sqrt{5 - س^2 - 4}$$

اقل : حدد مجاله : $5 - س^2 - 4 = 0$

$$= 5 - (س - 4)$$

$$5 = 5, 1, 5$$



مجاله = $[-\infty, 1] \cup [5, \infty)$

$$\frac{5 - س^2 - 4}{\sqrt{5 - س^2 - 4}} = \text{هـ } (د، س)$$

$$\sqrt{5 - س^2 - 4}$$



$$= 5 - 1 - 4 = 0$$

$$2 = 5$$

خ
مجال

النقطة الحرجة : (0, 1), (0, 1)

$$4) \quad \text{هـ } (د، س) = 5 - س - 2 - 5 - 2 - 5 - 2$$

حيث $س \in [0, \pi]$

اقل : مجال $هـ = [0, \pi]$

$$\text{قوة } (د، س) = 5 - س - 2 - 5 - 2 - 5 - 2$$

$$= 5 - 2 - 5 - 2 - 5 - 2$$



$$= 5 - 2 - 5 - 2 - 5 - 2$$

$$\frac{\pi}{2} = 5 - 2 - 5 - 2 - 5 - 2$$

$$\frac{1}{2} = 5 - 2 - 5 - 2 - 5 - 2$$

$$\frac{\pi}{2} = 5 - 2 - 5 - 2 - 5 - 2 \text{ او } \frac{\pi}{2} = 5 - 2 - 5 - 2 - 5 - 2$$

النقطة الحرجة :

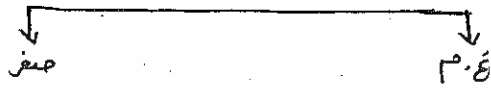
(1/2, pi/2), (1/2, pi/2), (0, pi/2), (0, pi), (0, 0)

١١ جذور التزايد والتناقص للاقتارات التالية:

$$1 + 5 - 18 - 6 - 3 = (x-5) \quad (1)$$

الحل: مجال $x =$

$$18 - 5 - 12 - 6 - 3 = (x-5)$$



$$\begin{aligned} 1 &= 18 - 5 - 12 - 6 - 3 \\ &= 3 - 5 - 6 - 3 \\ &= (1+5)(3-5) \\ 1 &= 5, \quad 3=5 \end{aligned}$$



$(-\infty, 3)$ متزايد $(-\infty, 3)$ متناقص $(3, 5)$ متناقص $(3, 5)$ متزايد

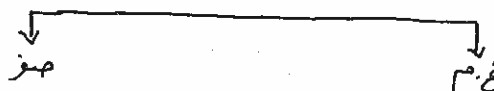
$$2 + 5 - 18 - 6 - 3 = (x-5) \quad (2)$$

الحل: مجال $x =$

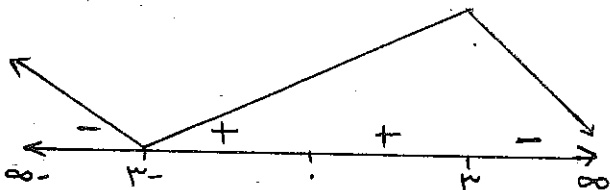
$$9 - 5 - 9 = (x-5)$$

$$9 - 5 - 9 = (x-5)$$

$$9 - 5 - 9 = (x-5)$$



$$\begin{aligned} 9 &= (5+3)(5-3) \\ 9 &= 5 \end{aligned}$$



$(-\infty, 3)$ متناقص $(3, 5)$ متناقص $(3, 5)$ متزايد $(3, 5)$ متناقص

التزايد والتناقص

إذا تحركنا من اليسار لليمين على منحنى الاقتارات المرسوم فإنه يكون:

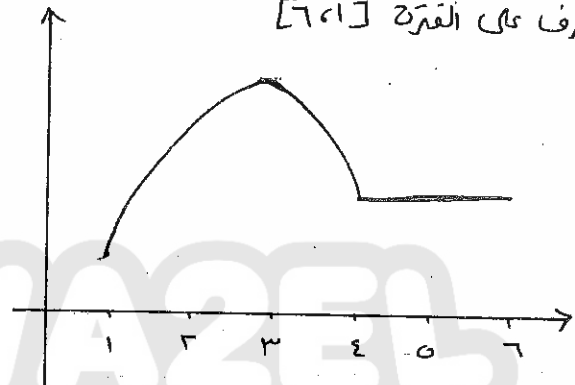
① متزايداً؛ إذا كان معناه متزايداً للعلو

② متناقصاً؛ إذا كان معناه هابطاً للأسفل

③ أفقياً؛ إذا كان معناه أفقياً

فهي أشكال المرسوم الذي يمثل منحنى $(x-5)$

المعرف على الفترة $[6, 1]$



$(-\infty, 3)$ متزايد $[3, 4]$ متناقص $[4, 5]$ متناقص $[4, 5]$ متزايد

و ثابت $[6, 4]$

ويمكن تحديد فترات التزايد والتناقص للاقتارات

باستخدام اختبار المشتق الأولى:

فإذا كان $f'(x)$ معرفاً على $[a, b]$ فإنه يكون:

④ متزايداً $[a, b]$

← إذا كانت $f'(x) < 0$ $[a, b]$

⑤ متناقصاً $[a, b]$

← إذا كانت $f'(x) > 0$ $[a, b]$

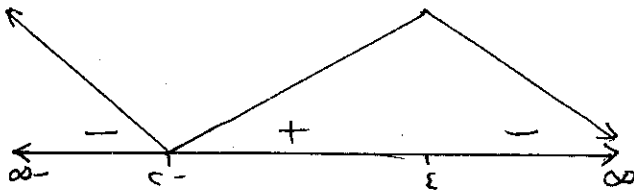
⑥ ثابتاً $[a, b]$

← إذا كانت $f'(x) = 0$ $[a, b]$

ولتحديد اتجاه المشتق الأولى للاقتارات

نحتاج: ١) مجال

٢) قيم $f'(x)$ الحرجة



ن (س) متناقص في $[-\infty, 1]$ و $[1, \infty)$
 متزايد في $[1, \infty)$

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \geq 0 \quad \cdot \quad 2 + 5 - 7 + 3 \leq 0 \\ \cdot > 0 \quad \cdot \quad [2 + 5] \\ \cdot \leq 0 \quad \cdot \quad |1 + 5 - 3| \end{array} \right\} = (س) \text{ ن}$$

اكل: مجال $2 =$

تعريف الصحيح والمطلوب

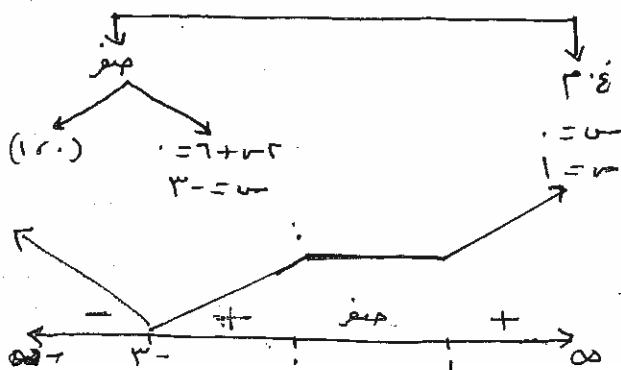
$$\left. \begin{array}{l} \cdot \geq 0 \quad \cdot \quad 2 + 5 - 7 + 3 \leq 0 \\ \cdot > 0 \quad \cdot \quad 2 \\ \cdot \leq 0 \quad \cdot \quad |1 + 5 - 3| \end{array} \right\} = (س) \text{ ن}$$

ن (س) متصل عند $س = 1$

$$\left. \begin{array}{l} \cdot > 0 \quad \cdot \quad 7 + 5 - 2 \\ \cdot > 0 \quad \cdot \quad \text{صفر} \\ \cdot < 0 \quad \cdot \quad 3 \end{array} \right\} = (س) \text{ ن}$$

ن (س) متصل عند $س = 1$

$$\begin{array}{l} 3 = (1) \\ 0 = (1) \\ 0 = (1) \\ 6 = (1) \end{array}$$



ن (س) متناقص في $[-\infty, 1]$
 متزايد في $[1, \infty)$
 ثابت في $[1, \infty)$

$$(س) \text{ ن} = (س) - \frac{1}{س} = 0$$

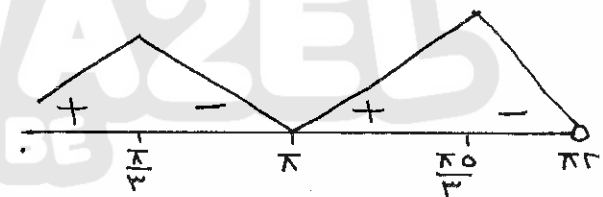
اكل: مجال $[-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} \cdot (س) \text{ ن} &= (س) - \frac{1}{س} = 0 \\ \cdot &= (س) - \frac{1}{س} = 0 \\ \cdot &= (س) - \frac{1}{س} = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cdot &= (س) - \frac{1}{س} = 0 \\ \cdot &= (س) - \frac{1}{س} = 0 \\ \cdot &= (س) - \frac{1}{س} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{س}{س} &= \frac{1}{س} \\ \frac{س^2}{س} &= \frac{1}{س} \\ \frac{س^3}{س} &= \frac{1}{س} \end{aligned}$$



ن (س) متناقص في $[-\infty, 1]$ و $[1, \infty)$
 متناقص في $[-\infty, 1]$ و $[1, \infty)$

$$(س) \text{ ن} = \frac{1 - س}{س + 1}$$

اكل: مجال $2 =$

$$\frac{س - 2 \times (1 - س) = (س + 1) \times 1}{(س + 1)^2} = (س) \text{ ن}$$

$$\frac{س + 5س - 2 + 2س = (س + 1)^2}{(س + 1)^2} = (س) \text{ ن}$$



$$\begin{aligned} \cdot &= 1 + 5س - 2 + 2س \\ \cdot &= 1 - 5س - 2 - 2س \\ \cdot &= (1 + 5س) (1 - 2س) \end{aligned}$$

$$س = 1, 2 = س$$

تمرين ٢

جد فترات التزايد والتناقص للاقتربات :

(١) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 8$, $x \in]-\infty; 1[$

(٢) $f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^3 + x^2 - 3$

(٣) $f(x) = x^2 + 5x - 6$, $x \in]0; \pi[$

(٤) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x \geq 1 \\ \frac{1}{x} & x < 1 \end{cases}$

(٥) $f(x) = \begin{cases} x & 1 > x \geq -1 \\ 3 - x & 3 \geq x \geq 1 \\ 0 & 0 \geq x > 3 \end{cases}$

(٦) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$, $x < 1$

(٧) $f(x) = x^3 - 1$, $x \in]0; \frac{2}{5}[$

(٨) $f(x) = x^2 - 4$, $x \in]0; \pi[$

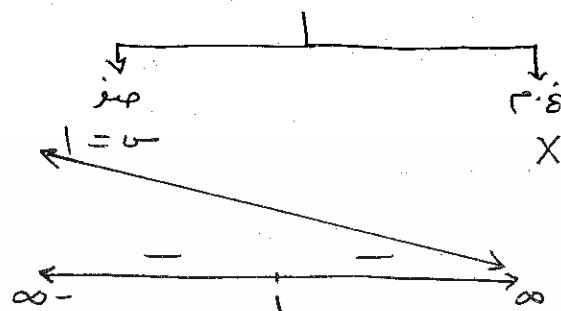
(٩) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

(٦) $f(x) = (x-1)^3$

بحال $x = 1$

$f'(x) = 3(x-1)^2$

$f''(x) = 6(x-1)$



(١٠) متناقص في $(-\infty; \infty)$

(٧) اذ ان $f(x)$ متصل على $[p; q]$

وقابل للاشتقاق على $(p; q)$

حيث ان $f'(x) < 0$ لكل $x \in (p; q)$

وكان : $f(x) = x^3 - 1$

اثبت انه $f(x)$ قتران على $[p; q]$

البرهان : تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

$f'(x) = 3x^2$

بما ان : $f'(x) < 0$

$x^2 < 3$ في $(p; q)$

$\therefore f(x) < 0$ في $(p; q)$

$\therefore f(x)$ قتران في $[p; q]$

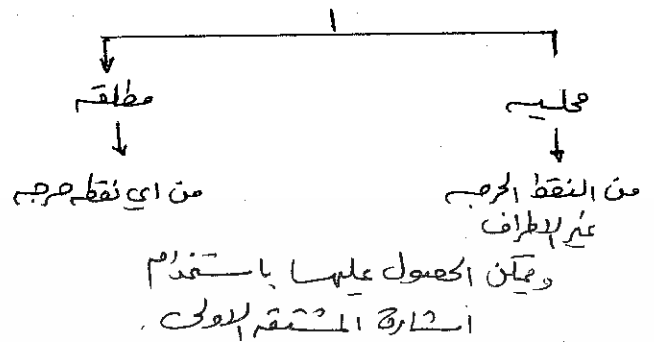
تدريب ١ : جد فترات التزايد والتناقص للاقتربان

(١) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 4 & x > 1 \\ \frac{3}{x} & x \leq 1 \end{cases}$

(٢) $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$

القيم القصوى

هي القيم العظمى و الصغرى للاقتران



جد القيم العظمى والصغرى المحلي والمطلق للاقتران التالية :

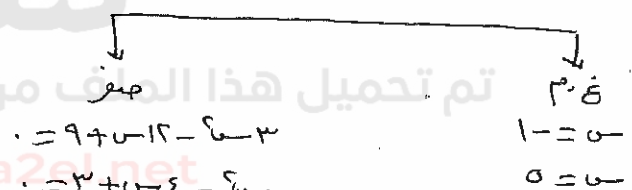
(1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$

$D \ni (-1, 0]$

اكن:

مجاله = $[-1, 0]$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$

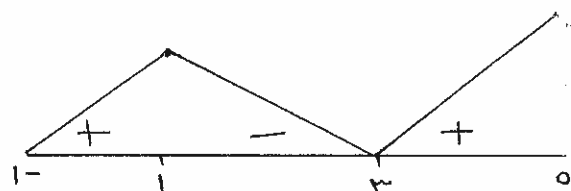


$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$f'(x) = 3(x-1)(x-3) = 0$

$x = 1, 3$



$f(1) = 1 - 6 + 9 - 5 = -1$ عظمى محلي

$f(3) = 27 - 54 + 27 - 5 = -5$ صغرى محلي

$f(-1) = -1 - 6 - 9 - 5 = -21$ صغرى مطلق

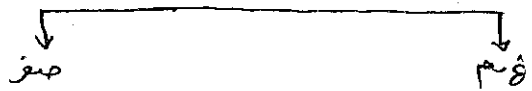
$f(0) = -5$ عظمى مطلق

(2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$

اكن: $D \ni (-1, 4]$

مجاله = $[-1, 4]$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$

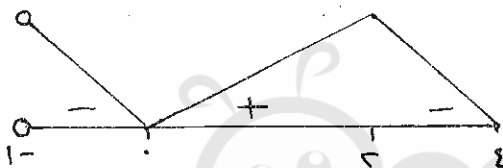


$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0$

$f'(x) = 3(x-2)(x-1/3) = 0$

$x = 2, 1/3$



$f(1/3) = 1/27 - 1/3 + 2/3 - 5 = -14/9$ صغرى محلي

$f(2) = 8 - 12 + 4 - 5 = -5$ عظمى محلي ومطلق

$f(-1) = -1 - 3 - 2 - 5 = -11$

$f(4) = 64 - 48 - 20 - 5 = -10$ صغرى مطلق

(3) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 5$

اكن: $D \ni (-1, 3]$

مجاله = $[-1, 3]$

$f(x) = x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 5$

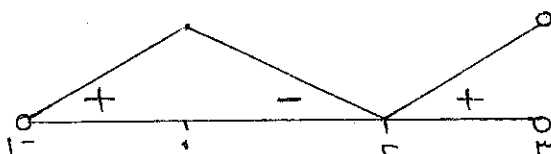


$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 34x = 0$

$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 34x = 0$

$f'(x) = 2x(2x^2 - 12x + 17) = 0$

X



$f(1) = 1 - 8 + 17 - 5 = 5$ عظمى محلي

$f(2) = 16 - 64 + 68 - 5 = 15$ صغرى محلي ومطلق

$f(-1) = 1 - 8 + 17 - 5 = 5$ عظمى محلي

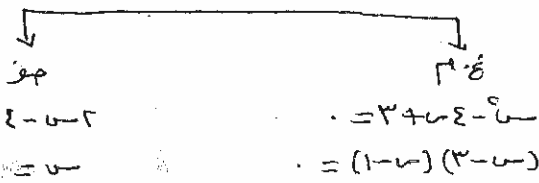
$$(6) \sqrt[3]{3+u-4-u^2} = (u) \Rightarrow$$

