

٢ مفهوم النهاية
٢ المفهوم الهندسي
١٠ المفهوم الجبري
١١ نظريات النهايات
١٧ نهايات اقترانات كسرية
١٧ التحليل الى العوامل
٢٤ توحيد المقامات في حالة الكسور
٢٨ الضرب بالعامل المرافق
٣٨ حساب النهاية للاقترانات الاسية
٤١ ايجاد قيمة الثابت
٤٣ الجذور الزوجية
٤٦ الاقتران المعرف على عدة قواعد
٥٢ اقتران القيمة المطلقة
٦١ اقتران اكبر عدد صحيح
٧٠ ايجاد قيمة الثابت
٧٢ النهايات المثلثية
٩٣ الاتصال
٩٣ الاتصال عند نقطة
١٠٧ نظريات الاتصال
١١٤ الاتصال على فترة
١٣٩ ملحوظات متطابقات مثلثية
١٤٠ مسرد المصطلحات

مفهوم النهاية

الدرس الأول

ثانيا: المفهوم الجبري

أولا: المفهوم الهندسي

أولا: المفهوم الهندسي



الرسم معطى : لايجاد النهاية من خلال الشكل المعطى نتبع الخطوات التالية:

خطوات الحل:

(١) إقامة عمود عند س المعطاة.

(٢) الاقتراب من العمود يمينا.

(٣) الاقتراب من العمود يسارا.

(٤) اذا كانت:

$$\lim_{s \rightarrow a^+} f(s) = \lim_{s \rightarrow a^-} f(s) \text{ موجودة}$$

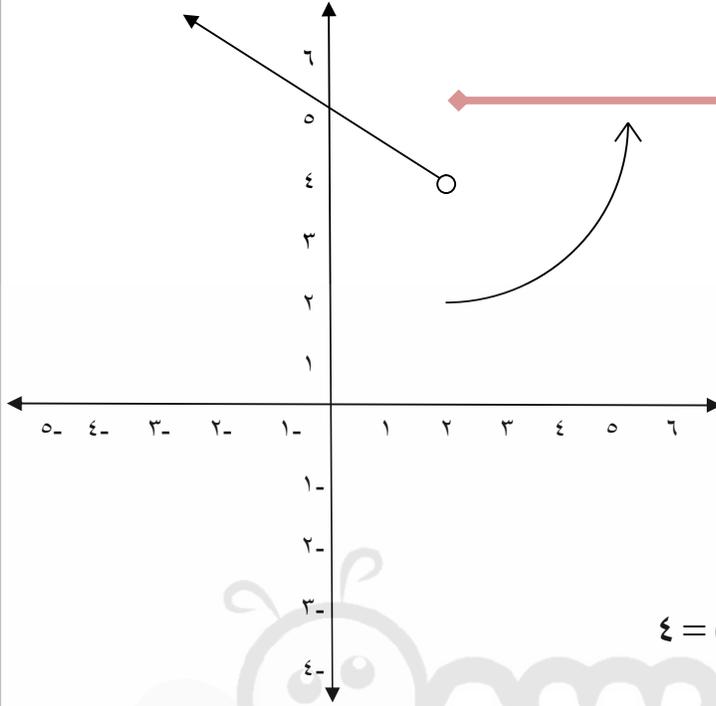
(٥) اذا كانت:

$$\lim_{s \rightarrow a^+} f(s) \neq \lim_{s \rightarrow a^-} f(s) \text{ غير موجودة}$$

∴ مفهوم النهاية على مجموعة الاعداد الحقيقية هو **لاقتراب** يمينا ويسارا من نفس القيمة.

لايجاد نهاية اقتران عندما تقترب قيم س من عدد حقيقي مثل أ فإنه من الضروري أن يكون الاقتران معرفا على فترة مفتوحة قصيرة الطول حول العدد أ وليس من الضروري ان يكون معرفا عند العدد أ.

الامثلة

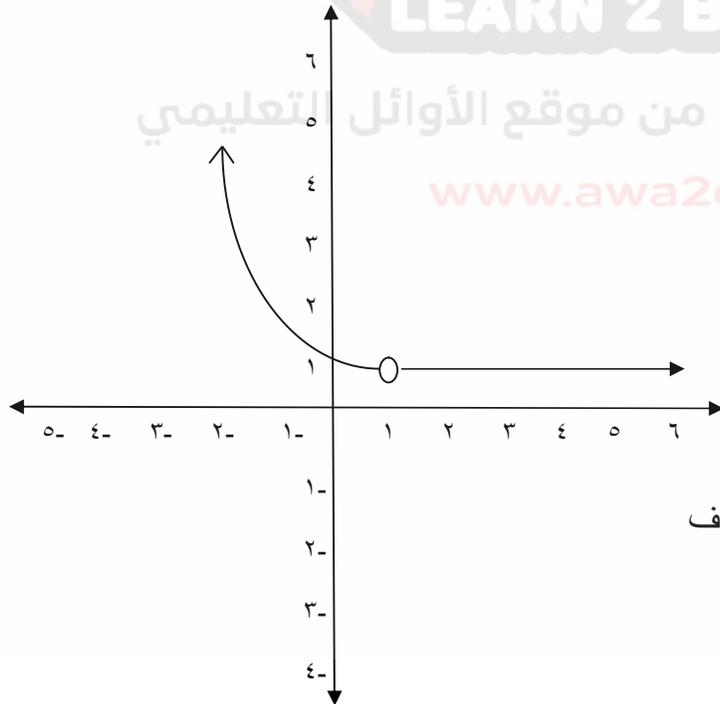


(١) من خلال الشكل التالي جد مايلي:

(أ) نهان (س) $+2 \leftarrow س$ (ب) نهان (س) $-2 \leftarrow س$ (ج) نهان (س) $2 \leftarrow س$

(د) ق (٢)

الحل:

نهان (س) $2 = 2 \leftarrow س$ ، نهان (س) $4 = -2 \leftarrow س$ نهان (س) غير موجودة ، ق (٢) $2 = 2 \leftarrow س$ 

(٢) من خلال الشكل التالي جد مايلي:

(أ) نهان (س) $+1 \leftarrow س$ (ب) نهان (س) $-1 \leftarrow س$ (ج) نهان (س) $1 \leftarrow س$

(د) ق (١)

الحل:

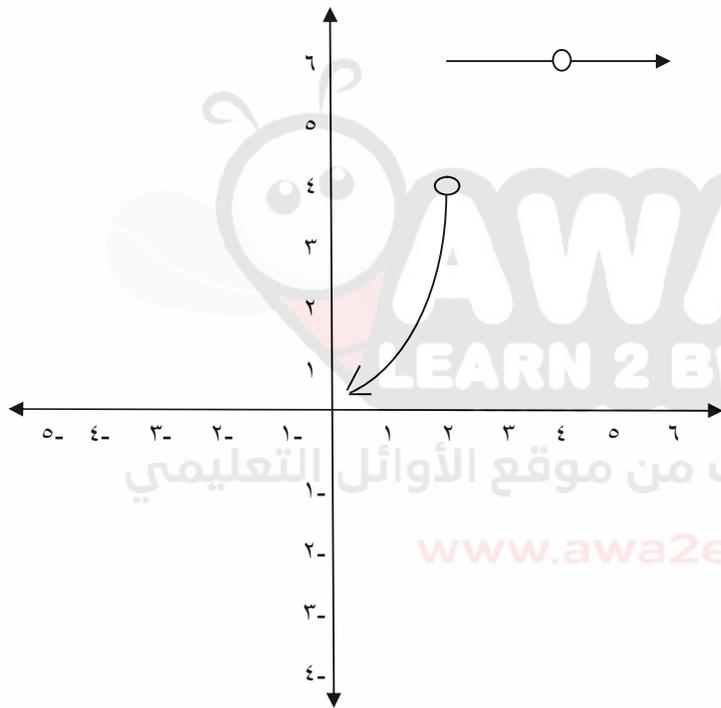
نهان (س) $1 = 1 \leftarrow س$ نهان (س) $1 = -1 \leftarrow س$ نهان (س) $1 = 1 \leftarrow س$

ق (١) غير معرف

(٣) من خلال الشكل التالي جد مايلي:

(١) نهان (س) س ← +١	(٢) نهان (س) س ← -١	(٣) نهان (س) س ← -١	(٤) ق (١)
(٥) نهان (س) س ← +٢	(٦) نهان (س) س ← -٢	(٧) نهان (س) س ← -٢	(٨) ق (٢)
(٩) نهان (س) س ← +٤	(١٠) نهان (س) س ← -٤	(١١) نهان (س) س ← -٤	(١٢) ق (٤)

كحل:



$$(1) \text{ نهان (س) } = 1 \quad \text{س} \leftarrow +1$$

$$(2) \text{ نهان (س) } = 1 \quad \text{س} \leftarrow -1$$

$$(3) \text{ نهان (س) } = 1 \quad \text{س} \leftarrow -1$$

$$(4) \text{ ق (١) } = 1$$

$$(5) \text{ نهان (س) } = 6 \quad \text{س} \leftarrow +2$$

$$(6) \text{ نهان (س) } = 4 \quad \text{س} \leftarrow -2$$

$$(7) \text{ نهان (س) } = \text{غير موجودة} \quad \text{س} \leftarrow -2$$

$$(8) \text{ ق (٢) } = 6$$

$$(9) \text{ نهان (س) } = 6 \quad \text{س} \leftarrow +4$$

$$(10) \text{ نهان (س) } = 6 \quad \text{س} \leftarrow -4$$

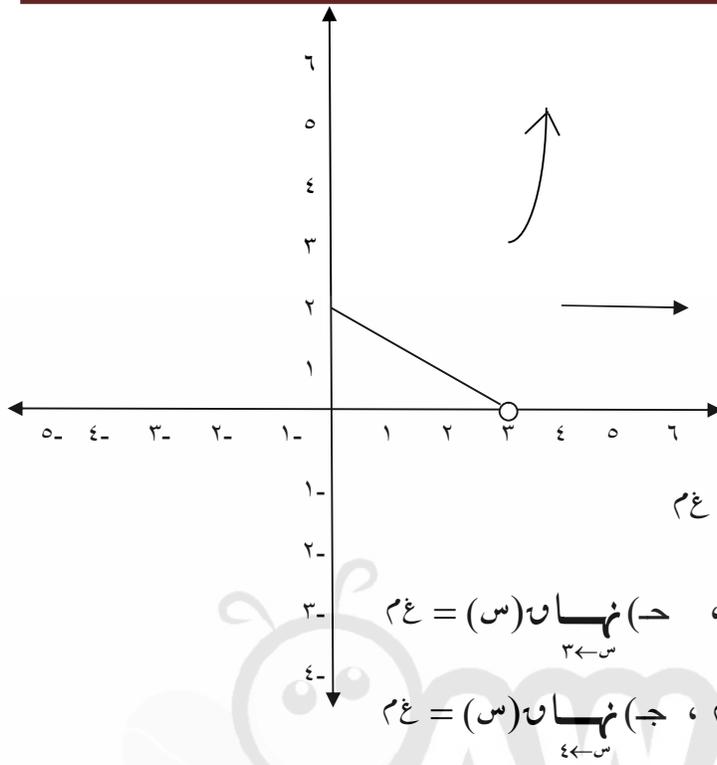
$$(11) \text{ نهان (س) } = 6 \quad \text{س} \leftarrow -4$$

$$(12) \text{ ق (٤) } = \text{غير معرف}$$

الاستاذ عادل عواد

النهايات والاتصال

الابداع في الرياضيات



(٤) من خلال الشكل التالي جد مايلي:

(١) نهاية (س) ← س
(٢) نهاية (س) ← س

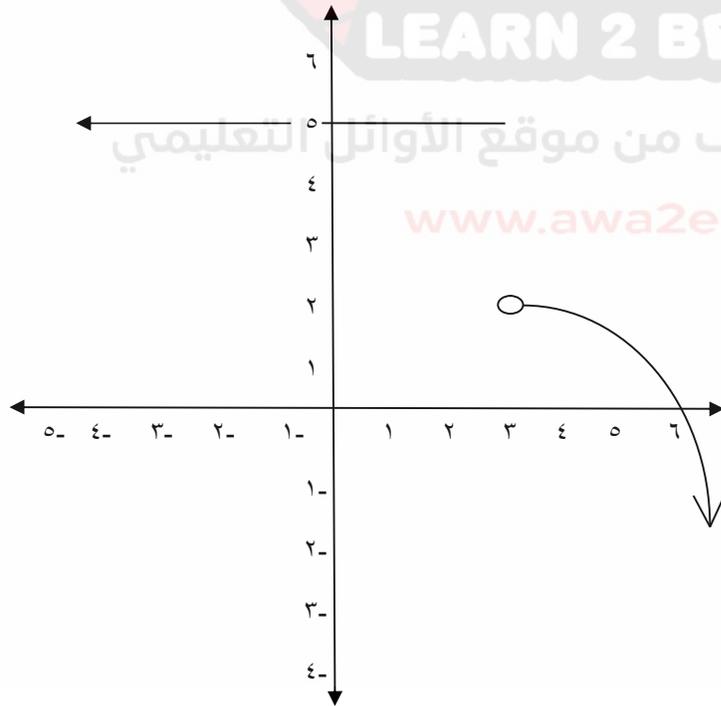
(٣) نهاية (س) ← س

الحل:

(أ) نهاية (س) = ٢
← س +(ب) نهاية (س) = ٢ ← س
(ج) نهاية (س) = ٢ ← س

(أ) نهاية (س) = ٣ ← س + ، (ب) نهاية (س) = ٠ ← س - ، (ج) نهاية (س) = ٢ ← س -

(أ) نهاية (س) = ٢ ← س + ، (ب) نهاية (س) = ٢ ← س - ، (ج) نهاية (س) = ٢ ← س -



(٥) من خلال الشكل التالي جد مايلي:

(١) نهاية (س) ← س +
(٢) نهاية (س) ← س -

(٣) نهاية (س) ← س -

الحل:

(١) نهاية (س) = ٢ ← س +

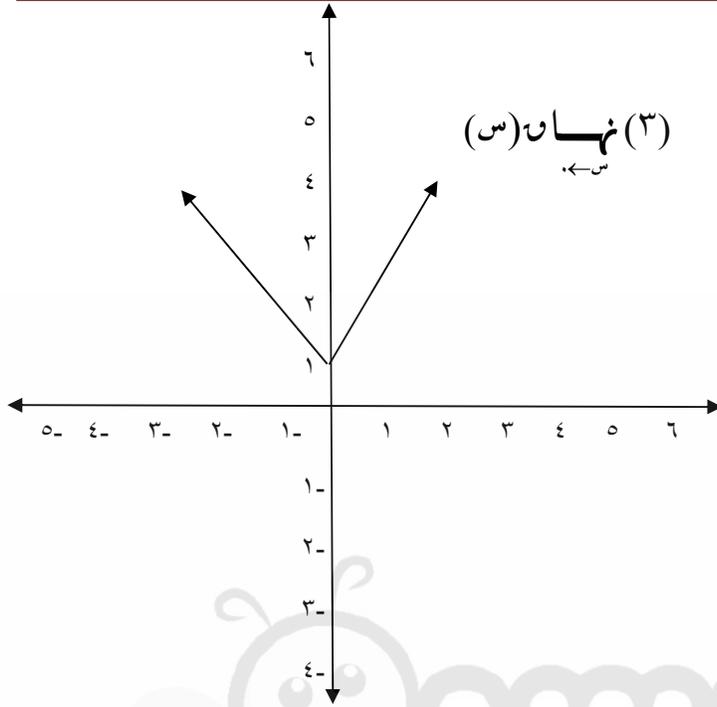
(٢) نهاية (س) = ٥ ← س -

(٣) نهاية (س) = ٢ ← س -

الاستاذ عادل عواد

النهايات والاتصال

الابداع في الرياضيات



(٦) من خلال الشكل التالي جد مايلي:

(٣) نهان (س) ← س

(٢) نهان (س) ← س

(١) نهان (س) ← س

الحل:

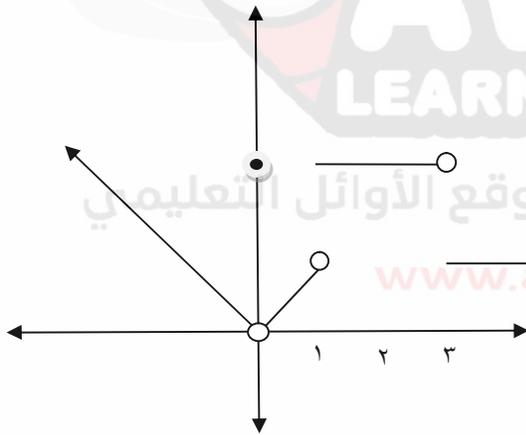
(١) نهان (س) = ١ ← س

(٢) نهان (س) = ١ ← س

(٣) نهان (س) = ١ ← س

(٧) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران

المعرف على ح جد مجموعة قيم (٢) حيث



نهان (س) غير موجودة. ← س

الحل:

مجموعة قيم (٢) هي { ٣، ١ }

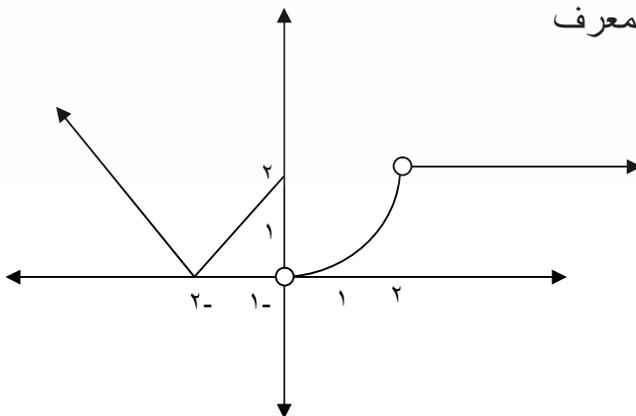
(٨) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران المعرف

على مجاله جد مجموعة قيم (٢) حيث

نهان (س) غير موجودة. ← س

الحل:

مجموعة قيم (٢) هي { ٠ }



النهايات والاتصال ٦

(رفع ٢٠٠٤)

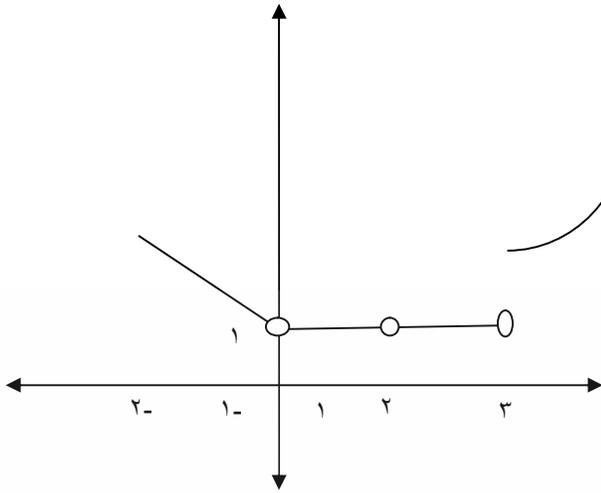
الاستاذ : عادل عواد

الابداع في الرياضيات

الابداع في الرياضيات

النهايات والاتصال

الاستاذ عادل عواد



(٩) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق
المعرف على مجاله جد مجموعة قيم (٢) حيث
هنا (س) غير موجودة .
س ← -

الحل:

مجموعة قيم (٢) هي $\{-2, 3\}$

(١٠) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران المعروف

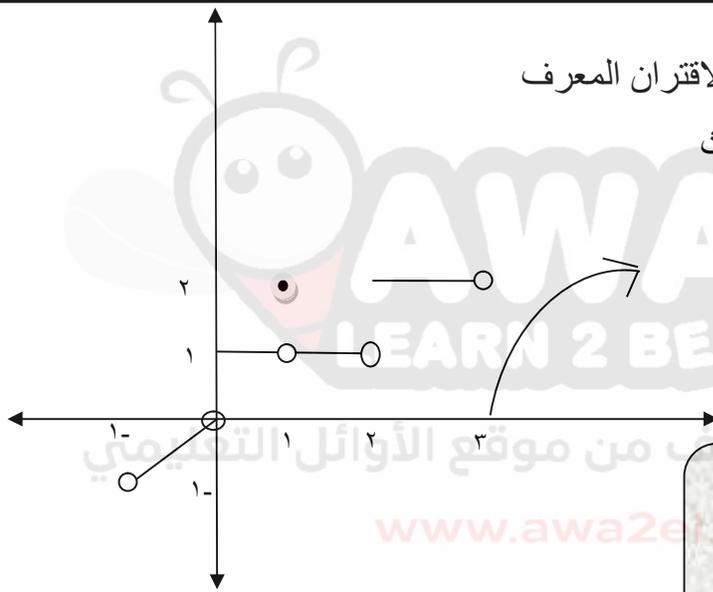
على $(-\infty, 1)$ جد مجموعة قيم (٢) حيث
هنا (س) غير موجودة .
س ← -

الحل:

مجموعة قيم (٢) هي $\{-1, 2, 3, \infty\}$

ملاحظة:

عند $s = -1$ خارج المجال ، لكن يوجد اقتراب
عندها من جهة اليمين



(١١) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى

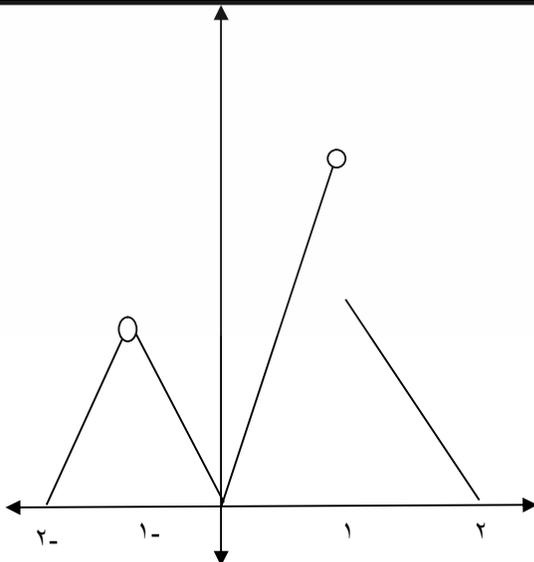
الاقتران ق(س) المعروف على $[-2, 2]$

جد مجموعة جميع قيم (٢) حيث

هنا (س) = ٠
س ← -

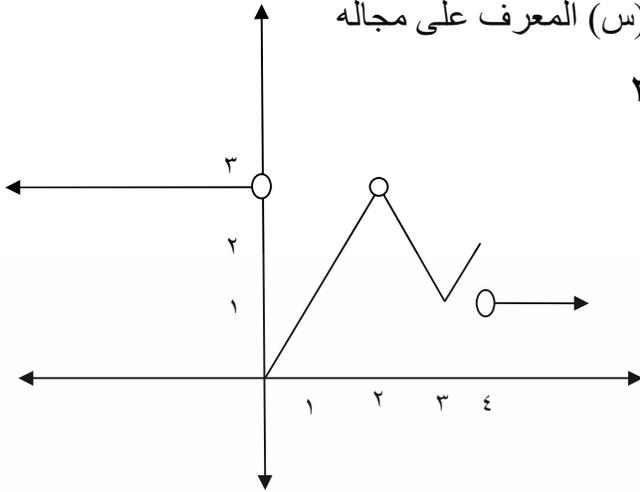
الحل:

مجموعة قيم (٢) هي $\{0, 2\}$



١٢) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف على مجاله

جد مجموعة جميع قيم (٢) حيث نهايات (س) = ٣
س ← ٢



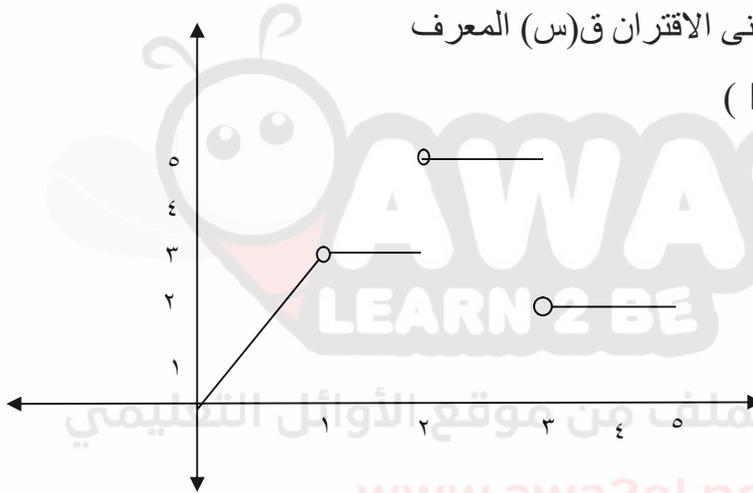
الحل:

مجموعة قيم (٢) هي $\{2\} \cup (-\infty, 0)$

١٣) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف

على $[0, 5]$ جد مجموعة جميع قيم (٢)

حيث نهايات (س) = ٣
س ← ٢



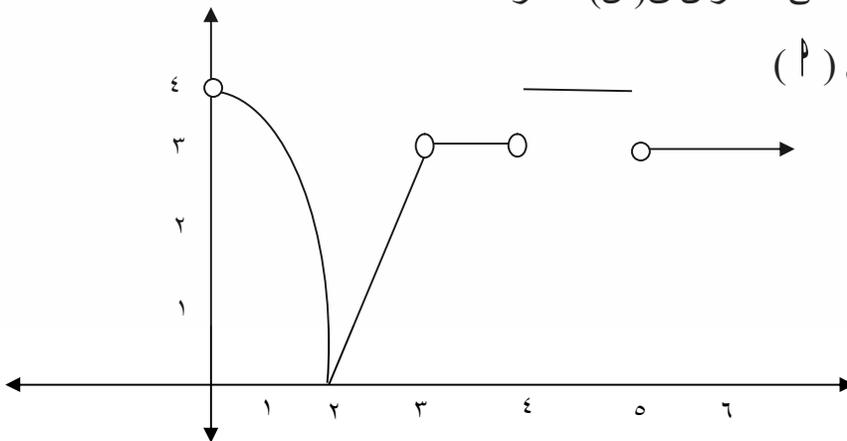
الحل:

$\{2\} \cup [2, 5]$

١٤) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعرف

على $(0, \infty)$ جد مجموعة جميع قيم (٢)

حيث نهايات (س) = ٣
س ← ٢



الحل:

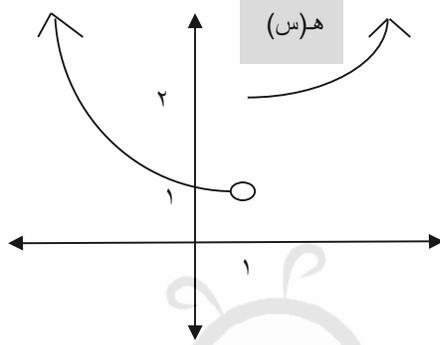
مجموعة قيم (٢) هي

$\{1\} \cup (0, \infty) \cup [3, 4)$

تمرين (١)

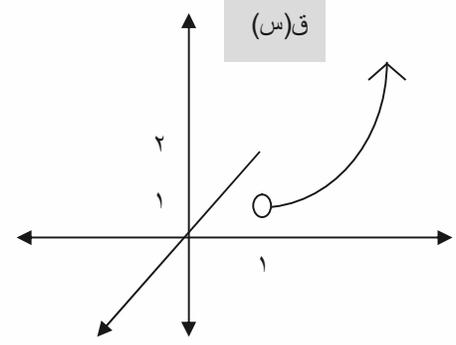


(١) من خلال الأشكال التالية جد مايلي:

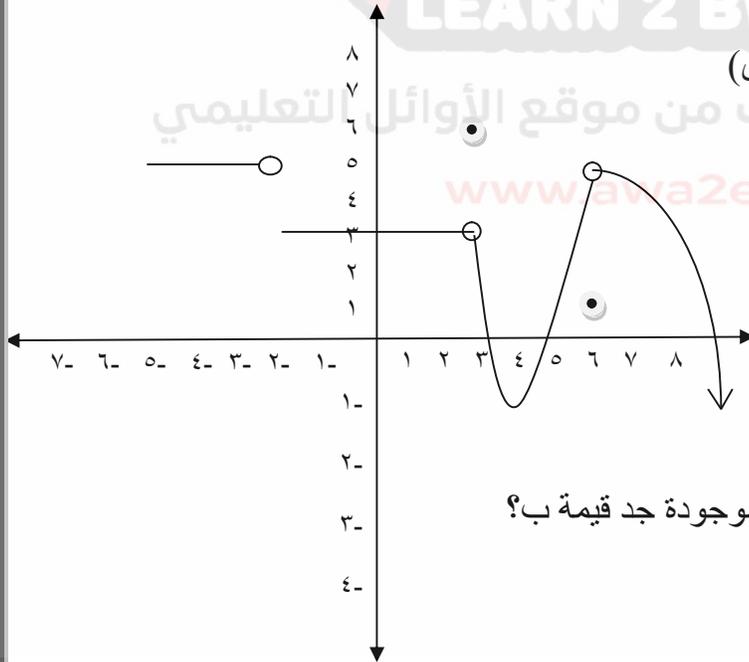


(٢) نها (ن) (س) - هـ (س) (س)

الجواب: (١) = ٣ ، (٢) = غير موجودة



(١) نها (ن) (س) + هـ (س) (س)

(٢) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) المعروف على $]-\infty, 5[$ جد ما يلي:

(١) نها (س) (س)

(٢) اذا كانت نها (س) (س) = ٥ جد قيمة ١.

(٣) اذا كانت نها (س) (س) = غير موجودة جد قيمة ب؟

(٤) جد نها (٢-س) (س)؟

الجواب: (١) غير موجودة (٢) $\exists (2, 5)$ (٣) $\exists (2, 5)$ (٤) ٣.