اكل: مجال =

$$\frac{1}{3} (3+u-4-u^2) = (u) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3} (3+u-4-u^2) \times \frac{1}{3} = (u) \Rightarrow$$

$$\frac{4-u-2}{\sqrt[3]{(3+u-4-u^2)^3}} = (u) \Rightarrow$$



صفر: $2-u-2=0 \Rightarrow u=0$
 م.ع: $3+u-4-u^2=0 \Rightarrow (1-u)(3-u)=0 \Rightarrow u=1, u=3$
 (6) = 1 - صفرى عليه ومطلق

$$(4) \frac{6-u}{1+u-u^2} = (u) \Rightarrow$$

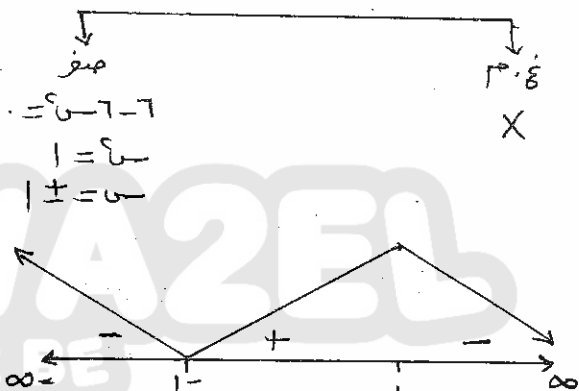
اكل: المقام $\neq 0$, لأن $3-u > 0$

مجال =

$$\frac{(1-u^2)6 - (1+u-u^2)6}{(1+u-u^2)^2} = (u) \Rightarrow$$

$$\frac{6-6u-6+6u+6u^2-6+6u-6u^2}{(1+u-u^2)^2} =$$

$$\frac{6u^2-6}{(1+u-u^2)^2} = (u) \Rightarrow$$

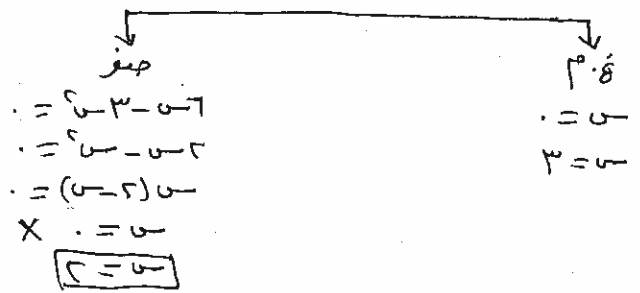


صفر: $6u^2-6=0 \Rightarrow u^2=1 \Rightarrow u=1, u=-1$
 م.ع: $1+u-u^2=0 \Rightarrow (1-u)(1+u)=0 \Rightarrow u=1, u=-1$
 (4) = 1 - صفرى عليه
 (4) = 11 = 6 - عظمى عليه

$$(7) \sqrt[3]{3u-9-u^2} = (u) \Rightarrow$$

اكل: $u \in (-\infty, \infty)$

$$\frac{3u-9-u^2}{\sqrt[3]{(3u-9-u^2)^3}} = (u) \Rightarrow$$



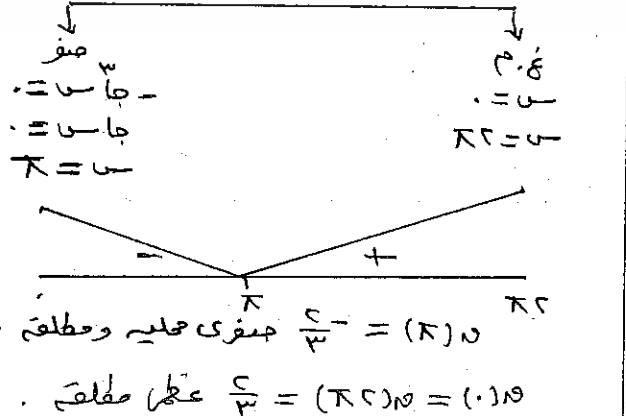
صفر: $3u-9-u^2=0 \Rightarrow (3-u)(1+u)=0 \Rightarrow u=3, u=-1$
 م.ع: $3u-9-u^2=0 \Rightarrow (3-u)(1+u)=0 \Rightarrow u=3, u=-1$
 (7) = 0 = صفرى عليه ومطلق
 (7) = 3 = صفرى عليه
 (7) = 12 = 3 = عظمى عليه

$$(5) \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = (u) \Rightarrow$$

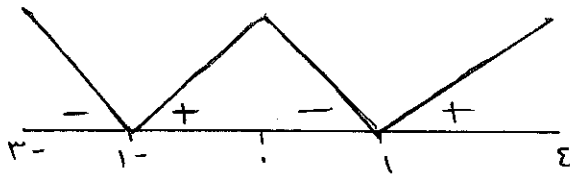
اكل: $u \in [0, \infty)$

مجال = $[0, \infty)$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = (u) \Rightarrow$$



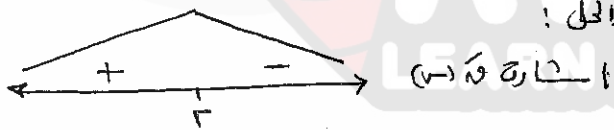
صفر: $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow$
 م.ع: $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow$
 (5) = 0 = صفرى عليه ومطلق
 (5) = 0 = 0 = عظمى عليه



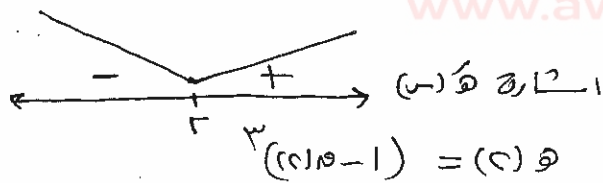
- = (1) ١٥
- = (1) ١٥
- = (0) ١٥
- = (3) ١٥
- = (4) ١٥

٣] إذا كان للاقتران (١٥) قيمه عظمى محليه

عند النقطة (٣, ٢) . بين أن للاقتران:
 $f(x) = (x-1)(x-15)$ قيمه صغرى محليه
 عند النقطة (٨, ٢)



الحل: اشارة f(x) = (x-1)(x-15) - x



• = (٢) ١٥
 • = (٣) ١٥

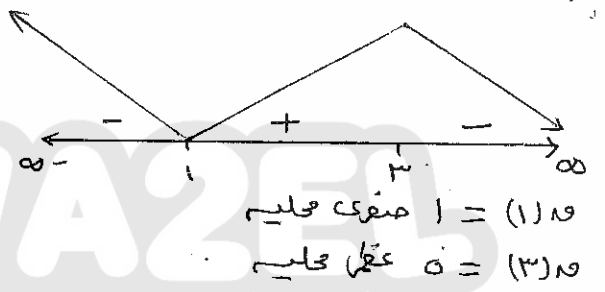
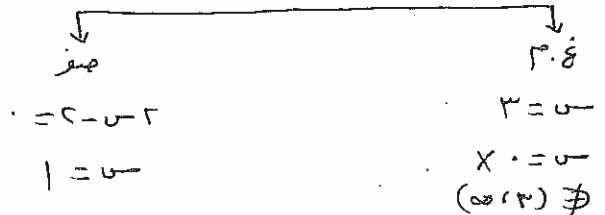
تدريب:

إذا كان للاقتران (١٥) قيمه صغرى محليه
 عند النقطة (١, ٣) . بين أن للاقتران
 قيمه عظمى محليه عند النقطة (٤, ٣)

٨) $\left. \begin{aligned} x > 3, & \quad x^2 + x - 2 \\ x < 3, & \quad \frac{10}{x} \end{aligned} \right\} = (x) ١٥$

الحل: مجال = ٢ متصل عند ٣ = ٣

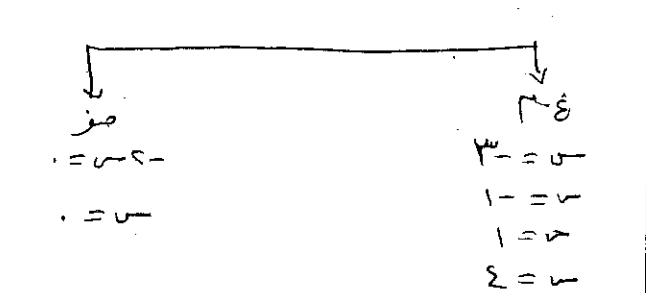
١٥) $\left. \begin{aligned} x > 3, & \quad x^2 - x - 2 \\ x < 3, & \quad \frac{10}{x} \\ x = 3, & \quad ٣ \cdot ٥ \end{aligned} \right\} = (x) ١٥$



٩) $|x-1| = (x) ١٥$, $x \in [٤, ٣]$

الحل: نعيد تعريفه
 $\left. \begin{aligned} 1-x >= 3-x, & \quad 1-x \\ 1 > x >= 1-x, & \quad 1-x \\ 4 >= x >= 1, & \quad 1-x \end{aligned} \right\} = (x) ١٥$

١٥) متصل عند ٣ = ١
 $\left. \begin{aligned} 1-x > 3-x, & \quad x-2 \\ 1 > x >= 1-x, & \quad x-2 \\ 4 > x >= 1, & \quad x-2 \end{aligned} \right\} = (x) ١٥$



عثمان حنيفة

$$\left. \begin{aligned} 1 > s &, 3 + s \\ c > s \geq 1 &, 1 - s \\ c \leq s &, s - 0 \end{aligned} \right\} = (s) \text{ و } (3)$$

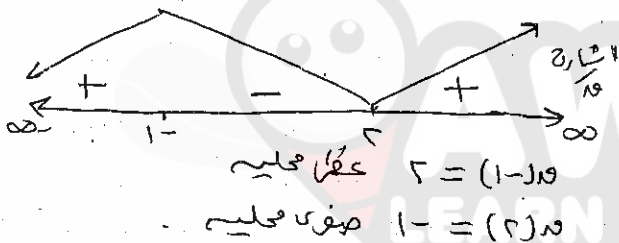
الكل: (3) و (s) متقبل عند $s = 1 = 2$

$$\left. \begin{aligned} 1 > s &, 1 \\ c > s &, 1 - s \\ c < s &, 2 - s \\ c < 1 &, 3 - s \end{aligned} \right\} = (s) \text{ و } (1)$$

3-8

$$\begin{aligned} 1 &= s \\ 2 &= s \\ s &= 2 \\ s &= 1 \\ X \end{aligned}$$

لأنه لا يمكن اختيارها باستخدام المنطق الثاني

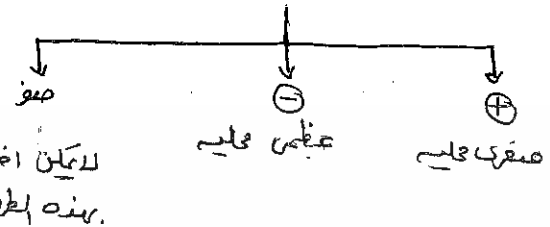


إيجاد القيم القصوى المحلي

باستخدام اختبار المشتق الثاني

خذ امضار $f'(s)$

لنعوضها في $f''(s)$



II إيجاد القيم القصوى المحلي للاقتربات

التالي باستخدام اختبار المشتق الثاني (ان امكن)

$$1) \text{ و } (s) = s^3 - 3s^2 + c$$

الكل: $f'(s) = 3s^2 - 6s = 0 \Rightarrow s = 0, 2$

$$s = 0, 2$$

$$s = (s - 2)$$

$$s = 0, 2$$

$$f''(s) = 6s - 6$$

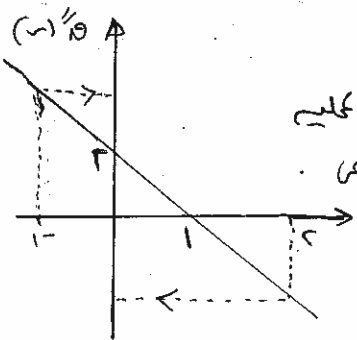
$$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow \text{عظمى محلية}$$

$$f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow \text{صغرى محلية}$$

III إذا كان $f''(s) = (3) = \text{صفر}$

وإنه صنف $f''(s)$ كما في الشكل المرسوم

فجد للاقترب



(1) القيم العظمى والصغرى المحلي

(2) اقتربات التزايد والتناقص

الكل:

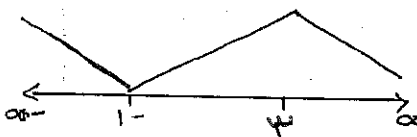
المرجع:

$$1 = s$$

$$f''(s) < 0 \Rightarrow \text{عظمى محلية}$$

$$s = 0$$

$$f''(s) > 0 \Rightarrow \text{صغرى محلية}$$



و (s) متناقصا في $(-\infty, 1]$ و $[2, \infty)$ و متزايدا في $[1, 2]$

$$2) \text{ و } (s) = s + \frac{9}{s}, s \neq 0$$

$$f'(s) = 1 - \frac{9}{s^2}$$

$$1 = \frac{9}{s^2} \Rightarrow s = \pm 3$$

$$f''(s) = \frac{18}{s^3}$$

$$f''(3) = \frac{18}{27} > 0 \Rightarrow \text{صغرى محلية}$$

$$f''(-3) = \frac{18}{-27} < 0 \Rightarrow \text{عظمى محلية}$$

١١ اذاتانه للاقتران :

$$0 = (u) \cdot 0 = u^3 - 3u^2 + u + 0$$

جيد التابطين $u \neq 0$

$$0 = (u) \cdot 0 = u^3 - 3u^2 + u + 0$$

$$3 = 0 + u + 3 \leftarrow 3 = (1) \cdot 0$$

$$\textcircled{1} \dots \dots = u + 3$$

$$\textcircled{2} \dots \dots = u + 3 \leftarrow \dots = (1) \cdot 0$$

$$c = u - 3$$

$$1 = 3 \leftarrow 2 = 3$$

$$3 = u \therefore$$

١٢ اذاتانه للاقتران :

$$0 = (u) \cdot 0 = u^3 - 3u^2 + u + 0$$

قيمة عظمى محلية عند $u = 1$ مقدارها 3

والى من المرسوم له عند $u = 1$ يصنع زاوية $\frac{\pi}{4}$

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

جيد التوليد u, v, p

الكل :

$$0 = (u) \cdot 0 = u^3 - 3u^2 + u + 0$$

$$3 = (1) \cdot 0 = 3 + 1 + 0 + 0 \leftarrow 3 = 0 + 0 + 3$$

$$\textcircled{1} \dots \dots = 3 + u + 0$$

$$\dots = (1) \cdot 0 = 0 - 3 - 3 \leftarrow \dots = (1) \cdot 0$$

$$\textcircled{2} \dots \dots = 3 = u + 3$$

$$1 = \frac{\pi}{4} = (1) \cdot 0 = 1 - 3 + 3$$

$$1 = u - 3 + 3$$

$$\textcircled{3} \dots \dots = u - 3$$

$$\textcircled{4} \dots \dots = 3 = u + 3$$

$$\frac{1}{4} = 3 \leftarrow 1 = 3$$

$$3 = u \leftarrow 3 = u + \frac{1}{4} - 3$$

$$\frac{3}{4} = 3 \leftarrow 2 = 3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

١٣ اذاتانه للاقتران :

$$0 = (u) \cdot 0 = u^3 - 3u^2 + u + 0$$

قيمة صغرى محلية مقدارها 2 جيد :

(P) قيمة الثابت B

(B) القيمة العظمى المحلية للاقتران 0

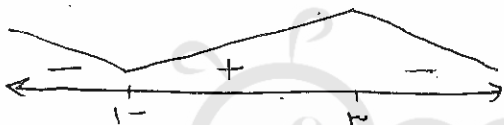
الكل :

$$2 = (1) \cdot 0 = 1 - 3 + 1 + 0 = 0$$

$$\dots = 3 - 3 + 1 = 1$$

$$\dots = (1 + 3)(3 - 1)$$

$$1 = 3, \quad 3 = 1$$



$$2 = (1) \cdot 0$$

$$2 = 0 + 1 + 3 \leftarrow 2 = 0 + 1 + 3$$

القيمة العظمى المحلية = 3

$$3 = 2$$

١٤ جيد قاعدة كثير حدود من الدرجة الثانية له

قيمة عظمى محلية عند $u = 3$ مقدارها 8

المرسوم له عند $u = 3$ في $\frac{\pi}{4}$

الكل :

$$0 = (u) \cdot 0 = u^3 - 3u^2 + u + 0$$

$$0 = (u) \cdot 0 = u^3 - 3u^2 + u + 0$$

$$\textcircled{1} \dots \dots = u + 3 \leftarrow \dots = (3) \cdot 0$$

$$8 = (3) \cdot 0 = 27 - 27 + 3 = 3$$

$$\textcircled{2} \dots \dots = 8 = u + 3$$

$$\textcircled{3} \dots \dots = 3 = u - 3$$

$$8 = 3 \leftarrow 8 = 3 - 3$$

$$8 = 3$$

نقطة التماس : $u = 3$

$$8 = 3 \leftarrow 8 = 3 - 3$$

$$8 = (3) \cdot 0 = 27 - 27 + 3 = 3 \leftarrow 8 = 3 + 3 + 3$$

$$8 = (3) \cdot 0 = 27 - 27 + 3 = 3$$

٣] جد القيم العظمى والصغرى المحليتين للاقتربات التالية باستخدام اختبار المشتق الثاني إن أمكن ذلك .

$$(1) f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$$

$$x \in]-\infty; \infty[$$

$$(2) f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x \quad \left. \begin{array}{l} 3 > x \\ 3 \leq x \end{array} \right\}$$

٣] إذا كان:

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = 0$$

وكان للاقتربة ٥ نقطتان حرجيتان عند:

$$x = 1, x = 2 \quad \text{جد الثابتين } p, q$$

٤] إذا كان للاقتربة:

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = 0$$

قيمة صغرى محلية عند النقطة (١, ٤) . جد:

$$p \text{ قيمة الثوابت } q$$

(ب) القيمة العظمى المحلي للاقتربة ٥

٥] جد قاعدة اقتربه كثير حدود من الدرجة الثانية

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$$

وعضائه الحدود على الجاهز المرسوم كالتالي ٥

$$\text{عند } x = 1 \text{ : } f'(x) = 3x^2 - 6x + 4 = 0$$

٦] إذا كان $f(x) > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$

وكان للاقتربة ٥ (٣, ١) قيمة عظمى محلية

عند النقطة (-١, ٣) فاشتبه أنه للاقتربة

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$$

عند النقطة (-١, ٣) قيمة صغرى محلية

تمرين ٣

١] لكل من الاقتربات التالية : جد:

(٢) فترات التزايد والتناقص

(ب) القيم العظمى والصغرى المحليتين والمطلقة

$$(1) f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$$

$$x \in]-\infty; \infty[$$

$$(2) f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x \quad x \in]-\infty; \infty[$$

$$(3) f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$$

$$(4) f(x) = (x-1)(x+1)$$

$$(5) f(x) = (x^2 - 64)^{3/2}$$

$$(6) f(x) = \frac{x-3}{1+x^2}$$

$$(7) f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 4x}$$

$$x \in]-\infty; \infty[$$

$$(8) f(x) = \left. \begin{array}{l} 1 \geq x \geq 1 - x \\ 4 \geq x - 1 \geq x - 4 \end{array} \right\}$$

$$(9) f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$$

$$x \in]-\infty; \infty[$$

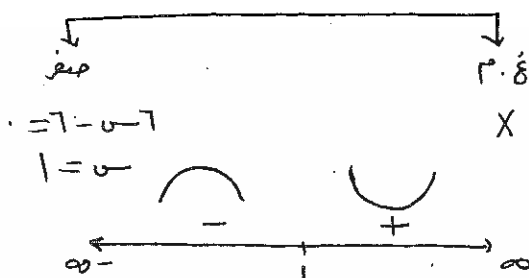
$$(10) f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$$

جد قترات التفرع ونقط الانعطاف :

$$1) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 1$$

$$\text{الكل : } f'(x) = 3x^2 - 6x - 4$$

$$f''(x) = 6x - 6$$



$f(x)$ صفر للاصل في $[-1, 0]$

صفر للاعلى في $[1, \infty)$

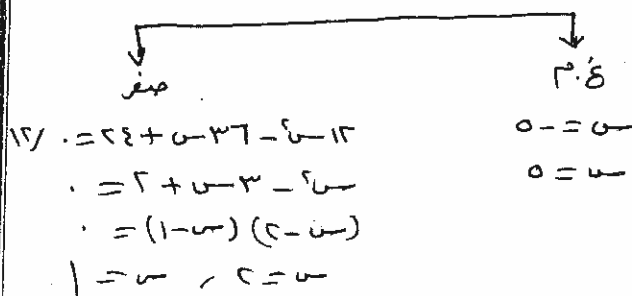
نقط الانعطاف : $(1, 1) = (1, f(1))$

$$2) \quad f(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 12x + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 24x - 12$$

$$\text{الكل : } f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 24x - 12$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 24$$



$f(x)$ صفر للاعلى في $[-1, 0]$ ، $[1, 2]$ ، $[3, \infty)$

للاصل في $[2, 3]$

نقط الانعطاف :

$$(1, 1) = (1, f(1))$$

$$(2, 1) = (2, f(2))$$

التفرع

يكون الاقتران $f(x)$:

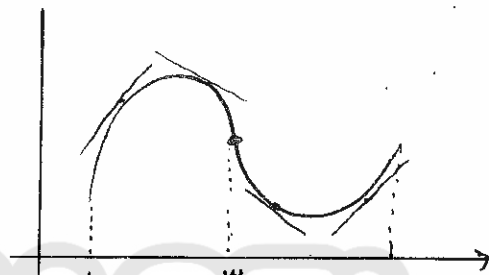
1) صفر للاعلى : اذا وقع صفاه فوق

جميع حاساته

2) صفر للاصل : اذا وقع صفاه تحت

جميع حاساته

نفي الشكل المرسوم الفوق لثلاث صفات $f(x)$



يكون :

$f(x)$ صفر للاصل في $[3, 5]$

صفر للاعلى في $[5, \infty)$

وتسمى النقطه $(3, f(3))$ ونقطه انعطاف

لثلاث صفات : اذا كلفه طرفان :

1) $f(x)$ يغير اتجاه تفرعه ههنا :

2) $f(x)$ صفر عند $x = 3$

تقع الشكل اعلاه

يكون للاقتران $f(x)$ نقطه انعطاف في

$$(3, 1)$$

وعلى كديد قترات التفرع للاقتران $f(x)$

ونقطه الانعطاف باستخدم الشارة المتغير الثاني

فان انابه $f(x)$ متصلا في $[1, 2]$ فانه

3) صفر للاعلى في $[1, 2]$

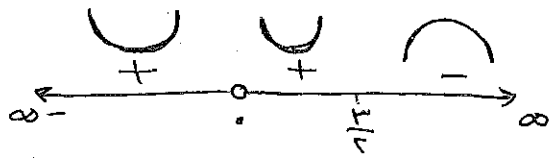
لـ $f'(x) < 0$ في $(1, 2)$

4) صفر للاصل في $[2, 3]$

لـ $f'(x) > 0$ في $(2, 3)$

5) خطيا في $[3, 4]$

لـ $f'(x) = 0$ صفر في $(3, 4)$

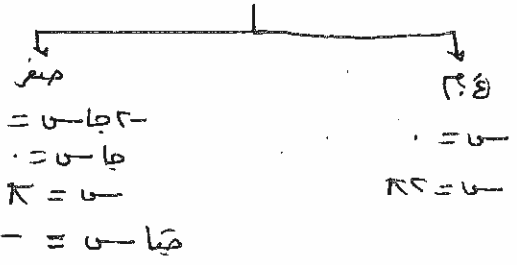


٣) $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$ مفعول للافضل
 مفعول للافضل $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$
 نقطه الانعطاف: $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

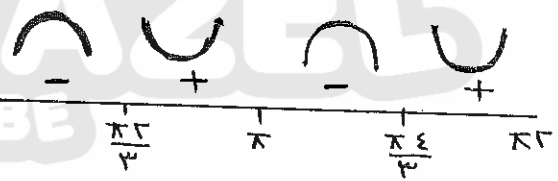
٣) $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$
 $[-\infty, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \infty)$

اكل

$(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$
 $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$
 $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$
 $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$



$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$



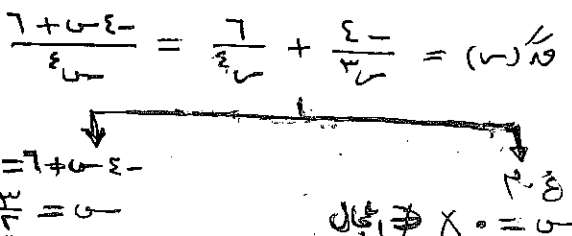
٤) $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, \infty)$ مفعول للافضل
 للافضل $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{4}{3}, \frac{4}{3}]$
 نقطه الانعطاف:
 $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, \infty)$

٤) $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, \infty)$

اكل: $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, \infty)$

$(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, \infty)$
 $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, \infty)$

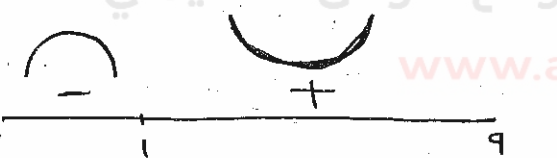
$(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, \infty)$



٥) $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{4}{3}, \infty)$
 $[-\infty, \frac{1}{3}] \cup [\frac{4}{3}, \infty)$

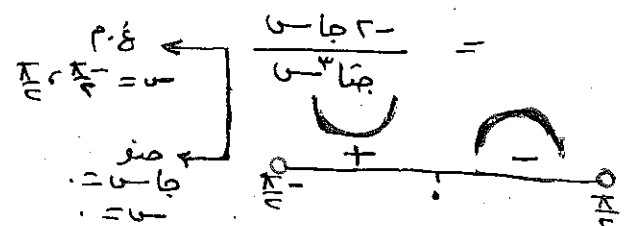
$(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{4}{3}, \infty)$
 $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{4}{3}, \infty)$
 $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{4}{3}, \infty)$

$(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{4}{3}, \infty)$
 $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{4}{3}, \infty)$



٦) $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$ مفعول للافضل
 مفعول للافضل $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$
 نقطه الانعطاف: $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

٦) $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$
 $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$
 $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$



نقطه الانعطاف: $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
 للافضل $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

□ **جد قاعدة كثير حدود من الدرجة الثالث بر**
 معناه بالنقطة (0,0) وله نقطة انعطاف
 عند $s = 2$ ومعادله التماس المرسوم كماه
 عند $s = 1$ هي $9 - 5s + s - 9 = 0$
 الكل :

$$\begin{aligned} 5 + s - 9 + s^2 + s^3 - 9s &= (s-1) \cdot 9 \\ 9 + s - 9 + s^2 + s^3 - 9s &= (s-1) \cdot 9 \\ 9 + s - 9 + s^2 + s^3 - 9s &= (s-1) \cdot 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = 5 \leftarrow 0 = (1) \cdot 9 \\ 9 + s - 9 + s^2 + s^3 - 9s &= (s-1) \cdot 9 \\ 9 + s - 9 + s^2 + s^3 - 9s &= (s-1) \cdot 9 \end{aligned}$$

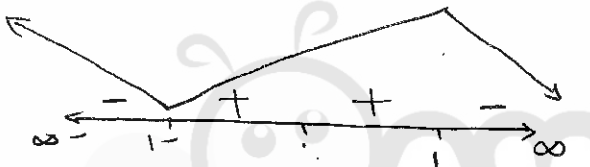
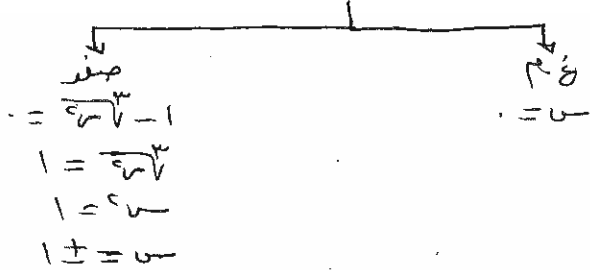
$$\begin{aligned} 9 - 9 + s - 9 + s^2 + s^3 - 9s &= (s-1) \cdot 9 \\ 9 - 9 + s - 9 + s^2 + s^3 - 9s &= (s-1) \cdot 9 \\ 9 - 9 + s - 9 + s^2 + s^3 - 9s &= (s-1) \cdot 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = 0 + 9 + 0 + 9 &= (1) \cdot 9 \\ 0 = 0 + 9 + 0 + 9 &= (1) \cdot 9 \\ 0 = 0 + 9 + 0 + 9 &= (1) \cdot 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = 9 \leftarrow 0 = 9 + 7 - 1 \\ 0 = 9 \leftarrow 0 = 9 + 7 - 1 \end{aligned}$$

□ **إذا كان $s = 3$ $\frac{1}{3} - s$**
 فجد للدوران $s = 1$
 (1) فترات التزايد والتناقص
 (2) القيم العظمى والصغرى المحلية
 (3) فترات النقص ونقطة الانعطاف

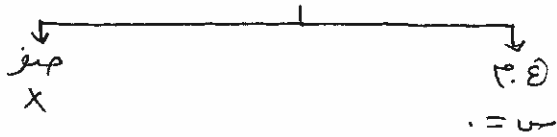
الكل : مجال $s = 2$
 $9 - 5s + s - 9 = 0$
 $9 - 5s + s - 9 = 0$
 $9 - 5s + s - 9 = 0$



ف (s) مناسق في $(-\infty, -1)$ ، $(1, \infty)$
 فترات في $(-1, 1)$

$$\begin{aligned} 9 - 9 + s - 9 + s^2 + s^3 - 9s &= (s-1) \cdot 9 \\ 9 - 9 + s - 9 + s^2 + s^3 - 9s &= (s-1) \cdot 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 - 9 + s - 9 + s^2 + s^3 - 9s &= (s-1) \cdot 9 \\ 9 - 9 + s - 9 + s^2 + s^3 - 9s &= (s-1) \cdot 9 \end{aligned}$$



ف (s) مناسق للكل في $(-\infty, -1)$
 للكل في $(1, \infty)$
 نقطة الانعطاف : (1, 2)

تمرين [4]

II حدد فترات التقعر ونقطة الانقلاب :

(1) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 1$

(2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(3) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln x$

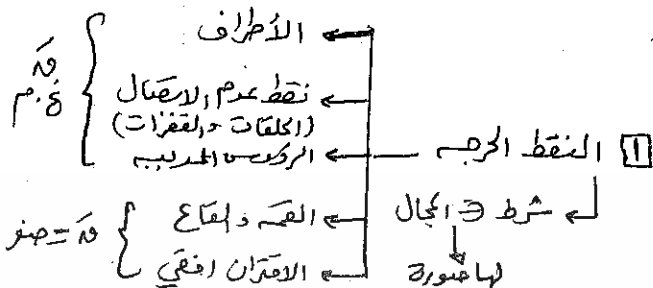
$x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$

(4) $\left. \begin{matrix} x < 1 \\ x > 2 \end{matrix} \right\} = f(x)$

(5) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

إيجاد صفات التقعران من الرسم

أولاً : من معنى $f'(x)$

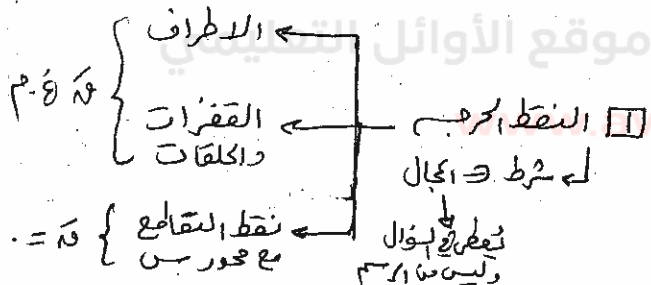


II التزايد والتناقص : من الصعود والهبوط (من اليسار لليمين)

III القيم العنقوت : تحدد النقطة الحرجة وتختبرها عن نفس الرسم المعطى.

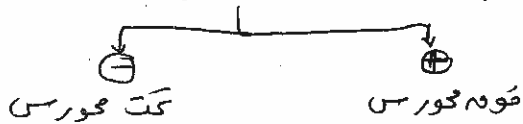
IV التقعر : حسب اتجاه الانحناء

ثانياً : من معنى $f''(x)$



II التزايد والتناقص وقيم العنقوت

لـ من إشارة $f''(x)$



III التقعر ونقطة الانقلاب

لـ حسب الصعود والهبوط



ثالثاً : من معنى $f''(x)$

I التقعر ونقطة الانقلاب : من إشارة $f''(x)$

II القيم العنقوت : بشرط أن تكون قيم $f''(x)$ صفر

III كلاً من اللقنات التالية حدد

- (1) فترات التزايد والتناقص
- (2) القيم العنقوت وبتصنيفها المحلي والمطلق
- (3) فترات التقعر ونقطة الانقلاب

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

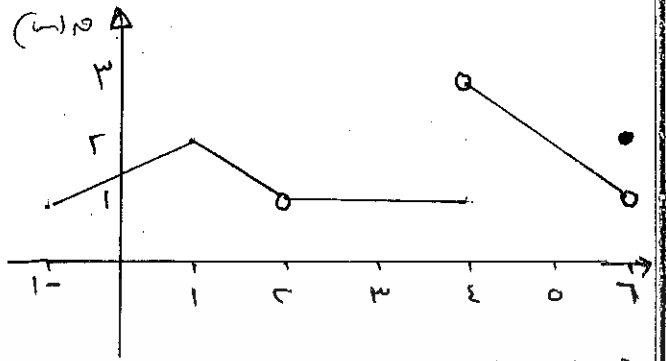
$x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$

(2) $\left. \begin{matrix} x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{matrix} \right\} = f(x)$

III حدد قاعدة كير هود من الدرجة الثالثة

يرسمها بالنقطة (0,1) وعاملها $f(x)$ المرسوم لعناها عند نقطة الانقلاب (1,2) هي $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$

11 الشكل المرسوم يمثل دالة f من S إلى T



جدد f قيم من الحرجة للفترة S

الكل $S = \{-1, 1, 2, 4, 5, 6\} \cup \{4, 5\}$

جدد f قيم من الدالة عندها f غير قابل للاشتقاق

الكل $S = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

12 قيم P بحيث أن $f^{-1}(P) = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

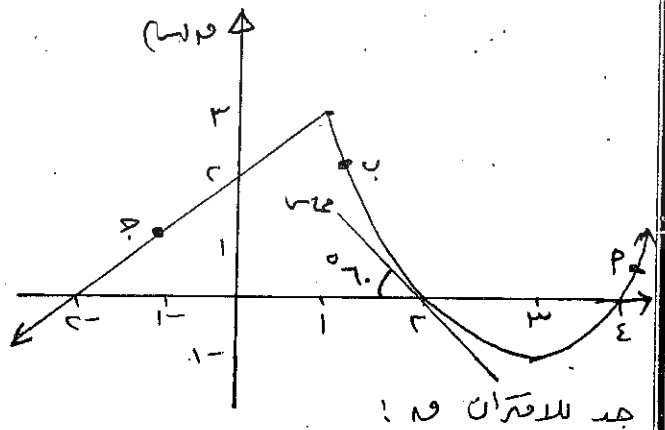
الكل $P = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

13 جدد f قيم من الحرجة للفترة S

جدد f قيم من الدالة عندها f غير قابل للاشتقاق

الكل $S = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

14 جدد f قيم من الحرجة للفترة S



جدد f قيم من الحرجة للفترة S

القيم القطرية والصفوف المحلّية

الكل S الحرجة $\left\{ \begin{array}{l} 1 = 3 \leftarrow 1 = 1 \\ 3 = 3 \leftarrow 3 = 3 \end{array} \right.$

الصفوف المحلّية $\left\{ \begin{array}{l} 1 = 1 \leftarrow 1 = 1 \\ 3 = 3 \leftarrow 3 = 3 \end{array} \right.$

15 فترات التزايد والتناقص

تزايد f في $(-1, 1)$ ، تناقص f في $(1, 2)$ ، تزايد f في $(2, 4)$

تناقص f في $(1, 2)$ ، تزايد f في $(2, 4)$

16 ما هي كل من f و f^{-1} عند النقطة P

الكل P : $f^{-1} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ ، $f = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

$f^{-1} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ ، $f = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

$f^{-1} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ ، $f = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

$f^{-1} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ ، $f = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