الاستاذ عادل عواد

النهايات والاتصال

الابداع في الرياضيات

ثانيا : المفهوم الجبري

(أ) من خلال الجدول مباشرة

الأمثلة

(١) جد نهان (س) من خلال الجدول التالي:

١,٩٩	١,٩٩٩	٢	٢,٠٠١	٢,٠١	س
٥,٩٩	٥,٩٩٩		٦,٠٠١	٦,٠١	ص

كل حل:

$$\therefore \text{نهان (س)} = ٦$$

$$\text{نهان (س)} = ٦$$

$$\text{نهان (س)} = ٦$$

(٢) نهان (س) من خلال الجدول التالي

١,٨	١,٩	٢	٢,٠٠٢	٢,٠٣	س
٤,٩٩	٤,٩٩٩		٦,٠٠٢	٦,٠٣	ص

كل حل:

$$\therefore \text{نهان (س)} = ٢$$

$$\text{نهان (س)} = ٥$$

$$\text{نهان (س)} = ٦$$

(٣) نهان (س) من خلال الجدول التالي

٤	٤,٠٠١	٤,٠٠١	٤,٠٤	س
	٠,٠١	٠,١	٠,٢	ص

كل حل:

$$\text{نهان (س)} = ٤$$

$$\text{نهان (س)} = ٤$$

$$\text{نهان (س)} = ٠$$

ايجاد النهاية للاقتربات الكسرية: سوف نقوم بدراسة هذه الحالة بعد دراسة نظريات النهايات .

نظريات النهايات

نظرية

إذا كان q ، h اقتربانين وكان $a, b, j, m \in \mathbb{C}$ بحيث:

$$\lim_{s \rightarrow a} (s) = b, \quad \lim_{s \rightarrow a} (s) = j \text{ فإن:}$$

$$(1) \quad \lim_{s \rightarrow a} (s) = b$$

$$(2) \quad \lim_{s \rightarrow a} (s) \pm \lim_{s \rightarrow a} (s) = \lim_{s \rightarrow a} (s) \pm \lim_{s \rightarrow a} (s) = b \pm j$$

$$(3) \quad \lim_{s \rightarrow a} (s) \cdot \lim_{s \rightarrow a} (s) = \lim_{s \rightarrow a} (s) \cdot \lim_{s \rightarrow a} (s) = b \cdot j$$

$$(4) \quad \lim_{s \rightarrow a} (s) \cdot \lim_{s \rightarrow a} (s) = \lim_{s \rightarrow a} (s) \cdot \lim_{s \rightarrow a} (s) = b \cdot j$$

$$(5) \quad \lim_{s \rightarrow a} \frac{(s)}{(s)} = \frac{\lim_{s \rightarrow a} (s)}{\lim_{s \rightarrow a} (s)} = \frac{b}{j} \text{ (حيث } j \neq 0 \text{ لا تساوي صفر)}$$

$$(6) \quad \lim_{s \rightarrow a} \sqrt[n]{(s)} = \sqrt[n]{\lim_{s \rightarrow a} (s)} = \sqrt[n]{b} \text{ (حيث } b \text{ اكبر من صفر عندما } n \text{ عدد زوجي).}$$

$$(7) \quad \text{إذا كان } q \text{ (س) كثير حدود، فإن: } \lim_{s \rightarrow a} (s) = j$$

ملاحظة: ليس من الضروري إذا كانت $\lim_{s \rightarrow a} (s) = j$ ان يكون $\lim_{s \rightarrow a} (s) = j$

الامثلة

$$(1) \text{ اذا كانت نهان (س) } = 4, \text{ نهاه (س) } = 5 \text{ جد:}$$

$$(1) \text{ نهان (س) } + \text{ نهاه (س) } = 9$$

$$(2) \text{ نهان (س) } \times 3 + \text{ نهاه (س) } \times 4 = 32$$

حل اكل:

$$(1) \text{ نهان (س) } + \text{ نهاه (س) } = 9$$

$$(2) \text{ نهان (س) } \times 3 + \text{ نهاه (س) } \times 4 = 32$$

$$(2) \text{ اذا كانت نهان (س) } = 6, \text{ نهاه (س) } = 4, \text{ جد: نهان (س) }^2 - \frac{\text{نهاه (س)}}{2} = 11$$

حل اكل:

$$\text{نهان (س) }^2 - \frac{\text{نهاه (س)}}{2} = 11 \Rightarrow 36 - 2 = 11 - 27$$

$$(3) \text{ اذا كانت نهان (س) } = 6, \text{ نهاه (س) } = 2 \text{ جد: نهان (س) } \sqrt{\text{نهاه (س) } + 3}$$

حل اكل: ترتيب المعطيات

$$\text{نهان (س) } = 2, \text{ نهاه (س) } = 4$$

$$3 = \sqrt{9} = \sqrt{3+4+2}$$

$$(4) \text{ اذا كان نهاه (س) كثير حدود، وكانت نهان (س) } = \frac{1}{3} \text{ نهاه (س) } + 2 = 12$$

$$\text{جد نهاه (س) }^2$$

حل اكل:

$$\frac{1}{2} \text{نهاه (س)} + \text{نها س}^2 - 4 = 12 \quad \leftarrow \text{س} \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{2} \text{نهاه (س)} + 9 - 4 = 12 \quad \leftarrow \text{س} \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{2} \text{نهاه (س)} = 7 \leftarrow \text{نهاه (س)} = 14 \leftarrow \text{نها (هـ) (س)} = 2 \quad \leftarrow \text{س} \begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$$

٥) اذا كانت نها (س) = 2 + (س) ، نها (س) = 2 ، جد نها (س) .

حل اكل:

$$2 \text{نها (س)} + \text{نها (س)}^2 - 4 = 6 \leftarrow 2 \text{نها (س)} = 6 \leftarrow \text{نها (س)} = 3 \quad \leftarrow \text{س} \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\frac{3-}{2} = \frac{\text{نها (س)}}{\text{نها (س)}}$$

٦) اذا كانت نها (س) = 8 - (س) ، جد نها (س) + (س) ؟

تم التحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net

حل اكل:

$$8 = \left(\text{نها (س)} \right)^2 , \therefore \text{نها (س)} = 2 \quad \leftarrow \text{س} \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\therefore \text{نها (س)} + (س) = 2 + 4 = 6 \quad \leftarrow \text{س} \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}$$

٧) اذا كانت نها (س) = 6 + (س) ، جد نها (س) + 2 (س) .

حل اكل:

$$\text{نها (س)} = (3 - (س))(2 - (س)) = 0 \quad \leftarrow \text{س} \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\text{إما نها (س)} = 3 \leftarrow \text{نها (س)} = 2 + (س) = 6 + 3 = 9 \quad \leftarrow \text{س} \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\text{أو نها } (س) = ٢ = \text{نها } (س) \leftarrow \text{نها } (س) = (س) + (س) = ٦ + ٢ = ٨$$

$$٨ \text{ اذا كانت نها } (س) = (س) + (س) = ٣ + (س) = ٠, \text{ جد نها } (س) = (س) + (س) = ?$$

كله اكله:

$$\text{نها } (س) = (س) + (س) = ٣ - (س) = ٠$$

$$\text{إما نها } (س) = ٣ = \text{نها } (س) = (س) + (س) = ٣ + (س) = ٢٨$$

$$\text{أو نها } (س) = ١ = \text{نها } (س) = (س) + (س) = ١ + ١ = ٢$$

$$٨ = \frac{٤ + (س)}{(٢ - س)} \text{ اذا كانت نها } (س) = \frac{٤ + (س)}{(٢ - س)}, \text{ وكان ق(س) اقتران كثير حدود ، جد:}$$

اذا كانت المعطيات كسر
والمطلوب ليس كسرا

$$\text{نها } (س) = (س) + (س) = ٣ + (س)$$

كله اكله:

ملاحظة مهمة: اذا كانت النهاية موجودة وناتج التعويض في المقام يساوي صفر فإن نها البسط = صفر.

$$\text{نها } (س) = (س) + (س) = ٤ + (س) = ٠$$

$$\text{نها } (س) = (س) + (س) = ٢ - (س) = ٠$$

$$٢ = \text{نها } (س) + \text{نها } (س) = ٣ + (س) = ٢$$

$$٢ = \frac{٧ + (س)}{(٣ + س)} \text{ اذا كانت نها } (س) = \frac{٧ + (س)}{(٣ + س)}, \text{ وكان ق(س) اقتران كثير حدود ، جد:}$$

$$\text{نها } (س) = (س) + (س) = ٣ + (س) = ?$$

كله اكله:

$$\text{نها} (س) (س + ٧) = ٠ \leftarrow \text{نها} (س) (س) = ٧ -$$

$$\text{نها} (س) (س) + \text{نها} (س) (س) = ٩ - ٤ = ٥$$

(١١) اذا كانت $\text{نها} (س) (س + ٥) = ٩$ ، وكان ق(س) اقتران كثير حدود ، جد:

$$\text{نها} (س) (س + ٢) = ?$$

كله اكله:

$$\text{نها} (س) (س + ٥) = ٠ \leftarrow \text{نها} (س) (س) = ٥ -$$

$$\text{نها} (س) (س) + \text{نها} (س) (س) = ٩ - ٥ = ٤$$

(١٢) اذا كانت $\text{نها} (س) (س - ٤) = ٤$ ، وكان ق(س) اقتران كثير حدود ، جد:

$$\text{نها} (س) (س - ٢) = ?$$

كله اكله:

اذا كانت المعطيات كسر
والمطلوب كسر ، فيجب ان نجعل
المعطيات والمطلوب على نفس
الصورة

$$١ = \frac{١}{٤} \times ٤ = \frac{(س - ٢)٤}{(س - ٤) (س) (س)} = \frac{(س + ٢)(س - ٢)}{(س - ٤) (س) (س)}$$

(١٣) اذا كانت $\text{نها} (س) (س - ٦) = ٨$ ، وكان ق(س) اقتران كثير حدود ، جد:

$$\text{نها} (س) (س + ٣) = ?$$

كله اكله:

$$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٨} \times ٨ = \frac{(س - ٦)٨}{(س - ٦) (س) (س)} = \frac{(س + ٣)(س - ٦)}{(س - ٦) (س) (س)}$$

تمرين (٢)



(١) اذا كانت $\frac{3-(s)}{27-s} = 2$ ، وكان ق(س) اقتران كثير حدود ، جد:

الجواب: $\frac{1}{54}$

$$\frac{3-s}{3-(s)}$$

(٢) اذا كان ع كثير حدود ، باقى قسمته على (س - ٢) يساوي ٥ ، فجد:

الجواب: ٣١

$$\frac{3(s+4)}{2}$$

(٣) اذا ق كثير حدود يمر بالنقطة (٣ ، ٤) ، وكانت $\frac{(s-1)}{3} = 10$ ، فجد:

الجواب: ٢

$$\frac{(s-2)}{3}$$

(٤) اذا كانت $\frac{(s-1)}{4} = 3$ ، فما قيمة $\frac{(s-2)}{4}$ ؟

الجواب: $\frac{25}{16}$

(٥) اذا كانت $\frac{(s-4)}{2} = 5$ ، فما قيمة $\frac{(s+4)}{2}$ ؟

الجواب: ٩٢

(٦) اذا كانت $\frac{(s+1)}{2} = 9$ ، $\frac{(s-3)}{10}$ جد قيمة $\frac{(s+1)(s+2)}{1}$ ؟

الجواب: ٢٤

نهايات اقترانات كسرية

المفهوم الجبري

جد/ ي قيمة النهايات فيما يلي:

$$(3) \lim_{s \rightarrow 1} (1 + s^2) = 1 + 1^2 = 2$$

$$(2) \lim_{s \rightarrow 0} (12s) = 0$$

$$(1) \lim_{s \rightarrow 2} (s^2) = 4$$

$$(6) \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s}{1+s} = \frac{1}{2}$$

$$(5) \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1+s^2}{3+s} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$(4) \lim_{s \rightarrow 3} (9) = 9$$

$$(8) \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1+s}{1-s} \text{ غير موجودة}$$

$$(7) \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1-s}{1+s} = 0$$

$$(9) \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1-s^2}{1-s} \text{ لا تقبل النتيجة ؟؟}$$

نلاحظ من خلال الامثلة السابقة عند ايجاد النهاية الكسرية نتبع الخطوات التالية :

❖ التعويض المباشر.

❖ تقيل جميع النتائج ما عدا $\frac{0}{0}$.

تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي
www.awa2el.net

❖ اذا نتج $\frac{0}{0}$ (كمية غير معينة) نتبع احدى الخطوات التالية في الحل:

أولاً : التحليل الى العوامل

قاعدة : اذا كان ناتج التعويض $\frac{0}{0}$

نحل \leftarrow نختصر \leftarrow نعوض.

مراجعة بعض طرق التحليل

$$\checkmark \text{ اخراج عامل مشترك } s + s = s(s + 1)$$

$$\checkmark \text{ فرق بين مربعين } (s^2 - 1) = (s - 1)(s + 1)$$

$$\checkmark \text{ فرق بين مكعبين } (s^3 - 1) = (s - 1)(s^2 + s + 1)$$

$$\checkmark \text{ مجموع مكعبين } (s^3 + 1) = (s + 1)(s^2 - s + 1)$$

العبرة التربعية

$$\checkmark \text{ س }^2 - 5\text{س} + 6 = (\text{س} - 2)(\text{س} - 3)$$

$$\checkmark \text{ س }^2 - 4\text{س} - 5 = (\text{س} + 1)(\text{س} - 5)$$

الامثلة

جد قيمة النهايات فيما يلي:

$$(2) \text{ نهايا } \frac{5\text{س}^2 - \text{س}}{5\text{س}}$$

الحل:

$$\frac{1-}{5} = \frac{\cancel{5\text{س}}(1-\text{س})}{\cancel{5\text{س}}}$$

$$(1) \text{ نهايا } \frac{2\text{س}^2 - \text{س} - 1}{\text{س} - 1}$$

الحل:

$$2 = \frac{\cancel{2\text{س}}(1-\text{س})}{\cancel{\text{س}} - 1}$$

$$(4) \text{ نهايا } \frac{\text{س} - 5}{25 - \text{س}^2}$$

الحل:

$$\frac{1-}{10} = \frac{\cancel{(\text{س}-5)}}{\cancel{(\text{س}-5)}(\text{س}+5)}$$

$$(3) \text{ نهايا } \frac{4 - \text{س}^2}{\text{س} - 2}$$

الحل:

$$4 = \frac{\cancel{2}(\text{س}+2)(\text{س}-2)}{\cancel{\text{س}} - 2}$$

$$(6) \text{ نهايا } \frac{(\text{س}^2 - 5\text{س} + 6)}{(\text{س} - 2)}$$

الحل:

$$1- = \frac{\cancel{(\text{س}-2)}(\text{س}-3)}{\cancel{(\text{س}-2)}}$$

$$(5) \text{ نهايا } \frac{81 - (\text{س} + 1)^2}{\text{س} - 8}$$

الحل:

$$18- = \frac{(\text{س}+1)(9-\text{س})}{\cancel{(\text{س}-8)}}$$

الاستاذ عادل عواد

النهايات والاتصال

الابداع في الرياضيات

$$(8) \text{ نهايا } \frac{(5s^2 - 3s + 7)}{(s-1)}$$

الحل:

$$\frac{9}{2}$$

$$(7) \text{ نهايا } \frac{(s^2 - 7s + 12)}{(s-4)}$$

الحل:

$$1 = \frac{(s-3)(s-4)}{(s-4)}$$

$$(10) \text{ نهايا } \frac{(s-5)}{(s^3 - 125)}$$

الحل:

$$\frac{1}{75} = \frac{(s-5)}{(s^3 + 5s^2 + 25s + 125)(s-5)}$$

$$(9) \text{ نهايا } \frac{(s-3)}{(s^3 - 27)}$$

الحل:

$$\frac{1}{27} = \frac{(s-3)}{(s^3 + 3s^2 + 9s + 27)(s-3)}$$

$$(11) \text{ نهايا } \frac{(125 - (1+s)^2)}{(s^2 + 2s - (2-s)^2)}$$

الحل:

$$.50 = \frac{75 \times 2}{3} = \frac{(25 + (1+s)^2) \cdot 5 + (1+s)^2 (5 - (1+s)^2)}{(s^2 - 3s + 2)}$$

$$(12) \text{ نهايا } \frac{(s^3 + 2s^2 - 2)}{(s-1)}$$

الحل : تستخدم القسمة التركيبية في تحليل البسط.

ج	س	س ²	س ³
٢	٠	١	١
٢	٢	١	
٠	٢	٢	١

$$0 = \frac{(s-1)(s^2 + 2s + 2)}{(s-1)}$$

$$(13) \text{ نها } \frac{(س^3 + 8)}{(س^2 - 2س - 12)}$$

الحل:

تستخدم القسمة التركيبية في تحليل المقام

س	س ²	س ³	س ⁴	ج
1	0	-1	0	12
2	-2	4	0	12
1	-2	3	0	0

$$\frac{3-}{7} = \frac{(س^2 - 2س + 4)(س + 2)}{(س^2 - 2س - 12)}$$

$$(14) \text{ نها } \frac{(س-1)}{(س-1)}$$

الحل:

$$0 = \frac{(س-1)(س-1)}{(س-1)}$$

$$(15) \text{ نها } \frac{(س+1)(س^2 - 3س - 2)}{(س-1)}$$

سوف نقوم بحل هذا السؤال باستخدام طريقة الاستبدال.

طريقة الحل:

$$\text{نفرض ان } ص = س + 1$$

$$س = ص - 1 \quad \text{عندما } ص = 1$$

$$\text{نها } \frac{ص^2 - 3ص - 2}{ص - 1} = \frac{32 - 0}{2 - 1} \quad (\text{نستخدم القسمة التركيبية})$$

$$٨٠ = \frac{(٢-ص)١٦ + ٢ص٨ + ٣ص٤ + ٤ص٢ + ٤(ص-٢)}{(٢-ص)} \text{ نها } \leftarrow ٢$$

(١٦) اذا كانت نها $\frac{٤-(س)٧}{(٢-س)}$ ، وكان ق(س) اقتران كثير حدود ، جد:

$$\text{نها } \frac{٢س-(س)٧}{(٢-س)} \leftarrow ٢ \text{ ؟}$$

الحل:

طرح واطافة العدد ٤.

$$\begin{aligned} \text{نها } \frac{٢س-(س)٧}{(٢-س)} &= \frac{٢س-٤+٤-(س)٧}{(٢-س)} \\ &= \frac{٢س-٤}{(٢-س)} + \frac{٤-(س)٧}{(٢-س)} \\ &= \frac{٢س-٤}{(٢-س)} + \frac{(٢-س)(س+٢)}{(٢-س)} + ٤ \\ &= ٤-٤ = ٠ \end{aligned}$$

(١٧) اذا كانت نها $\frac{٩-(س)٧}{(٣-س)}$ ، وكان ق(س) اقتران كثير حدود ، جد: نها $\frac{٢س-(س)٧}{(٣-س)}$ ؟

الحل:

طرح واطافة العدد ٩.

$$\begin{aligned} \text{نها } \frac{٢س-(س)٧}{(٣-س)} &= \frac{٢س-٩+٩-(س)٧}{(٣-س)} \\ &= \frac{٢س-٩}{(٣-س)} + \frac{٩-(س)٧}{(٣-س)} \\ &= \frac{٢س-٩}{(٣-س)} + \frac{(س+٣)(س-٣)}{(٣-س)} + ١٠ \\ &= ١٠-١٠ = ٠ \end{aligned}$$

(١٨) اذا كانت نها $\frac{١-(س)٧}{(١-س)}$ ، وكان ق(س) اقتران كثير حدود ، جد: نها $\frac{١-(س)٧}{(١-س)}$ ؟

الحل:

طرح واطافة ق(س)

$$\frac{1-(s)}{(1-s)} \frac{1}{1-s} + \frac{(s)-(s)^3}{(1-s)} \frac{1}{1-s} = \frac{1-(s)+(s)-(s)^3}{(1-s)} \frac{1}{1-s}$$

$$4 + \frac{(1+s+s^2)(1-s)(s)}{(1-s)} \frac{1}{1-s} = 4 + \frac{(1-s^3)(s)}{(1-s)} \frac{1}{1-s}$$

$$7 = 4 + 1 \times 3 = 4 + (s) \frac{1}{1-s}$$

تمرين (٣)



جد قيمة النهايات فيما يلي

الجواب $\frac{3}{4}$

$$1. \frac{(s^3 - 3s^2 - 2)}{(s^3 - 8)} \frac{1}{1-s}$$

الجواب ٣

$$2. \frac{(s^3 + 3s^2 - 4)}{(s^2 - 1)} \frac{1}{1-s}$$

الجواب ٤

$$3. \frac{(s+1)(s-4)(s-1)}{(s+1)(s^3-27)} \frac{1}{1-s}$$

الجواب: ٠

$$4. \frac{(s-1)^0}{(s^0-1)} \frac{1}{1-s}$$

الجواب : -١٩٢

$$5. \frac{(s^6 - 64)}{(s+2)} \frac{1}{1-s}$$

الجواب : $\frac{7}{12}$

$$6. \frac{(s^2 - 3s - 10)}{(s^2 - 4)(s^2 - 6s + 16)} \frac{1}{1-s}$$

الجواب $\frac{3-}{4}$

$$7. \frac{(s+3)}{(s^3 + 3s^2 + 1 + s - 4)} \frac{1}{1-s}$$

الجواب: ١

$$8. \frac{(s-2)^3 (s^2 - 16)}{(s^2 - 4)} \frac{1}{1-s}$$

الجواب: $\frac{8-}{27}$

$$9. \text{نها} \frac{2(1+s) - 16}{(27-s^3)} \leftarrow s$$

الجواب: 1

$$10. \text{نها} \frac{(1-s^2)(2-s)}{(s^3-s^2)} \leftarrow s$$

الجواب: $\frac{1}{64}$

$$11. \text{نها} \frac{s^3(4+s^2-s^4)}{(s^2-4)^6} \leftarrow s$$

الجواب: $\frac{13}{2}$

$$12. \text{نها} \frac{(36-2(1+s)^5 - (1+s)^4)}{8-s^3} \leftarrow s$$

13. اذا كانت n (س) = $\frac{s^2+5}{s^2-5s+6}$ فجد قيم n التي تجعل n (س) غير موجودة $\leftarrow s$

الجواب: {2,3}

14. اذا كانت n (س) = $\frac{25-(s)}{(s-5)}$ ، وكان q (س) اقتران كثير حدود ، جد

الجواب: 3- $\text{نها} \frac{n(s)-s^2}{(s-5)} \leftarrow s$

15. اذا كانت n (س) = $\frac{3-(s)}{(s-2)}$ ، وكان q (س) اقتران كثير حدود ، جد:

الجواب: 11

$$\text{نها} \frac{s n(s) - 6}{(s-2)} \leftarrow s$$

ثانيا : توحيد المقامات في حالة الكسور:

قاعدة : اذا كان ناتج التعويض -

نوجد \leftarrow نختصر \leftarrow نعوض.

الامثلة

جد /ي قيمة النهايات فيما يلي :

$$1) \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{3-s} - \frac{1}{1+s}$$

حل: اكل:

$$\frac{1}{9} = \frac{1-s-2}{(1+s)3} \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1-s-2}{(1+s)3} = \frac{1-3-2}{(1+2)3} \lim_{s \rightarrow 2} \frac{1-s-2}{(1+s)3}$$

$$2) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{4-s} - \frac{1}{1-s}$$

حل: اكل:

$$16 = \frac{5-s}{(1+s-4)} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5-s}{(1+s-4)}$$

$$3) \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{4-s} - \frac{1}{(1+s)^2}$$

حل: اكل:

$$\frac{1-}{4} = \frac{(1+س+2)(1-س-2)}{2(1+س)4} \leftarrow \text{هنا} = \frac{2(1+س)-4}{2(1+س)4} \leftarrow \text{هنا} = \frac{2-2-2س}{2(1+س)4} \leftarrow \text{هنا} = \frac{-2س}{2(1+س)4} \leftarrow \text{هنا} = \frac{-س}{2(1+س)4}$$

$$(4) \text{ هنا} = \frac{2-2-2س}{2-س}$$

حل: نرتب أولاً

$$\frac{4-}{16} = \frac{(س+2)(س-2)}{2(س-2)2س4} \leftarrow \text{هنا} = \frac{2س-4}{2(س-2)2س4} \leftarrow \text{هنا} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2س}$$

$$(5) \text{ هنا} = \frac{2س}{1-س} - \frac{1}{1-س} = \frac{1}{1-س} \leftarrow \text{هنا} = \frac{1}{1-س} - \frac{1}{1-س} = 0$$

حل: أكل:

$$\text{هنا} = \frac{2س}{1-س} - \frac{1}{1-س} = \frac{2س-1}{1-س} \leftarrow \text{هنا} = \frac{(س+1)(س-1)}{س-1} = 2$$

$$(6) \text{ هنا} = \frac{3}{س-9} + \frac{3س}{س-9} = \frac{3+3س}{س-9} \leftarrow \text{هنا} = \frac{3(1+س)}{س-9}$$

حل: أكل:

$$\text{هنا} = \frac{3س}{(س-9)} + \frac{3س}{(س-9)} = \frac{3س+3س}{س-9} = \frac{6س}{س-9}$$

$$\text{هنا} = \frac{0}{(س-9)} = 0$$

(العمليات الحسابية تسبق الاجراءات الحسابية). 

(٧) نها $\frac{1}{2-s} - \frac{1}{s-2} = \frac{4}{s^2-4}$ (لا يجوز الاخذ بهذه النتيجة، يجب توحيد المقامات)
 كحل:

$$\frac{1}{(4)} = \frac{\cancel{(s-2)}}{(2+s)(\cancel{2-s})} \text{ نها} = \frac{4}{(s-2)(s+2)} - \frac{s+2}{(2+s)(2-s)} \text{ نها}$$

(٨) نها $\frac{1}{5} \times 0 = \frac{1}{(5-s)} \times (\frac{1}{5} - \frac{1}{s})$ (لا يجوز الاخذ بهذه النتيجة، يجب توحيد المقامات)
 كحل:

$$\frac{1-}{25} = \frac{1}{(5-s)} \times (\frac{\cancel{5}}{5s}) \text{ نها}$$

(٩) نها $\frac{1}{25} \times 0 = \frac{1}{(25-s^2)} \times (\frac{2}{5} - \frac{2}{s})$ (لا يجوز الاخذ بهذه النتيجة، يجب توحيد المقامات)

كحل: تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net

$$\frac{1-}{125} = \frac{1}{(25-s^2)} \times (\frac{s^2-1}{5s}) \text{ نها}$$

$$\frac{1-}{125} = \frac{2-}{250} = \frac{1}{(5-s)(5+s)} \times \frac{\cancel{(5-s)}^2-}{5s} \text{ نها}$$

(١٠) نها $\frac{1}{s} \times \frac{1}{1} = (1 - \frac{1}{s+1}) \times (\frac{1}{s})$ (لا يجوز الاخذ بهذه النتيجة، يجب توحيد المقامات)
 كحل:

$$\text{نها} (\frac{1}{s}) \times (\frac{1}{s}) = (\frac{1}{s}) \times (\frac{1}{s}) = \frac{(1+s+1)(1-s-1)}{s^2} \times (\frac{1}{s})$$

$$\text{نها} (\frac{1}{s}) \times (\frac{1}{s}) = \frac{(1+s)^2-1}{s^2} \times (\frac{1}{s}) = \frac{(s+2)(s-)}{s^2} \times (\frac{1}{s})$$

$$(1) \text{ نهايا } \frac{1}{2-s} = \left(\frac{1}{5+s^2} + \frac{1}{1+s} \right) \frac{1}{(14-s-s^2)}$$

(لا يجوز الاخذ بهذه النتيجة ، يجب توحيد المقامات)

الحل:

$$\text{نهايا } \frac{1}{2-s} = \left(\frac{1+s+5+s^2}{(5+s^2)(1+s)} \right) \frac{1}{(2+s)(7-s^3)}$$

$$\frac{3}{13} =$$

تمرين (٤)



جد قيمة النهايات فيما يلي:

أجواب: $\frac{1-}{160}$

$$(1) \text{ نهايا } \frac{1}{2-s} = \frac{1}{(25-s^2)}$$

www.awa2el.net

أجواب: ١

$$(2) \text{ نهايا } \frac{3}{1-s^3} - \frac{1}{1-s}$$

أجواب: $\frac{1-}{36}$

$$(3) \text{ نهايا } \frac{1}{6-s} \times \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{s} \right)$$

أجواب: $\frac{2-}{49}$

$$(4) \text{ نهايا } \left(\frac{1}{s-7} - \frac{1}{7+s} \right) \times \left(\frac{1}{s} \right)$$

ثالثا : الضرب بالعامل المرافق:

ملاحظات مهمة

$$(1) \sqrt{as} \times \sqrt{as} = s.$$

$$(2) \sqrt{as} \times \sqrt{1+as} = \sqrt{1+as} + s.$$

$$(3) \sqrt{as} + \sqrt{as} = \sqrt{4as}.$$

$$(4) \sqrt[3]{as} \times \sqrt[3]{as} = \sqrt[3]{s^2}.$$

قاعدة : اذا كان ناتج التعويض $\frac{1}{2}$ في أجزور التربيعية أو التكعبية فإننا نستخدم إحدى الطرق التالية:

(1) الاستبدال

نستبدل ← نحل ← نختصر ← نعوض.

(2) الضرب بالعامل المرافق.