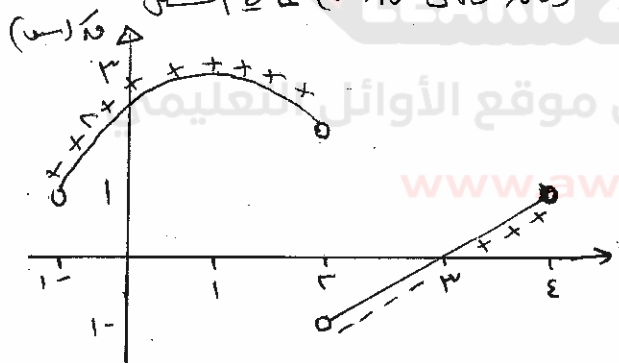
جدد f قيم من الحرجة للفترة S

جدد f قيم من الدالة عندها f غير قابل للاشتقاق

الكل $S = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

17 جدد f قيم من الحرجة للفترة S

جدد f قيم من الدالة عندها f غير قابل للاشتقاق



جدد f قيم من الحرجة للفترة S

القيم القطرية والصفوف المحلّية

الكل $S = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

$f^{-1} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ ، $f = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

القيم القطرية والصفوف المحلّية

الصفوف المحلّية $\left\{ \begin{array}{l} 1 = 1 \leftarrow 1 = 1 \\ 3 = 3 \leftarrow 3 = 3 \end{array} \right.$

القيم القطرية والصفوف المحلّية

فترات التزايد والتناقص

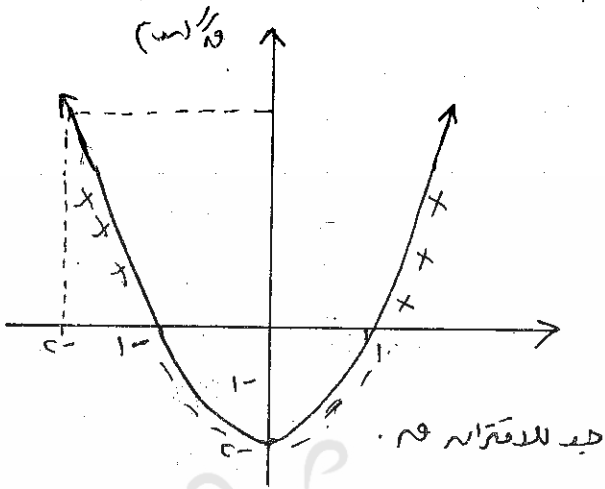
تزايد f في $(-1, 1)$ ، تناقص f في $(1, 2)$ ، تزايد f في $(2, 4)$

تناقص f في $(1, 2)$ ، تزايد f في $(2, 4)$

القيم القطرية والصفوف المحلّية

الصفوف المحلّية $\left\{ \begin{array}{l} 1 = 1 \leftarrow 1 = 1 \\ 3 = 3 \leftarrow 3 = 3 \end{array} \right.$

□ الشكل المرسوم يمثل منحنى $f(x)$ للاقتربة $f(x)$ المعرف على \mathbb{R}



(1) فترات التفرع ونقط الانعطاف
الكل:



فترات $f(x)$ متفرع للامتلد في $(-\infty, -1]$, $[-1, 3]$ للاصل في $[1, 3]$

نقط الانعطاف: $(1, -2)$, $(3, 0)$

(2) القيم القصوى المحلية

اذا علمت انه $f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

الحل

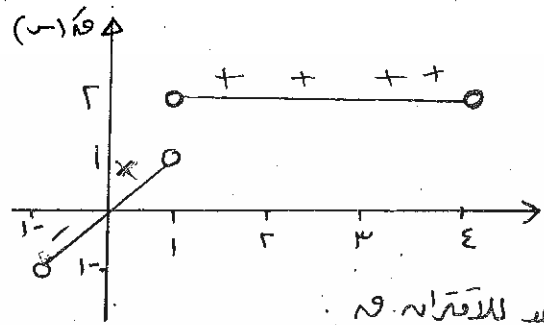
الرجوع الى $x = 1$ $f''(1) = 2 > 0$ \Rightarrow $x = 1$ عظمى محلية

$x = 3$ $f''(3) = 4 < 0$

$\Rightarrow x = 3$ صغرى محلية

□ اذا كان $f(x)$ متقل على $[-1, 4]$ وكان $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ، $1 \leq x < 4$ $f(x) = 2x - 1$ ، $0 \leq x < 1$

وكان منحنى $f(x)$ كما في الشكل المرسوم

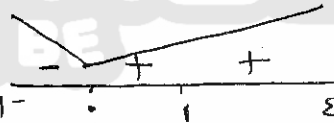


(1) حد للاقتربة $f(x)$

(1) قيم من الخرج

الكل: $S = \{-1, 1, 2, 6\}$

(2) فترات التزايد والتناقص



الكل:

فترات متناقص في $[-1, 0]$ ، فترات تزايد في $[0, 4]$

(3) قيم من التي عندها قيم قصوى محلية

الكل: $S = \{0, 1, 4\}$

(4) قيم الثوابت: P, Q, R, S

علما بان $1 < P < 2 < Q < R < S$

الكل: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & 0 \leq x < 1 \\ x^2 + 2x + 1 & 1 \leq x < 4 \end{cases}$

$f(0) = -1 \leftarrow x = 0 \Rightarrow y = -1$

$f(1) = 4 \leftarrow f(1) = 2^2 = 4$

$f(4) = 21 \leftarrow f(4) = 2^2 + 2 \cdot 4 = 21$

$f(2) = 9 \leftarrow f(2) = 2 + 9 = 11$

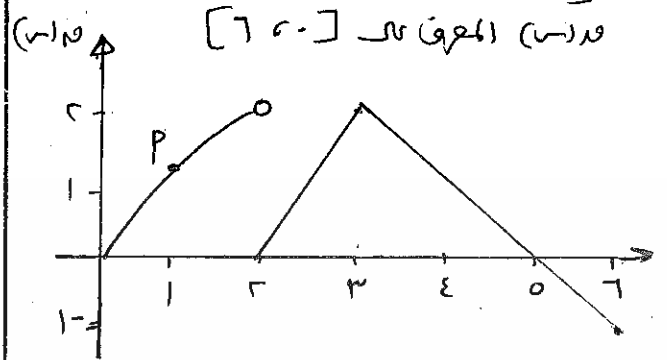
(1) $f(1) = 4 \leftarrow f(1) = 2 + 2 = 4$

$f(2) = 9 \leftarrow f(2) = 2 + 7 = 9$

$f(3) = 16 \leftarrow f(3) = 2 + 14 = 16$

تمرين ٥

١١) يمثل الشكل المرسوم ضمن الاقتران

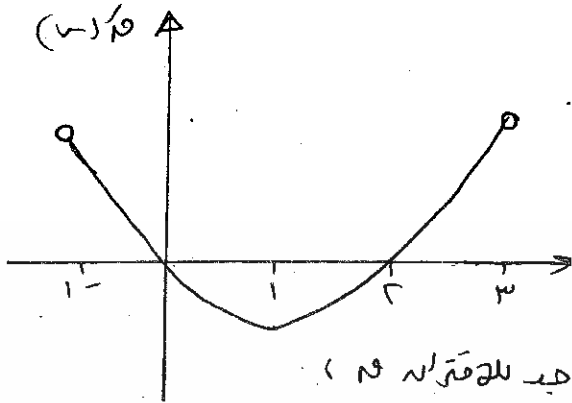


حدد للاقتران f :

- (١) قيم من الحرج
- (٢) القيم العظمى والصغرى المحليه والطلق
- (٣) فترات التزايد والتناقص
- (٤) $f(4)$ ، $f(5)$ ، $f(6)$
- (٥) اشاره f' عند النقطه P
- (٦) معكول تغير f في $[6, 3]$

٣) اذا كانه $f(x)$ معرفا على $[-3, 1]$

وكانه $f'(x)$ كما في الشكل المرسوم



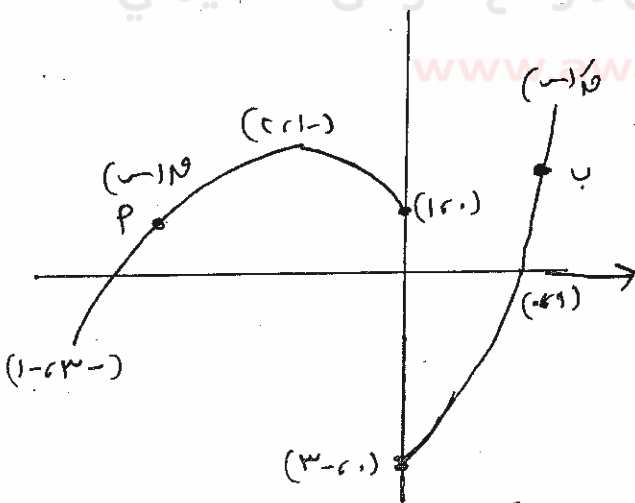
حدد للاقتران f :

- (١) فترات التزايد والتناقص
- (٢) القيم العظمى والصغرى المحليه
- (٣) فترات التغير ونقطه الانعطاف

٤) يمثل الشكل التالي جزاء من ضمن كل من

$f(x)$ ، $f'(x)$

اذا علمت انه $f(x)$ معرفا على $[-3, 3]$

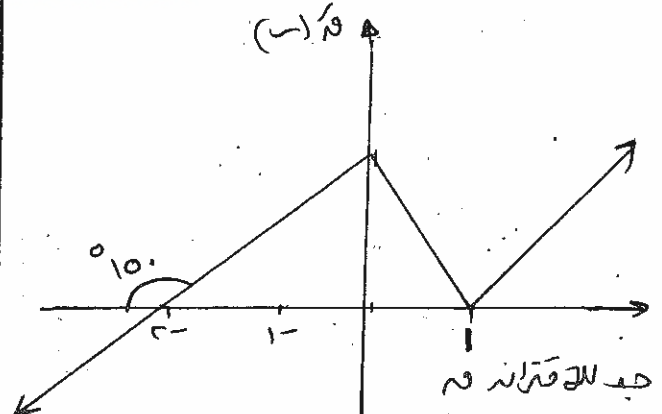


حدد للاقتران f :

- (١) فترات التزايد والتناقص
- (٢) القيم العظمى والصغرى المحليه
- (٣) فترات التغير ونقطه الانعطاف
- (٤) اشاره f' عند النقطه P

٣) الشكل المرسوم يمثل ضمن $f(x)$

للاقتران $f(x)$



حدد للاقتران f :

- (١) قيم من الحرج
- (٢) فترات التزايد والتناقص
- (٣) القيم الصغرى المحليه
- (٤) فترات التغير ونقطه الانعطاف
- (٥) $f'(1)$ ، $f'(-2)$

تطبيقات القيم القصوى

١) إذا كان مجموع عدد مع ضلعي عدد آخر يساوي ٤٠ ، فجد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .
الحل :

نرخص العددين = س ، والآخر = ٤٠ - س
حاصل الضرب أكبر ما يمكن

$S \times (40 - S) = 2$

$S(40 - S) = 2$

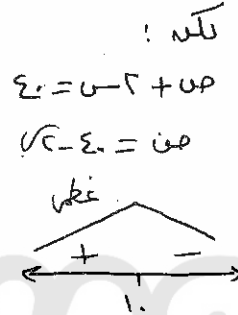
$40S - S^2 = 2$

$0 = S^2 - 40S + 2$

$10 = S$

$\therefore 40 - 10 = 30 = S$

$S = 30$



٣) متوازي مستطيلات قاعدته مربع الشكل ومجموع أطوال أحرافه = ٦٠٠ سم .
جد أبعاده ليكون حجمه أكبر ما يمكن .
الحل :

نرخص أبعاده :
س ، س ، س

حجم المتوازي أكبر ما يمكن

$2 = S \times S \times S$

$2 = S^3$

$2 = S^3 - 100 - 2 = S^3 - 102$

$2 = S^3 - 100 - 2 = S^3 - 102$

$2 = S^3 - 100 - 2 = S^3 - 102$

$2 = S^3 - 100 - 2 = S^3 - 102$

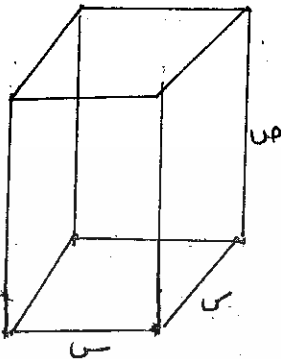
$2 = S^3 - 100 - 2 = S^3 - 102$

$2 = S^3 - 100 - 2 = S^3 - 102$

$2 = S^3 - 100 - 2 = S^3 - 102$

$2 = S^3 - 100 - 2 = S^3 - 102$

$2 = S^3 - 100 - 2 = S^3 - 102$



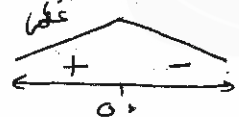
لكن !

$700 = 4S + S + S + S$

$700 = 4S + S + S + S$

$150 = 4S + S + S + S$

$5 - 150 = 4S$



$5 \times 150 = 750$

$5 = S$

٢) قطع أرض مستطيلة الشكل محيطها ٣٨٠٠ .
جد بعدي القطع لتكون مساحتها أكبر ما يمكن .
الحل :

نرخص طولها = س وعرضها = ٣٨٠٠ - س
مساحة القطع أكبر ما يمكن

$S \times (3800 - S) = 3$

$S(3800 - S) = 3$

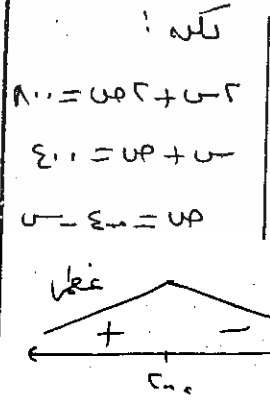
$3800S - S^2 = 3$

$0 = S^2 - 3800S + 3$

$1900 = S$

$\therefore 3800 - 1900 = 1900 = S$

$S = 1900$



٤) ما إحداثيات النقطة الواقعة في الربع الأول على منحنى $(S-1) = \sqrt{4-S}$ والتي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (٠, ٦) .
الحل :

نرخص أن النقطة = (س ، س)
المسافة بين النقطتين أقل ما يمكن

$f = \sqrt{(S-1)^2 + (6-S)^2}$

$f = \sqrt{S^2 + 376 + 112 - 6S}$

$f = \sqrt{S^2 + 376 + 112 - 6S}$

$f = \sqrt{S^2 + 376 + 112 - 6S}$

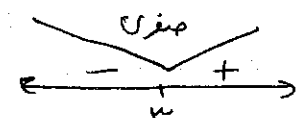
$f = \sqrt{S^2 + 376 + 112 - 6S}$

$f = \sqrt{S^2 + 376 + 112 - 6S}$

$f = \sqrt{S^2 + 376 + 112 - 6S}$

$f = \sqrt{S^2 + 376 + 112 - 6S}$

$f = \sqrt{S^2 + 376 + 112 - 6S}$



$15\sqrt{3} = 22.5$

(5) جد معادله المستقيم المار بالنقطه

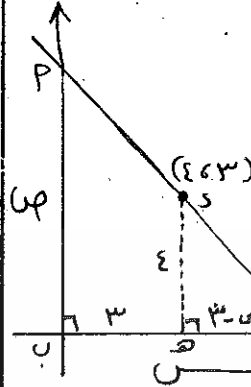
(4,3) و يصنع مع المحورين الموجهين

مثلثا مساحته أقل ما يمكن

الكل:

نفرض طول قاعدته = u

وارتقاعه = v



مساحه المثلث أقل ما يمكنه

$$3 = \frac{1}{2} u v$$

$$6 = u v \quad \text{أو} \quad \frac{u-4}{3-u} \times \frac{1}{2} v = 3$$

$$6 = \frac{u-4}{3-u} v \quad \text{أو} \quad \frac{u-4}{3-u} = \frac{6}{v}$$

$$\frac{u-4}{3-u} = \frac{6}{v} \Rightarrow v = \frac{6(3-u)}{u-4}$$

لكنه من تشابه المثلثات $\Delta OPA \sim \Delta OAB$

$$\frac{u}{3-u} = \frac{3-u}{4}$$

$$4u = (3-u)^2 \Rightarrow 4u = 9 - 6u + u^2$$

$$u^2 - 10u + 9 = 0 \Rightarrow (u-1)(u-9) = 0$$



$$1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1$$

$$2 = 1 \times 1 \Rightarrow 2 = 1$$

$$2 = 1 \times 1 \Rightarrow 2 = 1$$

$$\frac{4}{3} = \frac{1-4}{7-3} = \frac{-3}{4} \Rightarrow \frac{4}{3} = -\frac{3}{4}$$

معارضته

$$(3-u) \frac{4}{3} = 4-u$$

(6) ما أكبر مساحه يمكنه مثلث متساوي

الساكن محيطه 12

الكل:

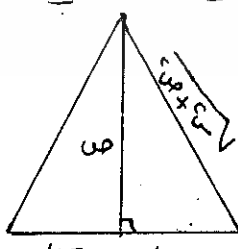
نفرض قاعدته = $2u$

ارتفاعه = v

مساحه المثلث أكبر ما يمكنه

$$3 = \frac{1}{2} \times 2u \times v$$

$$3 = u v$$



لكنه

محيط المثلث = 12

$$12 = \sqrt{u^2 + v^2} + u + 2u$$

$$7 = \sqrt{u^2 + v^2} + u$$

$$\sqrt{u^2 + v^2} = 7 - u$$

$$\sqrt{u^2 + v^2} + u - 12 - 3u = 0$$

$$u - 3 = \frac{u^2 + v^2}{12}$$

$$12(u-3) = u^2 + v^2$$

$$12u - 36 = u^2 + v^2$$

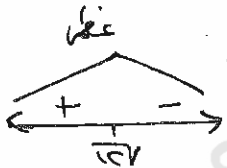
$$12u - 36 = u^2 + v^2$$

$$12 = u + \frac{v^2}{u}$$

$$12u = u^2 + v^2$$

$$12u = u^2 + v^2 \Rightarrow 12 = u + \frac{v^2}{u}$$

$$12u = u^2 + v^2$$



(7) اطولانه دائريه قائمه يدا عطايا

بجملها 34 π . جد أبعادها لتكون

تكاليف صنعها أقل ما يمكن علماً بأن:

تكلفه اسم من الجوانب قوسين

وتكلفه اسم من القاعدة 6 قروين

الكل:

التكلفه الكليه أقل ما يمكنه

$$L = \text{تكلفه القاعدة} + \text{تكلفه الجوانب}$$

$$L = \pi r^2 + 6 \times 2\pi r$$

$$L = \pi r^2 + 12\pi r$$

$$L = \pi r^2 + 12\pi r = 34\pi$$

$$r^2 + 12r = 34$$

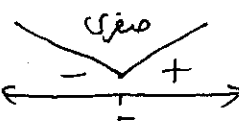
$$r^2 + 12r - 34 = 0$$

$$r = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 136}}{2} = \frac{-12 \pm 16}{2}$$

$$r = 2 \text{ or } -14$$

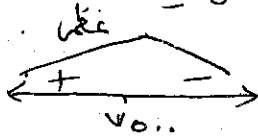
$$r = 2$$

$$r = 2$$

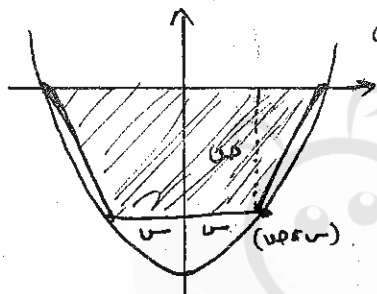


$$r = 2$$

$$\begin{aligned}
 r &= 200 - s - 100 - 50 - 50 \\
 r &= 150 - s - 100 - 50 \\
 r &= 150 - 200 - 50 \\
 s &= 750
 \end{aligned}$$



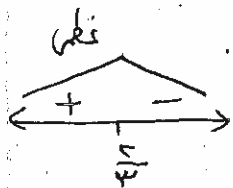
١. جد أكبر صامح ممكنة لثمن محرف
 يمكن رسم تحت محور السينات بحيث
 تكون إحدى قاعدتيه على محور السينات
 ولاسائر الاضلاع على



مقتى الاضلاع :
 $4 - 0 = (s - 2)$
 كما ان الشكل المرسوم
 اكل !