الضرب بالعامل المرافق ← نختصر ← نعوض.

الأمثلة

www.awa2el.net

جد /ي قيمة النهايات فيما يلي :

$$(1) \lim_{s \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{s}}{4 - s}$$

ك: سوف نستخدم طريقة الاستبدال

$$\text{نفرض ان } s = \sqrt{4} \Leftrightarrow \sqrt{s} = 2 \text{ و } s = 4$$

$$s \leftarrow 4 ; \sqrt{s} \leftarrow 2$$

$$\frac{1}{4} = \frac{\cancel{2} - \sqrt{s}}{(2 - \sqrt{s})(2 + \sqrt{s})} = \frac{2 - \sqrt{s}}{4 - s}$$

$$(2) \text{ نها } \frac{\sqrt{2-3+s}}{1-s}$$

الحل: باستخدام طريقة الضرب بالعامل المرافق.

$$= \text{نها } \frac{\sqrt{2-3+s}}{1-s} \times \frac{1}{\sqrt{2+3+s}} \times \frac{\sqrt{2+3+s}}{\sqrt{2+3+s}} = \frac{1}{4} = \frac{\cancel{1-s}}{\sqrt{2+3+s} (1-\cancel{s})}$$

$$(3) \text{ نها } \frac{\sqrt{s-4s-4s}}{s-2}$$

الحل: باستخدام طريقة الضرب بالعامل المرافق.

$$\text{نها } \frac{\sqrt{s-4s-4s}}{s-2} = \frac{\sqrt{s-4s-4s}}{\sqrt{s-4s-4s}} \times \frac{\sqrt{s-4s-4s}}{s-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{(s-2)^2}{s-4s-4s} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$(4) \text{ نها } \frac{\sqrt{s+1s-2s} - \sqrt{s-1s}}{s}$$

الحل: باستخدام طريقة الضرب بالعامل المرافق.

$$\text{نها } \frac{\sqrt{s+1s-2s} - \sqrt{s-1s}}{s} = \frac{\sqrt{s+1s-2s} + \sqrt{s-1s}}{\sqrt{s+1s-2s} + \sqrt{s-1s}} \times \frac{\sqrt{s+1s-2s} - \sqrt{s-1s}}{s} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{s+1s-2s} - \sqrt{s-1s}}{s}$$

$$(5) \text{ نها } \frac{2-\sqrt{s}}{8-s}$$

حل: نستخدم طريقة الاستبدال

$$\text{نفرض ان } \sqrt{s} = v \Leftrightarrow s = v^2$$

$$s \leftarrow 8 ; v \leftarrow 2$$

$$\frac{1}{12} = \frac{\cancel{(2-v)}}{\cancel{(2-v)}(4+v^2+2v)} \text{ نها } = \frac{2-v}{8-v^2} \text{ نها}$$

$$(6) \text{ نها } \frac{1-\sqrt{s}}{1-s}$$

حل: نحل:

$$\text{نها } \frac{1-\sqrt{s}}{1-s} \times \frac{(1+\sqrt{s} + (\sqrt{s})^2)}{(1+\sqrt{s} + (\sqrt{s})^2)}$$

$$\text{نها } \frac{1-\sqrt{s}}{1-s} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{(1+\sqrt{s} + (\sqrt{s})^2)}$$

$$(7) \text{ نها } \frac{2-\sqrt{s+6}}{2-s}$$

حل: نحل:

$$\text{نها } \frac{2-\sqrt{s+6}}{2-s} \times \frac{(2+\sqrt{s+6} + (\sqrt{s+6})^2)}{(2+\sqrt{s+6} + (\sqrt{s+6})^2)}$$

$$\text{نها } \frac{2-\sqrt{s+6}}{2-s} \times \frac{1}{(2+\sqrt{s+6} + (\sqrt{s+6})^2)}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{12} \times \frac{\cancel{2-s}}{\cancel{2-s}}$$

$$(8) \text{ هنا } \frac{1-\sqrt{s}}{3+\sqrt{s}-2}$$

كله اكله:

$$\text{هنا } \frac{\sqrt{s}+2}{3+\sqrt{s}+2} \times \frac{1+\sqrt{s}}{1+\sqrt{s}} \times \frac{1-\sqrt{s}}{3+\sqrt{s}-2}$$

$$\text{هنا } 2- = \frac{\sqrt{s}+2}{1} \times \frac{1}{1+\sqrt{s}} \times \frac{1-\sqrt{s}}{3-\sqrt{s}-4}$$

$$(9) \text{ هنا } \frac{2-s-3s-2}{2-6+\sqrt{s}} = \frac{2-3s-2}{2-6+\sqrt{s}}$$

كله اكله:

ج	س	س	س
2-	3-	0	1
2	4	2	1
0	1	2	1

تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net

$$\text{هنا } \frac{4+\sqrt{s}+6+\sqrt{s} \quad 2+\sqrt{s} \quad (\sqrt{s}+6)}{4+\sqrt{s}+6+\sqrt{s} \quad 2+\sqrt{s} \quad (\sqrt{s}+6)} \times \frac{(2-s)(1+s+2)}{\sqrt{s}-6+2}$$

$$108 = 12 \times 9 = \frac{4+\sqrt{s}+6+\sqrt{s} \quad 2+\sqrt{s} \quad (\sqrt{s}+6)}{1} \times \frac{(2-s)(1+s+2)}{8-\sqrt{s}+2}$$

ملاحظة

ما بعد الجذور التكعيبية يجب استخدام طريقة الاستبدال فقط.

$$(10) \frac{1-s}{1-s} \cdot \frac{1-s}{1-s}$$

كحل: سوف نستخدم طريقة الاستبدال

$$\text{نفرض ان } s = 1 \leftarrow s = 0$$

$$s \leftarrow 1 ; s \leftarrow 1$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1-s}{(1-s)(1+s+s^2+s^3+s^4)} \cdot \frac{1-s}{1-s} = \frac{1-s}{1-s^5}$$

$$(11) \frac{1-s}{1-s} = \frac{1-s}{1-s}$$

كحل: سوف نستخدم طريقة الاستبدال

$$\text{نفرض ان } s = 1 \leftarrow s = 15 \leftarrow s = 15 - 4 = 11$$

$$s \leftarrow 1 ; s \leftarrow 2$$

$$\frac{1-s}{1-s} = \frac{1-s}{1-s}$$

$$\frac{1}{32} = \frac{1-s}{(1-s)(1+s+s^2+s^3+s^4+s^5+s^6+s^7+s^8+s^9+s^{10})}$$

$$(12) \frac{1-s}{1-s} = \frac{1-s}{1-s}$$

كحل: يجب ابعاد البسط عن المقام

(يجب حساب النهاية للبسط اولا ثم للمقام ثم ايجاد ناتج القسمة)

$$\frac{1-s}{1-s} = \frac{1-s}{1-s}$$

$$\div = \frac{1-2-3}{3-3} \text{ نهايا}$$

نستخدم طريقة الاستبدال

$$\text{نفرض ان } 3 = 1-2-3 \Rightarrow 3-3 = 1-2-3 \Rightarrow 3-3 = 1-2-3$$

$$3 \leftarrow 3 ; 1 \leftarrow 1$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1-3}{(1+3)(1+3)(1+3)} \text{ نهايا} = \frac{1-3}{1-3} \text{ نهايا}$$

$$(2) \dots \dots \dots \frac{1}{4} = \frac{6+5-2}{3-3} \text{ نهايا}$$

$$\frac{1}{4} = (2)/(1)$$

$$(13) \frac{2-3}{1-3} + \frac{3}{1-3} \text{ نهايا}$$

حل: سوف نستخدم طريقة الاستبدال

$$\text{نفرض ان } 3 = 2-3 \Rightarrow 3-3 = 2-3$$

$$3 \leftarrow 3 ; 1 \leftarrow 1$$

$$\frac{3}{2} = \frac{(1-3)(2+3)}{(1-3)(1+3)} \text{ نهايا} = \frac{2-3+2}{1-2} \text{ نهايا}$$

ملاحظة: أعد حل السؤال السابق باستخدام طريقتي الفصل والضرب بالعامل المرافق.



$$\div = \frac{1-2}{2-2+3} \text{ نهايا}$$

حل: نستخدم طريقة الاستبدال

$$\text{نفرض ان } 3 = 2-3 \Rightarrow 3-3 = 2-3$$

$$س ← ١ ؛ ص ← ١$$

$$نها = \frac{ص^٤ - ١}{ص^٤ + ص - ٢}$$

$$\frac{٤}{٥} = \frac{(ص+١)(ص-١)(ص+٢)}{(ص-١)(ص+٢+ص^٢+ص^٣)} نها = \frac{(ص-٢)(ص+٢)}{(ص-١)(ص+٢+ص^٢+ص^٣)} نها$$

$$\therefore = \frac{ص^٣ + ٦ - ٢ + ص}{ص - ٢} نها \quad (١٥)$$

كحل: نستخدم طريقة الطرح والاضافة.

طرح واطافة ٢

$$نها = \frac{ص^٣ + ٦ - ٢ + ص}{ص - ٢} نها = \frac{ص^٣ + ٦ - ٢ + ٢ - ٢ + ص}{ص - ٢} نها = \frac{ص^٣ + ٦ - ٢ + ص}{ص - ٢} نها$$

$$نها = \frac{ص^٣ + ٦ + ٢ + ص}{ص - ٢} نها = \frac{ص^٣ + ٦ + ٢ + ص}{ص - ٢} نها \times \frac{٢ - ٢ + ص}{ص - ٢} نها \quad (١)$$

$$نها = \frac{ص^٣ + ٦ + ٢ + ص}{ص - ٢} نها = \frac{ص^٣ + ٦ + ٢ + ص}{ص - ٢} نها \times \frac{٢ - ٢ + ص}{ص - ٢} نها \quad (٢)$$

طرح (٢) من (١)

$$\cdot \frac{١}{٦} = \frac{١}{١٢} - \frac{٣ \times ١}{٣ \times ٤}$$

$$\therefore = \frac{١ - ص}{١ - ص} \times \frac{ص^٢}{ص - ١} نها \quad (١٦)$$

كحل:

طرح واطافة ص أو ص^٢ ثم توزيع.

$$\text{نهيا} \frac{1-\sqrt{s}}{1-s} + \frac{\sqrt{s}-s}{1-s} \times \frac{1}{1-s} = \frac{1-\sqrt{s} + \sqrt{s}-s}{1-s} \times \frac{1}{1-s}$$

$$\text{نهيا} \frac{\sqrt{s}(1-s)}{1-s} = \frac{1-s}{1-s} \times \frac{1}{1-s} \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{نهيا} \frac{1}{2} = \frac{1-s}{(1+\sqrt{s})(1-s)} = \frac{1+\sqrt{s}}{1+\sqrt{s}} \times \frac{1-\sqrt{s}}{1-s}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{2} + 2$$

$$(17) \text{ نهيا} \frac{16-s}{8-s} \times \frac{1}{8-s}$$

كحل: طرح وإضافة 8 أو 2 ثم توزيع.

$$\text{نهيا} \frac{16-s}{8-s} \times \frac{1}{8-s} + \frac{8-s}{8-s} \times \frac{1}{8-s} = \frac{16-s + 8-s}{8-s} \times \frac{1}{8-s}$$

تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

$$\text{نهيا} \frac{1}{(4+s)(2+s)} \times \frac{8}{8-s} + \frac{8-s}{8-s} \times \frac{1}{8-s}$$

$$\text{نهيا} \frac{1}{(4+s)(2+s)} \times \frac{8-s}{8-s} + \frac{8-s}{8-s} \times \frac{1}{8-s}$$

$$\frac{8}{3} = \frac{1}{12} \times 8 + 2$$

$$(18) \text{ نهيا} \frac{1}{1-s} \times \frac{1}{1-\sqrt{s}} = \frac{1}{1-s}$$

كحل:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{s}+1} \times \frac{1-\sqrt{s}}{\sqrt{s}} \right) \frac{1}{1-s} = \frac{1-\sqrt{s}}{\sqrt{s}+1} \times \frac{1-\sqrt{s}}{\sqrt{s}}$$

$$(19) \text{ نها } \frac{1}{1-s} = \left(1 + \frac{1}{1+s\sqrt{2}}\right) \times \frac{1}{1+s}$$

كحل:

$$\text{نها } \frac{1}{1-s} = \frac{(\sqrt{1+s\sqrt{2}} + 1) + \sqrt{1+s\sqrt{2}} - 1}{(\sqrt{1+s\sqrt{2}} + 1) + \sqrt{1+s\sqrt{2}} - 1} \times \frac{(\sqrt{1+s\sqrt{2}} + 1)}{1+s\sqrt{2}}$$

$$\text{نها } \frac{1}{1-s} = \frac{1}{(\sqrt{1+s\sqrt{2}} + 1) + \sqrt{1+s\sqrt{2}} - 1} \times \frac{(1+s\sqrt{2}+1)}{1+s\sqrt{2}}$$

$$\text{نها } \frac{1}{1-s} = \frac{1}{3} \times \frac{(s+1)^2}{1+s\sqrt{2}}$$

$$(20) \text{ نها } \frac{3-s}{2-2+s\sqrt{2}} = \frac{3-s}{2-2+s\sqrt{2}}$$

كحل:

$$\text{نها } \frac{3-s}{2-2+s\sqrt{2}} = \frac{3-s}{2-2+s\sqrt{2}} \times \frac{(s-1)^3}{(s-2)(s-2)} = \frac{2+2+s\sqrt{2}}{2+2+s\sqrt{2}} \times \frac{3-s}{(2-2+s\sqrt{2})s}$$

تمرين (٥)



جد قيمة النهايات فيما يلي:

$$(1) \text{ نها } \frac{1-s\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}+s}$$

أجواب: ٤

الاستاذ عادل عواد

النهايات والاتصال

الابداع في الرياضيات

اجواب: ٢-

$$(٢) \text{ نها } \frac{٣ - \sqrt{١٧} - \sqrt{١٧}}{٢ + \sqrt{١٧}}$$

اجواب: $\frac{٥}{٤}$

$$(٣) \text{ نها } \frac{٢ - \sqrt{٣} + \sqrt{٣}}{١ - \sqrt{٣}}$$

اجواب: $\frac{٣}{٢٠}$

$$(٤) \text{ نها } \frac{٢ - \sqrt{١٤} + \sqrt{١٤}}{٣ - \sqrt{١٤}}$$

اجواب: $\frac{١٧}{٣}$

$$(٥) \text{ نها } \frac{١٢ - \sqrt{١٢} + \sqrt{١٢}}{١ - \sqrt{١٢}}$$

اجواب: $\frac{١-}{٢}$

$$(٦) \text{ نها } \frac{\sqrt{٣} + \sqrt{٣} - \sqrt{٧} + \sqrt{٧}}{١ - \sqrt{٣}}$$

اجواب: $\frac{٢٥}{٤}$

$$(٧) \text{ نها } \frac{١٢ - \sqrt{١٢} + \sqrt{١٢}}{(٣ - \sqrt{٣})}$$

اجواب: $\frac{١٣}{١٢}$

$$(٨) \text{ نها } \frac{٦ - \sqrt{٦} + \sqrt{٦}}{(٣ - \sqrt{٣})}$$

اجواب: ٢٨

$$(٩) \text{ نها } \frac{٨ - (٢ + \sqrt{٣})^2 (١ + \sqrt{٣})}{\sqrt{٣}}$$

اجواب: $\frac{٨٥}{٦}$

$$(١٠) \text{ نها } \frac{١٢ - \sqrt{١٢} + \sqrt{١٢}}{١ - \sqrt{١٢}}$$

اجواب: $\frac{١}{٢}$

$$(١١) \text{ نها } \frac{٥ - \sqrt{٨} + \sqrt{٨} + \sqrt{٧} + \sqrt{٧}}{(١ - \sqrt{٣})}$$

رابعاً : حساب النهايات للاقتربات الاسية :

قاعدة : اذا كان ناتج التعويض - :

نرتب ← نحلل ← نختصر ← نعوض.

الامثلة

ملاحظة : نستطيع حل الامثلة
باستخدام طريقة الاستبدال

جد قيمة النهايات فيما يلي :

$$(1) \lim_{s \rightarrow 5} \frac{(2s)^s - s^s}{s^s - 1}$$

حل:

$$\lim_{s \rightarrow 5} \frac{(2s)^s - s^s}{s^s - 1} = \lim_{s \rightarrow 5} \frac{(2s)^s - s^s}{s^s - 1}$$

$$\lim_{s \rightarrow 5} \frac{(2s)^s - s^s}{s^s - 1} = \frac{(2 \cdot 5)^5 - 5^5}{5^5 - 1}$$

تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net

$$(2) \lim_{s \rightarrow 3} \frac{(9)^s - 1}{1 - 3^s}$$

حل:

$$2 = \lim_{s \rightarrow 3} (1 + 3^s) = \lim_{s \rightarrow 3} \frac{(1 + 3^s)(1 - 3^s)}{1 - 3^s} = \lim_{s \rightarrow 3} \frac{1 - 3^{2s}}{1 - 3^s}$$

$$(3) \lim_{s \rightarrow 5} \frac{20 - s^2 - s^2}{20 - s^2}$$

حل:

$$\frac{9}{10} = \frac{(5 + s)(5 - s)}{(5 + s)(5 - s)} \text{ هنا}$$

$$\frac{27 - s^3}{3 - s} \text{ هنا (4)}$$

كله اكل:

$$27 = \frac{(9 + s \times 3 + s^2)(3 - s)}{(3 - s)} \text{ هنا} = \frac{27 - s^3}{3 - s} \text{ هنا}$$

$$\frac{h^3 - s^3}{h - s} \text{ هنا (5)}$$

كله اكل:

$$\frac{h^3 - s^3}{h - s} = \frac{(h^2 + hs + s^2)(h - s)}{h - s} \text{ هنا}$$

$$h^3 = \frac{(h^2 + hs + s^2)(h - s)}{h - s} \text{ هنا}$$

$$\frac{49 - s^2}{7 - 1} \text{ هنا (6)}$$

كله اكل:

$$\frac{7^2 - s^2}{7 - 1} \text{ هنا} = \frac{(7 + s)(7 - s)}{7 - 1} \text{ هنا}$$

$$1 = \frac{(7 + s)(7 - s)}{7 - 1} \text{ هنا}$$



جد/ ي قيمة النهايات فيما يلي:

أجواب: ٤

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(4)^x - 4}{2^x - 2}$$

أجواب: ٢

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(4)^{x+1} - 2^x}{2^x - 2}$$

أجواب: -١

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2)^{x+2} - 5(2)^x + 6}{2^x - 2}$$

أجواب: ٣

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(8)^x - 8}{4^x - 4}$$

أجواب: $\frac{2}{3}$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5)^{x-2} - 1}{1 - 5^{x-3}}$$

أجواب: ٨

$$(6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{x+2} + 2^{x-3} - 6}{2^x - 2}$$

أجواب: ٤

$$(7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5^{x+1} + 5^{x-5} - 6}{1 - 5^x}$$

ايجاد الثوابت

(١) اذا كانت نها $\frac{p+s}{p+s} = 7$ ، جد قيمة الثابت p .

الحل:

$$7 = \frac{p}{p} + 1 \quad \leftarrow \quad p = p - 3$$

(٢) اذا كانت نها $\frac{p-s}{p-s} = 1$ ، جد قيمة الثابت p .

ملاحظة مهمة جدا :

اذا كانت النهاية موجودة وناتج التعويض في المقام يساوي صفر فإن نها البسط = صفر.

الحل:

$$\frac{p-s}{p-s} = 0 \quad \leftarrow \quad 0 = p - 3 \quad \leftarrow \quad 3 = p$$

(٣) اذا كانت نها $\frac{p^2 - 6p - 2}{(p-2)} = 5$ ، جد قيمة الثوابت p ، b .

الحل:

ملاحظة مهمة جدا :

اذا كانت النهاية موجودة وناتج التعويض في المقام يساوي صفر فإن نها البسط = صفر

$$\frac{p^2 - 6p - 2}{(p-2)} = 0 \quad \leftarrow \quad 0 = 6 - 2 - 14 \quad \leftarrow \quad 0 = 3 - b - 12 \quad \dots \dots \dots (١)$$

$$\frac{(p+3)(p-2)}{(p-2)} = 5 \quad \leftarrow \quad 5 = 3 + 12 \quad \leftarrow \quad 5 = 12 \quad \leftarrow \quad 1 = 2$$

$$1 = b - 2 \quad \leftarrow \quad 0 = 3 - b - 2 \quad \text{نعوض في (١)}$$

$$(٤) \text{ اذا كانت نها } \frac{١٥ - ٢س - ١٥}{(٥ - س)} = ٨, \text{ جد قيمة الثوابت } ٢, ١.$$

حل: اكل:

ملاحظة مهمة جدا: اذا كانت النهايت موجودة وناتج التعويض في المقام يساوي صفر فإن:

$$\text{نها } \frac{١٥ - ٢س - ١٥}{(٥ - س)} = ٨ \leftarrow ٠ = ١٥ - ٢٥ - ١٥ \leftarrow ٠ = ٣ - ٢ - ١٥ \dots\dots\dots (١)$$

$$\text{نها } \frac{(٣ + س)(٥ - س)}{(٥ - س)} = ٨ \leftarrow ٨ = ٣ + ١٥ \leftarrow ٥ = ٢ - ١ \leftarrow ١ = ٢$$

$$\text{نعوض في (١) } ٠ = ٣ - ٢ - ٥ \leftarrow ٢ = ٢$$

(٥) اذا كان أ، ب، ج و كانت

$$\text{نها } \frac{(٢ + س٣ + ٢س)}{(١ - س)} = ٣ + ٢ \text{ جد قيمة الثابت أ، ب}$$

حل: اكل:

$$\text{نها } \frac{٢ + س٣ + ٢س}{(١ - س)} = ٣ + ٢ \leftarrow ٠ = ٢ + ٣ + ٢ \leftarrow ٥ = ٢$$

$$\text{نها } \frac{(٢ + س٣ + ٢س - ٥)}{(١ - س)} = ٣ + ٢ \dots\dots\dots (١)$$

$$\text{نها } \frac{(٢ - س٥ - ١س)}{(١ - س)} = ٧ \text{ من (١)}$$

$$٥ = ٢ \quad ٧ = ٣ + ٢$$

$$(٦) \text{ اذا كانت نها } \frac{٣س٣ - ١٩ + ٣س - ١٩}{(٣ - س٣)} = ٨ \text{ جد قيمة الثابت أ}$$

حل: اكل: توزيع البسط على المقام

$$٨ = \frac{٣س٣ - ١٩}{(٣ - س٣)} + \frac{٣س٣ - ١٩}{(٣ - س٣)}$$

$$8 - = \frac{(1-s)}{3} 19 + \frac{(1-s)}{3} 3 = \frac{(1-s)}{3} 22$$

$$3 = 2 \leftarrow 9 = 13 \leftarrow 8 = 13 - 1$$

الجذور الزوجية

إذا كان ناتج التعويض داخل الجذور الزوجية يساوي صفر فإننا نحدد المجال.

الامثلة

جد قيمة النهايات فيما يلي :

$$(1) \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{s+4} = 3$$

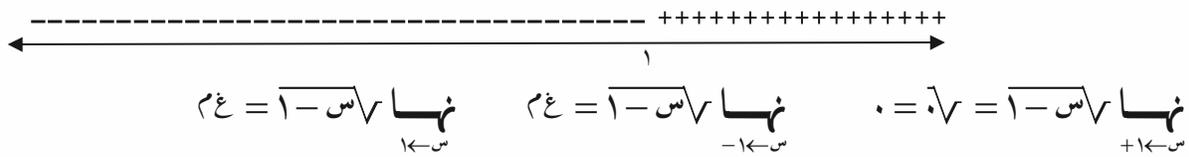
$$(2) \lim_{s \rightarrow 2} \sqrt{s+2} = \sqrt{4} = 2$$

$$(3) \lim_{s \rightarrow 1} \sqrt{s-2} = \sqrt{-1} = \sqrt{-1} = i$$

$$(4) \lim_{s \rightarrow 1} \sqrt{s-1} = \sqrt{0} = 0$$

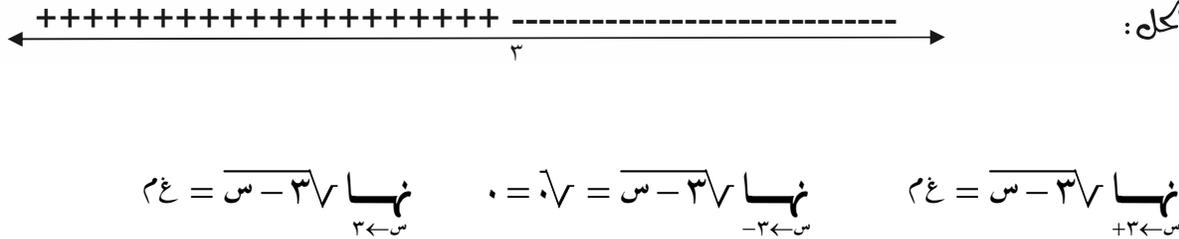
$$(5) \lim_{s \rightarrow 1} \sqrt{s-1} = \sqrt{0} = 0$$

أكل:



$$(6) \lim_{s \rightarrow 3} \sqrt{s-3} = 0$$

أكل:



$$(7) \text{ نهايا } \sqrt[3]{s-9} = \sqrt[3]{s} - 3 \text{ نحدد المجال}$$

حل: أكله:

$$\begin{array}{c} \text{-----} \\ \leftarrow \hspace{10em} \rightarrow \\ \text{-----} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[3]{s-9} = \sqrt[3]{s} - 3 & 0 = \sqrt[3]{s-9} = \sqrt[3]{s} - 3 & \sqrt[3]{s-9} = \sqrt[3]{s} - 3 \\ \text{نهايا } \sqrt[3]{s-9} & \text{نهايا } \sqrt[3]{s-9} & \text{نهايا } \sqrt[3]{s-9} \\ \text{نهايا } \sqrt[3]{s-9} & \text{نهايا } \sqrt[3]{s-9} & \text{نهايا } \sqrt[3]{s-9} \end{array}$$

$$(8) \text{ نهايا } \frac{\sqrt[3]{s-9}}{\sqrt[3]{s}} = \frac{\sqrt[3]{s-9}}{\sqrt[3]{s}}$$

حل: أكله:

$$\begin{array}{c} \text{-----} \\ \leftarrow \hspace{10em} \rightarrow \\ \text{-----} \end{array}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{s}} = \frac{\sqrt[3]{s-9}}{\sqrt[3]{s}(\sqrt[3]{s-9})} = \frac{\sqrt[3]{s-9}}{\sqrt[3]{s(s-9)}}$$

$$(9) \text{ نهايا } \frac{\sqrt[3]{s-9}}{\sqrt[3]{s}} = \frac{\sqrt[3]{s-9}}{\sqrt[3]{s}}$$

حل: أكله:

$$\begin{array}{c} \text{-----} \\ \leftarrow \hspace{10em} \rightarrow \\ \text{-----} \end{array}$$

$$\frac{\sqrt[3]{s-9}}{\sqrt[3]{s}} + \frac{\sqrt[3]{s-9}}{\sqrt[3]{s}} = \frac{\sqrt[3]{s-9}}{\sqrt[3]{s}} + \frac{\sqrt[3]{s-9}}{\sqrt[3]{s}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{s-9}}{\sqrt[3]{s}} + \frac{\sqrt[3]{s-9}}{\sqrt[3]{s}} = \frac{\sqrt[3]{s-9}}{\sqrt[3]{s}} + \frac{\sqrt[3]{s-9}}{\sqrt[3]{s}}$$

$$\sqrt[3]{s-9} = \sqrt[3]{s-9} + 0 = \sqrt[3]{s-9} + \frac{\sqrt[3]{s-9}}{2}$$

تمرين (٧)



جد قيمة النهايات فيما يلي:

أجواب: ٢

$$(1) \text{ نها } \frac{\sqrt{s-4} + 2 - \sqrt{s-6}}{s-2}$$

أجواب: $\frac{1}{6}$

$$(2) \text{ نها } \sqrt{\frac{s-3}{s^2-9}}$$

أجواب: $8\sqrt{}$

$$(3) \text{ نها } \frac{\sqrt{s^2-16}}{s-4}$$

أجواب: ٤

$$(4) \text{ نها } \frac{\sqrt{s-3} - 2}{s-5}$$

تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net

الاقتران المعرف على عدة قواعد (المتشعب)



عند حساب النهاية عند أي نقطة للاقتران المتشعب (المعرف على عدة قواعد) يجب تحديد نوع النقطة من حيث انها :

(١) نقطة عادية: وهي تخضع لقاعدة واحدة من قواعد الاقتران المتشعب وتحسب النهاية لها بشكل مباشر.

(٢) نقاط التشعب: وهي تخضع لأكثر من قاعدة وتحسب لها النهاية من اليمين واليسار.

(٣) اطراف الفترات : تحسب النهاية لبداية الفترة من جهة اليمين ولنهاية الفترة من جهة اليسار.

ملاحظة: النهاية عند الاطراف تكون غير موجودة.