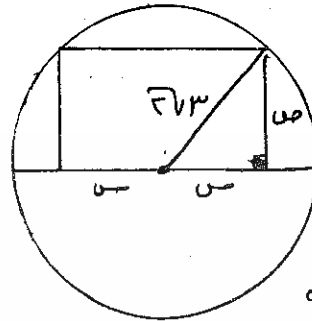
صامح ثمن المحرف أكبر ما يمكن
 $\frac{1}{2} \times \text{مجموع القاعدتين} \times \text{الارتفاع}$

$$\begin{aligned}
 &= 4 - 0 = s - 2 \\
 &4 \pm = s \\
 &4 = \text{طول القاعدة الكبرى} \\
 &2 = 4 - 8 + 3s - 1 \\
 &2 = s - 4 - 3s - 4 \\
 &= 4 - s - 4 + 3s \\
 &= (2 + s)(2 - 3s) \\
 &2 = s - 4 - 3s - 4 \\
 &2 = s - 4 - 3s - 4
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &2 = (2 + \frac{s}{3})(2 - 4) \\
 &\frac{2}{9} \times \frac{1}{4} = \\
 &\frac{207}{27} =
 \end{aligned}$$

٨. جد أكبر صامح ممكنة لثمن
 رسم داخل دائرة طول نصف قطرها ٢٧
 بحيث تنطبقه قاعدتيه على قطر الدائرة والاسائر
 الاضلاع على الدائرة



الحل !

نروض أن :

$$2 - s =$$

$$s =$$

صامح المستطيل أكبر ما يمكن

$$2 - s = 2$$

$$2 - s = 187 - s$$

$$\begin{aligned}
 18 &= s + 2 \\
 s - 18 &= s \\
 \sqrt{187 - s} &= s
 \end{aligned}$$

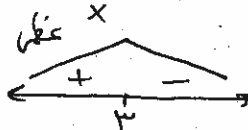
$$\frac{s - 2}{\sqrt{187 - s}} \times s + \sqrt{187 - s} = 2$$

$$= \frac{s - 2}{\sqrt{187 - s}} - \sqrt{187 - s} = 2$$

$$\frac{s - 2}{\sqrt{187 - s}} = \sqrt{187 - s}$$

$$18 = s - 2 \leftarrow s = 20$$

$$2 - 23 = s \leftarrow 9 = s$$



$$\begin{aligned}
 &3 \times 2 = 2 \\
 &2 - 18 =
 \end{aligned}$$

٩. مصنع للأجهزة الكهربائية ينتج س جهاز
 سنويا ويبيع كل جهاز بـ (٢٠٠ - ١٠٠س)
 دينار . اذا كانت تكلفة هذه الاجهزة تساوي
 (٢٠٠ + ٤س) دينار . فكم جهازا ينتج
 لتصنيعه أكبر ربح ممكن سنويا

اكل !

الربح أكبر ما يمكن

$$\text{الربح} = \text{ثمن البيع} - \text{ثمن التكلفة}$$

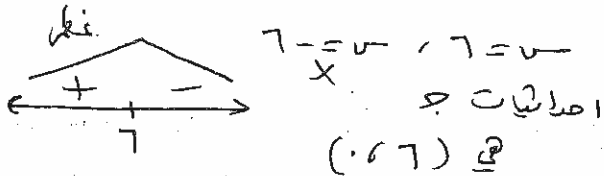
$$r = s(200 - 100s) - (200 + 4s)$$

$$\frac{5-0}{36+6} = \text{ظا ه}$$

$$\frac{\sqrt{5} \times 5 - (36+6)0}{(36+6)^2} = \text{قا ه}$$

$$1 = \frac{5-18}{(36+6) \text{قا ه}} = \text{ه}$$

$$36 = 5 - 18 \rightarrow 5 - 18 = 36$$



(16) قطاع دائري زاوية المركزيه ه بالتقدير اللاتري وطول نصف قطر دائرته ٤ وحدات . حول الى مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته نفا وارتفاعه ٤ . جد قيمه ه التي تجعل للمخروط الناتج أكبر حجم ممكن



الحل !

حجم مخروط أكبر ما يمكن

$$\frac{\pi}{3} \text{نفا}^2 \times 4 = \text{ح}$$

$$\frac{\pi}{3} (4-h)^2 \times 4 = \text{ح}$$

$$\frac{\pi}{3} (16-8h+h^2) \times 4 = \text{ح}$$

$$\frac{\pi}{3} (16-8h+h^2) \times 4 = \frac{\pi}{3} (16-8h+h^2) \times 4$$

$$\frac{16}{3} = \frac{16-8h+h^2}{3}$$

$$16 = 16-8h+h^2$$

$$0 = -8h+h^2$$

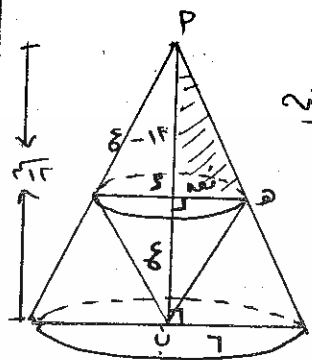
$$h^2 - 8h = 0$$

$$h(h-8) = 0$$

$$h = 0 \text{ or } h = 8$$

نفا = 8

(14) جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم آخر ارتفاعه ١٣م ونصف قطر قاعدته ٦م بحيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي



الحل !

حجم المخروط الداخلي أكبر ما يمكن

$$\frac{\pi}{3} \text{نفا}^2 \times 6 = \text{ح}$$

$$\frac{\pi}{3} (13-h)^2 \times 6 = \text{ح}$$

$$\frac{\pi}{3} (169-26h+h^2) \times 6 = \text{ح}$$

$$\frac{\pi}{3} (169-26h+h^2) \times 6 = \frac{\pi}{3} (169-26h+h^2) \times 6$$

$$169 = 169-26h+h^2$$

$$0 = -26h+h^2$$

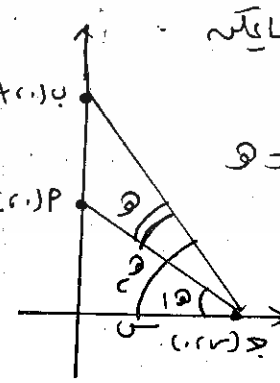
$$h^2 - 26h = 0$$

$$h(h-26) = 0$$

$$h = 0 \text{ or } h = 26$$

نفا = 26

(15) اذا كانت P (4,0) ، B (0,4) جد نقطه تقاطعه على محور السينات الموجب جد احداثيات النقطه ج ليكون قياس الزاويه P ج B أكبر ما يمكن



الحل !

نقصنا قياسا ج P ج B = ه

ظا ه = ظا (ه-15)

$$\frac{\text{ظا ه} - \text{ظا ه}}{1 + \text{ظا ه} \times \text{ظا ه}} = \text{ظا ه}$$

$$\frac{0}{1 + \text{ظا ه}^2} = \text{ظا ه}$$

$$0 = \text{ظا ه} (1 + \text{ظا ه}^2)$$

$$\text{ظا ه} = 0$$

11] OP جدي متطيل ماضته 32 سم
 ه منتصف جدي . جيد ابعاده ليكون
 طول P ه لقه 5 ما يمكنه .

12] متطيل محيطه 4 سم . تبي ليكون
 رطوانه دائريه قائمه حيث ان محيط
 قائدها يساوي احد ابعاده المتطيل
 جيد ابعاده يمكنه للدائره الثانيه

13] ضلت قائم الزاويه طول وتره 17 سم
 جيد طول كل من ضلعي القائم ليكون طول
 العمود النازل من رأس القائم على وتر
 اكب ما يمكنه .

14] OP جدي متطيل طيه $OP = 6$ سم
 $OP = 9$ سم . رسم مستقيم يمر بالنقطه
 ج ويقطع امتداد OP ه و امتداد OP
 ه و جد اصغر مساحه ممكنه للمثلث OP ه و

15] ما اكب حجم مكعبه المحروط دائري قائم
 عليه و نصفه داخل كره نصفها 3 سم

16] تتطيفه قائده ضلت على محور السينات
 واحد اصداه على المستقيم $OP = 3$ سم
 والضلوع الثالث يمر بالنقطه $(1, 1)$
 جيد اقل مساحه ممكنه لهذا المثلث .

17] ضلت قائم الزاويه طول وتره 8 سم
 وقياس احد زواياها 60° . جيد ابعاده
 متطيل ذو اكب مساحه عليه رسم داخل
 المثلث بحيث يتطيفه احد ابعاده على وتر

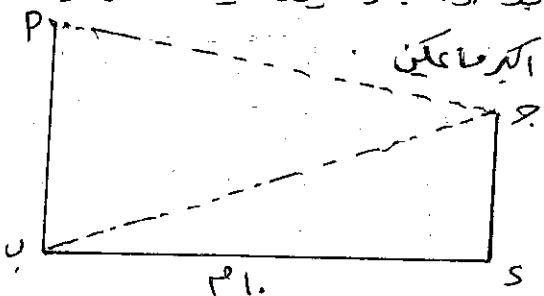
18] يراد اقامه سياج حول قطع ارض
 على شكل متطيل ينتهي بضي دائره
 كما في الشكل احياور .
 ان دائره تكلفه تركيب المتر الواحد من السياج
 على الجانبين المتقصرين 4 دائره
 وعلى الجانبين المتطيلين 6 دائره
 جيد اكب مساحه ممكنه لقطع
 الارض التي يمكنه احاطتها
 بسياج تكلفته 4 دينار



19] سور ارتفاعه 3 م 3 م 3 م
 ويبعد عنه صاف 1 م . جيد طول
 اصغر سلم يمتد من الارض الى المنزل
 بحيث يرتكز على حافه السور بعليا .

20] ما اكب حجم لموشور رباعي قائم
 قائده مربعه الشكل عليه وضع
 داخل مخروط قائم طول نصف قطر قائده
 6 سم وارتفاعه 9 سم .

21] في الشكل المرسوم OP جدي
 عمودان راسيان قائمان و OP قائم
 بينهما 10 م . اذا كان طول $OP = 8$ م
 جيد طول جدي ليكون قياس الزاويه P جدي

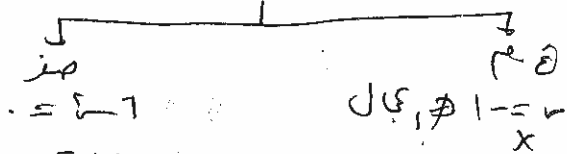


(د) مجال $x = 2 - \{1\}$

$$\frac{\sqrt{x} \times (1-x^3) - (1+x^3)\sqrt{x}}{(1+x^3)^2} = 0$$

$$\frac{\sqrt{x} + 0 - \sqrt{x} - 0}{(1+x^3)^2} = 0$$

$$\frac{\sqrt{x}}{(1+x^3)^2} = 0$$

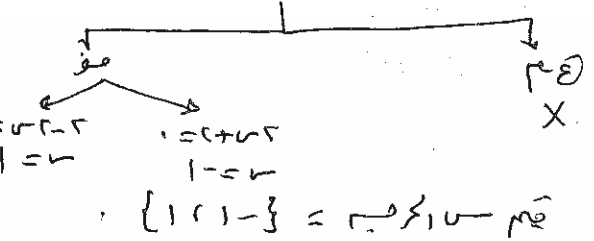


قيم x الكرمية = $\{1, 2\}$

(ب) $\left. \begin{matrix} x > 2 \\ x \leq 2 \end{matrix} \right\} = (2, \infty)$

الاتصال: $x = 2$ مقبل عند $x = 2$

(د) $\left. \begin{matrix} x > 2 \\ x \leq 2 \end{matrix} \right\} = (2, \infty)$



(ب) $\frac{1}{2} \leq x < 1$

(د) $2 \leq x < 3$

$x < 1$

(د) $x < 1$ من أجل $x < 1$

من أجل $x < 1$

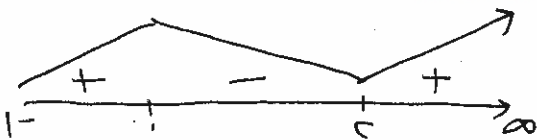
قيم x الكرمية = $[1, 2]$

تمرين 5

(أ) $x = 3 - 17 - 4 = 16 - 3 - 4 = 9$



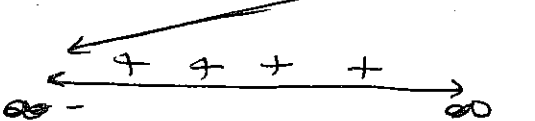
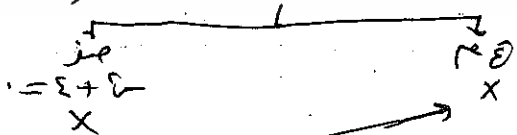
قيم x الكرمية = $\{1, 3, 4\}$



من أجل $x < 1$ من أجل $x < 1$ من أجل $x < 1$

(د) $x = 2 + 3 = 5$

$x = 2 + 3 + 3 + 3 = 11$

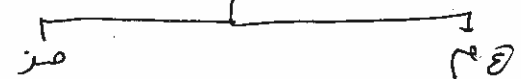


من أجل $x < 1$ من أجل $x < 1$

(ج) $x = \sqrt{13} - \sqrt{13} = 0$

$x = \sqrt{13} - \sqrt{13} = 0$

$x = \sqrt{13} - \sqrt{13} = 0$



من أجل $x < 1$

$x = 2$

من أجل $x < 1$ من أجل $x < 1$

$x = 2$

قيم x الكرمية:

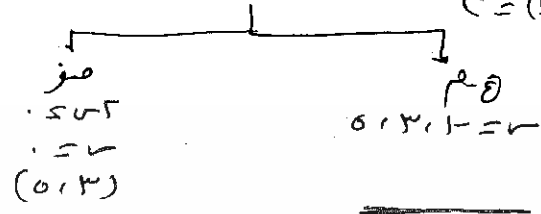
$\{2, 3, 4, 5\}$

(٥) دالة متقل عند $v = 3$

$$\left. \begin{aligned} 1 > v > 1 - c & \quad 3 - 2 \\ 3 > v > 1 - c & \quad 2 \\ 0 > v > 2 - c & \quad \text{منز} \\ 0, 3, 1 = v & \quad \text{ع} \end{aligned} \right\} = \text{دالة}$$

$$c = \frac{v-1}{2}$$

$$c = \frac{v-3}{2}$$



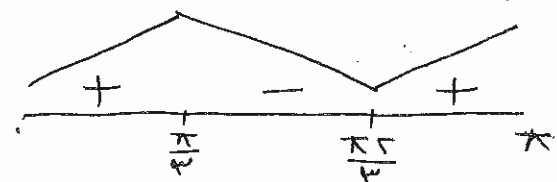
دالة متناقصة في $[-0.1, 3]$ و متزايدة في $[3, 0]$
 ثابتة في $[0, 3]$

(٣) دالة $(v) = 1 + 2\sqrt{v-1}$

$$\left. \begin{aligned} 1 < v < 1 + c & \quad \text{منز} \\ 1 < v < 1 + c & \quad \text{ع} \\ 1 < v < 1 + c & \quad \text{ع} \end{aligned} \right\} = \text{دالة}$$

$$c = \frac{v-1}{2}$$

$$c = \frac{v-1}{2}$$

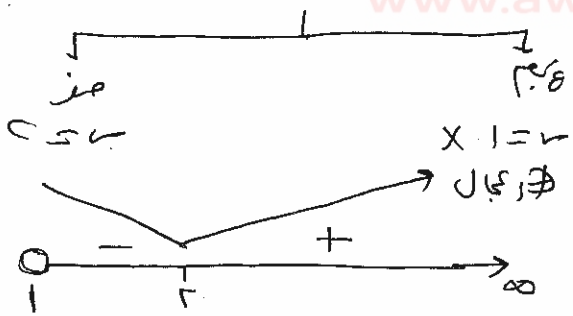


دالة متزايدة في $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \pi]$
 متناقصة في $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}]$

(٦) دالة $\frac{1}{1-\sqrt{v}} - \frac{1}{1-\sqrt{v}}$

$$\frac{\frac{1}{1-\sqrt{v}} - \frac{1}{1-\sqrt{v}}}{1-v} = \frac{\frac{1}{1-\sqrt{v}} - \frac{1}{1-\sqrt{v}}}{1-v}$$

$$\frac{c-v}{(1-v)(1-\sqrt{v})} = \frac{c-v}{(1-v)(1-\sqrt{v})}$$

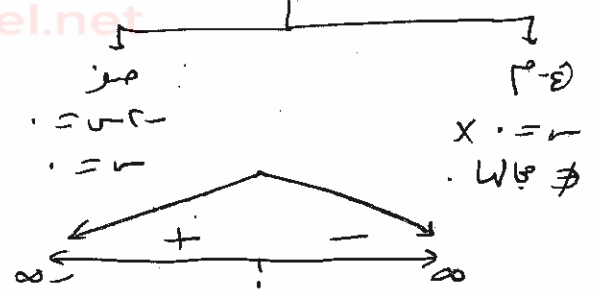


دالة متناقصة في $(c, 1)$
 متزايدة في (∞, c)

(٤) دالة متقل عند $v = 1$

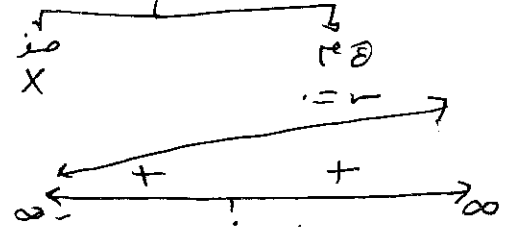
$$\left. \begin{aligned} 1 < v < 1 + c & \quad \text{منز} \\ 1 < v < 1 + c & \quad \text{ع} \end{aligned} \right\} = \text{دالة}$$

$$c = \frac{v-1}{2}$$



دالة متزايدة في $(-\infty, 1)$
 متناقصة في $(1, \infty)$

(٧) دالة $\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{v}}$

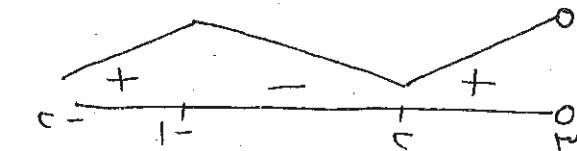


دالة متزايدة في $(-\infty, \infty)$

تمرين 3

(1) f(x) = x^2 - 7x + 12

Handwritten solution for f(x) = x^2 - 7x + 12, showing factoring to (x-3)(x-4), finding roots x=3 and x=4, and a sign chart with intervals (-infinity, 3), (3, 4), and (4, infinity).



Interval analysis for f(x) = x^2 - 7x + 12: (P) intervals (-infinity, 3) and (4, infinity) are positive, (3, 4) is negative.

(b) f(x) = x^2 - 9

f(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)

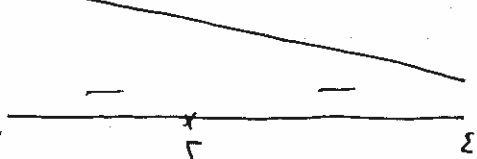
f(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)

f(x) = x^2 - 9 = (x-3)(x+3)

(2) f(x) = x^2 - 3x + 2

f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)

Handwritten solution for f(x) = x^2 - 3x + 2, showing factoring to (x-1)(x-2), finding roots x=1 and x=2, and a sign chart with intervals (-infinity, 1), (1, 2), and (2, infinity).



(b) f(x) = x^2 - 8x + 12

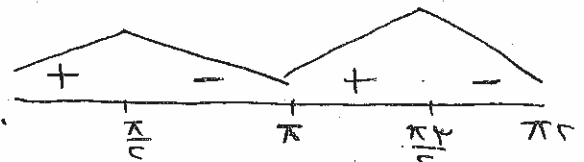
f(x) = x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6)

Interval analysis for f(x) = x^2 - 8x + 12: (P) intervals (-infinity, 2) and (6, infinity) are positive, (2, 6) is negative.

(P) Interval analysis for f(x) = x^2 - 8x + 12: (-infinity, 2) and (6, infinity) are positive, (2, 6) is negative.

(1) f(x) = x^2 - 5x + 4

Handwritten solution for f(x) = x^2 - 5x + 4, showing factoring to (x-1)(x-4), finding roots x=1 and x=4, and a sign chart with intervals (-infinity, 1), (1, 4), and (4, infinity).



Interval analysis for f(x) = x^2 - 5x + 4: (P) intervals (-infinity, 1) and (4, infinity) are positive, (1, 4) is negative.

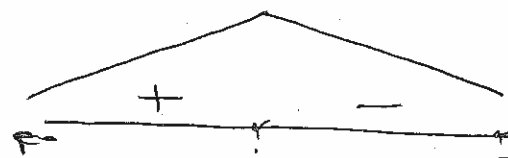
(2) f(x) = x^2 - 4x + 3



Interval analysis for f(x) = x^2 - 4x + 3: (P) intervals (-infinity, 1) and (3, infinity) are positive, (1, 3) is negative.

f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)

Handwritten solution for f(x) = x^2 - 4x + 3, showing factoring to (x-1)(x-3), finding roots x=1 and x=3, and a sign chart with intervals (-infinity, 1), (1, 3), and (3, infinity).

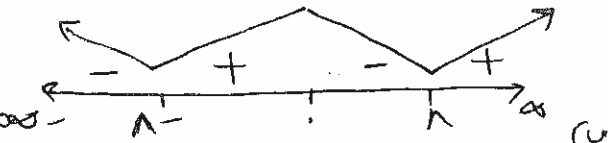
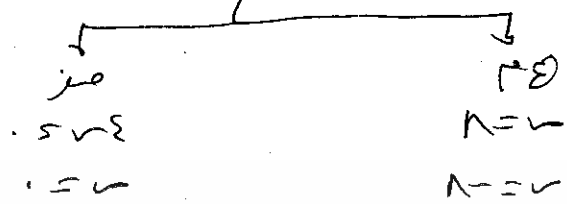


Interval analysis for f(x) = x^2 - 4x + 3: (P) intervals (-infinity, 1) and (3, infinity) are positive, (1, 3) is negative.

Interval analysis for f(x) = x^2 - 4x + 3: (-infinity, 1) and (3, infinity) are positive, (1, 3) is negative.

$$(6) \quad \frac{x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{1}{3}} + 2} = 1 \quad (A)$$

$$\frac{x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{1}{3}} + 2} = 1$$



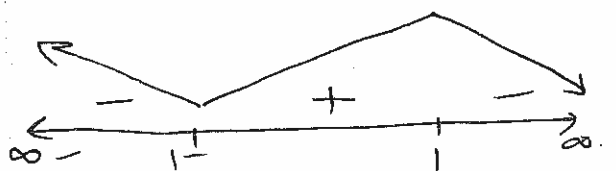
(A) $x \in (-2, 2)$ هي الحل
والمطلوب

(B) $x = 16$ هي الحل

(P) $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
مناطق مقبولة
(A) $x \in (-2, 2)$ هي الحل

$$(7) \quad \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} = 1 \quad (A)$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} = 1$$

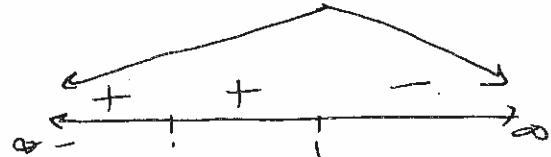
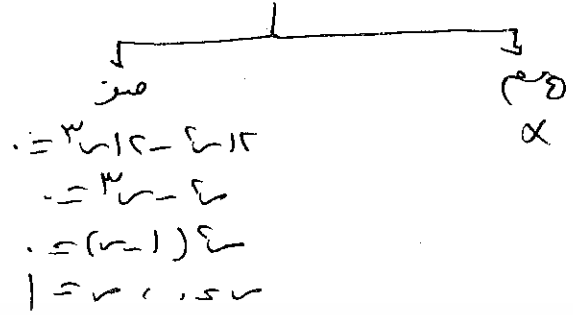


(A) $x \in (-1, 1)$ هي الحل
والمطلوب

(B) $x = 1$ هي الحل

(C) $x = 1$ هي الحل

$$(8) \quad \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} = 1 \quad (A)$$

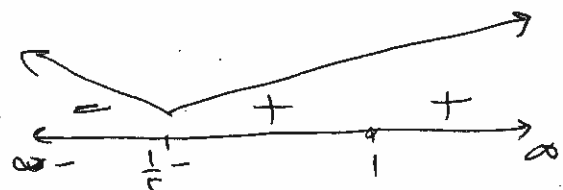
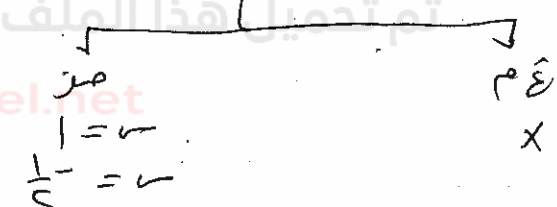


(A) $x \in (-1, 1)$ هي الحل
والمطلوب

(B) $x = 1$ هي الحل

$$(9) \quad \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} = 1 \quad (A)$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} = 1$$

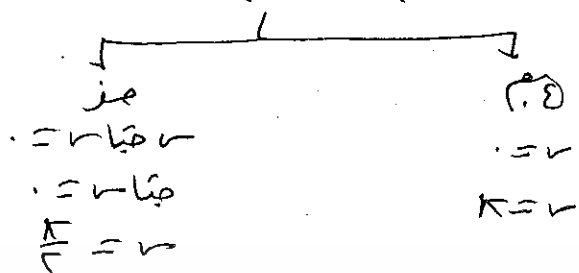


(A) $x \in (-\frac{1}{2}, 1)$ هي الحل
والمطلوب

$$(B) \quad \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} = 1$$

(C) $x = 1$ هي الحل
والمطلوب

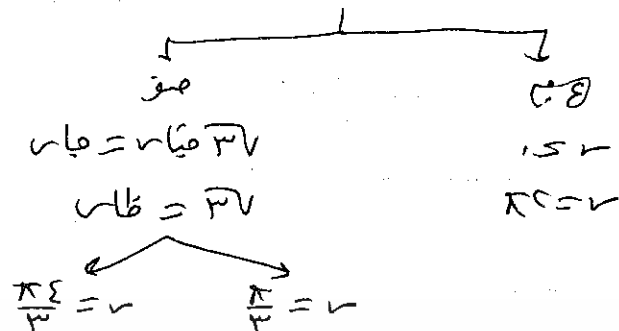
(٩) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-5} = 10$ قياس
 $\sqrt{x-5} = 10 - \sqrt{x+3}$



(P) π متزايد $[\frac{\pi}{2}, \pi]$
 متناقص $[\pi, \frac{\pi}{4}]$

(B) $\frac{\pi}{2} = (\frac{\pi}{2})$ عظم عليه ومطلق
 $1 = 1$
 $\pi = (\pi)$ صغرى مطلق

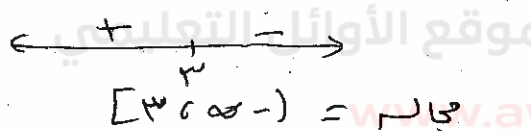
(٧) $\sqrt{3x-5} = 3x$ قياس



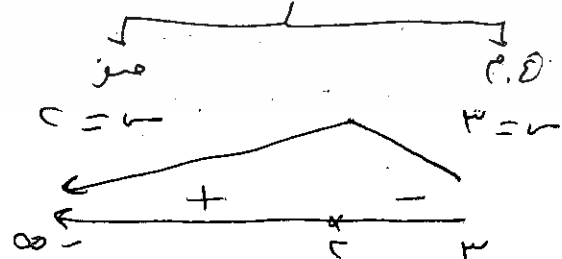
(P) π متزايد $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$, $[\pi, \infty)$
 متناقص $[\frac{\pi}{4}, \pi]$

(B) $1 = 1$
 $\frac{\pi}{3} = (\frac{\pi}{3})$ عظم عليه ومطلق
 $\pi = (\pi)$ صغرى عليه ومطلق

(١٠) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-1} = 10$



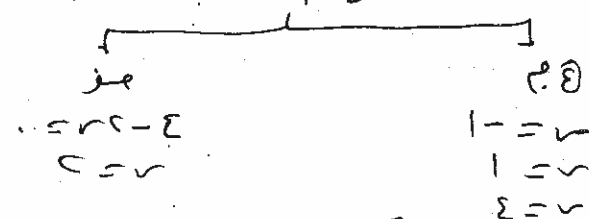
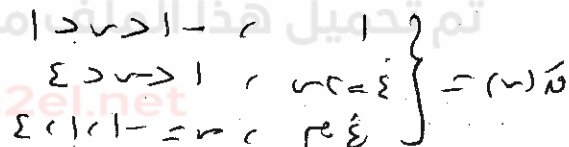
$\sqrt{x-1} = 10 - \sqrt{x-3}$
 $\frac{1}{\sqrt{x-3}} \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-3} = 10$
 $\frac{1}{\sqrt{x-3}} - \sqrt{x-3} = 10$
 $\frac{1-x+3}{\sqrt{x-3}} = 10$



(P) π متزايد $(-\infty, 1)$
 متناقص $[3, \infty)$

(B) $1 = 1$ عظم عليه ومطلق

(٨) $\sqrt{x-1} = x$



(P) π متزايد $[0, 1)$
 متناقص $[1, \infty)$

(B) $1 = 1$ عظم عليه ومطلق
 $0 = 0$
 $1 = 1$
 $0 = 0$ صغرى مطلق

3) $u + v - p + s = (s) \rightarrow$

$= u + p - s \leftarrow = (1-s)$

1) $--- s = u - p$

$= u + p + s \leftarrow = (1+s)$

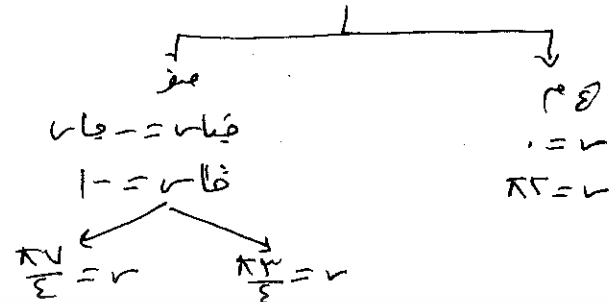
2) $--- 1-s = u + p$

$s = u - p$

$\frac{p}{7} = p \leftarrow q = p$

$7 = u$

1) $(s) = u + v$



$\frac{u}{v} = \frac{s}{v} = (\frac{u}{s})$

$\frac{u}{v} > \frac{s}{v} = \frac{1}{v} - \frac{1}{v} = (\frac{u}{s})$

$\frac{u}{v} < \frac{s}{v} = \frac{1}{v} + \frac{1}{v} = (\frac{u}{s})$

4) $1 + u + v + s - p = (s) \rightarrow$

$= 1 + u + p \leftarrow = (1+s)$

1) $--- 1 = u + p$

$= 1 + u + p \leftarrow = (1+s)$

2) $--- 1 = u + p$

$s = u - p$

$1 = u + p$

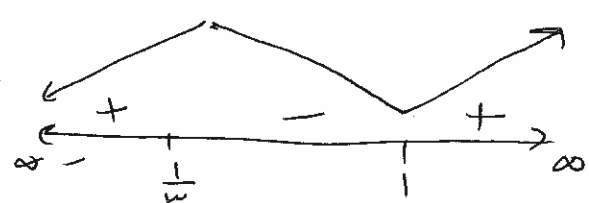
$s = u \leftarrow 1 = p$

$u + v - s = (s) \rightarrow$

$= 1 + v - s = (s) \rightarrow$

$= (1 - s)(1 - s)$

$1 = s \leftarrow \frac{1}{s} = s$

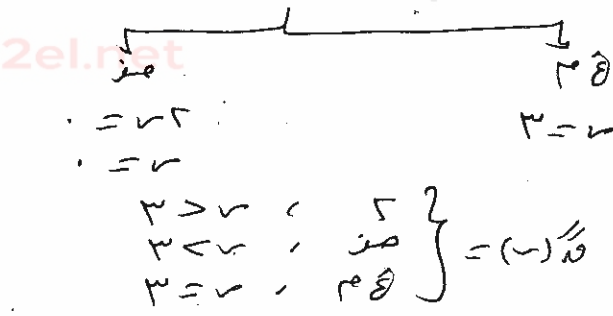


$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = (\frac{1}{3})$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