الامثلة

$$(1) \text{ اذا كان } n(s) = \begin{cases} s^2, & s \leq 2 \\ s^2, & s > 2 \end{cases}$$

$$(3) \text{ نهاية } (s) \leftarrow s$$

$$(2) \text{ نهاية } (s) \leftarrow s$$

$$\text{احسب: } (1) \text{ نهاية } (s) \leftarrow s$$

الحل:

عندما $s \leftarrow 3$ نقطة عادية

$$\text{نهاية } s \leftarrow s^2 = 9$$

(٢) عندما $s \leftarrow 0$ نقطة عادية

$$\text{نهاية } s \leftarrow 2 \times 0 = 0$$

(٣) عندما $s \leftarrow 2$ نقطة تحول

$$\text{نهاية (س)} = 4$$

$$\text{نهاية (س)} = 2 \times 2 \leftarrow 2$$

$$\text{نهاية (س)} = 2 \leftarrow 2$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 > س \geq 1, \quad 5 + س \geq 2 \\ 5 \geq س \geq 3, \quad 2 + س \geq 2 \end{array} \right\} = \text{إذا كان (س) = (س)}$$

$$\text{نهاية (س)} = 3$$

$$\text{نهاية (س)} = 2$$

$$\text{نهاية (س)} = 1$$

$$\text{نهاية (س)} = 5$$

$$\text{نهاية (س)} = 4$$

حل:

$$\text{نهاية (س)} = 9 = 5 + 2 \times 2 = (5 + 2) \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{نهاية (س)} = 24 = 8 + 2 \times 8 = 2 + 2 \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{نهاية (س)} = 15 = 6 + 2 \times 4.5 = 3 + 2 \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{نهاية (س)} = 11 = 5 + 3 \times 2 = 5 + 2 \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{نهاية (س)} = 6$$

$$\text{نهاية (س)} = 7 = 5 + 1 \times 2 = 5 + 2 \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{نهاية (س)} = 35 = 10 + 2 \times 12.5 = (5 + 2) \text{ نهاية (س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 > س > 1, \quad 5 + س \geq 2 \\ 3 > س > 2, \quad 5 + س \geq 2 \\ 3 > س > 1, \quad 5 + س \geq 2 \end{array} \right\} = \text{إذا كان (س) = (س)}$$

$$\text{نهاية (س)} = 2$$

$$\text{نهاية (س)} = 1$$

حل:

$$(1) \text{ نهاى (س) = نهاى (س+٤) = ٥+٨- = ٣-} \quad \begin{matrix} +٢- \leftarrow \text{س} \\ +٢- \leftarrow \text{س} \end{matrix}$$

$$\text{نهاى (س) = نهاى (س) = ١-٢ = ٣} \quad \begin{matrix} -٢- \leftarrow \text{س} \\ -٢- \leftarrow \text{س} \end{matrix}$$

$$\text{نهاى (س) = ٣} \quad \begin{matrix} ٢- \leftarrow \text{س} \end{matrix}$$

$$(2) \text{ نهاى (س) = نهاى (س-٦) = ١-٣ = ١٧} \quad \begin{matrix} +٣- \leftarrow \text{س} \\ +٣- \leftarrow \text{س} \end{matrix}$$

$$\text{نهاى (س) = نهاى (س) = ٥+١٢ = ١٧} \quad \begin{matrix} -٣- \leftarrow \text{س} \\ -٣- \leftarrow \text{س} \end{matrix}$$

$$\text{نهاى (س) = ١٧} \quad \begin{matrix} ٣- \leftarrow \text{س} \end{matrix}$$

(٤) اذا كان :

$$\left. \begin{matrix} \text{س} < ٢ \\ \text{س} > ٢ \end{matrix} \right\} = \text{نهاى (س)}$$

تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net

احسب: نهاى (س) ؟

كل اكل:

$$\text{نهاى (س) = نهاى (س) = \frac{٤-٢}{٢-٢} = ٤} \quad \begin{matrix} +٢- \leftarrow \text{س} \\ +٢- \leftarrow \text{س} \end{matrix}$$

$$\text{نهاى (س) = ٤} \quad \begin{matrix} ٢- \leftarrow \text{س} \end{matrix}$$

$$(5) \text{ اذا كان (س) = } \left. \begin{matrix} \text{س} > ١ \\ \text{س} < ١ \end{matrix} \right\} \text{ احسب: نهاى (س) ؟}$$

كل اكل:

$$3 = \frac{(س-1)(س+1+س)}{س-1} \leftarrow \text{نهاية} \quad \therefore = \frac{1-س^3}{1-س} \leftarrow \text{نهاية}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1-س}{(1-س)^2} \leftarrow \text{نهاية} = \frac{1+\sqrt{س}}{1+\sqrt{س}} \times \frac{1-\sqrt{س}}{1-س} \leftarrow \text{نهاية}$$

$$\text{نهاية} (س) = م$$

$$(6) \text{ اذا كان } ن(س) = \left. \begin{array}{l} 1 < س \\ 1 > س \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{1}{1-س} \\ \frac{1}{1-س^2} \end{array} \right\}$$

احسب: نهاية (س)

كل اكل:

$$\text{نهاية} (س) = م \quad \text{نهاية} \frac{1}{1-س} = \frac{1}{1-س} \leftarrow \text{نهاية} \quad \text{نهاية} \frac{1}{1-س^2} = \frac{1}{1-س^2} \leftarrow \text{نهاية}$$

$$(7) \text{ اذا كان } ن(س) = \left. \begin{array}{l} 2 < |س| \\ 2 > |س| \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 4-س^2 \\ 2-س^2 \end{array} \right\} \text{جد نهاية (س)}$$

كل اكل:

$$ن(س) = \left. \begin{array}{l} 2-س > 2 \\ 2-س < 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 4-س^2 \\ 2-س^2 \end{array} \right\}$$

$$\text{نهاية} 2-س = 2-2 = 0 \quad \text{نهاية} 4-س^2 = 4-2 = 2 \quad \therefore \text{نهاية} (س) = م$$

$$(8) \text{ اذا كان } ن(س) = \left. \begin{array}{l} 3 \neq س \\ 3 = س \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{9-س^2}{3-س} \\ 6 \end{array} \right\} \text{جد نهاية (س)?}$$

كل اكل:

$$6 = \frac{(3+s)(3-s)}{(3-s)} \text{ هنا} = \frac{9-s^2}{3-s} \text{ هنا}$$

٩) اذا كانت أ، ب ∃ وكان

$$n(s) = \left. \begin{array}{l} s < 2, \frac{s^3 - 2s^2 + 4s - 4}{2-s} \\ s > 2, \frac{12-s}{12-s} \end{array} \right\} = (s)$$

كله اكل:

$$\text{هنا} = \frac{s^3 - 2s^2 + 4s - 4}{2-s} = \text{هنا} \text{ ب-س-12}$$

$$\text{هنا} s^3 - 2s^2 + 4s - 4 = 0 \leftarrow 0 = 4 - 4 + 14 - 8 \leftarrow 2 = 1$$

$$\text{هنا} = \frac{s^3 - 2s^2 + 4s - 4}{2-s} = \frac{(s-2)(s^2 + 2s + 2) + (2-s)^2}{2-s}$$

$$\text{هنا} = \frac{(s+2)(s-2)}{2-s} = 6$$

www.awa2el.net

$$\text{هنا} (12-s) = 6 \leftarrow 6 = 12 - 2 \leftarrow 6 = 9$$

$$(10) \text{ اذا كان } n(s) = \left. \begin{array}{l} s < 4, \frac{s^2 - 2s}{s-4} \\ s > 4, \frac{5+s}{4+s} \end{array} \right\} \text{ جد قيمة } (n) \text{ التي تجعل هنا } (s) \text{ موجودة}$$

كله اكل:

$$\text{هنا} = \frac{s^2 - 2s}{s-4} = \text{هنا} s+4$$

$$\text{هنا} = \frac{(s+4)(s-4)}{(s-4)} = s+4 \leftarrow 12 = 4 + 8 = 13 \leftarrow 4 = 13 \leftarrow 4 = 1 \leftarrow \frac{4-}{3}$$

تمرين (٨)



$$(1) \text{ اذا كان } u(s) = \left. \begin{array}{l} s^3 - 3s^2 \\ s - 1 \\ 8s - 27 \end{array} \right\} \text{ جد قيمة } (P) \text{ التي تجعل } u(s) \text{ موجودة}$$

$s < 1$ ، $s > 1$

أجواب: أ=٣

$$(2) \text{ اذا كان } u(s) = \left. \begin{array}{l} s\sqrt{s-1} \\ 1-s \\ 2s \end{array} \right\} \text{ جد قيمة } (P) \text{ التي تجعل } u(s) \text{ موجودة}$$

$s < 1$ ، $s > 1$



تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net

اقتران القيمة المطلقة



عند حساب النهاية لاقتران القيمة المطلقة نتبع الخطوات التالية:

(١) التعويض المباشر.

(٢) اذا كان ناتج التعويض = صفر يجب أولا اعادة التعريف ثم حساب النهاية.

(٣) اذا كان ناتج التعويض موجب تحسب النهاية بشكل مباشر مع ازالة اشارة القيمة المطلقة.

(٤) اذا كان ناتج التعويض سالب يجب ضرب القاعدة في سالب مع ازالة اشارة القيمة المطلقة.

الامثلة

جد قيمة النهايات فيما يلي:

$$\lim_{s \rightarrow 2} |2s - 4| \quad (3)$$

حل: يجب اعادة التعريف

$$\lim_{s \rightarrow 2} |2s - 4| = \begin{cases} 2s - 4 & s \leq 2 \\ 4 - 2s & s > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{s \rightarrow 2^-} |2s - 4| = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 2^+} |2s - 4| = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 2} |2s - 4| = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 2} |3s - 5| \quad (2)$$

حل: اكل:

$$\lim_{s \rightarrow 2} |3s - 5| = 1$$

$$\lim_{s \rightarrow 2} |2s + 1| \quad (1)$$

حل: اكل:

$$\lim_{s \rightarrow 2} |2s + 1| = 5$$

$$(4) \text{ نهايا } \left| \begin{array}{c} 5 - س \\ 5 - س \end{array} \right|_{س < 5}$$

كله اكل: يجب اعادة التعريف

$$\left. \begin{array}{l} 5 < س \\ 5 > س \end{array} \right\} \text{نهايا } \left| \begin{array}{c} 5 - س \\ 5 - س \end{array} \right| = (س) \text{نهايا}$$

$$\leftarrow \text{نهايا } \left| \begin{array}{c} 5 - س \\ 5 - س \end{array} \right|_{س < 5} = 1 = 1 - \text{نهايا } \left| \begin{array}{c} 5 - س \\ 5 - س \end{array} \right|_{س < 5} = 1 = \text{نهايا } \left| \begin{array}{c} 5 - س \\ 5 - س \end{array} \right|_{س < 5} = 2ع$$

$$(5) \text{ نهايا } \left| \begin{array}{c} 2 - س \\ 4 - 2س \end{array} \right|_{س < 2}$$

كله اكل: يجب اعادة التعريف

$$\left. \begin{array}{l} 2 < س \\ 2 > س \end{array} \right\} \text{نهايا } \left| \begin{array}{c} 2 - س \\ (2 + س)(2 - س) \end{array} \right| = (س) \text{نهايا}$$

$$\leftarrow \text{نهايا } \left| \begin{array}{c} 2 - س \\ (2 + س)(2 - س) \end{array} \right|_{س < 2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \text{نهايا } \left| \begin{array}{c} 2 - س \\ (2 + س)(2 - س) \end{array} \right|_{س < 2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \text{نهايا } \left| \begin{array}{c} 2 - س \\ (2 + س)(2 - س) \end{array} \right|_{س < 2} = 2ع$$

$$(6) \text{ نهايا } \left| \begin{array}{c} 2 - س - 2س \\ 2 - س \end{array} \right|_{س < 2}$$

كله اكل: يجب اعادة التعريف

$$\left. \begin{array}{l} 2 < س \\ 2 > س \end{array} \right\} \text{نهايا } \left| \begin{array}{c} 2 - س - 2س \\ (1 + س)(2 - س) \end{array} \right| = (س) \text{نهايا}$$

$$\leftarrow \text{نهايا } \left| \begin{array}{c} 2 - س - 2س \\ (1 + س)(2 - س) \end{array} \right|_{س < 2} = 3 = 3 - \text{نهايا } \left| \begin{array}{c} 2 - س - 2س \\ (1 + س)(2 - س) \end{array} \right|_{س < 2} = 3 = 3 + \text{نهايا } \left| \begin{array}{c} 2 - س - 2س \\ (1 + س)(2 - س) \end{array} \right|_{س < 2} = 2ع$$

الاستاذ عادل عواد

النهايات والاتصال

الابداع في الرياضيات

$$(7) \text{ نهايا } \frac{1-|3-|س|}{س-2}$$

كله اكل:

$$1 = \frac{س-2}{س-2} \leftarrow \text{نهايا } \frac{1-س-3}{س-2}$$

$$(8) \text{ نهايا } \frac{3-|3+س|}{س+3}$$

كله اكل:

$$2 = \frac{(3+س)2-}{س+3} \leftarrow \text{نهايا } \frac{3-3-س2-}{س+3}$$

$$(9) \text{ نهايا } \frac{3-|4-|س|}{س-7}$$

كله اكل:

$$1 = \frac{(س-7)}{س-7} \leftarrow \text{نهايا } \frac{3-4-س}{س-7}$$

$$(10) \text{ نهايا } \frac{س^2-|2-|س|}{س-2}$$

$$\text{كله اكل: نهايا } \frac{س-2-س}{س-2} = \frac{4-}{.} \quad \text{نهايا } \frac{س-2-س-س^2}{س-2} = \frac{4-}{.} \quad \text{نهايا } \frac{س-|2-|س|}{س-2} = \frac{4-}{.}$$

$$(11) \text{ نهايا } \frac{س-|2-|س|}{س+5}$$

كله اكل:

$$\frac{2-}{7} = \frac{س-|2-|س}{5+س} \text{ نهايا } \leftarrow_{س-2} \text{ : } \frac{2-}{7} = \frac{س-س-2}{5+س} \text{ نهايا } \leftarrow_{س-2} , \quad \frac{2-}{7} = \frac{س-2-س}{5+س} \text{ نهايا } \leftarrow_{س+2}$$

$$(12) \text{ نهايا } \leftarrow_{س-2} \frac{2-س+|2-|س}{2-|س|}$$

كله اكل:

$$0 = \frac{0}{2-س} \text{ نهايا } \leftarrow_{س-2} = \frac{2-س+س-2}{2-س} \text{ نهايا } \leftarrow_{س-2} \quad 2 = \frac{(2-س)^2}{2-س} \text{ نهايا } \leftarrow_{س+2} = \frac{2-س+2-س}{2-س} \text{ نهايا } \leftarrow_{س+2}$$

$$مغ = \frac{2س-|2-|س}{2-س} \text{ نهايا } \leftarrow_{س-2}$$

$$(13) \text{ نهايا } \leftarrow_{س-2} \frac{|6-س2|-|6-|س|}{س}$$

كله اكل:

$$\text{نهايا } \leftarrow_{س-2} \frac{6-س-6}{س} = \frac{(س2-6)-س-6}{س} \text{ نهايا } \leftarrow_{س-2} = 1$$

$$(14) \text{ نهايا } \leftarrow_{س-1} \frac{\sqrt{2(1-س)}}{1-س}$$

كله اكل:

$$\text{نهايا } \leftarrow_{س-1} \frac{|1-س|}{1-س}$$

كله اكل: يجب اعادة التعريفه

$$\text{نهايا } \leftarrow_{س+1} 1 = \text{نهايا } \leftarrow_{س-1} 1 = 1 = \text{نهايا } \leftarrow_{س-1} 1 = \text{نهايا } \leftarrow_{س-1} (س) = مغ$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \\ 1 < س \\ 1 > س \end{array} \right\} = (س)$$

$$(10) \quad \text{نها} \frac{\sqrt{16+8s-s^2}}{4-s} \leftarrow \text{نها} \frac{\sqrt{(4-s)^2}}{4-s}$$

كله اكل:

$$\text{نها} \frac{|4-s|}{4-s}$$

كله اكل: يجب اعادة التعريف

$$\text{نها} \frac{1}{4-s} \leftarrow \text{نها} \frac{1}{-4+s} \leftarrow \text{نها} \frac{1}{+4-s} \leftarrow \text{نها} \frac{1}{s-4} = (s) \quad \left. \begin{array}{l} s < 4 \\ s > 4 \end{array} \right\}$$

ملاحظة

$$|s| = \sqrt{s^2}$$

$$(16) \quad \text{نها} \frac{s}{\sqrt{s}} + \frac{s}{\sqrt{s}}$$

كله اكل:

$$\text{نها} \frac{s}{|s|} + \frac{s}{\sqrt{s}} \leftarrow \text{نها} \frac{s}{s} + \frac{s}{\sqrt{s}} = 1 + \frac{s}{\sqrt{s}}$$

www.awa2el.net

$$\text{نها} \frac{s-s}{s} + \frac{s}{\sqrt{s}} \leftarrow 1 - \frac{s}{\sqrt{s}} = \text{نها} \frac{s}{\sqrt{s}} - 1$$

$$(17) \quad \text{نها} \frac{2s}{\sqrt{2+\frac{1}{s}}} \times \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{s}}}$$

كله اكل: يجب توحيد المقامات داخل الجذر

$$\text{نها} \frac{2s}{\sqrt{2+\frac{1}{s}}} \times \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{s}}} = \text{نها} \frac{2s}{\sqrt{2+\frac{1}{s}}} \times \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{s}}}$$

$$\text{نها} \frac{2s}{\sqrt{2+\frac{1}{s}}} \times \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{s}}} = 2 \quad \text{نها} \frac{2s}{\sqrt{2+\frac{1}{s}}} \times \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{s}}} = 2 \quad \text{نها} \frac{2s}{\sqrt{2+\frac{1}{s}}} \times \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{s}}} = 2$$

$$(18) \text{ نها } \frac{\sqrt{s^3 - 2s}}{s}$$

كله اكل:

$$\text{نها } \frac{\sqrt{s^3 - 2s}}{s} = \frac{\sqrt{(s-1)^2 s}}{s}$$

$$\text{نها } \frac{\sqrt{(s-1)^2 s}}{s} = 1 \quad \text{نها } \frac{\sqrt{(s-1)^2 s}}{s} = 1$$

$$\text{نها } \frac{\sqrt{s^3 - 2s}}{s} = \text{ع م}$$

$$(19) \text{ نها } \frac{|s^2 - 5s + 4|}{|s^2 - 4s + 3|}$$

كله اكل:

$$\text{نها } \frac{|s^2 - 5s + 4|}{|s^2 - 4s + 3|} = \frac{|(s-1)(s-4)|}{|(s-1)(s-3)|} = \frac{3}{2}$$

$$(20) \text{ نها } (2 + 3s)^s$$

كله اكل:

$$\text{نها } (2 + 3s)^s = 1 \quad \text{نها } (2 + 3s)^s = 1 \quad \text{نها } (2 + 3s)^s = 1$$

(21) اذا كان:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{|s-2|}{s} < 2 \\ \frac{s-2}{s} \\ \frac{s}{2} \end{array} \right\} = (s) \text{ ، جد نها } (s)$$

حل:

$$\text{هنا (س)} = 1 \quad \text{هنا (س)} = \frac{1}{2} \quad \text{هنا (س)} = \frac{2-س}{2} = \frac{2-س}{2}$$

(٢٢) اذا كان $س = 2 + |س| + 2 = 4$ ، بحيث $\text{هنا (س)} = 4$

$\text{هنا (س)} = 0$

حل:

$$\text{هنا (س)} = 2 + س + 2 = 4 \Rightarrow 4 = 2 + 2 + 2 \Rightarrow 2 = 2 + 2$$

(١) $1 = 2 + 2$

(٢) $0 = 2 + 2 + 2 = 6$

من (١) ، (٢)

تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

$$1 = 2 + 2$$

www.awa2el.net

$$2 - \times / 1 = 2 + 2$$

$$1 = 2 + 2$$

$$2 = 4 - 2 -$$

$$1 = 2 \Rightarrow 1 = 2 \Rightarrow 3 = 3$$

(٢٣) اذا كان:

$$\text{جد قيمة (أ) علما أن هنا (س) موجودة.} \quad \left. \begin{array}{l} 3 > س \\ 3 \leq س \end{array} \right\} = (س)$$

حل:

$$ن(س) = \left. \begin{array}{l} \frac{س-٣}{٣-س} \\ \frac{س-٣}{س٢} \end{array} \right\} \begin{array}{l} س > ٣ \\ س \leq ٣ \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \text{نها} \\ \text{نها} \end{array} \begin{array}{l} ١- \\ -٣- \end{array} = ١- = ١-$$

$$\text{نها} \begin{array}{l} ٢س \\ ٣- \end{array} = ١- = ١- = ١- \leftarrow ١- = ١- \leftarrow \frac{١-}{٢} = ١- \begin{array}{l} +٣- \\ -٣- \end{array}$$

(٢٤) اذا كان:

$$ن(س) = \left. \begin{array}{l} \frac{س-٤}{|٤-س|} \\ \frac{س-٢}{٩-٢} \end{array} \right\} \begin{array}{l} س < ٤ \\ س > ٤ \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \text{نها} \\ \text{نها} \end{array} \begin{array}{l} ١- \\ ١- \end{array} = ١- = ١- \text{ علما ان } \text{نها} (س) \text{ موجودة.}$$

كل اكل:

$$ن(س) = \left. \begin{array}{l} \frac{س-٤}{٤-س} \\ \frac{س-٢}{٩-٢} \end{array} \right\} \begin{array}{l} س < ٤ \\ س > ٤ \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \text{نها} \\ \text{نها} \end{array} \begin{array}{l} ١- \\ +٤- \end{array} = ١- = ١-$$

$$\text{نها} \begin{array}{l} ٢س \\ ٩- \end{array} = ١- = ١- = ١- \leftarrow ١- = ١- \leftarrow \frac{١-}{٢} = ١- \begin{array}{l} -٤- \\ -٤- \end{array}$$

تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

(٢٥) اذا كان

$$ن(س) = \left. \begin{array}{l} \frac{|٢-س|}{٢-س} \\ \frac{٢+س٢}{٦} \end{array} \right\} \begin{array}{l} س > ٢ \\ س < ٢ \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \text{نها} \\ \text{نها} \end{array} \begin{array}{l} ١- \\ ١- \end{array} = ١- = ١- \text{ علما ان } \text{نها} (س) \text{ موجودة.}$$

كل اكل:

$$ن(س) = \left. \begin{array}{l} \frac{س-٢}{٢-س} \\ \frac{س-٢}{٦+س٢} \end{array} \right\} \begin{array}{l} س > ٢ \\ س < ٢ \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \text{نها} \\ \text{نها} \end{array} \begin{array}{l} ١- \\ ١- \end{array} = ١- = ١- \leftarrow \begin{array}{l} \text{نها} \\ \text{نها} \end{array} \begin{array}{l} ١- \\ ١- \end{array} = ١- = ١-$$

$$\frac{٧-}{٢} = ١- \leftarrow ١- = ١- = ١- \leftarrow ١- = ١- \leftarrow \frac{٧-}{٢} = ١-$$

(٢٦) اذا كانت :

$$\text{نها} = \frac{|س + ٢ - ٢|}{س - ٣} = ١ \text{ جد قيمة الثابت (١)}$$

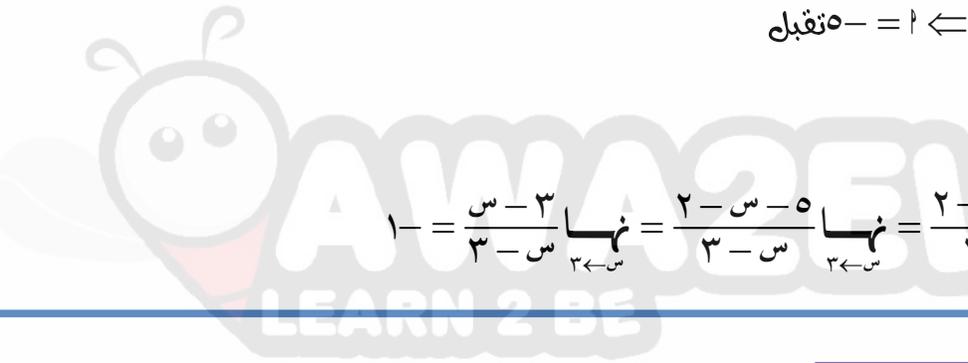
حل:

$$٢ = |٢ + ٣| \Leftarrow ٠ = ٢ - |٢ + ٣|$$

اما $٢ = ٢ + ٣ \Leftarrow ١ = ٢$ تعمل.او $٢ = ٢ + ٣ \Leftarrow ١ = ٥$ تقبل

توضيح

$$\text{نها} = \frac{|س - ٥ - ٢|}{س - ٣} = \frac{|س - ٣ - ٣|}{س - ٣} = ١$$



تمارين (٩) هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net



الجواب: أ - ١

$$(١) \text{ اذا كانت } \text{نها} = \frac{س + ٣}{٢ + |س - ٥|} = ٦ \text{ ، جد قيمة (١)}$$

الجواب: ٤

$$(٢) \text{ جد قيمة } \text{نها} = \frac{س^٣ \times |س - ٣ - ٨|}{س - ٢}$$

$$(٣) \text{ اذا كان } \text{نها} = \frac{س - ٢}{|س - ٢|} = \text{جس} - ٢ \left. \begin{array}{l} \text{، } س < ٢ \\ \text{، } س > ٢ \end{array} \right\}$$

الجواب: $\frac{٣}{٤}$ جد قيمة (ج) التي تجعل $\text{نها} = \frac{س - ٢}{|س - ٢|}$ موجودة .

اقتران اكبر عدد صحيح



مفهوم اكبر عدد صحيح: هو العدد الذي يقل عن أو يساوي العدد الموجود.

مثال: جد قيمة ما يلي:

$$3^- = [2, 8^-] \quad 2^- = [1, 5^-] \quad 2^- = [2^-] \quad 7 = [7, 9] \quad , \quad 2 = [2, 5] \quad , \quad 3 = [3]$$

حساب النهاية لاقتران اكبر عدد صحيح:

عند حساب النهاية لاقتران اكبر عدد صحيح نتبع ما يلي:

(١) التعويض المباشر.

(٢) اذا كان ناتج التعويض كسر عشري فإن النهاية تحسب بشكل مباشر.

(٣) اذا كان ناتج التعويض عدد صحيح فإن الاقتران يشعب وتحسب النهاية من اليمين واليسار.

(٤) اذا كان (أ) يمثل ناتج التعويض في النهايات داخل اقتران اكبر عدد صحيح وكان :

$$(١) \text{ اخص } \quad \text{فإن } [p] = [p] = [p]$$

$$(٢) \text{ اخص :}$$

(أ) وكان معامل س موجب فإن:

$$1-p = [p] \quad p = [p]$$

(ب) وكان معامل س سالب فإن:

$$p = [p] \quad 1-p = [p]$$

الامثلة

جد قيمة النهايات فيما يلي :

$$(1) \text{ نها } [س, ٦] = [٠, ٦+س] = ٢ \quad \leftarrow \text{س} ٢$$

$$(2) \text{ نها } [٣, ٥] = [١-س, ٣] = \frac{٣}{٢} \quad \leftarrow \text{س} \frac{٣}{٢}$$

$$(3) \text{ نها } [٣, ٥-] = [س-١, ٣] = ٤- \quad \leftarrow \text{س} \frac{٩}{٢}$$

$$(4) \text{ نها } [٣+س, ١٠] = [١٠, ٣+س] \text{ يشعب} \quad \leftarrow \text{س} ٧$$

كله اكله:

$$\text{نها } [٣+س, ١٠] = [١٠, ٣+س] = ١٠ = [١٠, ٣+س] = [٣+س, ١٠] = ٩ = [٣+س, ١٠] = ٣+س = ٣ \quad \leftarrow \text{س} ٧$$

$$(5) \text{ نها } [٣+س, ٧] = [٧, ٣+س] \text{ يشعب} \quad \leftarrow \text{س} ٢$$

كله اكله:

$$\text{نها } [٣+س, ٧] = [٧, ٣+س] = ٧ = [٧, ٣+س] = [٣+س, ٧] = ٦ = [٣+س, ٧] = ٣+س = ٣ \quad \leftarrow \text{س} ٢$$

$$(6) \text{ نها } [٨-س, ٤-] = [٤-, ٨-س] \text{ يشعب} \quad \leftarrow \text{س} ٢$$

كله اكله:

$$\text{نها } [٨-س, ٤-] = [٤-, ٨-س] = ٤- = [٤-, ٨-س] = [٨-س, ٤-] = ٥- = [٨-س, ٤-] = ٨-س = ٨ \quad \leftarrow \text{س} ٢$$

$$\text{نها } [٨-س, ٤-] = [٤-, ٨-س] = ٨-س = ٨ \quad \leftarrow \text{س} ٢$$

$$(7) \text{ نها } [2-] = [س-2] \text{ يشعب } \leftarrow_{س-4}$$

كل اكل:

$$\text{نها } [2-] = [س-2] \text{ يشعب } \leftarrow_{س-4} \quad 2- = -([2-]) = \text{نها } [س-2] \text{ يشعب } \leftarrow_{س-4} \quad 3- = +([2-]) = \text{نها } [س-2] \text{ يشعب } \leftarrow_{س-4}$$

$$(8) \text{ نها } [3] = [س2-5] \text{ يشعب } \leftarrow_{س-1}$$

كل اكل:

$$\text{نها } [3] = [س2-5] \text{ يشعب } \leftarrow_{س-1} \quad 2 = +([3]) = \text{نها } [س2-5] \text{ يشعب } \leftarrow_{س-1} \quad 3 = -([3]) = \text{نها } [س2-5] \text{ يشعب } \leftarrow_{س-1}$$

$$(10) \text{ نها } [س + \frac{3}{2}] \times س2 \text{ يشعب } \leftarrow_{س-2}$$

كل اكل:

$$\text{نها } [س + \frac{3}{2}] \times س2 \text{ يشعب } \leftarrow_{س-2} = 12$$

$$(9) \text{ نها } [س2 + \frac{1}{2}] + س2 + 4 \text{ يشعب } \leftarrow_{س-1}$$

كل اكل:

$$\text{نها } [س2 + \frac{1}{2}] + س2 + 4 \text{ يشعب } \leftarrow_{س-1} = 7$$

$$(12) \text{ نها } [س + 4] \times س3 \text{ يشعب } \leftarrow_{س-2}$$

كل اكل:

$$\text{نها } [س + 4] \times س3 \text{ يشعب } \leftarrow_{س-2} = 36$$

$$\text{نها } [س + 4] \times س3 \text{ يشعب } \leftarrow_{س-2} = 30$$

$$\text{نها } [س + 4] \times س3 \text{ يشعب } \leftarrow_{س-2} = 2$$

$$(11) \text{ نها } \frac{[س + \frac{1}{2}]}{س2 + 1} \text{ يشعب } \leftarrow_{س-2}$$

كل اكل:

$$\frac{2}{0} = \frac{[2, 0]}{0}$$

$$(١٤) \text{ نها } \frac{٢س٢}{[١+س]} \text{ يشعب } \begin{matrix} ٢ \\ \leftarrow س \end{matrix}$$

أكل:

$$\frac{٨}{٣} = \frac{٢س٢}{٣} \text{ نها } \begin{matrix} ٢ \\ \leftarrow س \end{matrix} = \frac{٢س٢}{[١+س]} \text{ نها } \begin{matrix} ٢ \\ \leftarrow س \end{matrix}$$

$$٤ = \frac{٢س٢}{٢} \text{ نها } \begin{matrix} ٢ \\ \leftarrow س \end{matrix} = \frac{٢س٢}{[١+س]} \text{ نها } \begin{matrix} ٢ \\ \leftarrow س \end{matrix}$$

$$٢ع = \frac{٢س٢}{[١+س]} \text{ نها } \begin{matrix} ٢ \\ \leftarrow س \end{matrix}$$

$$(١٣) \text{ نها } \frac{٢}{٣+[س]} \text{ يشعب } \begin{matrix} ٢ \\ \leftarrow س \end{matrix}$$

أكل:

$$\frac{٢}{٥} = \frac{٢}{٣+[س]} \text{ نها } \begin{matrix} ٢ \\ \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{٢}{٣+[س]} \text{ نها } \begin{matrix} ٢ \\ \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\text{نها } \frac{٢}{٣+[س]} \text{ نها } \begin{matrix} ٢ \\ \leftarrow س \end{matrix} = ٢ع$$

$$(١٦) \text{ نها } [٣+س] - [٥+س] \begin{matrix} ٣ \\ \leftarrow س \end{matrix}$$

أكل:

$$٢ = ٣ - [س] - ٥ + [س] \text{ نها } \begin{matrix} ٣ \\ \leftarrow س \end{matrix}$$

خصائص مهمة: اذا كان لوص فإن:

$$(١) \text{ } ٢ + [س] = [٢ + س]$$

$$(٢) \text{ } ٢ + [س -] = [٢ + س -] = [س - ٢]$$

$$(١٥) \text{ نها } \frac{٤+٢س}{[س-٣]} \text{ يشعب } \begin{matrix} ٤+٢س \\ \leftarrow س \end{matrix}$$

أكل:

$$٥ = \frac{٤+٢س}{١} \text{ نها } \begin{matrix} ٤+٢س \\ \leftarrow س \end{matrix} = \frac{٤+٢س}{[س-٣]} \text{ نها } \begin{matrix} ٤+٢س \\ \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\frac{٥}{٢} = \frac{٤+٢س}{٢} \text{ نها } \begin{matrix} ٤+٢س \\ \leftarrow س \end{matrix} = \frac{٤+٢س}{[س-٣]} \text{ نها } \begin{matrix} ٤+٢س \\ \leftarrow س \end{matrix}$$

$$\text{نها } \frac{٤+٢س}{[س-٣]} \text{ نها } \begin{matrix} ٤+٢س \\ \leftarrow س \end{matrix} = ٢ع$$

$$(١٧) \text{ نها } [٥+س] + [س-٦] \begin{matrix} ٥+س \\ \leftarrow س \end{matrix}$$

أكل: لا نستطيع تطبيق الخصائص لعدم وجود اختصار.

$$١٠ = (٢+٨) = [س-٦] + [٥+س] \begin{matrix} ٥+س \\ \leftarrow س \end{matrix}$$

$$١٠ = [س-٦] + [٥+س] \text{ نها } \begin{matrix} ٥+س \\ \leftarrow س \end{matrix} \therefore$$

$$١٠ = (٣+٧) = [س-٦] + [٥+س] \begin{matrix} ٥+س \\ \leftarrow س \end{matrix}$$

الاستاذ عادل عواد

النهايات والاتصال

الابداع في الرياضيات

$$(18) \text{ نها } \frac{\left[\begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \right] s + 4}{s-2} + s$$

كله اكل:

$$\text{نها } \frac{s+2}{s-2} = 1$$

$$(19) \text{ نها } \frac{s^2 - [2s]}{s^2 - 2s - 20}$$

كله اكل:

$$\frac{1}{10} = \frac{s^2 - 5}{(s+5)(s-4)}$$

$$(20) \text{ نها } (s+2) [s] = 1$$

كله اكل:

$$\text{نها } (s+2) [s] = 1$$

$$(21) \text{ نها } (s+2) [s] = 2$$

كله اكل:

$$\text{نها } (s+2) [s] = 2 \Rightarrow 16 = 2$$

$$\text{نها } (s+2) [s] = 2 \Rightarrow 4 = 1$$

$$\text{نها } (s+2) [s] = 2 \Rightarrow 2 = 2$$

$$\text{نها } (s+2) [s] = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$\text{نها } (s+2) [s] = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

www.awa2el.net

$$(22) \text{ نها } \frac{[s]}{s}$$

كله اكل:

$$\text{نها } \frac{[s]}{s} = 0 \Rightarrow$$

$$\text{نها } \frac{[s]}{s} = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$\text{نها } \frac{[s]}{s} = 2 \Rightarrow$$

العمليات الحسابية تسبق الاجراءات الحسابية

$$(٢٣) \text{ نها } \frac{[س] - ٢}{٢ + س} \leftarrow_{٢ \leftarrow س}$$

حل: اكل:

$$٠ = \frac{٠}{٢ + س} \leftarrow_{٢ \leftarrow س} \text{ نها } = \frac{[س] - ٢}{٢ + س} \leftarrow_{٢ \leftarrow س} \text{ نها}$$

$$\frac{٣ -}{٤} = \frac{٣ -}{٢ + س} \leftarrow_{٢ \leftarrow س} \text{ نها } = \frac{[س] - ٢}{٢ + س} \leftarrow_{٢ \leftarrow س} \text{ نها}$$

$$\text{ نها } \frac{[س] - ٢}{٢ + س} \leftarrow_{٢ \leftarrow س} \text{ م ع}$$

(٢٤) اذا كان :

$$ن(س) = \left\{ \begin{array}{l} |س - ١| ، س \leq ٣ \\ [س - ١] ، س > ٣ \end{array} \right\} \text{ جد نها } ن(س) . ?$$

www.awa2el.net

حل: اكل:

$$\text{ نها } |س - ١| \leftarrow_{٣ \leftarrow س} \text{ نها } (س - ١) = ٢ ، \text{ نها } [س - ١] \leftarrow_{٣ \leftarrow س} \text{ نها } [٢] = ١$$

∴ نها ن(س) م ع

حل اخر:

$$ن(س) = \left\{ \begin{array}{l} |س - ١| ، س \leq ٣ \\ ١ ، س \geq ٢ \end{array} \right\}$$

$$\text{ نها } |س - ١| = ٢ \leftarrow_{٣ \leftarrow س} \text{ نها } ١ = ١ \leftarrow_{٣ \leftarrow س} \text{ نها } [٢] = ١ \leftarrow_{٣ \leftarrow س} \text{ نها } (س) = م ع$$

(٢٥) اذا كان

$$U(S) = \left. \begin{array}{l} |1-S|, 0 \leq S \leq 2 \\ [1+S], 2 \leq S < 3 \end{array} \right\} \text{جد هنا } (S) \text{؟}$$

حل الحل:

$$\text{هنا } [1+S] \leftarrow \text{هنا } [3] \text{ ، } \text{هنا } |1-S| \leftarrow \text{هنا } (1-S) = 3$$

$$\therefore \text{هنا } (S) = 3$$

حل اخر:

$$U(S) = \left. \begin{array}{l} 1-2S, 0 \leq S < \frac{1}{2} \\ 2-S, \frac{1}{2} \leq S < 2 \\ 3, 2 \leq S < 3 \end{array} \right\} \text{جد هنا } (S) \text{؟}$$

$$\text{هنا } 3 = 3 \text{ ، } \text{هنا } 1-2S = 3 \text{ ، } \text{هنا } (S) = 3$$

(٢٦) اذا كان:

$$U(S) = \left. \begin{array}{l} \frac{|S-4|}{S-4}, S < 4 \\ [S-5], S > 4 \end{array} \right\} \text{جد هنا } (S) \text{؟}$$

حل الحل:

$$\text{هنا } \frac{|S-4|}{S-4} \leftarrow \text{هنا } \frac{(S-4)}{S-4} = 1 \text{ ، } \text{هنا } [S-5] \leftarrow \text{هنا } [1] = 1$$

$$\therefore \text{هنا } (S) = 1$$

حل اخر:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4-s}{4-s} = (s) \\ 4 < s < 3, 1 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{نهان (س)} = 1 \\ \text{نهان (س)} = 1 \\ \text{نهان (س)} = 1 \end{array}$$

(27) اذا كان :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4-s}{|2+s|} = (s) \\ 2- > s < 2- \\ \text{جد نهان (س)} \\ 2- < s < 2- \end{array} \right\}$$

حل اكل:

$$\begin{array}{l} \text{نهان (س)} = [4+s] \\ \text{نهان (س)} = [2] \\ \text{نهان (س)} = \frac{(2-s)(2+s)}{(2+s)-} \\ \text{نهان (س)} = \frac{4-s}{|2+s|} \end{array}$$

∴ نهان (س) = م غ

www.awa2el.net

حل اخر:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{(2-s)(2+s)}{(2+s)-} = (s) \\ 2- > s < 2- \\ 1- > s > 2- \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{نهان (س)} = 2 \\ \text{نهان (س)} = 2 \\ \text{نهان (س)} = م غ \end{array}$$

تمرين (١٠)



(١) اذا كان:

أجواب: ٣

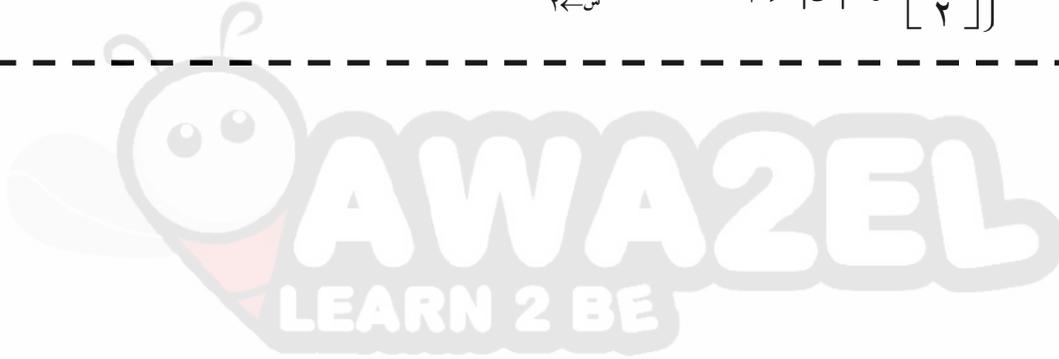
جد هنا (س)
س ← ١

$$\left. \begin{array}{l} |s-4| = (s) \\ s \geq 1 \\ s < 1 \end{array} \right\}$$

أجواب: غير موجودة

جد هنا (س)
س ← ٢

$$\left. \begin{array}{l} |s| = (s) \\ |s| \leq 2 \\ |s| > 2 \\ \left[\frac{s}{2} \right] \end{array} \right\} = (s) \quad (2)$$



تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net

ايجاد قيمة الثابت في اقتران اكبر عدد

$$(1) \text{ جد مجموعة قيم } s \text{ التي تجعل } \underset{s \leftarrow}{\text{نها}} [2s] = 3$$

حل: أكل

$$3 > 2 > \frac{3}{2} \leftarrow 4 > 2 > 3 \quad \text{أ} \leftarrow \exists \left(\frac{3}{2}, 2 \right) \text{ في هذا المثال لم يتم وضع المساواة عند العدد } 3$$

فكر في ذلك

$$(2) \text{ اذا كانت } \underset{s \leftarrow +4}{\text{نها}} [2+s] = 5 \text{ جد قيمة } s.$$

حل: أكل

$$3 = +([24]) \leftarrow 5 = +([2+14])$$

$$1 > 2 \geq \frac{3}{4} \leftarrow 4 > 14 \geq 3$$

$$(3) \text{ اذا كانت } \underset{s \leftarrow -4}{\text{نها}} [2+s] = 5 \text{ جد قيمة } s.$$

حل: أكل

$$3 = -([24]) \leftarrow 5 = -([2+14])$$

$$1 \geq 2 > \frac{3}{4} \leftarrow 4 \geq 14 > 3$$

$$(4) \text{ اذا كانت } \underset{s \leftarrow +2}{\text{نها}} [1+s] = 4 \text{ جد قيمة } s.$$

حل: أكل

$$0^- = {}^+([2^-]) \leftarrow \varepsilon^- = {}^+([1+2^-])$$

$$2^- \geq 1 > \frac{0^-}{2} \leftarrow \varepsilon^- \geq 2^- > 0^-$$

٥) في امثال السابق جد قيمته اذا كانت $1 \in \mathbb{V}$.

الحل:

$$\varepsilon^- = 1 - 1 + 2^- \leftarrow \varepsilon^- = {}^+([1+2^-])$$

$$2^- = 1 \leftarrow \varepsilon^- = 2^-$$



تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net

النهايات المثلثية



في النهايات المثلثية نتبع الخطوات التالية :

❖ التعويض المباشر.

❖ تقبل جميع النتائج ما عدا $\frac{\pi}{2}$.

❖ اذا نتج $\frac{\pi}{2}$ نتبع احدى الطرق التالية في الحل بالاعتماد على النظريات التالية:

نظرية

اذا كانت s زاوية مقاسة بالتقدير الدائري فإن :

$$c = \frac{1}{s}$$

نظرية

اذا كانت s زاوية مقاسة بالتقدير الدائري فإن :

$$c = \frac{\pi}{s}$$

ملاحظة: (٢)

اذا كانت s زاوية مقاسة بالتقدير الستيني فإن:

$$c = \frac{\pi}{180s}$$

ملاحظة: (١)

اذا كانت s زاوية مقاسة بالتقدير الستيني فإن :

$$c = \frac{\pi}{180s}$$

نتائج على النظريات السابقة

$$(٣) \text{ نها } \frac{٣س}{جابس} = \frac{٢}{ب}$$

$$(٢) \text{ نها } \frac{٢س}{ظاس} = \frac{٢}{ب}$$

$$(١) \text{ نها } \frac{٢س}{جاس} = \frac{٢}{ب}$$

$$(٦) \text{ نها } \frac{٢س}{ظابس} = \frac{٢}{ب}$$

$$(٥) \text{ نها } \frac{٢س}{جابس} = \frac{٢}{ب}$$

$$(٤) \text{ نها } \frac{٢س}{ظابس} = \frac{٢}{ب}$$

الامثلة

(١) اذا كانت نها $\frac{جاس}{٣س} = \frac{٥}{٣}$ ، اثبت ذلك.

كل اكل : نقسم على الراوية $\frac{٥}{٣} = \frac{جاس}{٣س} \frac{٣س}{٣س} = \frac{٥س}{٣س}$ نها $\frac{٥س}{٣س}$

(٢) اذا كانت نها $\frac{جاس}{٣س} = \frac{٥}{٣}$ ، اثبت ذلك.

كل اكل : نقسم على الراوية $\frac{٥}{٣} = \frac{جاس}{٣س} \frac{٣س}{٣س} = \frac{٥س}{٣س}$ نها $\frac{٥س}{٣س}$

ملاحظة: نستطيع ايجاد الجواب في الامثلة السابقة بشكل مباشر كما في التمرين التالي .

جد قيمة النهايات فيما يلي :

$\frac{٣}{٢} = \frac{ظاس}{٣س}$ نها $\frac{ظاس}{٣س}$ (٤)	$\frac{٥}{٦} = \frac{جاس}{٣س}$ نها $\frac{جاس}{٣س}$ (٣)	$\frac{٣}{٧} = \frac{جاس}{٣س}$ نها $\frac{جاس}{٣س}$ (٢)	$\frac{٤}{س} = \frac{جاس}{س}$ نها $\frac{جاس}{س}$ (١)
$\frac{٦}{٧} = \frac{٣جاس}{٣س}$ نها $\frac{٣جاس}{٣س}$ (٧)	$\frac{٢٠}{٦} = \frac{٤جاس}{٣س}$ نها $\frac{٤جاس}{٣س}$ (٦)	$\frac{١}{٤} = \frac{ظاس}{٣س}$ نها $\frac{ظاس}{٣س}$ (٥)	

$$(8) \text{ نها } \frac{\text{جا } \pi}{\pi^2} = \frac{\text{جا } \pi}{\pi^2} = 0 \text{ (اذا كانت س لا تؤول الى صفر يجب التعويض المباشر)}$$

$$(9) \text{ نها } \frac{\text{جا}(2-س)}{(2-س)} \xrightarrow{س \rightarrow 2}$$

$$\text{كل اكل: نفرض ان } ص = 2 - س \quad س \leftarrow 2 \quad ; \quad ص \leftarrow 0$$

$$\text{نها } \frac{\text{جا } ص}{ص} = 1$$

$$(10) \text{ نها } \frac{\text{جا}(3-س)}{(7-س)} \xrightarrow{س \rightarrow 2}$$

كل اكل:

$$\therefore \text{نها } \frac{\text{جا } 3}{7} \xrightarrow{س \rightarrow 2}$$

$$\text{نفرض ان } ص = 3 - س \quad س \leftarrow 2 \quad ; \quad ص \leftarrow 0$$

$$\text{نها } \frac{\text{جا } 3}{7} \xrightarrow{س \rightarrow 2}$$

$$(11) \text{ نها } \frac{\text{ظا}(4-س)}{(5-س)} \xrightarrow{س \rightarrow 1}$$

كل اكل:

$$\therefore \text{نها } \frac{\text{ظا } 4}{5} \xrightarrow{س \rightarrow 1}$$

$$\text{نفرض ان } ص = 4 - س \quad س \leftarrow 1 \quad ; \quad ص \leftarrow 0$$

$$\text{نها } \frac{\text{ظا } 4}{5} \xrightarrow{س \rightarrow 1}$$

$$(12) \text{ نها } \frac{\text{جا}^3(س-1)}{\text{ظا}^2(س-1)}$$

كله اكل:

نفرض ان $ص = س - 1$; $س \leftarrow 1$; $ص \leftarrow 0$

$$\text{نها } \frac{\text{جا}^3(س-1)}{\text{ظا}^2(س-1)} = \text{نها } \frac{\text{جا}^3 \text{ ص}}{\text{ظا}^2 \text{ ص}} = \text{نها } \frac{\text{جا} \text{ جا} \text{ جا} \text{ ص}}{\text{ظا} \text{ ظا} \text{ ظا} \text{ ص}} = \text{نها } \left(\frac{\text{جا} \text{ ص}}{\text{ظا} \text{ ص}} \right) = \text{نها } \frac{\text{جا} \text{ ص}}{\text{ظا} \text{ ص}} = \text{نها } \frac{\text{جا}}{\text{ظا}} = 0$$

$$(13) \text{ نها } \frac{\text{جا}(س-1)}{\text{ظا}(س-2)}$$

كله اكل:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\text{جا} \text{ ص}}{\text{ص}} = \text{نها } \frac{1}{(س+1)} \times \text{نها } \frac{\text{جا}(س-1)}{(س-1)} = \text{نها } \frac{\text{جا}(س-1)}{(س+1)(س-1)}$$

$$(14) \text{ نها } \frac{(س-3)}{\text{ظا}(س-1)}$$

كله اكل:

$$3 = 3 \times 1 = (س+2) \times \text{نها } \frac{(س-1)}{\text{ظا}(س-1)} = \text{نها } \frac{(س+2)(س-1)}{\text{ظا}(س-1)}$$

$$(15) \text{ نها } \frac{(س-9)}{\text{ظا}(س-3)}$$

كله اكل:

$$\div = \frac{(س-9)}{\text{ظا}(س-3)}$$

$$6 = 6 \times 1 = (س+3) \times \text{نها } \frac{(س-3)}{\text{ظا}(س-3)} = \text{نها } \frac{(س+3)(س-3)}{\text{ظا}(س-3)}$$

حالة القسمة على الزاوية

١

س: جد قيمة النهايات فيما يلي:

$$(1) \lim_{s \rightarrow 5} \frac{\text{نهايا} (s^2 - 25)}{(s - 5)}$$

حل: القسمة على الزاوية

$$10 = \frac{\lim_{s \rightarrow 5} \frac{1}{(s-5)}}{\lim_{s \rightarrow 5} \frac{(s-5)(s+5)}{(s-5)}} = \frac{\lim_{s \rightarrow 5} \frac{1}{(s-5)}}{\lim_{s \rightarrow 5} (s+5)} = \frac{1}{10}$$

$$(2) \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\text{نهايا} (s^3 - 1)}{(s - 1)}$$

حل: أكل:

حل: القسمة على الزاوية

$$3 = \frac{\lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{(s-1)}}{\lim_{s \rightarrow 1} \frac{(s-1)(s^2 + s + 1)}{(s-1)}} = \frac{\lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{(s-1)}}{\lim_{s \rightarrow 1} (s^2 + s + 1)} = \frac{1}{3}$$

$$(3) \lim_{s \rightarrow 2} \frac{\text{نهايا} (s^3 + 2s^2 - 5s + 6)}{(s - 2)}$$

حل: أكل:

$$0 = \frac{0}{0} = \frac{\lim_{s \rightarrow 2} \frac{(s^3 + 2s^2 - 5s + 6)}{(s - 2)}}{\lim_{s \rightarrow 2} \frac{(s - 2)(s^2 + 3s + 6)}{(s - 2)}} = \frac{\lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{(s - 2)}}{\lim_{s \rightarrow 2} \frac{(s^2 + 3s + 6)}{(s - 2)}} = \frac{1}{0}$$

اخراج س
عامل
مشترك

$$(٤) \text{ نها } \frac{\text{ظا}(\text{جاس})}{(\text{س})}$$

كله اكل : القسمة على الزاوية

$$\text{ظا}(\text{جاس})$$

$$1 = \frac{\text{نها}}{\text{جاس}} = \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = \frac{\text{نها}}{\text{س}}$$

$$(٥) \text{ نها } \frac{\text{جا}(\text{ظا}٧\text{س})}{(\text{س}٨)}$$

كله اكل : القسمة على الزاوية

$$\text{جا}(\text{ظا}٧\text{س})$$

$$\frac{٧}{٨} = \frac{\text{نها}}{\text{ظا}٧\text{س}} = \frac{\text{ظا}٧\text{س}}{\text{س}٨}$$

ملاحظة: نلاحظ من خلال الامثلة السابقة انه من شروط القسمة على الزاوية:

- (١) ان يكون ناتج التعويض في الزاوية = صفر
(٢) وناتج التعويض في النهاية = $\frac{0}{0}$



جد قيمة النهايات فيما يلي :

$$(١) \text{ نها } \frac{\text{ظا}(\sqrt{\text{س}}-١)}{(\text{س}-١)}$$

الجواب: $\frac{1}{2}$

حالة توزيع البسط على المقام

٢

جد قيمة النهايات فيما يلي :

$$(١) \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{نهايا جاهس} + \text{ظا٧س}}{\text{س}٣}$$

كله اكل :

$$٤ = \frac{١٢}{٣} = \frac{٧}{٣} + \frac{٥}{٣} = \frac{\text{نهايا ظا٧س}}{\text{س}٣} + \frac{\text{نهايا جاهس}}{\text{س}٣}$$

$$(٢) \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{نهايا ٥س} + \text{ظا٧س} - \text{جا٢س}}{\text{س}٢}$$

كله اكل :

$$٥ = \frac{١٠}{٢} = \frac{٢}{٢} - \frac{٧}{٢} + \frac{٥}{٢} = \frac{\text{نهايا ٥س}}{\text{س}٢} - \frac{\text{نهايا ظا٧س}}{\text{س}٢} + \frac{\text{نهايا جا٢س}}{\text{س}٢}$$

$$(٣) \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{نهايا ٣س} + \text{ظا٧س}}{\text{جا٣س}}$$

كله اكل :

$$٣ = \frac{٩}{٣} = \frac{٧}{٣} + \frac{٢}{٣} = \frac{\text{نهايا ٣س}}{\text{جا٣س}} + \frac{\text{نهايا ظا٧س}}{\text{جا٣س}}$$

$$(٤) \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{نهايا ٢س}^٢}{٥س}$$

كله اكل :

$$\frac{٤}{٥} = ٢ \times \frac{٢}{٥} = \frac{\text{نهايا ٢س}}{\text{س}} \times \frac{\text{نهايا ٢س}}{٥س}$$

$$(٥) \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{نهايا ٥س} + \text{ظا٧س} + \text{جا}٣٢\text{س}}{\text{س جاهس}}$$

كله اكل :

$$\frac{٤٤}{٥} = \frac{٩}{٥} + ٧ = \frac{\text{نهايا ٣س}^٢}{\text{س جاهس}} + \frac{\text{نهايا ٥س} + \text{ظا٧س}}{\text{س جاهس}} = \frac{\text{نهايا ٥س} + \text{ظا٧س} + \text{جا}٣٢\text{س}}{\text{س جاهس}}$$

$$(6) \text{ نها } \frac{\text{جا}^2 \text{س}}{\text{س}^2 + \text{ظا}^3 \text{س}}$$

كل أكل: القسمة على س

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{3+2} = \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{ظا}^3 \text{س}}{\text{س}} + \frac{\text{س}^2}{\text{س}}}$$

$$(7) \text{ نها } \frac{\text{جاه}^2 \text{س} + \text{ظا}^7 \text{س}}{\text{س}^3 + \text{جا}^6 \text{س}}$$

كل أكل: القسمة على س

$$\frac{4}{3} = \frac{12}{9} = \frac{7+5}{6+3} = \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}} + \frac{\text{جاه}^5 \text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{س}^3}{\text{س}} + \frac{\text{جا}^6 \text{س}}{\text{س}}}$$

$$(8) \text{ نها } \frac{\text{س} + \text{جا}^2 \text{س}}{\text{س}^2 + \text{ظا}^5 \text{س}}$$

كل أكل: القسمة على س

$$\frac{1}{3} = \frac{0 \times 1 + 1}{1+2} = \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}} + \frac{\text{جا}^2 \text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{س}^2}{\text{س}} + \frac{\text{ظا}^5 \text{س}}{\text{س}}}$$



جد قيمة النهايات فيما يلي :

$$(1) \text{ نها } \frac{\text{ظا}^4 \text{س} \times \text{جاه}^5 \text{س} + \text{جا}^3 \text{س}}{\text{س}^2 + \text{جا}^5 \text{س}}$$

$$\text{أجواب: } \frac{3}{2}$$

$$(2) \text{ نها } \frac{\text{س} \times \text{جا}^2 \text{س} + \text{ظا}^5 \text{س}}{\text{س}^4 + \text{جا}^2 \text{س} \times \text{ظا}^5 \text{س}}$$

$$\text{أجواب: } \frac{27}{5}$$

حالة استخدام المتطابقات

٣

جد قيمة النهايات فيما يلي :

$$(1) \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1 - \text{جتا}^2 s}{s \text{ جاس}}$$

حل: كحل:

$$1 = 1 \times 1 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{جتا}^2 s}{s \text{ جاس}} \times \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s \text{ جاس}}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{جتا}^2 s}{s \text{ جاس}}$$

$$(2) \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{جتا}^3 s \text{ ظا}^2 s}{\text{جتا}^2 s - 1}$$

حل: كحل:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{جتا}^3 s \text{ ظا}^2 s}{\text{جتا}^2 s - 1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{جتا}^3 s}{\text{جتا}^2 s} \times \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{ظا}^2 s}{\text{جتا}^2 s - 1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{جتا}^3 s}{\text{جتا}^2 s} \times \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{ظا}^2 s}{\text{جتا}^2 s - 1}$$

تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net

$$(3) \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{قا}^2 s - 1}{s}$$

حل: كحل:

$$1 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{ظا}^2 s}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{ظا}^2 s}{s} (1) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{ظا}^2 s}{s}$$

$$(4) \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}^2 s - \text{جتا}^2 s}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$$

حل: كحل:

$$\lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}^2 s - \text{جتا}^2 s}{\text{جاس} - \text{جتاس}} = \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}^2 s - \text{جتا}^2 s}{\text{جاس} - \text{جتاس}} \times \frac{\text{جتاس} + \text{جتاس}}{\text{جتاس} + \text{جتاس}} = \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\text{جتاس} - \text{جتاس})(\text{جتاس} + \text{جتاس})}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$$

$$(5) \text{ نها } \frac{\text{جتا}^2 \text{س}}{\text{جاس} - \text{جتا} \text{س}} \leftarrow \frac{\pi}{4} \text{س}$$