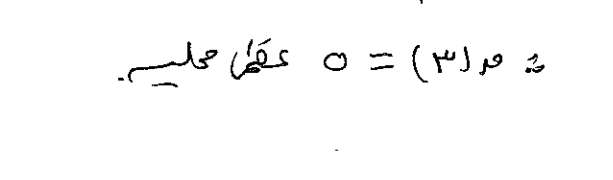
7) $(s) = u$ عند $s = v$

$\left. \begin{matrix} s > v \\ s < v \\ s = v \end{matrix} \right\} = (s)$



$\frac{u}{v} < \frac{s}{v} = (s)$

اختيار $s = v$ باستخدام $s = v$

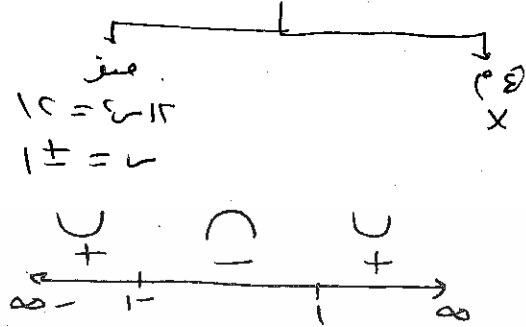


$0 = (s)$

تمرين 4

(1) $x^3 - 12x^2 = 0$

$x^2(x - 12) = 0$



حل (1) $x^2(x - 12) = 0$
للعدد $x = 0$
نقطه الانقطاع: $(0, 0)$ و $(12, 0)$

(2) $x^2 + 5x + 6 = 0$

$x^2 + 5x + 6 = 0$

(1) $x^2 + 5x + 6 = 0$
بالتعويض $x = -1$
بالتعويض $x = -6$

(2) $x^2 + 5x + 6 = 0$
 $x = -1$
 $x = -6$

$x = -1$
 $x = -6$

بالتعويض $x = -1$
 $x = -6$

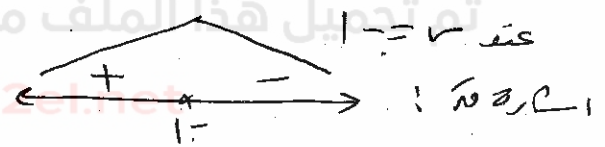
$x = -1$
 $x = -6$

$x = -1$
 $x = -6$

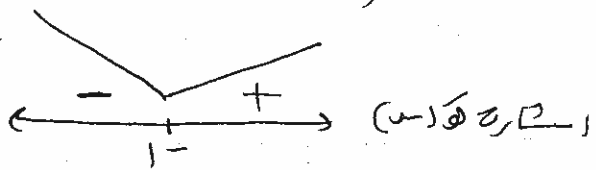
$x = -1$
 $x = -6$

$x = -1$
 $x = -6$

تمرين 6



$x^2 + 5x + 6 = 0$
 $x = -1$
 $x = -6$



بالتعويض $x = -1$
 $x = -6$

$x = -1$
 $x = -6$

$$\frac{c-1}{c(1+c)} = (1-c) \quad (3)$$

$$\frac{(1+c)^2 - (1+c) + 1 - c}{(1+c)^2} = (1-c)$$

$$\frac{c^2 + 2c + 1 - 1 - c + 1 - c}{c^2 + 2c + 1} = (1-c)$$

$$\frac{c^2 - c + 1 - c}{c^2 + 2c + 1} = (1-c)$$



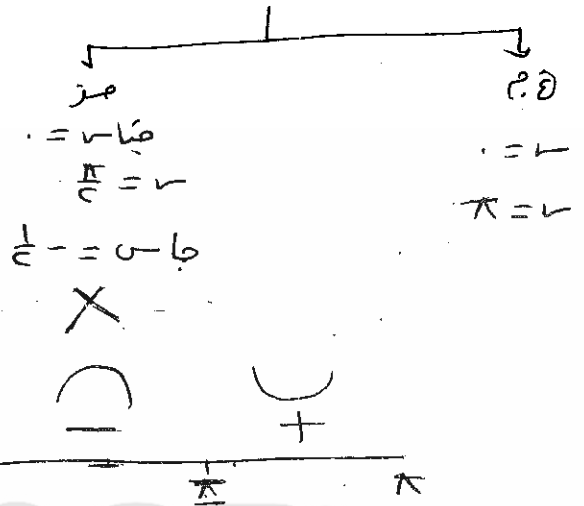
درجات مقرر لا يسفل $(-\infty, \frac{1}{c}]$ ، $(\frac{1}{c}, 1)$ لا يسفل
 نقطة الانقطاع $(\frac{1}{c}, \frac{1}{c})$
 نقطة الانقطاع $(\frac{1}{c}, \frac{1}{c})$

$$c^2 - 2c + 1 = (1-c)^2 \quad (4)$$

$$c^2 - 2c + 1 = 1 - 2c + c^2$$

$$c^2 - 2c + 1 - 1 + 2c - c^2 = 0$$

$$0 = 0$$

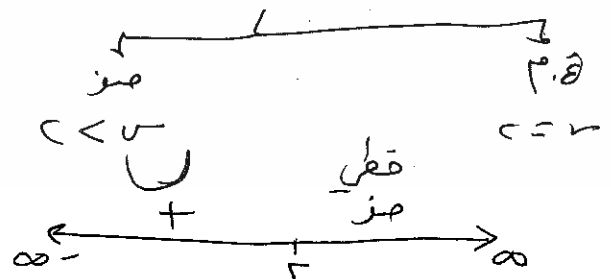


درجات مقرر لا يسفل $(-\infty, \frac{1}{c}]$ ، $(\frac{1}{c}, 1)$ لا يسفل
 نقطة الانقطاع $(\frac{1}{c}, \frac{1}{c})$

$$(4) \text{ درجات مقرر عند } c = 1$$

$$\left. \begin{aligned} c > 1, \quad c < 1 \\ c < 1, \quad c > 1 \\ c = 1, \quad c = 1 \end{aligned} \right\} = (1-c)^2$$

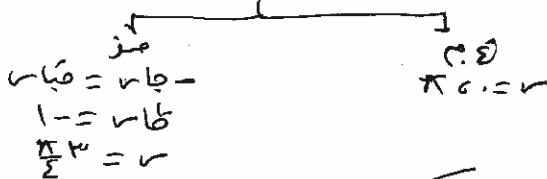
$$\left. \begin{aligned} c > 1, \quad c < 1 \\ c < 1, \quad c > 1 \\ c = 1, \quad c = 1 \end{aligned} \right\} = (1-c)^2$$



درجات مقرر لا يسفل $(-\infty, \frac{1}{c}]$ ، $(\frac{1}{c}, 1)$ لا يسفل
 نقطة الانقطاع $(\frac{1}{c}, \frac{1}{c})$

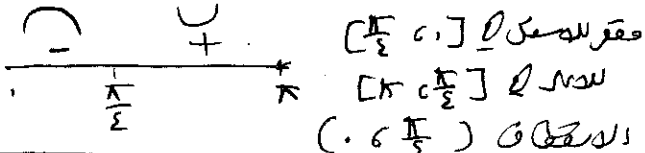
لا توجد نقطة انقطاع

$$\frac{c-1}{c(1+c)} = (1-c) \quad (5)$$



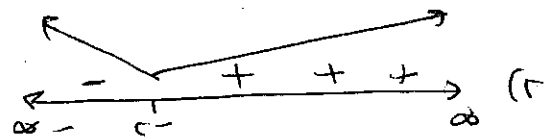
درجات مقرر لا يسفل $(-\infty, \frac{1}{c}]$ ، $(\frac{1}{c}, 1)$ لا يسفل
 نقطة الانقطاع $(\frac{1}{c}, \frac{1}{c})$

$$\frac{c-1}{c(1+c)} = (1-c)$$



٢

١) قيم $\{1, 2\}$ =



عدد (١) متناقص في $[-\infty, -1)$

متزايد في $(-\infty, 2]$

٣) عدد (٢) صوري حلي

٤) عدد (١) معقول لانه في

$(-\infty, 1]$ ، $(1, \infty)$

معقول لانه في $[1, \infty)$



الانقطاع (١) ، $(1, 2)$ ، $(2, \infty)$

٥) $\frac{1}{37} = \frac{1}{37}$ ، $\frac{1}{37} = \frac{1}{37}$

$$\frac{1}{37} =$$

٣

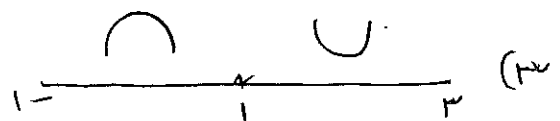


١) عدد (١) متزايد في $[-1, 1]$ ، $[1, 2]$

متناقص في $[2, \infty)$

٢) عدد (١) عكسي حلي

عدد (٢) صوري حلي

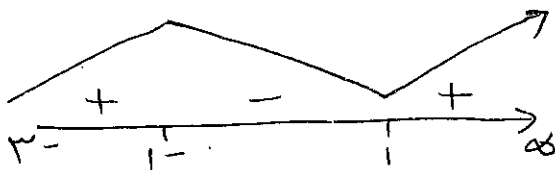


عدد (١) معقول لانه في $[-1, 1]$

عدد (٢) في $[1, 2]$

الانقطاع (١) ، $(1, 2)$ ، $(2, \infty)$

٤



١) عدد (١) متزايد في $[-1, -3]$ ، $[1, \infty)$

متناقص في $[-1, 1]$

٢) عدد (٣) = ١ -

عدد (١) = ٢ عكسي حلي

عدد (١) صوري حلي



عدد (١) معقول لانه في $[-1, 1]$

عدد (٢) في $(-\infty, 1]$

الانقطاع : $(1, 2)$

٤) $\leftarrow P$ \leftarrow \leftarrow

٥) $\leftarrow B$ \leftarrow \leftarrow

حل تمرين 7

(1) المجموع أقل ما يمكن

$$3 = s + 2v$$

$$3 = 2v + \frac{288}{v}$$

$$3 = 2 + \frac{288 - 2v}{v}$$

$$288 = 2v^2$$

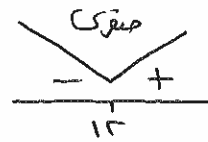
$$144 = v^2$$

$$12 = v, \quad 12 = 2v$$

$$3 = s \leftarrow \frac{288}{12} = s$$

$$288 = s \times v$$

$$\frac{288}{v} = s$$



(2) مساحة المستطيل الأكبر ما يمكن

$$3 = s(2 - v)$$

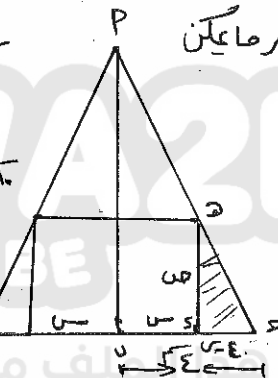
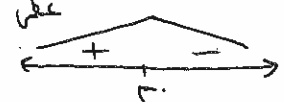
$$3 = (s - \frac{3}{2} - 1)v$$

$$3 = s - 5 - v - 2 = 0$$

$$3 = s - 1 - 2 = 0$$

$$0 = s - 1 - 2$$

$$2 = s$$



مساوية P و D, P و D

$$\frac{3}{5} \times s = \frac{3}{5 - 2}$$

$$s - \frac{3}{2} - 1 = 0$$

$$3 = \text{المساحة} = (5 - 1) \times 2 = 8$$

(3) المساحة الكلية أقل ما يمكن

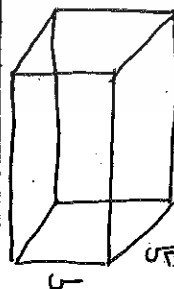
$$3 = \text{مساحة الجوانب} + \text{المساحة الجائبة}$$

$$3 = s - 4 + 2sv + sv - 4 + s - 4$$

$$3 = s - 4 + 3s - 4 = 4s - 8$$

$$3 = \frac{37}{s} \times 7 + s - 4 = 4s - 8$$

$$3 = \frac{217}{s} + s - 4$$



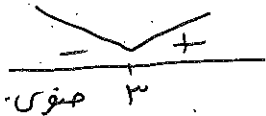
$$2sv \times s = 37$$

$$2sv = 37$$

$$\frac{37}{2} = sv$$

$$3 = \frac{217}{s} - s - 4 = 3$$

$$3v = 37 - s - 4 \rightarrow 3v = 33 - s$$



$$3 = s$$

أبعاد المستطوح:

$$3 = \frac{37}{9} = sv, \quad 3 - 6, \quad 3 - 3$$

(4) مجموع البعدين أقل ما يمكنه

$$3 = s + v$$

$$\frac{s - 4}{1 - v} + s = 3$$

$$\frac{s - 4 + s - 4}{1 - v} = 3$$

$$\frac{s - 3 + 4}{1 - v} = 3$$

$$\frac{4}{1 - v} = \frac{sv}{s}$$

$$\frac{s - 4}{1 - v} = sv$$

$$\frac{(s - 3 + 4) - (1 - v)(3 + s - 4)}{1 - v} = 3$$

$$\frac{s - 3 - 3 - sv + s - 4 + s - 4}{1 - v} = 3$$

$$3 = \frac{3 - sv - 4 - 4}{1 - v} = 3$$

$$3 = 3 - sv - 4 - 4$$

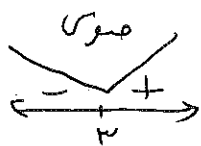
$$3 = (1 + v)(3 - s)$$

$$1 = v, \quad 3 = s$$

$$7 = \frac{3 \times 4}{1 - 3} = sv$$

من أقل مجموع

$$9 = 7 + 3 = 3 =$$





تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net

(5) حجم الاسطوانة اكبر ما يمكن
 $\pi r^2 h = 2$

$= \pi r^2 h$

$\pi r^2 \left(\frac{2}{\pi r^2} \right) = 2$

$\pi \left(\frac{2}{\pi} \right) = 2$

$\pi (2 - \frac{2}{\pi}) = 2$

$2\pi - 2 = 2$

$2\pi = 4$

معلميات
 + اسم كائنة

$\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r$

$2\pi r + 2\pi r = 4\pi r$

$2 - \frac{2}{\pi} = 4$



الأكبر حجم $\pi \left(\frac{2}{\pi} \right) \times 2 = 2$

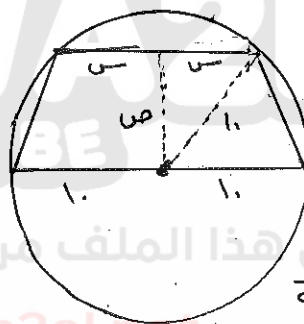
$\pi \times 2 = 2$

(6) مساحة شبه المنحرف
 أكبر ما يمكن

$\frac{1}{2} (a+b)h = 3$

$h = \frac{6}{a+b}$

$\frac{1}{2} (a+b) \left(\frac{6}{a+b} \right) = 3$



$1 = a + b$

$h = \frac{6}{1+b}$

$\frac{a-b}{2} \times (a+b) + \sqrt{1-b^2} = 3$

$= \frac{a^2 - b^2}{2} + \sqrt{1-b^2} = 3$

$\frac{a^2 - b^2}{2} = \sqrt{1-b^2}$

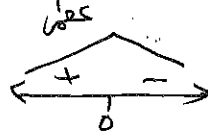
$a^2 - b^2 = 2\sqrt{1-b^2}$

$a^2 = 1 - b^2 + 2\sqrt{1-b^2}$

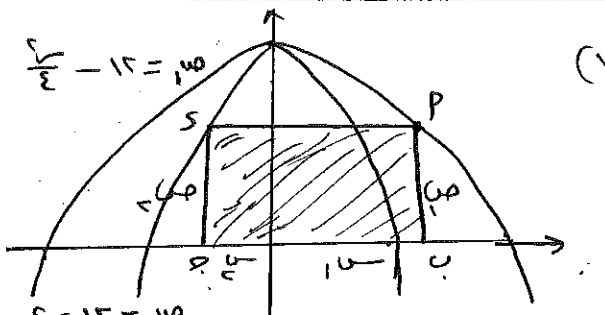
$0 = 1 - b^2 + 2\sqrt{1-b^2}$

$0 = (1-b)(1+b) + 2\sqrt{1-b^2}$

$0 = 1 - b, 1 = b$



طول القاعدة الاخرى = $1 - b = 0$



نقطة P = (a, b)

S = (a, b)

مساحة المستطيل أكبر ما يمكن

$ab \times (a + b) = 3$

$ab = \frac{3}{a+b}$
 $ab \times (a + \frac{3}{a+b} + b) = 3$

$(a - \frac{3}{a+b})b = 3$

$(a^2 - \frac{3a}{a+b})b = 3$

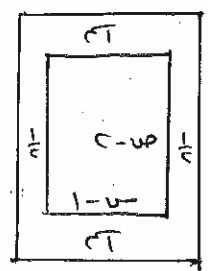
$(a^2 - \frac{3a}{1+b})b = 3$

$a^2 - \frac{3a}{1+b} = \frac{3}{b}$

الأكبر مساحة المستطيل
 $3 = \frac{3}{1+b}$

$3(1+b) = 3$

$3 + 3b = 3$



(7) المساحة المتبقية أكبر ما يمكن

$(a-b)^2 = 3$

$(a - \frac{3}{a-b})^2 = 3$

$a^2 - \frac{6a}{a-b} + \frac{9}{(a-b)^2} = 3$

$a^2 - \frac{6a}{a-b} = 3 - \frac{9}{(a-b)^2}$

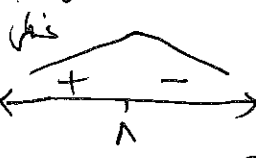
$a^2 - \frac{6a}{a-b} = \frac{3(a-b)^2 - 9}{(a-b)^2}$

$a^2 - \frac{6a}{a-b} = \frac{3a^2 - 6ab + 3b^2 - 9}{(a-b)^2}$

$a^2 - \frac{6a}{a-b} = \frac{3a^2 - 6ab + 3b^2 - 9}{a^2 - 2ab + b^2}$

$a^2 - \frac{6a}{a-b} = \frac{3a^2 - 6ab + 3b^2 - 9}{a^2 - 2ab + b^2}$

$a^2 - \frac{6a}{a-b} = \frac{3a^2 - 6ab + 3b^2 - 9}{a^2 - 2ab + b^2}$

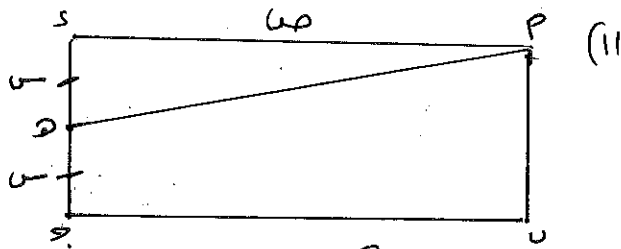


$\sqrt{16} = \frac{16}{a} = 4$



تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net



حلول 1 و أقل ما يمكن

$$\sqrt{ص^2 + س^2} = ل$$

$$\sqrt{\frac{س^2}{س} + س^2} = ل$$

$$\frac{س \times س^2}{س} - س^2 = ل$$

$$\frac{س^3}{س} = ل$$

لكن $س^2 = 17$

$$\frac{17}{س} = س$$

$$\frac{س^2}{س} = س$$

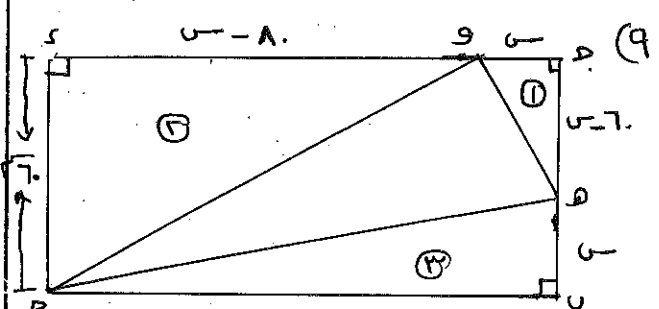
$$\frac{س^2}{س} = س \rightarrow س = \frac{س^2}{س} = س$$