كله اكل:

$$\sqrt{2} - = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{2-}{\sqrt{2}} = \frac{(\text{جتا} - \text{جاس})(\text{جتا} + \text{جاس})}{\text{جاس} - \text{جتا} \text{س}} \text{ نها } \frac{\text{جتا}^2 \text{س} - \text{جاس}^2 \text{س}}{\text{جاس} - \text{جتا} \text{س}} \leftarrow \frac{\pi}{4} \text{س}$$

$$(6) \text{ نها } \frac{\text{ظا}^2 \text{س}}{1 + \text{قاس} \text{س}} \leftarrow \frac{\pi}{4} \text{س}$$

كله اكل:

$$2- = \frac{(1 + \text{قاس})(1 - \text{قاس})}{(1 + \text{قاس})} \text{ نها } \frac{1 - \text{قاس}^2 \text{س}}{1 + \text{قاس} \text{س}} \leftarrow \frac{\pi}{4} \text{س}$$

$$(7) \text{ نها } \frac{2 \text{جاس} - 1}{3 - 4 \text{جتا}^2 \text{س}} \leftarrow \frac{\pi}{4} \text{س}$$

كله اكل:

$$\frac{2 \text{جاس} - 1}{3 - 4 \text{جتا}^2 \text{س}} \text{ نها } = \frac{2 \text{جاس} - 1}{3 - 4 \text{جتا}^2 \text{س}} \text{ نها } = \frac{2 \text{جاس} - 1}{3 - 4 \text{جتا}^2 \text{س}} \text{ نها } \leftarrow \frac{\pi}{4} \text{س}$$

$$\frac{1-}{2} = \frac{2 \text{جاس} - 1}{(2 \text{جاس} + 1)(2 \text{جاس} - 1)} \text{ نها } \leftarrow \frac{\pi}{4} \text{س}$$



جد قيمة النهايات فيما يلي :

أجواب: ١

$$(1) \text{ نها } \frac{1 - \text{ظاس}}{\text{جتا}^2 \text{س}} \leftarrow \frac{\pi}{4} \text{س}$$

أجواب: ١ -

$$(2) \text{ نها } \frac{1 - \text{ظاس}}{\text{قاس} \text{س}} \leftarrow \frac{\pi}{4} \text{س}$$

أكل باستخدام طريقة الاستبدال

٤

قوانين مهمة لهذه الحالة

$$\text{جتا}(س \pm ص) = \text{جتا} س \mp \text{جتا} ص \mp \text{جتا} س \mp \text{جتا} ص$$

$$\text{جا}(س \pm ص) = \text{جتا} س \pm \text{جتا} ص \pm \text{جتا} س \pm \text{جتا} ص$$

الابداع في الرياضيات

مثال

جد قيمة النهايات فيما يلي :

$$(1) \lim_{s \rightarrow \pi} \frac{\text{جتا} س}{\pi - س}$$

أكل:

$$\text{نفرض } ص = \pi - س = \pi - س \quad \leftarrow \text{س} = \pi + ص \quad \leftarrow \text{س} = \pi - ص \quad \leftarrow \text{ص} = \pi - س$$

$$\lim_{s \rightarrow \pi} \frac{\text{جتا} س}{\pi - س} = \lim_{s \rightarrow \pi} \frac{\text{جتا}(\pi + ص)}{\pi - س} = \lim_{s \rightarrow \pi} \frac{\text{جتا}(\pi + ص) + \text{جتا} ص}{\pi - س} = \lim_{s \rightarrow \pi} \frac{\text{جتا}(\pi + ص) - \text{جتا} ص}{\pi - س} = 1$$

تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net

$$(2) \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا} 2س}{\left(\frac{\pi}{2} - س\right) \left(\frac{\pi}{2} + س\right)}$$

أكل:

$$\lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا} 2س}{\left(\frac{\pi}{2} - س\right) \left(\frac{\pi}{2} + س\right)} = \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا} 2س}{\left(\frac{\pi}{2} - س\right) \left(\frac{\pi}{2} + س\right)}$$

$$\text{نفرض } ص = \frac{\pi}{2} - س = \frac{\pi}{2} - س \quad \leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{2} + ص \quad \leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{2} - ص \quad \leftarrow \text{ص} = \frac{\pi}{2} - س$$

$$\lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا} 2س}{\left(\frac{\pi}{2} - س\right) \left(\frac{\pi}{2} + س\right)} = \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا} 2س}{\left(\frac{\pi}{2} - س\right) \left(\frac{\pi}{2} + س\right)} = \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا} 2س}{\left(\frac{\pi}{2} - س\right) \left(\frac{\pi}{2} + س\right)}$$

$$(3) \lim_{s \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا} س}{\pi - س}$$

أكل:

$$\text{نفرض } \sin = \sin - \frac{\pi}{2} \leftarrow \sin = \sin + \frac{\pi}{2} \leftarrow \sin \leftarrow \frac{\pi}{2} ; \sin \leftarrow 0$$

$$\sin \leftarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\sin \leftarrow \frac{\pi}{2}}{\sin \leftarrow \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin \leftarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \leftarrow \frac{\pi}{2}}{\sin \leftarrow \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin \leftarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \leftarrow \frac{\pi}{2}}{\sin \leftarrow \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin \leftarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \leftarrow \frac{\pi}{2}}{\sin \leftarrow \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{(٤) نهيا } \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{4} \leftarrow \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{4} \leftarrow \sin \frac{\pi}{4}$$

كله اكل:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{4}}{4} \leftarrow \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{4} \leftarrow \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{4} \leftarrow \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{4} \leftarrow \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\text{نفرض } \sin = \sin - 2 \leftarrow \sin = \sin + 2 \leftarrow \sin \leftarrow 2 ; \sin \leftarrow 0$$

$$\sin \leftarrow \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \leftarrow \frac{\pi}{4}}{4} \leftarrow \sin \leftarrow \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \leftarrow \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \leftarrow \frac{\pi}{4}}{4} \leftarrow \sin \leftarrow \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \leftarrow \frac{\pi}{4}}{4} \leftarrow \sin \leftarrow \frac{\pi}{4}$$

$$\text{(٥) نهيا } \frac{\sin 2\pi}{\pi^3 - \sin^3} \leftarrow \sin 2\pi = \frac{\sin 2\pi}{\pi^3 - \sin^3} \leftarrow \sin 2\pi$$

كله اكل:

$$\text{نفرض } \sin = \sin - \pi^3 \leftarrow \sin = \sin + \pi^3 \leftarrow \sin \leftarrow \pi^3 ; \sin \leftarrow 0$$

$$\frac{\sin 2\pi}{\pi^3 - \sin^3} \leftarrow \sin 2\pi = \frac{\sin 2\pi}{\pi^3 - \sin^3} \leftarrow \sin 2\pi = \frac{\sin 2\pi}{\pi^3 - \sin^3} \leftarrow \sin 2\pi$$

$$\frac{\sin 2\pi}{\pi^3 - \sin^3} \leftarrow \sin 2\pi = \frac{\sin 2\pi}{\pi^3 - \sin^3} \leftarrow \sin 2\pi = \frac{\sin 2\pi}{\pi^3 - \sin^3} \leftarrow \sin 2\pi$$

$$(6) \text{ نها } \frac{\text{ظتا}(\frac{\pi}{2})}{\pi \leftarrow \text{س}} = \frac{\text{ظتا}(\frac{\pi}{2})}{\pi - \text{س}}$$

كحل:

$$\text{نفرض } \text{س} - \pi = \text{ص} \leftarrow \text{س} = \pi - \text{ص} \leftarrow \text{س} \leftarrow \pi \leftarrow \text{س} \leftarrow \text{ص} \leftarrow \text{ص} \leftarrow \pi \leftarrow \text{س} \leftarrow \text{ص} \leftarrow \text{ص}$$

$$\text{نها } \frac{\text{ظتا}(\frac{\text{ص} - \pi}{2})}{\text{ص}} = \text{نها } \frac{\text{ظتا}(\frac{\text{ص}}{2})}{\text{ص}} = \text{نها } \frac{\text{ظتا}(\frac{\text{ص} - \pi}{2})}{\text{ص}}$$

$$\text{نها } \frac{\text{جتا}(\frac{\text{ص}}{2})}{\text{ص}} = \text{نها } \frac{\text{جتا}(\frac{\text{ص} - \pi}{2})}{\text{ص}} = \text{نها } \frac{\text{جتا}(\frac{\text{ص}}{2})}{\text{ص}}$$

$$(7) \text{ نها } \frac{\text{س جا}(\frac{\pi}{\text{س}})}{\pi \leftarrow \text{س}} = \frac{\text{س جا}(\frac{\pi}{\text{س}})}{\pi - \text{س}}$$

كحل:

$$\text{نفرض } \text{ص} = \frac{\pi}{\text{س}} \leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{\text{ص}} \leftarrow \text{س} \leftarrow \text{س} \leftarrow \text{ص} \leftarrow \text{س} \leftarrow \text{ص} \leftarrow \text{س} \leftarrow \text{ص}$$

$$\text{نها } \frac{\frac{\pi}{\text{ص}} \text{ جا}(\frac{\pi}{\text{ص}})}{\pi \leftarrow \text{س}} = \text{نها } \frac{\frac{\pi}{\text{ص}} \text{ جا}(\frac{\pi}{\text{ص}})}{\pi - \text{ص}} = \text{نها } \frac{\frac{\pi}{\text{ص}} \text{ جا}(\frac{\pi}{\text{ص}})}{\pi - \text{ص}}$$

$$\text{نفرض } \text{ع} = \pi - \text{ص} \leftarrow \text{ص} = \pi + \text{ع} \leftarrow \text{ص} \leftarrow \text{س} \leftarrow \text{ص} \leftarrow \text{س} \leftarrow \text{ع} \leftarrow \text{ص} \leftarrow \text{س} \leftarrow \text{ع}$$

$$\text{نها } \frac{\pi \text{ جا}(\frac{\pi}{\text{ع}})}{\pi \leftarrow \text{ع}} = \text{نها } \frac{\pi \text{ جا}(\frac{\pi}{\text{ع}})}{\pi - \text{ع}} = \text{نها } \frac{\pi \text{ جا}(\frac{\pi}{\text{ع}})}{\pi - \text{ع}}$$

$$(8) \text{ نها } \frac{\text{جتا}^2 \text{س} - 1}{\pi \leftarrow \text{س}} = \frac{\text{جتا}^2 \text{س} - 1}{\pi - \text{س}}$$

كحل:

$$\text{نها } \frac{\text{جا}^2 \text{س}}{\pi \leftarrow \text{س}} = \text{نها } \frac{\text{جا}^2 \text{س}}{\pi - \text{س}}$$

نفرض $\pi - \pi = \pi$ ← $\pi + \pi = \pi$ ← $\pi \leftarrow \pi$ ← $\pi \leftarrow \pi$; $\pi \leftarrow \pi$

$$1 = \pi(1 - \pi) = \left(\frac{\pi + \pi}{\pi} \right) \pi = \left(\frac{\pi + \pi}{\pi} \right) \pi$$

تمرين (١٤)



جد قيمة النهايات فيما يلي :

أجواب: - ٣

$$(1) \lim_{\pi \rightarrow \pi} \frac{\pi}{\pi - \frac{\pi}{\pi}}$$

أجواب: $\frac{1}{\pi}$

$$(2) \lim_{\pi \rightarrow \pi} \frac{(\pi - 2)}{\pi \pi}$$

أجواب: - ١

$$(3) \lim_{\pi \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\pi + \frac{\pi}{4}}{(\frac{\pi}{4} - \pi)}$$

حالات الضرب بالعامل المرافق

٥

الحالة الاولى:

جد قيمة النهايات فيما يلي :

$$(1) \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1 - \text{جتاس}}{س}$$

حل:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{1 - \text{جتاس}}{س} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1 - \text{جتاس}}{س} \times \frac{1 + \text{جتاس}}{1 + \text{جتاس}} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1 - \text{جتاس}^2}{س(1 + \text{جتاس})}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1 - \text{جتاس}}{س} \times \frac{1 + \text{جتاس}}{1 + \text{جتاس}} = 0 \times 1 = 0$$

$$(2) \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1 - \text{جتاس}^2}{س}$$

حل:

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{1 - \text{جتاس}^2}{س} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1 - \text{جتاس}^2}{س} \times \frac{1 + \text{جتاس}}{1 + \text{جتاس}} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1 - \text{جتاس}^2}{س(1 + \text{جتاس})}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1 - \text{جتاس}}{س} \times \frac{1 + \text{جتاس}}{1 + \text{جتاس}} = \frac{1 - 1}{1} \times \frac{1 + 1}{1 + 1} = 0 \times 1 = 0$$

$$(3) \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\text{جتاس}^2}{1 - \text{قاس}}$$

حل:

$$2 = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\text{جتاس}^2}{1 - \text{قاس}} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\text{جتاس}^2}{1 - \text{قاس}} \times \frac{1 + \text{قاس}}{1 + \text{قاس}} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\text{جتاس}^2 (1 + \text{قاس})}{(1 - \text{قاس})(1 + \text{قاس})}$$

$$(4) \text{ نها } \frac{1-قاس}{جاس طاس}$$

كحل:

$$\text{نها} \frac{1-قاس}{جاس طاس} = \frac{1-قاس}{جاس طاس} \times \frac{1+قاس}{1+قاس} = \frac{1-قاس^2}{(جاس طاس)(1+قاس)}$$

$$\frac{1-}{2} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1- = \frac{1}{1+قاس} \times \frac{طاس}{طاس} \times \frac{طاس-}{جاس}$$

$$(5) \text{ نها } \frac{1-جتا 6س}{1-جتا 8س}$$

كحل:

$$\text{نها} \frac{1-جتا 6س}{1-جتا 8س} = \frac{1-جتا 6س}{1-جتا 8س} \times \frac{1+جتا 6س}{1+جتا 6س} \times \frac{1+جتا 8س}{1+جتا 8س} = \frac{(1-جتا 6س)(1+جتا 6س)(1+جتا 8س)}{(1-جتا 8س)(1+جتا 8س)}$$

$$\frac{9-}{16} = \frac{6}{8} \times \frac{6 \times 2-}{8 \times 2} = \frac{2-جا 6س}{2-جا 8س}$$

$$(6) \text{ نها } \frac{1-جتا 5س}{1-جتا 3س}$$

كحل:

$$\text{نها} \frac{1-جتا 5س}{1-جتا 3س} = \frac{1-جتا 5س}{1-جتا 3س} \times \frac{1+جتا 5س}{1+جتا 5س} \times \frac{1+جتا 3س}{1+جتا 3س} = \frac{(1-جتا 5س)(1+جتا 5س)(1+جتا 3س)}{(1-جتا 3س)(1+جتا 3س)}$$

$$\frac{25}{9} = \frac{5}{3} \times \frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2-جا 5س}{2-جا 3س}$$

$$(7) \text{ نها } \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \text{ س } \leftarrow \frac{\pi}{4}$$

كله اكله:

$$\text{نها } \frac{(2-1)^2}{(2-1)^2} \text{ س } \leftarrow \frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}+1} \times \frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}+1} \times \frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1} \text{ س } \leftarrow \frac{\pi}{4}$$

$$1 = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} \text{ س } \leftarrow \frac{\pi}{4}$$

الحالة الثانية: مرافق الجذر

جد قيمة النهايات فيما يلي :

$$(1) \text{ نها } \frac{\sqrt{2}-1}{2} \text{ س } \leftarrow$$

كله اكله:

$$\text{نها } \frac{\sqrt{2}-1}{2} \text{ س } \leftarrow = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \text{ س } \leftarrow = \frac{2-1}{2} \text{ س } \leftarrow = \frac{1}{2} \text{ س } \leftarrow$$

$$\text{نها } \frac{1-2\sqrt{2}}{2} \text{ س } \leftarrow = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{2} \text{ س } \leftarrow = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4} \text{ س } \leftarrow$$

$$(2) \text{ نها } \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \text{ س } \leftarrow$$

كله اكله:

$$\text{نها } \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \text{ س } \leftarrow = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \text{ س } \leftarrow = \frac{2-1}{2} \text{ س } \leftarrow = \frac{1}{2} \text{ س } \leftarrow$$

$$\text{نها } \frac{2\sqrt{2}+1}{2} \text{ س } \leftarrow = \frac{2\sqrt{2}+1}{2} \times \frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-1} \text{ س } \leftarrow = \frac{(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)}{2} \text{ س } \leftarrow = \frac{8-1}{2} \text{ س } \leftarrow = \frac{7}{2} \text{ س } \leftarrow$$

$$(٢) \text{ نها } \frac{\text{جتا س} - \text{جتا } \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4} - \text{س}}$$

كحل:

$$\text{نها } \frac{2 - \text{جا } \left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ جا } \left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4} - \text{س}}$$

نفرض $\text{ص} = \frac{\pi}{4} - \text{س} \leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{4} + \text{ص} \leftarrow \text{س} \leftarrow \frac{\pi}{4}$ ؛ $\text{ص} \leftarrow 0$

$$\text{نها } \frac{2 - \text{جا } \frac{1}{2} \text{ ص}}{\text{ص}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \text{ ص}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \text{ ص}}$$

$$(٣) \text{ نها } \frac{\text{جا س} - \text{جا } \frac{\pi}{4}}{\text{س} - \frac{\pi}{4}}$$

كحل: تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

$$\text{نها } \frac{2 \text{ جا } \left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ جا } \left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{جا } \left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ جا } \left(\frac{\pi}{4}\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{4}} = \frac{2 \text{ جا } \left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ جا } \left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{جا } \left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ جا } \left(\frac{\pi}{4}\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{4}}$$

نفرض $\text{ص} = \text{س} - \frac{\pi}{4} \leftarrow \text{س} = \text{ص} + \frac{\pi}{4} \leftarrow \text{س} \leftarrow \frac{\pi}{4}$ ؛ $\text{ص} \leftarrow 0$

$$\text{نها } \frac{2 \text{ جا } \left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ ص}}{\text{ص}} = \text{جا } \frac{\pi}{4} \times 2 = \frac{1}{2} \times 2 = \text{جا } \frac{\pi}{4}$$

(٤) اذا كانت :

$$\text{نها } \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = \text{نها } \frac{\text{ظاه س}}{(\text{ب س} + \text{س})} = 2 \text{ جد قيمة الثابت ا ، ب}$$

كحل:

$$\begin{aligned} \text{نها جاس} &= \frac{2}{6} \leftarrow 2 = \frac{2}{6} \leftarrow 12 = 2 \\ \text{نها} &= \frac{\text{ظاهس}}{(بس + س)} \leftarrow 2 = \frac{\text{ظاهس}}{(1 + ب)س} \leftarrow 2 = \frac{5}{1 + ب} \leftarrow 2 = \frac{3}{2} = ب \end{aligned}$$

تمرين (١٥)



جد قيمة النهايات فيما يلي :

$$\text{أجواب: } \frac{\pi}{2}$$

$$(1) \text{ نها } \frac{\text{جا}(\pi \text{ جتاس})}{س} \leftarrow \text{****}$$

أجواب: غير موجودة

$$(2) \text{ نها } \frac{\sqrt{1 + \text{جتاس}}}{\text{جاس}} \leftarrow \text{***}$$

$$\text{أجواب: } \frac{1}{2 \text{ جتاس}}$$

$$(3) \text{ نها } \frac{س - 2}{\text{جا}س - \text{جا}2س} \leftarrow$$

$$\text{أجواب: } \frac{8-}{25}$$

$$(4) \text{ نها } \frac{(س3 - ظاس)^2}{\text{جتاس}س - 1} \leftarrow$$

أجواب: ٠

$$(5) \text{ نها } \frac{(\text{ظاس} - س)^2}{1 - \text{جتاس}س} \leftarrow$$

$$\text{أجواب: } \frac{8-}{3}$$

$$(6) \text{ نها } \frac{\text{جا}س}{س^2 - 3س} \leftarrow$$

$$\text{أجواب: } \frac{3}{4}$$

$$(7) \text{ نها } \frac{\text{جا}3س(\sqrt{س + 4} - 2)}{س^2} \leftarrow$$

الاستاذ عادل عواد

النهايات والاتصال

الابداع في الرياضيات

$$\frac{2}{27} : \text{اجواب:}$$

$$8) \text{ نها } \frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{\frac{\pi}{4} - \text{س}} \text{ ****}$$

$$\text{اجواب: } 0$$

$$9) \text{ نها } \frac{\text{جتاس}^3 - 1}{\text{تاس}} \text{ ****}$$

$$\frac{1}{5} : \text{اجواب:}$$

$$10) \text{ نها } \frac{\text{س}}{\text{جا}^2 + \sqrt{5}\text{س}}$$

$$\frac{1-}{2} : \text{اجواب:}$$

$$11) \text{ نها } \frac{\text{جتا}(\pi^2 \text{س}) - \text{س}}{\text{س}^2 - 1} \text{ ****}$$

$$\text{اجواب: } 18$$

$$12) \text{ نها } \frac{2 - (2 \text{جتا}^2 \text{س} - \text{جتا}^4 \text{س} + \text{جتا}^6 \text{س})}{\text{جا}^2 \text{س}^3}$$

$$\text{اجواب: } 1$$

$$13) \text{ نها } \frac{2 \text{جاس} - \text{جا}^2 \text{س}}{\text{س}^3}$$

تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net

أولاً: الاتصال عند نقططة

تعريف: يكون الاقتران $q(s)$ متصلًا عند $s = a$ إذا حقق الشروط التالية:

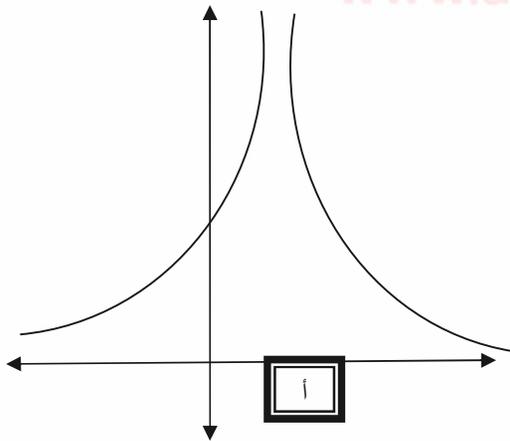
(١) الاقتران معرف عند $s = a$.

(٢) نهاية (s) موجودة.

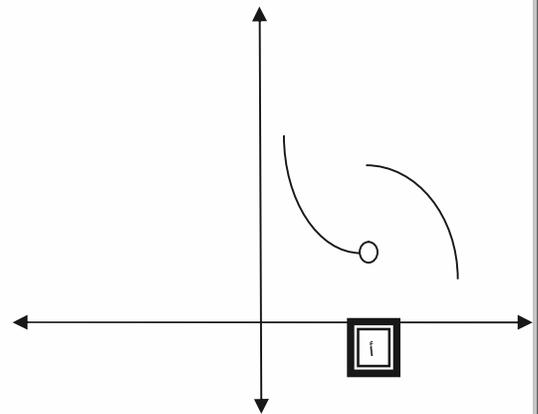
(٣) $q(a) = \lim_{s \rightarrow a} q(s)$

من خلال التعريف نستنتج ان الاقتران يكون متصل عند $s = a$ ، اذا كان منحنى $q(s)$ ليس فيه فجوة أو انقطاع عند $s = a$.

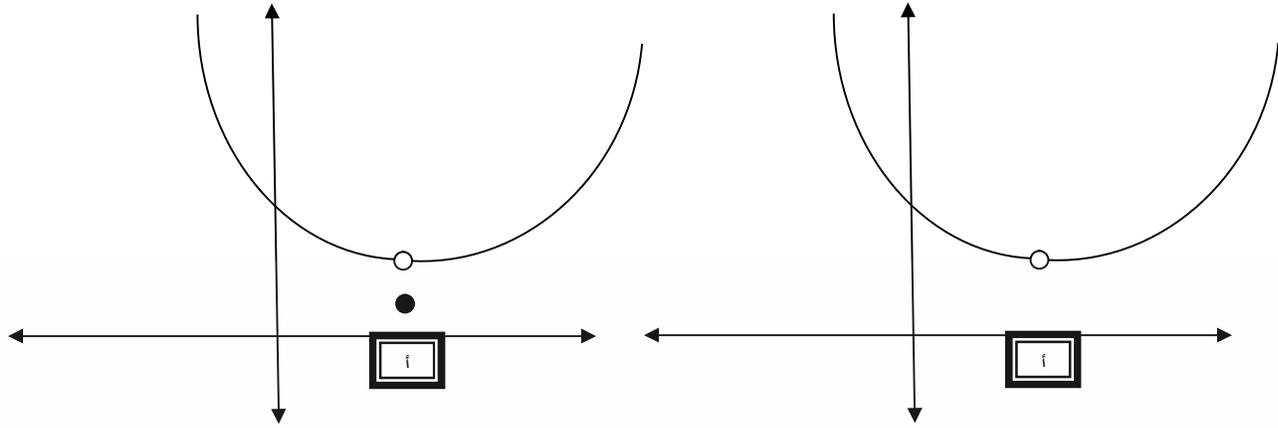
مثال: الاشكال التالية توضح حالات عدم الاتصال لمنحنى $q(s)$ عند $s = a$.



نهاية $(s) = \infty$



نهاية $(s) = c$



نهاية (س) \neq ق(أ)
س ←

غير معرف عند س = أ

ملاحظة: بعض الاقترانات المتصلة دائما على مجالها.

(١) كثيرات الحدود (٢) القيمة المطلقة (٣) جاس ، جتا س

(٤) الجذور الفردية. (٥) الاقترانات النسبية عدا أصفار المقام

الامثلة

(١) اذا كان $u(s) = \frac{s^2 + 1}{s + 4}$ ، $s \neq -4$ انكث في الاتصال عند $s = 1$.

حل:

$$u(1) = \frac{1^2 + 1}{1 + 4} = \frac{2}{5} \quad , \quad \text{نهاية (س)} = \frac{s^2 + 1}{s + 4} \quad \leftarrow \text{متصل عند } s = 1$$

(٢) اذا كان $u(s) = \frac{s + 3}{s - 2}$ ، $s \neq 2$ انكث في الاتصال عند $s = 2$.

حل:

$$u(2) = \frac{5}{0} \quad \leftarrow \text{غير معرف عند } s = 2 \quad \leftarrow \text{غير متصل عند } s = 2$$

$$(٣) \text{ اذا كان } n \text{ (س)} = \frac{s^3 - 1}{s - 1}, \text{ س} \neq 2 \text{ ابحث في الاتصال عند } s = 2.$$

حل: اكل:

$$\text{نهاية} \left(\frac{(s-2)(s^2+s+4)}{s-2} \right) = 12, \text{ ن (2)} = \therefore \text{ غير معرف عند } s=2 \iff \text{ غير متصل عند } s=2.$$

$$(٤) \text{ اذا كان } n \text{ (س)} = \sqrt{\frac{s-2}{s+2}}, \text{ ابحث في الاتصال عند } s = 2.$$

حل: اكل:



ف (2) = 0.

$$\text{نهاية} \left(\frac{s-2}{s+2} \right) = 0, \text{ نهاية} \left(\frac{s-2}{s+2} \right) = 2 \iff \text{ غير متصل عند } s = 2.$$

(٥) اذا كان

www.awa2el.net

$$\left. \begin{array}{l} \frac{s-2}{s-2} \text{ س} < 2 \\ \frac{s-2}{s-2} \text{ س} > 2 \\ \frac{s-2}{s-2} \text{ س} = 2 \end{array} \right\} = \text{ن (س)}$$

ابحث في اتصال ف (س) عند $s = 2$.

حل: اكل:

$$\text{ف (2)} = 12$$

$$\text{نهاية} \left(\frac{s-2}{s-2} \right) = 12 \iff \text{نهاية} \left(\frac{(s+2)(s-2)}{s-2} \right) = 12$$

$$\text{نهاية } s^2 = 4 \leftarrow \text{نهاية } (s) = 4$$

$$\text{نهاية } (s) \neq (2)$$

غير متصل عند $s = 2$

(٦) اذا كان:

$$\left. \begin{array}{l} s > 2 \\ s < 2 \end{array} \right\} = (s)$$

انبحث في اتصال $f(s)$ عند $s = 0$.

كل اكل:

$$f(0) = 0$$

$$\text{نهاية } s^2 = 0 \leftarrow \text{نهاية } (s) \text{ متصل عند } s = 0$$

(٧) اذا كان:

www.awa2el.net

$$\left. \begin{array}{l} s \neq 1 \\ s = 1 \end{array} \right\} = (s)$$

انبحث في اتصال $f(s)$ عند $s = 1$.

كل اكل:

$$f(1) = 6$$

$$\text{نهاية } s^2 = 1 \leftarrow \text{نهاية } (s) = \frac{(s-1)(s^2+s+1)}{(s-1)} = 3$$

$$ن (1) \neq \frac{1-s^3}{1-s} \leftarrow$$

غير متصل عند $s = 1$.

٨) اذا كان:

$$ن (س) = \left. \begin{array}{l} \frac{2-\sqrt{3+s^2}}{1-s}, s \neq 1 \\ \frac{2}{3}, s = 1 \end{array} \right\}$$

ابحث في اتصال قف (س) عند $s = 1$.

حل: اكل:

قف (1) = 3

$$\frac{2-\sqrt{3+s^2}}{1-s} \leftarrow \frac{2-\sqrt{3+s^2}}{1-s} \times \frac{2+\sqrt{3+s^2}}{2+\sqrt{3+s^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{(1-s)(1+s)}{4(1-s)} \leftarrow \frac{1}{2} = \frac{1+s}{4}$$

$$ن (1) \neq \frac{2-\sqrt{3+s^2}}{1-s} \leftarrow$$

غير متصل عند $s = 1$.

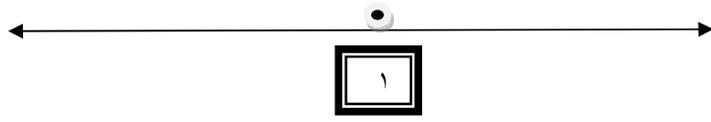
٩) اذا كان:

$$ن (س) = \left. \begin{array}{l} \frac{1-s}{|1-s|}, s \neq 1 \\ 1, s = 1 \end{array} \right\}$$

ابحث في اتصال قف (س) عند $s = 1$.

----- ++++++

كله أكل:



$$\left. \begin{array}{l} 1 < s, \frac{1-s}{1-s} \\ 1 > s, \frac{1-s}{s-1} \\ 1 = s, 1- \end{array} \right\} = (s)$$

قوة (1) = 1-

$$\text{هنا } (s) = 1, \text{ هنا } (s) = 1- \text{ س } \leftarrow +1$$

$$\text{هنا } (s) = 1- \text{ س } \leftarrow -1, \text{ هنا } (s) = 1- \text{ س } \leftarrow -1$$

قوة (س) غير متصل عند س = 1.

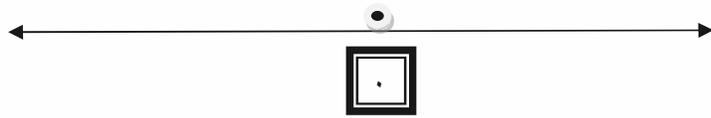
1. اذا كان:

$$\left. \begin{array}{l} s \neq 0, \frac{s^3 - 2}{s} \\ s = 0, 3- \end{array} \right\} = (s)$$

انبحث في اتصال قوة (س) عند س = 0.

----- ++++++

كله أكل:



$$\left. \begin{array}{l} s < 0, \frac{s^3 - 2}{s} \\ s > 0, \frac{s^3 - 2}{s-} \\ s = 0, 3- \end{array} \right\} = (s)$$

قوة (0) = 3-

$$نهاية (س) = \frac{(س-3)مهـ}{س-مهـ} ، نهاية (س) = \frac{(س-3)مهـ}{س+مهـ}$$

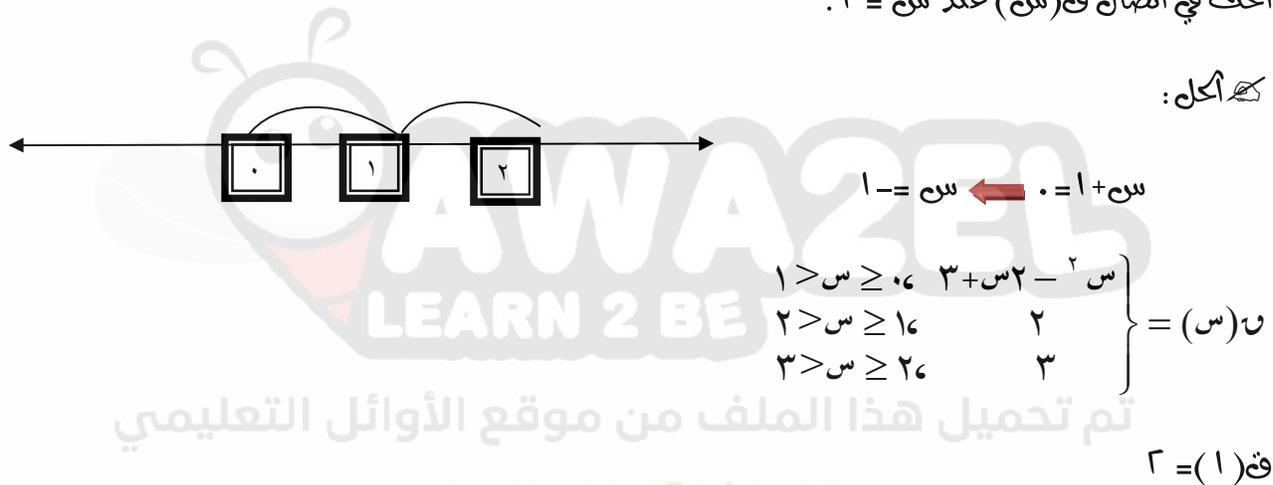
$$نهاية (س) = 2 ، ق (س) غير متصل عند س = 0 .$$

(١١) اذا كان:

$$ن (س) = \left. \begin{array}{l} س^2 - 2س + 3 ، 0 \leq س < 1 \\ [س + 1] ، 1 \leq س < 3 \end{array} \right\}$$

ابحث في اتصال ق (س) عند س = 1 .

حل:



ق (1) = 2

$$نهاية (س) = 2 ، نهاية (س) = \frac{س^2 - 2س + 3}{س-1}$$

$$نهاية (س) = 2 ، ق (س) متصل عند س = 1 .$$

(١٢) اذا كان:

$$ن (س) = \left. \begin{array}{l} \frac{س-1}{س+1} ، 2- < س < 1- \\ [س] \times 1 ، 1- < س < 1 \end{array} \right\}$$

ابحث في اتصال ق (س) عند س = 1- .

حل:

طول الدرجة = ١

٠ = س

$$\left. \begin{array}{l} ١ -> س \geq ٢ - ٠ \\ ٠ > س \geq ١ - ٠ \\ ١ > س \geq ٠ \end{array} \right\} = (س) \cup$$

٢ = (١ -) ق

$$٢ - = \frac{(١ + س)(١ - س)}{(١ + س)} \text{ نها } \leftarrow س - ١, \quad ٢ = (س) \cup \text{ نها } \leftarrow س + ١$$

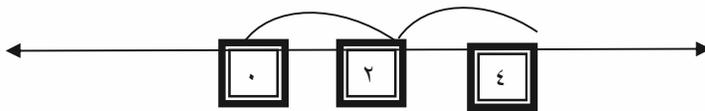
$$\text{نها } \leftarrow س = ٢ \text{ ق (س) غير متصل عند س = ١.}$$

١٣) اذا كان:

$$(س) \cup = (٢ - س) \times \left[٣ + س \frac{١}{٢} \right]$$

البحث في اتصال ق (س) عند س = ٢.

كل اكل:



$$\text{طول الدرجة} = \frac{١}{\frac{٢}{٢}} = ٢$$

$$٢ - = س \leftarrow ٠ = ٣ + س \frac{١}{٢}$$

$$\left. \begin{array}{l} ٢ > س \geq ٠, (٢ - س) \times ٣ \\ ٤ > س \geq ٢, (٢ - س) \times ٤ \end{array} \right\} = (س) \cup$$

٢ = (٢) ق

$$\text{فج (١)} = \underset{\text{س} \leftarrow +1}{\text{نهاي (س)}} = \underset{\text{س} \leftarrow -1}{\text{نهاي (س)}}$$

$$٦ = ٢ \leftarrow ٧ = ١ + ٢ \leftarrow ٧ = ١ + ٤ = ١ + ٢$$

$$\frac{٣}{٢} = ب \leftarrow ٧ = ب + ٤ = ١$$

(١٦) اذا كان:

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 + \text{س} - ١ > ٢ \\ \text{س} = ٥ \\ \text{س} + ٢ < ٢ \end{array} \right\} = \text{ن (س)}$$

فج (س) متصل عند س = ٢، جد قيمته أ، ب.

حل اكل:

$$\text{فج (٢)} = \underset{\text{س} \leftarrow +2}{\text{نهاي (س)}} = ٥ = \underset{\text{س} \leftarrow -2}{\text{نهاي (س)}}$$

نهاي + بس = ٥
س ← +٢

www.awa2el.net

$$\text{(١)} \dots \dots \dots ٢ - ٥ = ب \leftarrow ٥ = ٢ + ٢$$

$$\text{نهاي} \text{س}^2 + \text{س} - ١ = ٥ \\ \text{س} \leftarrow -٢$$

$$\text{(٢)} \dots \dots \dots \boxed{١} = ٢ \leftarrow ٢ = ١ + ٢ = ٤ - ١ = ٣$$

$$٢ = ب \leftarrow ٤ = ٢$$

(١٧) اذا كان:

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^3 - \text{ب} + \text{س} + 1 > \text{س} \\ \text{س} = 5 \\ \text{س}^2 - 2 + \text{س}(\text{ب} + 1) < \text{س} \end{array} \right\} = \text{ن}(\text{س})$$

ف(س) متصل عند س = 1 ، جد قيمة أ ، ب.

حل:

$$\text{ف}(1) = 0 = \text{ن}(1) = \text{ن}(1) = 0$$

$$\text{ن}(1) = 1 - 2 + 1(\text{ب} + 1) = 0$$

$$1 - 2 + 1 - 2 + \text{ب} = 0 \Rightarrow \text{ب} = 2 \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{ن}(1) = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$1 - 2 + 1 + \text{ب} = 4 \Rightarrow \text{ب} = 4 \dots \dots \dots (2)$$

www.awa2el.net

من (1) ، (2)

$$2 = \text{ب} - 1 -$$

$$4 = \text{ب} - 1 -$$

$$\boxed{1 = 1}$$

$$\boxed{3 = 3}$$

(١٨) اذا كان:

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 + \text{ب} + \text{س} > 2 \\ \text{س} = 2 \\ \text{س} + \text{ب} + 2 \leq 2 \end{array} \right\} = \text{ن}(\text{س})$$

ف(س) متصل عند س = 2 ، جد قيمة أ ، ب.

$$11 = 1 - 3 \times 4 = (3)$$

$$11 = \frac{\text{نهايا}^2 - \text{نهايا}(3-2) - 6}{3-3}$$

$$\boxed{4} = 8 - 11 = (3+2) \leftarrow 11 = \frac{(3-2)(3+2)}{3-3}$$

تمرين (١٦)



(١) اذا كان:

$$\left. \begin{array}{l} |جاس| \\ \text{س} \\ \text{س} > 0 \\ 3-2 \text{ جتاس} \\ \text{س} \leq 0 \end{array} \right\} = (س)$$

الجواب: متصل عند س = 0

ابحث في اتصال ق(س) عند س = 0.

(٢) اذا كان:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{3-س} \\ 3 < س \\ 3 \geq 3-س^2 \end{array} \right\} = (س)$$

الجواب: متصل عند {٣, ٠}

ابحث في اتصال ق(س) عند {٣, ٠}

$$\left. \begin{array}{l} 1 < s, \frac{s \times \sqrt{1-s}}{1-s} \\ 1 = s, \quad b \\ 1 > s, \quad 2s \end{array} \right\} = (s) \text{ اذا كان } (s)$$

$$\frac{3}{2} = b \quad \frac{3}{4} = 1 \text{ :الجواب}$$

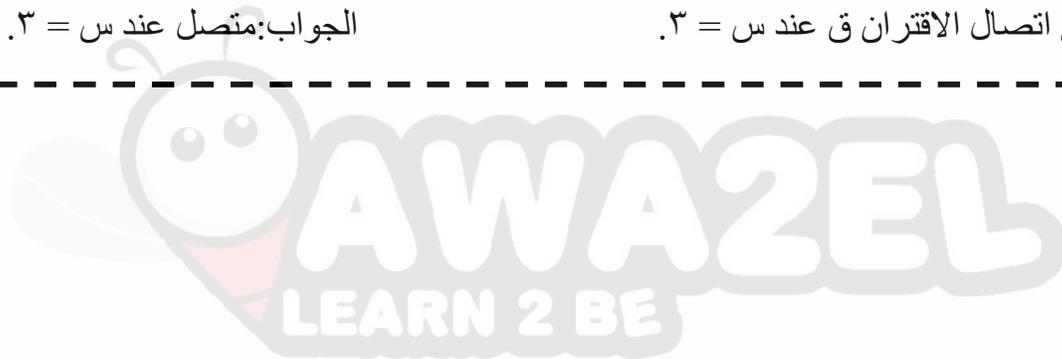
ق(س) متصل عند س = 1، جد قيمة أ، ب .

حيث ص مجموعة الاعداد الصحيحة .

$$\left. \begin{array}{l} 5 + s^3, s \in \mathbb{V} \\ 4 - s^2, s \in \mathbb{V} \end{array} \right\} = (s) \text{ اذا كان: } (s)$$

الجواب: متصل عند س = 3.

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = 3.



تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net

ثانيا: نظريات الاتصال

نظرية: اذا كان q (س) ، h (س) اقترانين متصلين عند $s = a$ فإن:

$$(1) (q+h)(s) \text{ متصل عند } s = a .$$

$$(2) (q - h)(s) \text{ متصل عند } s = a .$$

$$(3) (q \times h)(s) \text{ متصل عند } s = a .$$

$$(4) (q/h)(s) \text{ متصل عند } s = a \text{ حيث } h(a) \neq 0$$

الأمثلة

(1) اذا كان:

$$h(s) = (s-2)^3 , h(s) = s^2 + 1 \text{ ابحث في اتصال } (h \times h)(s) \text{ عند } s = 2 .$$

الحل:

$$h(s) \text{ متصل عند } s = 2 \text{ لانه كثير حدود .}$$

$$h(s) \text{ متصل عند } s = 2 \text{ لانه كثير حدود .}$$

$$\therefore (h \times h)(s) \text{ متصل عند } s = 2 \text{ حسب نظريات الاتصال .}$$

(2) اذا كان:

$$h(s) = s^2 + 1 , h(s) = s^2 + 2s + 1 \left. \begin{array}{l} s \leq 1 \\ s > 1 \end{array} \right\} \text{ ابحث في اتصال } (h+h)(s) \text{ عند } s = 1 .$$

الحل:

$$h(s) \text{ متصل عند } s = 1 \text{ لانه كثير حدود .}$$

$$\text{هـ (1)} = (1) = 1^2 + 2 \times 1 = 3 \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{نهـا هـ (س)} = \text{نهـا (س)} = \text{نهـا (س)} = (س^2 + 2س) = 3 \quad \text{نهـا (س)} = (س^2 + 2س) = 3$$

$$\text{نهـا هـ (س)} = 3 \dots\dots\dots (2)$$

من (1) ، (2)

$$\text{هـ (س) متصل عند س} = 3$$

∴ (ن + هـ) (س) متصل عند س = 1 حسب نظريات الاتصال.

(3) اذا كان:

$$\left. \begin{array}{l} \text{ن (س)} = \left. \begin{array}{l} \frac{1 + 3س}{2 + س} \\ \frac{3}{2} \end{array} \right\} \text{هـ (س)} = \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{4} س)}{س} \end{array} \right\} \text{انكث في اتصال (ن + هـ) (س) عند س = 2-}$$

www.awa2el.net

كله اكل:

$$\text{فـ (2-)} = \frac{3}{2} \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{نهـا ن (س)} = \text{نهـا (س)} = \frac{1 + 3س}{2 + س} \leftarrow \text{نهـا} = \frac{(1 + 3س)(1 + \frac{1}{2}س - \frac{1}{2}س)}{2 + س} = \frac{3}{2}$$

$$\text{نهـا ن (س)} = \frac{3}{2}$$

$$\text{نهـا ن (س)} = \frac{3}{2} \dots\dots\dots (2)$$

من (١) ، (٢)

٧ (س) متصل عند س = ٢

هـ (س) متصل عند س = ٢ لان ناتج قسمت متصلين يكون متصل.

∴ (٧ + هـ) (س) متصل عند س = ٢ حسب نظريات الاتصال.

(٤) اذا كان:

$$٧ (س) = (س - ٢)^٣ ، هـ (س) = [١ + س] \text{ انكث في اتصال } (٧ \times هـ) (س) \text{ عند س} = ٢.$$

كل اكل:

٧ (س) متصل عند س = ٢ لانه كثير حدود.

$$س + ١ = ٠ \leftarrow س = -١ \quad ل = \frac{١}{|١|} = ١$$

$$[١ + س] = \left. \begin{array}{l} ٢ \geq ١٤ > س > ٢ \\ ٣ \geq ٢٤ > س > ٣ \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{نهاه (س)} = ٣ \\ \text{نهاه (س)} = ٢ \\ \text{نهاه (س)} = ٢ \end{array} \quad \text{∴ نهاه (س) = ٢}$$

انتبه: لا نستطيع الحكم على اتصال او عدم اتصال (ق × هـ) (س) عند س = ٢ باستخدام نظريات الاتصال لعدم تحقق الشرط لذلك يجب البحث عن طرق اخرى لتحديد الاتصال او عدم الاتصال

هـ (س) غير متصل عند س = ٢

نفرض ان

$$ل (س) = ٧ (س) \times هـ (س)$$

$$ل (س) = \left. \begin{array}{l} ٢ (س - ٢)^٣ \geq ١٤ > س > ٢ \\ ٣ (س - ٢)^٣ \geq ٢٤ > س > ٣ \end{array} \right\}$$

$$ل (٢) = ٣ (٢ - ٢)^٣ = ٠$$

$$\begin{array}{l} \text{نهاه (س)} = ٠ \\ \text{نهاه (س)} = ٠ \\ \text{نهاه (س)} = ٠ \end{array}$$

ل (س) متصل عند س = ٢

∴ (ن × هـ) (س) متصل عند س = ٢.

٥) اذا كان:

$$ن (س) = \left. \begin{array}{l} ١- > ٣س + ٤س \\ ١- \leq ١ + ٢س \end{array} \right\} = هـ (س) , \left. \begin{array}{l} ١- > ٣س - ٥ \\ ١- \leq ١ + ٢س \end{array} \right\} = ن (س)$$

س = -١.

حل:

$$١- = ١ + ١ - \times ٢ = (١-)$$

$$\begin{array}{l} \text{هـ} (س) = ١- \\ \text{ن} (س) = ٢ \end{array} \quad \therefore \begin{array}{l} \text{هـ} (س) = ١- \\ \text{ن} (س) = ٢ \end{array}$$

ف (س) غير متصل عند س = -١.

نفرض ان تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

$$ل (س) = (س) + (س) = ٢ (س)$$

$$\left. \begin{array}{l} ١- > ٣س - ٥ + ٤س + ٨س \\ ١- \leq ٢س + ٢س + ٢س \end{array} \right\} = ل (س)$$

$$ل (١-) = (١-) = ٢ + ١ - \times ٢ = ١$$

$$\text{هـ} (س) = (٢ + ٢س + ٢) = ١ - \times ٢ + ١ = ١$$

$$\text{ن} (س) = (٣س - ٥ + ٤س + ٨س) = (٨س + ٣س - ٥) = ١ - \times ٤ + ١ - \times ٣ = ١$$

ل (س) متصل عند س = -١

∴ (ن + هـ) (س) متصل عند س = -١.

فتح (س) متصل عند س = ٠ ، لأنه كثير حدود .

هـ (س) غير متصل عند س = ٠ لأن هـ (س) غير معرف عند س = ٠ .

نفرض ان

$$ل (س) = (س) \cdot (س) \cdot هـ (س)$$

ملاحظة: لا يجوز الاختصار

$$ل (س) = \frac{س^3}{س}$$

$$ل (٠) = ٠$$

ل (س) غير متصل عند س = ٠ .

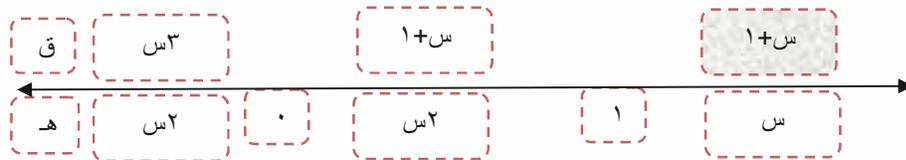
اذن (س) هـ (س) غير متصل عند س = ٠ .

٨) اذا كان:

$$ل (س) = (س) \cdot (س+١) \cdot (س+٣) \cdot هـ (س) ، هـ (س) = \begin{cases} س < ١ \\ س \geq ١ \end{cases} \text{ انكث في اتصال (س) هـ (س) عند س = ٠ .}$$

www.awa2el.net

كل اكل:



نفرض ان

$$ل (س) = (س) \cdot (س) \cdot هـ (س)$$

$$ل (س) = \begin{cases} س+٢ ، س < ١ \\ س^٢+٢س ، ١ > س > ٠ \\ س^٢ ، س > ٠ \\ ٠ ، س = ٠ \\ ٤ ، س = ١ \end{cases}$$

$$ل (٠) = ٠$$

ثالثا: الاتصال على فترة

تعريف: يكون ق(س) متصلا على [أ،ب] اذا كان :

(١) متصل على (أ،ب) (٢) متصل عند س = أ من جهة اليمين (٣) متصل عند س = ب من جهة اليسار.

من خلال التعريف يجب مراعاة ما يلي عند البحث في الاتصال:

- (١) القواعد على الفترات المفتوحة (أ) الكسر اصفار المقام (ب) الجذور الزوجية نحدد المجال.
- (٢) الاطراف البداية من اليمين النهاية من اليسار.
- (٣) التحول ان وجدت
- (٤) تذكر يجب اعادة تعريف القيمة المطلقة واكبر عدد صحيح.

الامثلة

تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net

(١) اذا كان:

$$ق(س) = \frac{س^٢ + ٣}{س - ٢}$$

ابحث في اتصال ق(س) على [١٠،٠]

حل:

القواعد ← كسر

$$س - ٢ = ٠ \rightarrow س = ٢ \rightarrow (١٠, ٢) \leftarrow \text{متصل}$$

الاطراف

عند س = ٠

$$ص (٠) = \frac{٣-}{٢} \quad \text{نها (س)} = \frac{٣-}{٢} \quad \text{ق (س) متصل عند س} = ٠ \quad \text{من جهة اليمين}$$

عند س = ١

$$ص (١) = ٤- \quad \text{نها (س)} = ٤- \quad \text{ق (س) متصل عند س} = ١ \quad \text{من جهة اليسار}$$

ق (س) متصل على $[١, ٠]$.

(٢) اذا كان:

$$ص (س) = \sqrt{٩-س} \quad \text{ابحث في اتصال ق (س) على } [٣, ٣=]$$

F الحل:

القواعد \leftarrow جذر

$$٩-س = ٢ \quad ٠ = ٢ \quad ٩-س = ٢ \quad ٣, ٣- = ٣, ٣- \quad \text{متصل على } (٣, ٣-)$$

الاطراف

عند س = ٣ تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

$$ص (٣) = ٠ \quad \text{نها (س)} = ٠ \quad \text{ق (س) متصل عند س} = ٣ \quad \text{من جهة اليسار}$$

عند س = ٣-

$$ص (٣-) = ٠ \quad \text{نها (س)} = ٠ \quad \text{ق (س) متصل عند س} = ٣- \quad \text{من جهة اليمين}$$

ق (س) متصل على $[٣, ٣-]$.

(٣) اذا كان

$$\left. \begin{array}{l} ١ \leq س, ٥ + \frac{١}{س} \\ ١ > س, ٤ + \frac{١}{س} \end{array} \right\} = (س)$$

ابحث في اتصال ق (س) على ح .

كله اكل:

القواعد

$$\frac{1}{s} + 5 \text{ متصل على } s < 1 \leftarrow \text{صفر المقام } \exists \text{ للمجال .}$$

$$2s^2 + 4 \text{ متصل على } s > 1 \leftarrow \text{لانه كثير حدود}$$

نقاط التحول

عند $s = 1$

$$\text{ق(1)} = 6 \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{ق(2)} = 6 \dots \dots \dots (2) \quad \text{ق(3)} = 6 \dots \dots \dots (3)$$

من (1)، (2)، (3) ق(س) متصل عند $s = 1$

أطراف الفترات

لا يوجد أطراف

ق(س) متصل على ح.

(2) اذا كان:

$$\left. \begin{array}{l} 2 > s > 0, \frac{2}{2-s} \\ 3 \geq s \geq 2, 1-s^2 \end{array} \right\} = (s)$$

البحث في اتصال ق(س) على مجاله .

كله اكل:

القواعد

المجال (٣٠)

متصل على (٢٠) صفر المقام \mathbb{R} للمجال .
 $\frac{2}{2-s}$

١-٣٢ متصل على (٣٢) ← لأنه كثير حدود

نقاط التحول

عند $s=2$

ف(٢) = ٣ (١)

ف(٣) = ١ (٢) (٣)
 $\frac{2}{2-s} = \frac{2}{2-s} = \frac{2}{2-s}$ غم

من (١) ، (٢) ، (٣) ف(س) غير متصل عند $s=2$.

أطراف الفترات

ف(٣) = ٥ (١)

ف(٢) = ٥ (٢)
 $\frac{2}{2-s} = 1 = \frac{2}{2-s}$

ف(س) متصل على عند $s=3$ من جهة اليسار .

ف(س) متصل على مجاله / {٢} .

(٥) اذا كان:

$$\left. \begin{array}{l} s > 1 \\ s \leq 1 \end{array} \right\} = (s)$$

ابحث في اتصال ف(س) لجميع قيم س الحقيقية .

كله اكل:

القواعد

س^٣ متصل على س < ١ ← لأنه كثير حدود .

س^٢ × √(١-س) متصل على س < ١ ← لان حاصل ضرب متصلين يكون متصل .

نقاط التحول

عند س = ١

ف(١) = ١ (١)

ف(٣) ١ = س^٣ ← س

ف(٢) ١ = √(١-س) × س^٢ ← س

من (١) ، (٢) ، (٣) ف(س) متصل عند س = ١

اطراف فترات

لا يوجد اطراف

ف(س) متصل لجميع قيم س الحقيقية.

(٦) اذا كان:

$$U(s) = \left. \begin{array}{l} |s| < 1, \quad s^2 - 4 \\ |s| \geq 1, \quad s^3 - 1 \end{array} \right\}$$

ابحث في اتصال ف(س) لكل س ∈ ح.

كله اكل:

$$U(s) = \left. \begin{array}{l} |s| < 1, \quad s^2 - 4 \\ |s| \geq 1, \quad s^3 - 1 \end{array} \right\}$$

القواعد

س² - 4 متصل على $-1 < س < 1$ لانته كثير حدود .

س³ - 1 متصل على $1 > س > -1$ لانته كثير حدود .

نقاط التحول

عند س = 1

ف(1) = 2 (1)

هنا س² - 4 = 3 (2) س ← +

هنا س³ - 1 = 2 (3) س ← -

من (1) ، (2) ، (3) ف(س) غير متصل عند س = 1

عند س = -1

ف(-1) = -2 (1)

هنا س² - 4 = 3 (2) س ← -

هنا س³ - 1 = 4 (3) س ← +

من (1) ، (2) ، (3) ف(س) غير متصل عند س = -1

اطراف فترات

لا يوجد اطراف

ف(س) متصل على $ح / -1, 1$.

(7) اذا كان :

$$و(س) = \left. \begin{array}{l} \frac{|س-2|}{س-2} + س^2 ، س \neq 2 \\ س^6 ، س = 2 \end{array} \right\}$$

ابحث في اتصال قه (س) على مجاله.

حل:

$$\left. \begin{array}{l} 2 < s, s^2 + \frac{2-s}{2-s} \\ 2 > s, s^2 + \frac{s-2}{2-s} \\ 2 = s, s^2 \end{array} \right\} = (s)$$

القواعد

$s^2 + 1$ متصل على $s < 2$ لأنه كثير حدود .

$s^2 + 1 -$ متصل على $s > 2$ لأنه كثير حدود .

نقاط التحول

عند $s = 2$

تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي
قه (2) = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000

$$\begin{array}{l} \text{هــا} + 1 + s^2 = 5 \dots\dots\dots (2) \\ \text{هــا} - 1 + s^2 = 3 \dots\dots\dots (3) \end{array}$$

من (1)، (2)، (3) قه (س) غير متصل عند $s = 2$

أطراف الفترات

لا يوجد أطراف

قه (س) متصل على $\{2\}$.

(٨) اذا كان:

$$n(s) = \begin{cases} s^2 + \frac{|s|}{s} & s \neq 0 \\ s-1 & s=0 \end{cases}$$

ابحث في اتصال فـ(س) على مجاله.

كله اكل:

$$n(s) = \begin{cases} s^2 + 1 & s < 0 \\ s^2 - 1 & s > 0 \\ s-1 & s=0 \end{cases}$$

القواعد

+١ س متصل على س < ٠ ← لانه كثير حدود .

-١ س + ١ متصل على س > ٠ لانه كثير حدود .

نقاط التحول

عند س=٠

فـ(٠) = -١ (١)

فـ(س) = -١ + س = ١ (٣)

فـ(س) = ١ + س = ١ (٢)

من (١) ، (٢) ، (٣) فـ(س) غير متصل عند س=٠ .

أطراف الفترات

لا يوجد أطراف

فـ(س) متصل على ح / {٠} .

(٩) اذا كان:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{|s|}{s} > 1, s \neq 0 \\ \frac{1}{2} + s \leq 1 \end{array} \right\} = (s)$$

ابحث في اتصال ق (س) على ح.

كل: المجال ح / {0}

$$\left. \begin{array}{l} 1 - s > 0 \\ 1 > s > 0 \\ \frac{1}{2} + s \leq 1 \end{array} \right\} = (s)$$

القواعد

- 1 متصل على $s > 0$ ← لأنه كثير حدود .1 متصل على $0 < s < 1$ لأنه كثير حدود . $\frac{1}{2} + s$ متصل على $s < 1$ لأنه كثير حدود .