ص = 17 موز

$$\frac{س^2}{س} = س \rightarrow س = 17$$

طول المستطيل = 17

عرضه = $\frac{17}{س} = س$



مساحة المثلث P و أقل ما يمكن

مساحة المستطيل - مساحة 3 مثلثات =

$$(س-8) \cdot س \cdot \frac{1}{2} + (س-6) \cdot س \cdot \frac{1}{2} - (8 \times 6) = 3$$

$$(س-8) \cdot \frac{س}{2} + (س-6) \cdot \frac{س}{2} - 48 = 3$$

$$س^2 - 4س - 3س + 18س - 18س + 9س - 96 = 3$$

$$س^2 - 2س + 9س - 96 = 3$$

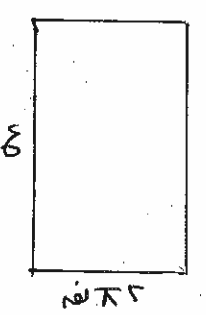
$$س^2 + 7س - 99 = 3$$

$$س^2 + 7س - 102 = 0$$

ص = 12

مساحة المستطيل = $12 \times 17 = 204$

مساحة المثلثات الأخرى يمكن



مساحة المستطيل

مساحة المثلثات الأخرى

$$س^2 = 2$$

$$س^2 = 2$$

$$س^2 = 2$$

$$س^2 = 2$$

$$س^2 = 2$$

مساحة المثلثات الأخرى

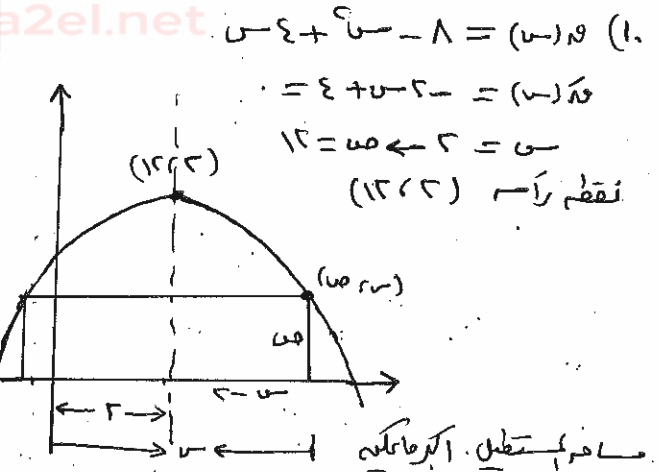
$$\frac{س}{س} = س$$

$$\frac{س}{س} = س$$

$$\frac{س}{س} = س$$

$$\frac{س}{س} = س$$

$$\frac{س}{س} = س$$



مساحة المستطيل الأكبر ما يمكن

$$(س-8 + س-8) \cdot (س-2) = س(س-8) \cdot 2 = 3$$

$$س^2 - 16س + 128 - 16س + 64 = 3$$

$$س^2 - 32س + 192 = 3$$

$$س^2 - 32س + 189 = 0$$

$$س = 12$$

$$س = 3$$

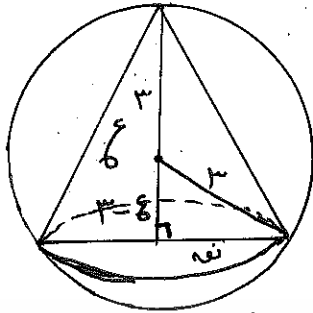
مساحة المستطيل الأكبر ما يمكن

$$32 = 32 - (8) \cdot 12 + (8) \cdot 3 = 3$$



تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net



(10) حجم مخروط أكبر ما يمكن

$$\frac{\pi}{3} = 2 \text{ نقف } \frac{\pi}{3} = 2$$

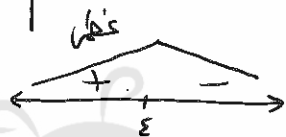
$$(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) \frac{\pi}{3} = 2$$

$$(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) \frac{\pi}{3} =$$

$$9 = (r-h)^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad (8-h)^2 + h^2 = 9$$

$$9 = 9 + 8h - 2h^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 8h - h^2 - 9$$

$$h^2 - 8h + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 8 \quad \Rightarrow \quad r = 5$$



$$\frac{\pi r^2}{3} = (17 - 24) \frac{\pi}{3} = 2 \quad \Rightarrow \quad r = 5$$

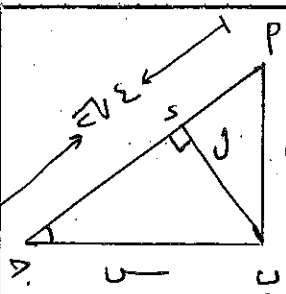
(13) طول الجهد الأكبر ما يمكن

مساوية ΔPAB و ΔPBC متساويان

$$\frac{l}{s} = \frac{u}{s}$$

$$l = \frac{u \cdot s}{\sqrt{u^2 - s^2}}$$

$$\frac{u \cdot s}{\sqrt{u^2 - s^2}} = l$$



لكن $u^2 = s^2 + l^2$
 $\sqrt{u^2 - s^2} = l$

$$\left(\frac{u-s}{\sqrt{u^2 - s^2}} \times u + \frac{u+s}{\sqrt{u^2 - s^2}} \times 1 \right) \frac{1}{\sqrt{u^2 - s^2}} = l$$

$$= \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 - s^2}} - \frac{u-s}{\sqrt{u^2 - s^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{u^2 - s^2}} = l$$

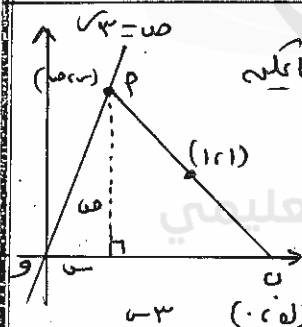
$$u = u - s \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{\sqrt{u^2 - s^2}} = \frac{u-s}{\sqrt{u^2 - s^2}}$$



$$16 = u \quad \Rightarrow \quad u - s = u - 2$$

$$\frac{u}{x} = \frac{u-s}{x} = u$$

$$s = 2 \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$



(17) مساحة ΔPAB و أقل ما يمكن

نقرب ب = (1,1)

$$\frac{1}{2} l u = 1 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{2}{u}$$

$$\frac{1}{2} l u = 1 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{2}{u}$$

$$\frac{1}{2} l u = 1 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{2}{u}$$

$$u \times \frac{u-s}{1-u^2} \times \frac{u}{2} = 1$$

$$\frac{u^2 - s u}{1-u^2} = 2$$

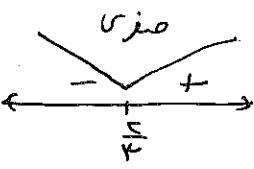
$$\frac{u^2 - s u - (1-u^2) \cdot 2}{1-u^2} = 1$$

$$\frac{u^2 - s u - 2 + 2u^2}{1-u^2} = 1$$

$$= \frac{3u^2 - s u - 2}{1-u^2} = 1$$

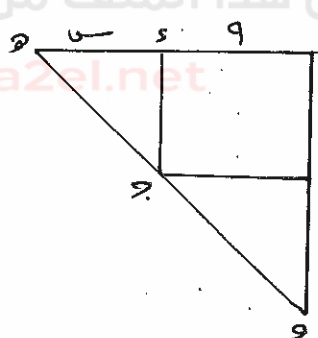
$$= (3-u^2) u - 2$$

$$\frac{u}{3} = u \quad \Rightarrow \quad u = 3$$



$$\frac{u}{3} = \frac{u}{3} \times 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad u = 3$$

(14)



مساحة ΔPAB و أقل ما يمكن

$$\frac{(9+u)(9+s)}{2} = 1$$

$$\frac{(9+u) \times (9+s)}{2} = 1$$

$$\frac{(9+u) \times 2}{u} = 1$$

$$\frac{(9+u) \times 2}{u} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2(9+u) = u$$

$$= \frac{2(9+u)(-u-9)}{u} = 1$$

$$= (9-u)(9+u) = 9-u^2$$

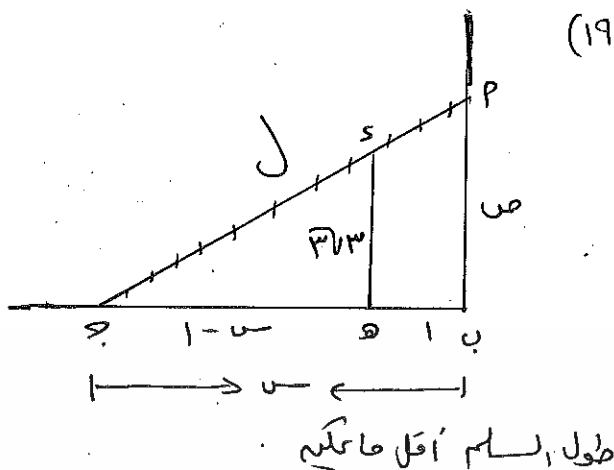
$$9 = u \quad \Rightarrow \quad u = 9$$

$$s = \frac{18 \times 18 \times 2}{9} = \frac{72}{9} = 8$$



تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net



(16)

$$u^2 + 3^2 = 7^2$$

$$u^2 + 9 = 49$$

$$u^2 = 40$$

$$u = \sqrt{40}$$

$$u^2 + 3^2 = 7^2$$

$$u^2 + 9 = 49$$

$$u^2 = 40$$

$$u = \sqrt{40}$$

$$u^2 + 3^2 = 7^2$$

$$u^2 + 9 = 49$$

$$u^2 = 40$$

$$u = \sqrt{40}$$

$$u^2 + 3^2 = 7^2$$

$$u^2 + 9 = 49$$

$$u^2 = 40$$

$$u = \sqrt{40}$$

$$u^2 + 3^2 = 7^2$$

$$u^2 + 9 = 49$$

$$u^2 = 40$$

$$u = \sqrt{40}$$

نكته ل = 7

$$u^2 + 3^2 = 7^2$$

$$u^2 + 9 = 49$$

$$u^2 = 40$$

$$u = \sqrt{40}$$

$$u^2 + 3^2 = 7^2$$

$$u^2 + 9 = 49$$

$$u^2 = 40$$

$$u = \sqrt{40}$$

$$u^2 + 3^2 = 7^2$$

$$u^2 + 9 = 49$$

$$u^2 = 40$$

$$u = \sqrt{40}$$

$$u^2 + 3^2 = 7^2$$

$$u^2 + 9 = 49$$

$$u^2 = 40$$

$$u = \sqrt{40}$$

$$u^2 + 3^2 = 7^2$$

$$u^2 + 9 = 49$$

$$u^2 = 40$$

$$u = \sqrt{40}$$

$$u^2 + 3^2 = 7^2$$

$$u^2 + 9 = 49$$

$$u^2 = 40$$

$$u = \sqrt{40}$$

$$u^2 + 3^2 = 7^2$$

$$u^2 + 9 = 49$$

$$u^2 = 40$$

$$u = \sqrt{40}$$

(17)
 مساحه المثلث الاكبر حادها

$$3 \times u = 4$$

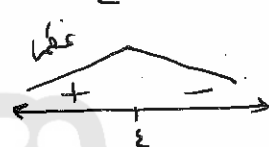
$$(u-1) \frac{3\sqrt{3}}{2} \times u = 4$$

$$(u-1) \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{u}$$

$$(u-1) \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{u}$$

$$u-1 = 8$$

$$u = 9$$



$$u = 9 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 4$$

(18)



مساحه مقطوعه كبر حادها

$$3 = 4 + 3 + 3$$

$$3 = 4 + 3 + 3$$

التكلف الكلي =

تكلف اجزائه المستقيم

+ تكلف اجزائه المنحني

$$3 \times 3 + 3 \times 3 = 4$$

$$3 \times 3 + 3 \times 3 = 4$$

$$3 \times 3 - 0 = 4$$

$$3 \times 3 - 1 = 4$$

$$\frac{30}{3} = 4$$

$$\frac{30}{3} \times 3 - \frac{30}{3} \times 1 = 4$$

$$\frac{30}{3} = 4$$

$$\frac{30}{3} = 4$$

$$\frac{30}{3} = 4$$

$$\frac{30}{3} = 4$$



تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net

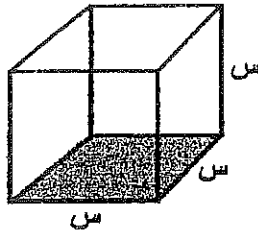


تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net

ثانياً : المجسمات :

(١) المكعب :

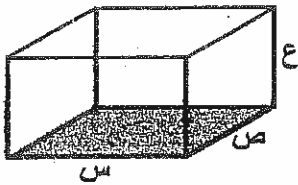


$$\text{مساحته الجانبية} = 4 \times \text{مساحة الوجه الواحد} = 4س^2$$

$$\text{مساحته الكلية} = 6 \times \text{مساحة الوجه الواحد} = 6س^2$$

$$\text{حجمه} = (\text{طول حرفه})^3 = س^3$$

(٢) متوازي المستطيلات :

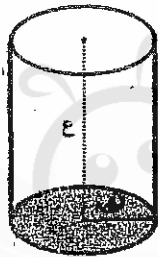


$$\text{مساحته الجانبية} = \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع} = 2(س + ص) \times ع$$

$$\text{مساحته الكلية} = \text{المساحة الجانبية} + \text{مساحة القاعدتين}$$

$$\text{حجمه} = \text{الطول} \times \text{العرض} \times \text{الارتفاع} = س \times ص \times ع$$

(٣) الاسطوانة الدائرية القائمة :



$$\text{مساحتها الجانبية} = \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع} = 2\pi ر \times ع$$

$$\text{مساحتها الكلية} = \text{المساحة الجانبية} + \text{مساحة القاعدتين}$$

$$= 2\pi ر \times ع + 2\pi ر^2$$

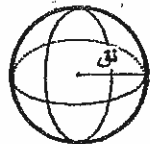
$$\text{حجمها} = \pi ر^2 \times ع$$

(٤) المخروط الدائري القائم :



$$\text{حجمه} = \frac{1}{3} \pi ر^2 \times ع$$

(٥) الكرة :



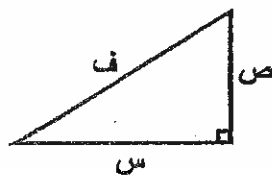
$$\text{مساحتها السطحية} = 4\pi ر^2$$

$$\text{حجمها} = \frac{4}{3} \pi ر^3$$

ثالثاً : نظريات هندسية :

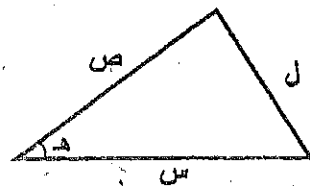
(١) نظرية فيثاغورس : في المثلث القائم الزاوية يكون :

$$ف^2 = س^2 + ص^2$$



(٢) قانون جيب التمام : في أي مثلث يكون :

$$ل^2 = س^2 + ص^2 - 2سص \cos \alpha$$



$$(٣) \text{المسافة بين نقطتين} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

قوانين هامة

أولا : الأشكال الهندسية :

(١) المربع :



$$\text{محيط المربع} = 4 \times \text{طول ضلعه} = 4س$$

$$\text{مساحة المربع} = (\text{طول ضلعه})^2 = س^2$$

(٢) المستطيل :



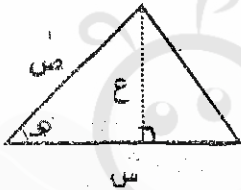
$$\text{محيط المستطيل} = 2 \times (\text{الطول} + \text{العرض}) = 2(س + ص)$$

$$\text{مساحة المستطيل} = \text{الطول} \times \text{العرض} = س \times ص$$

(٣) المثلث :

محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع} = \frac{1}{2} س ع$$



$$\text{أو} = \frac{1}{2} \times \text{حاصل ضرب طولي ضلعين متجاورين} \times \text{جا ه}$$

$$= \frac{1}{2} س ص \text{ جا ه}$$

حيث ه : قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين المتجاورين



$$* \text{محيط المثلث المتساوي الأضلاع} = 3 \times \text{طول ضلعه} = 3س$$

$$\text{مساحة المثلث المتساوي الأضلاع} = \frac{\sqrt{3}}{4} س^2$$

(٤) الدائرة :

$$\text{محيط الدائرة} = 2\pi \text{ نق}$$

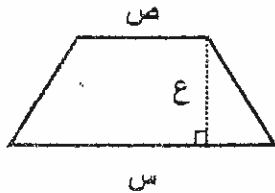
$$\text{مساحة الدائرة} = \pi \text{ نق}^2$$



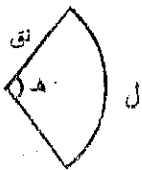
(٥) شبه المنحرف :

$$\text{مساحته} = \frac{1}{2} \times \text{مجموع طولي القاعدتين} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \frac{1}{2} ع (س + ص)$$



(٦) القطاع الدائري :

حيث طول القوس ل = نق × ه
ه بالتقدير الدائري

$$\text{مساحة القطاع} = \frac{1}{2} نق \times ل$$

$$= \frac{1}{2} نق^2 \times ه$$