نقاط التحول

عند $s = 1$

ق(1) = 1..... (1)

$$\begin{array}{l} \text{ق(2)} \dots\dots\dots 1 = \frac{1}{2} + s \\ \text{ق(3)} \dots\dots\dots 1 = \frac{1}{2} + s \end{array}$$

من (1) ، (2) ، (3) ق(س) متصل عند $s = 1$

اطراف الفترات

لا يوجد أطراف

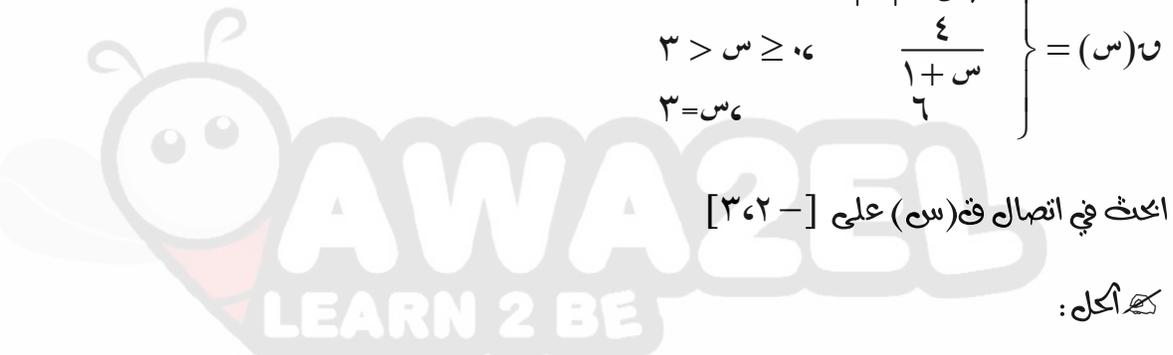
فترة (س) متصل على مجاله.

١٠) اذا كان:

$$\left. \begin{array}{l} |s| + \sqrt{s} - 2 \geq s > 0 \\ 0 \leq s \leq 3 \\ s = 2 \end{array} \right\} = (s)$$

ابحث في اتصال فترة (س) على $[-2, 3]$

كل:



$$\left. \begin{array}{l} |s| - \sqrt{s} - 2 \geq s > 0 \\ 0 \leq s \leq 3 \\ s = 2 \end{array} \right\} = (s)$$

القواعد

 $|s| - \sqrt{s} - 2 \geq s > 0 \leftarrow$ لان مجموع متصلين يكون متصل .

 $\frac{4}{1+s}$ متصل على $0 < s < 3$ لعدم اختواء الفترة على اصفار المقام .

نقاط التحول

عند $s = 0$.

$$f(0) = \Sigma \dots (1)$$

$$f(s) = \frac{4}{1+s} \quad (2) \quad \text{هنا } s \rightarrow +$$

$$f(s) = 0 \quad (3) \quad \text{هنا } s \rightarrow -$$

من (1)، (2)، (3) $f(s)$ غير متصل عند $s = 0$.

اطراف الفترات

$$f(2^-) = 2 + 2 - \sqrt{2} \dots (1)$$

$$f(s) = 2 + 2 - \sqrt{2} \quad (2) \quad \text{هنا } s \rightarrow +$$

تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net $f(s)$ متصل عند $s = 2^-$ من جهة اليمين.

$$f(3) = 6 \dots (1)$$

$$f(s) = \frac{4}{1+s} \quad (2) \quad \text{هنا } s \rightarrow -$$

 $f(s)$ غير متصل عند $s = 3$ من جهة اليسار. $f(s)$ متصل على مجاله / $\{3, 0\}$.

(١١) اذا كان:

$$\left. \begin{array}{l} ٠ > س, \quad ٢ + ٢ س \\ ٢ > س \geq ٠, \quad [٢ + س] \\ ٢ \leq س, \quad \frac{٤}{س} + \sqrt{٧ + س} \end{array} \right\} = (س) \cup$$

البحث في اتصال فـ(س) لكل س عدد حقيقي .

كل:

$$\left. \begin{array}{l} ٠ > س, \quad ٢ + ٢ س \\ ١ > س \geq ٠, \quad ٢ \\ ٢ > س \geq ١, \quad ٣ \\ ٢ \leq س, \quad \frac{٤}{س} + \sqrt{٧ + س} \end{array} \right\} = (س) \cup$$

القواعد

٢ + ٢ س متصل على س > ٠ ← لانه كثير حدود.

٣ متصل على ٠ < س < ١ لانه كثير حدود.

٣ متصل على ١ < س < ٢ لانه كثير حدود

لان مجموع متصلين يكون متصل $\frac{٤}{س} + \sqrt{٧ + س}$

نقاط التحول

عند س = ٠

فـ(٠) = ٢ (١)

الاستاذ عادل عواد

النهايات والاتصال

الابداع في الرياضيات

$$\text{نهاية } 2 = 2 + 2 \text{ (س)} \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{نهاية } 2 = 2 \text{ (س)} \dots\dots\dots (2)$$

من (1)، (2)، (3) فـ (س) متصل عند س = 0.

عند س = 1

$$\text{فـ (1)} = 3 \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{نهاية } 2 = 2 \text{ (س)} \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{نهاية } 3 = 3 \text{ (س)} \dots\dots\dots (2)$$

من (1)، (2)، (3) فـ (س) غير متصل عند س = 1

عند س = 1

$$\text{فـ (2)} = 5 \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{نهاية } 3 = 3 \text{ (س)} \dots\dots\dots (3) \quad \text{نهاية } 5 = \frac{4}{س} + \sqrt{7+س} \text{ (س)} \dots\dots\dots (2)$$

من (1)، (2)، (3) فـ (س) غير متصل عند س = 2

www.awa2el.net

اطراف الفترات

لا يوجد اطراف فترات

فـ (س) متصل على مجاله / {1، 2} .

12) اذا كان:

$$\left. \begin{array}{l} 0 < س \leq 1 - \epsilon, س + [س] \\ 2 \geq س \geq 0, \frac{3}{5} + \sqrt{س} \end{array} \right\} = (س)$$

ابحث في اتصال فـ (س) على [- 2، 1] .

كله اكله:

$$\left. \begin{array}{l} 0 < s \leq 1, -s + 1 \\ 2 \geq s \geq 0, \sqrt{s + \frac{3}{5}} \end{array} \right\} = (s)$$

القواعد

$-s + 1$ متصل على $0 < s < 1$ لأنه كثير حدود.

$\sqrt{s + \frac{3}{5}}$ لان مجموع متصلين يكون متصل.

نقاط التحول

عند $s = 0$.

ق(0) = 0..... (1)

ق(1) = $\sqrt{1 + \frac{3}{5}}$ (2) $-s + 1 = 0$ (3)

من (1)، (2)، (3) ق(س) غير متصل عند $s = 0$.

اطراف الفترات

ق(1-) = 0..... (1)

ق(1) = $-s + 1 = 0$ (2)

ق(س) متصل عند $s = 1$ من جهة اليمين.

ق(2) = $\frac{1}{5} + \sqrt{2}$ (1)

ق(2) = $\sqrt{\frac{1}{5} + 2}$ (2)

ق(س) متصل عند $s = 2$ من جهة اليسار.

فئة (س) متصل على مجاله / {0} .

(١٣) اذا كان:

$$D(s) = \left. \begin{array}{l} s^2 - \sqrt{s} - 1 \leq 0, s > 0 \\ [s] + s - 2 \leq 0, s \geq 1 \\ s = 1 \end{array} \right\}$$

ابحث في اتصال فئة (س) على $[-1, 1]$.

الحل:

$$D(s) = \left. \begin{array}{l} s^2 - \sqrt{s} - 1 \leq 0, s > 0 \\ 1 > s \geq 0, \quad 2 - s \leq 0 \\ s = 1 \end{array} \right\}$$

القواعد

$s^2 - \sqrt{s} - 1$ متصل على $1 > s > 0$ ← لان مجموع متصلين يكون متصل .

$2 - s$ لانه كثير حدود. هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net

نقاط التحول

عند $s = 0$

$$f(0) = 2 - 0 = 2 \dots \dots (1)$$

$$f(s) = s^2 - \sqrt{s} - 1 = 0 \dots \dots (2)$$

من (1)، (2)، (3) فئة (س) غير متصل عند $s = 0$.

اطراف الفترات

$$f(1) = 1 - 1 = 0 \dots \dots (1)$$

$$\text{نهاية } s \rightarrow + \sqrt{s-2} = 2 \dots\dots\dots (2)$$

فتح (س) متصل عند $s=1$ من جهة اليمين.

$$\text{فتح } (1) = 4 \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{نهاية } s \rightarrow - 2 = 3 \dots\dots\dots (2)$$

فتح (س) غير متصل عند $s=1$ من جهة اليسار.

فتح (س) متصل على مجاله / $\{1,0\}$.

١٤) اذا كان:

$$n(s) = \left. \begin{array}{l} 3 \text{ جتا } s, \frac{\pi-}{6} > s \geq 0 \\ \frac{\pi}{6} > s > 0, \frac{\pi}{6} > s \end{array} \right\}$$

ابحث في اتصال فتح (س) على $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi-}{6}\right)$.

www.awa2el.net

حل:

القواعد

3 جتا s متصل على $-\frac{\pi}{6} < s < 0$ لان جتا s من الاقترانات المتصلة .

ظاس $\frac{\pi}{6} > s > 0$ متصل على $\frac{\pi}{6}$ لان قسمت متصلين يكون متصل .

نقاط التحول

عند $s=0$

$$\text{فتح } (0) = 3 \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{نهاية } 3 \text{ من } \frac{3}{s} \text{ (2)} \quad \text{نهاية } 3 \text{ من } 3 \text{ (3)}$$

من (1)، (2)، (3) فـ (س) متصل عند س=0.

اطراف الفترات

لا يوجد اطراف فترات

$$\text{فـ (س) متصل على على } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right).$$

(10) اذا كان:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \geq s > 0, \quad 2 + \frac{1}{s} \\ 3 > s > 2, \quad 3 + [s] \\ 3 = s, \quad 7 \end{array} \right\} = (s)$$

وكان فـ (س) متصلا عند س = 2 فأجب عما يلي:

(1) جد قيمة الثابت أ . (2) ابحث في اتصال الاقتران فـ على الفترة (3,0)

حل:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \geq s > 0, \quad 2 + \frac{1}{s} \\ 3 > s > 2, \quad 5 \\ 3 = s, \quad 7 \end{array} \right\} = (s)$$

بما ان فـ (س) متصل عند س=2 ← نهاية (س) = نهاية (س)

$$\text{نهاية } 5 \text{ من } \frac{1}{s} + 2 \text{ من } 5 \text{ (3)} \quad \text{نهاية } 5 \text{ من } 5 \text{ (4)}$$

القواعد

$\frac{2}{s} + s^2$ متصل على $0 < s < 2$ لان مجموع متصلين يكون متصل .

$0 < s$ متصل لانه كثير حدود .

نقاط التحول

عند $s=2$ متصل من المعطيات

اطراف الفترات

ف(3) = 7 (1)

ف(2) = 5 (2)

ف(س) غير متصل عند $s=3$ من جهة اليسار...

ف(س) متصل على $(0, 3]$.

(16) اذا كان:

$$n(s) = \frac{s^2 - 3s - 5}{s^2 - 2s + 3}$$

متصلا على ح فجد مجموعات قيم أ .

كله:

بما ان ف(س) متصلا على ح

∴ مميز العبارة التربيعية للمقام > 0

$$2^2 - 4 \times 1 \times 3 > 0 \Rightarrow 4 - 12 > 0$$

$$\exists! (127, 127)$$

(١٧) اذا كان

$$U(S) = \frac{S^2 + 2S}{S^2 - 2S + 4} \text{ متصلا على ح فجد مجموعة قيم } S.$$

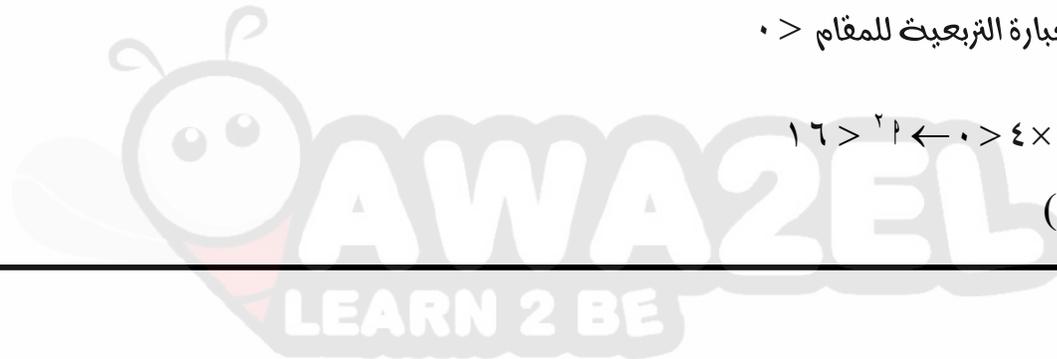
حل:

بما ان $f(S)$ متصلا على ح

∴ مميز العبارة التربيعية للمقام > 0

$$16 - 2 \times 4 \times 4 > 0 \rightarrow 16 > 32$$

$$\exists! (-4, 4)$$



اقرأ الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net



تمرين (١٧)



(١) اذا كان:

$$U(S) = \left. \begin{array}{l} S-2 \leq S < 1 \\ S+1 \geq 1-S \end{array} \right\}$$

ابحث في اتصال $U(S)$ على $[-1, 2)$.

(٢) ابحث في اتصال الاقتران

$$U(S) = \sqrt{S+1} \text{ على الفترة } (1, 2]$$

(٣) اذا كان:

$$u(s) = \frac{s^3 - 4}{s^2 - 4s + 4} \text{ متصلا على ح فجد مجموعة قيم } s \text{ الجواب: } s < 4$$

(٥) ضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة فيما يلي :

$$(1) \text{ اذا كان ق اقترانا متصلا عند } s = 1 \text{ وكان ق(1) = 4 ، فجد نهايا } \left(\frac{|1-s|}{1-s} \right)_{s \rightarrow 1} + \sqrt{u(s)} \dots\dots\dots$$

(أ) ٣ (ب) ١ (ج) ٥ (د) غير موجودة

$$(2) \text{ اذا كان ق اقترانا كثير حدود وكانت نهايا } \frac{u(s)}{s} = 3 ، \text{ فإن نهايا } \frac{u(s)^2}{s} = \dots\dots\dots$$

(أ) ٩ (ب) ١٨ (ج) ٦ (د) ٣٦

$$(3) \text{ اذا كان } u(s) = \frac{s^2 + s(1+1) + 1}{s-2} ؛ s \neq 2 \text{ فإن قيمة الثابت (1) التي تجعل نهايا } u(s) \text{ موجودة}$$

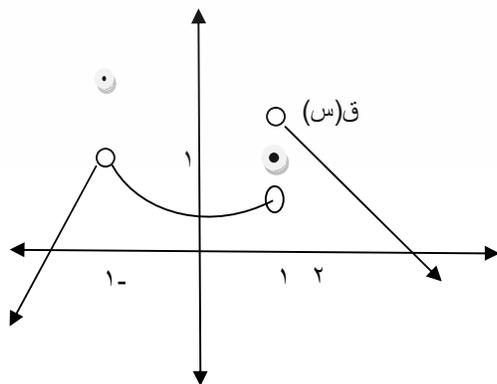
(أ) ٣٠ (ب) ٣٠- (ج) ٨- (د) ١٠-

$$(4) \text{ اذا كانت نهايا } \frac{u(s)}{s} = 8 ، \text{ وكان ل (س) اقتران كثير حدود ، فإن نهايا } (1 + u(s)) = \dots\dots\dots$$

(أ) ٤ (ب) ١٤ (ج) ١٨ (د) ٦

(٥) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق (س) المعرف على ح ، فإن مجموعة قيم (1) بحيث تكون

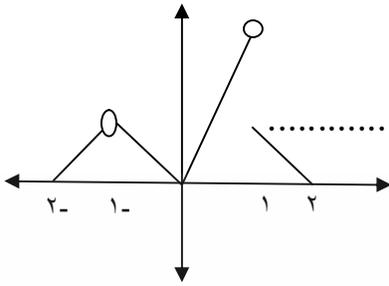
$$\text{نهايا } u(s) = 1 \text{ هي : } \dots\dots\dots$$



(أ) {1, 1} (ب) {2, 1, 1}

(ج) {2, 1} (د) {2, 0, 1}

٦) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعروف على $[-٢,٢]$ ، فإن مجموعة قيم f بحيث تكون



نها $f(س) = ٠$ هي :
س ← -١

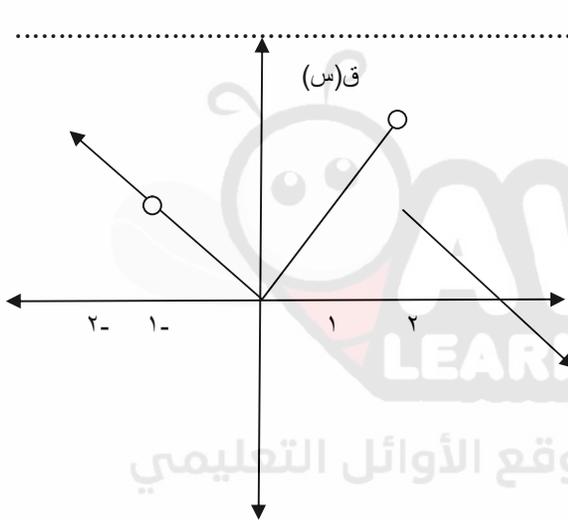
(ب) $\{٢,٠\}$

(أ) $\{١,٢\}$

(د) $\{٠\}$

(ج) $\{٢,٠,٢\}$

٧) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعروف على ح ، فإن مجموعة قيم f بحيث تكون



نها $f(س)$ غير موجودة هي :
س ← ح

(ب) $\{٢\}$

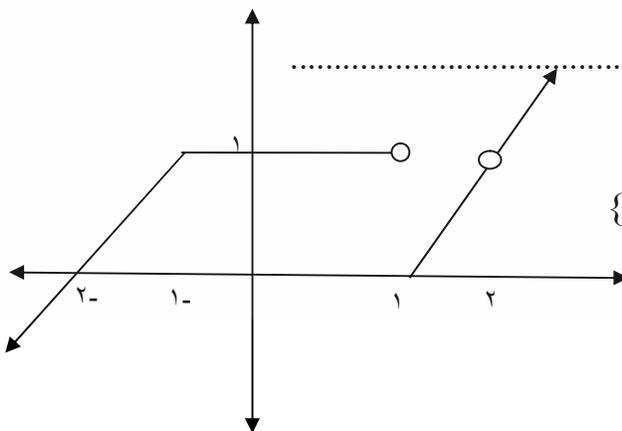
(أ) $\{١\}$

(د) $\{٢,٠,١\}$

(ج) $\{٢,١\}$

تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

٨) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) المعروف على ح ، فإن مجموعة قيم f بحيث تكون



نها $f(س) = ١$ هي :
س ← -١

(ب) $[-١,١)$

(أ) $[-١,١)$

(د) $\{٢\} \cup [-١,١)$

(ج) $\{٢\} \cup [-١,١)$

الإستاذ عادل عواد

النهايات والاتصال

الابداع في الرياضيات

(٩) إذا كان ق اقتران متصل عند $s = ٤$ وكان $٣(٤) = ٦$ ، وكانت نها $(س)$ $= ٤$ فإن قيمة الثابت ب

تساوي:

- (أ) $\frac{1}{3}$ (ب) ٢ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) ٢-

(١٠) إذا كانت نها $(س)$ $= ٤$ ، $٣(٣) = ٦$ ، فما قيمة نها $(س)$ $= ٧$ فإن قيمة الثابت ب

- (أ) ١٧ (ب) ١٣ (ج) ٢٠ (د) ٢٢

(١١) نها $(س)$ $= \frac{٦س٤ + ٨س٢}{٣س٣ - ٢س٢}$ تساوي:

- (أ) ٦- (ب) ٢- (ج) ٢٠ (د) ٩

(١٢) إذا كان ق اقتران متصل عند $s = ١$ وكان $٧ = (١)$ ، فإن نها $(س)$ $= \frac{|١-س|}{١-س}$ تساوي:

- (أ) ٦ (ب) ٥ (ج) ١ (د) ٩

(١٣) إذا كان ل $(س)$ $= \left. \begin{array}{l} ٢ \text{ جتا } ٢س \\ \frac{\pi}{٢} > س \\ \frac{\pi}{٢} \leq س \end{array} \right\}$ فإن قيمة ل التي تجعل ل متصلا عند $s = \frac{\pi}{٢}$ هي:

- (أ) ٦- (ب) ٥ (ج) ٤- (د) ٩

(١٤) إذا كان ل $(س)$ $= \left. \begin{array}{l} ٣ \\ ٥ + [س] \\ ٤ \end{array} \right\}$ فإن الاقتران ق متصل على الفترة:

- (أ) [٢٤١] (ب) (٢٤١) (ج) [٢٤١] (د) (٢٤١)

(١٥) إذا كانت نها $(س)$ $= ٤$ ، نها $(س)$ $= ٢$ فإن نها $(س)$ $= \frac{٣(س)}{٢(س)}$ تساوي:

- (أ) ٦- (ب) ٥ (ج) ٤- (د) $\frac{٣-}{٢}$

الاستاذ عادل عواد

النهايات والاتصال

الابداع في الرياضيات

(١٦) اذا كان ق(س) كثير حدود ، باقي قسمته على (س-٣) يساوي ٧ فإن $\frac{ق(س) + ٦}{س-٣}$ تساوي.....

- أ) ٢٨ (ب) ٣١ (ج) -٤ (د) ٤٦

(١٧) اذا كانت ن(س) = $\frac{٧ + ٢س}{١٥ + س٨ - ٢س}$ فإن قيم ب التي تجعل $\frac{ن(س)}{س}$ غير موجودة:.....

- أ) {٣٤٥} (ب) {١٥٤} (ج) {-٢٤} (د) {٢٤٤}

(١٨) اذا كانت $\frac{ن(س)}{س}$ غير موجودة فإن قيمة م ، ب على الترتيب :.....

- أ) ٩٤٩ - (ب) ٦٤٦ - (ج) ٩٤٦ - (د) ٦٤٩ -

(١٩) اذا كانت $\frac{ن(س)}{س} = \frac{٣ - م + \sqrt{٩ + ٦س}}{س}$ ، فإن قيمة الثابت م تساوي :.....

- أ) ٩ - (ب) ٦ - (ج) ١ - (د) ١ -

(٢٠) قيم ب التي تجعل $\frac{ن(س)}{س}$ غير موجودة :.....

- أ) (٨٤٨) (ب) [٨٤٨) (ج) (٨٤٠٠-) (د) (٨٤٠٠-)

(٢١) اذا كانت ن(س) = $\frac{١٦ - ٢س}{٢٠ + س٩ - ٢س}$ فإن قيم ب التي تجعل $\frac{ن(س)}{س}$ غير موجودة:.....

- أ) {٥٤٤} (ب) {٥} (ج) {٤} (د) {٤-٤٤}

(٢٢) اذا كانت $\frac{ن(س)}{س} = [٣ + س] - ٤$ ، م ص فإن قيمة م تساوي :.....

- أ) ٥ (ب) ٥ - (ج) ٦ - (د) ٦

(٢٣) اذا كان ن(س) = $\left\{ \begin{array}{l} [٣ + س] \geq م \\ [٣س] < م \end{array} \right.$ اذا كانت م ص ، فإن قيمة م التي تجعل $\frac{ن(س)}{س}$ موجودة

- أ) ٥ (ب) ٥ - (ج) ٦ - (د) ١

الاستاذ عادل عواد

النهايات والاتصال

الابداع في الرياضيات

(٢٤) اذا كانت u (س) = $\frac{3-s}{s^3-5s^2+6s}$ فإن قيم b التي تجعل u (س) غير موجودة:

- أ {٣،٢،٠} (ب) {٣،٢} (ج) {٣،٠} (د) {٢،٠}

(٢٥) اذا كان q (س) كثير حدود ، وكانت u (س) = $\frac{2-(s)}{1-s}$ فإن u (١) تساوي :

- أ ١٢ (ب) ٢ (ج) ٦- (د) ١

(٢٦) اذا كانت u (س) = $\frac{2-|s+4|}{1-s}$ فإن قيمة u تساوي :

- أ ١٢ (ب) ١٢- (ج) ٦- (د) ١

(٢٧) اذا كان u (س) = $\left\{ \begin{array}{l} [2+s] \text{ س} \neq 1 \\ 6 \text{ س} = 1 \end{array} \right.$ ، فإن مجموعة قيم u حيث u (س) = ٥ هي

- أ {٤،٣} (ب) [٤،٣] (ج) (٤،٣) (د) (٤،٣)

(٢٨) اذا كانت u (س) = $\frac{3-(s)}{1-s}$ ، فإن u (س) = ٩ تساوي :

- أ ٢٤- (ب) ٢٤ (ج) ٤ (د) ٤-

(٢٩) u (س) = $(\sqrt{8-s} + 7s)$ تساوي:

- أ ٧ (ب) ٠ (ج) ٤ (د) غير موجودة

(٣٠) اذا كانت u (س) = ٤ ، u (س) = ٥ ، فإن u (س) = $\left[4 + \frac{s}{2} \right]$ تساوي:

- أ ٤ (ب) ٥ (ج) ٩ (د) غير موجودة

(٣١) u (س) = $\frac{1-(s^3)}{s^3}$ تساوي :

- أ ٠ (ب) ٥ (ج) ٩ (د) غير موجودة

(٣٢) اذا كان $\frac{s^3 - 4}{s^2 - 4s + 4}$ متصلا على ح فإن مجموعة قيم الثابت أ هي :

(د) $4 \leq 2$

(ج) $4 = 2$

(ب) $4 < 2$

(أ) $4 > 2$

(٣٣) اذا كانت $\frac{s^2 - 5}{s^2 - 4s + 4} = 1$ ، فإن $\frac{s^2 - 5}{s^2 - 4s + 4} = \frac{10 - (s)^2}{\sqrt{(s)^2}}$

(د) ٤٤

(ج) ٠

(ب) ١٧

(أ) ٥١

الاجابة

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
رمز الاجابة	م	ب	ج	ب	ج	ب	ب	ج	ج

١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩
س	س	م	ج	ب	س	س	م	ج	س

٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩
ب	ب	ب	س	س	ب	ج	س	ب	س

٣٠	٣١	٣٢	٣٣
ج	م	ب	ب

متطابقات مثلثية

ملحق

$$(1) \text{جتا}(s \pm j) = \text{جتا}j \text{جتا}s \mp \text{جتا}j \text{جتا}s \quad (2) \text{ظا}(s \pm j) = \frac{\text{ظا}j \pm \text{ظا}s}{1 \mp \text{جتا}j \text{جتا}s}$$

$$(3) \text{جتا}^2j = \text{جتا}^2j - \text{جتا}^2j \quad (4) \text{جتا}^2j = 2 \text{جتا}^2j - 1$$

$$(5) \text{جتا}^2j = 1 - 2 \text{جتا}^2j \quad (6) \text{جتا}^2j = \frac{1 + \text{جتا}^2j}{2}$$

$$(7) \text{جتا}^2j = \frac{1 - \text{جتا}^2j}{2} \quad (8) \text{جتا}(s \pm j) = \text{جتا}j \text{جتا}s \pm \text{جتا}j \text{جتا}s$$

$$(9) \text{جتا}^2j = 2 \text{جتا}j \text{جتا}j$$

$$(10) \text{جتا}^2s + \text{جتا}^2s = 1 \quad (11) \text{ظا}^2s + 1 = \text{قتا}^2s$$

$$(12) \text{ظا}^2s + 1 = \text{قتا}^2s$$

$$(13) \text{جتا}j \text{جتا}ص = \frac{1}{2} (\text{جتا}(s + ص) + \text{جتا}(s - ص))$$

www.awa2el.net

$$(14) \text{جتا}j \text{جتا}ص = \frac{1}{2} (\text{جتا}(s + ص) - \text{جتا}(s - ص))$$

$$(15) \text{جتا}j \text{جتا}ص = \frac{1}{2} (\text{جتا}(s - ص) - \text{جتا}(s + ص))$$

$$(16) \text{جتا}j \text{جتا}ص = \frac{1}{2} (\text{جتا}(s + ص) - \text{جتا}(s - ص))$$

$$(17) \text{جتا}j - \text{جتا}ص = 2 \text{جتا}^2 \frac{1}{2} (s + ص) \text{جتا}^2 \frac{1}{2} (s - ص)$$

$$(18) \text{جتا}j + \text{جتا}ص = 2 \text{جتا}^2 \frac{1}{2} (s + ص) \text{جتا}^2 \frac{1}{2} (s - ص)$$

$$(19) \text{جتا}j - \text{جتا}ص = 2 \text{جتا}^2 \frac{1}{2} (s + ص) \text{جتا}^2 \frac{1}{2} (s - ص)$$

$$(20) \text{جتا}j + \text{جتا}ص = 2 \text{جتا}^2 \frac{1}{2} (s + ص) \text{جتا}^2 \frac{1}{2} (s - ص)$$

مسرد المصطلحات

- الاقتران function : علاقة بحيث كل عنصر في المجال له صورة واحدة فقط في المدى ويعين بقاعدته مثل $v = f(s)$.
- المتغير المستقل Independent Variable: المتغير الذي تعين قيمته في مجال الاقتران .
- المتغير التابع Dependent Variable: المتغير الذي تعين قيمته من المدى للاقتران .
- مجال الاقتران Domain of Function: مجموعة القيم التي ياخذها المتغير المستقل في الاقتران
- مدى الاقتران Range of Function: مجموعة القيم التي ياخذها المتغير التابع في الاقتران .
- اقتران القيمة المطلقة The absolute value function : $f(s) = |s|$ ، $\forall s \in \mathbb{R}$ وتساوي نفسها s اذا كانت s موجبة أو صفرا وتساوي $-s$ اذا كانت s سالبة .
- اقتران اكبر عدد صحيح Greatest integer function : اذا كان s عددا حقيقيا فإن $f(s) = [s]$ هو اكبر عدد صحيح لا يزيد عن نفسه .

تم تحميل هذا الملف من موقع الأوائل التعليمي

www.awa2el.net

