الأوائل في الرّياضيات

الأستاذ محمّد عوّاد

اِعزِم وَكدّ فإن مضَيْت فلا تقِف واصبِر وثَابِر فالنّجاحُ مُحَقّقُ

AWA2EL
LEARN 2 BE

أوّلًا : العمليّات الحسابيّة

1) الجمع والطرح

إذًا إشارة العددين
- متشابهة ← نجمع العددين
- مختلفة ← نطرح العددين

" دائمًا الإشارة للعدد الأكبر "

أمثلة

① $1 + 1 = 2$
② $-6 - 4 = -10$
③ $-2 + 6 = +4$
④ $9 - 6 = 3$
⑤ $6 - 9 = -3$
⑥ $-10 + 3 = -7$
⑦ $3 - \overset{+}{-} 1 = 4$
⑧ $3 + \overset{-}{-}1 = 2$
⑨ $3 \overset{-}{-} + 1 = 2$
⑩ $3 + \overset{+}{+} 1 = 4$

تدريبات

① $1 + 1 =$
② $-1 + 1 =$
③ $-1 - 1 =$
④ $15 - 3 =$
⑤ $7 + 7 =$
⑥ $-6 + 5 =$
⑦ $6 - 5 =$
⑧ $4 - 10 =$
⑨ $-7 - 8 =$
⑩ $-9 - 1 =$
⑪ $5 - 0 =$
⑫ $4 + 0 =$
⑬ $0 - 3 =$
⑭ $7 - - 1 =$
⑮ $3 - - 4 =$
⑯ $0 - - 1 =$
⑰ $-2 - 10 =$
⑱ $-1 - - 6 =$
⑲ $-3 + 3 =$
⑳ $3 - 7 =$

AWAEL
LEARN 2 BE

2) الضرب والقسمة

ركّز معي

إذًا إشارة العددين

متشابهة ← الناتج موجب (+)

مختلفة ← الناتج سالب (-)

من الآخر نبحث عن إشارة السّالب

إشارة سالبة واحدة ← سالب

إشارتين سالبتين ← موجب

أمثلة

① $-5 \times 2 = -10$	④ $-6 \times 2 = -12$	⑦ $\frac{-10}{-5} = +2$
② $-5 \times -2 = +10$	⑤ $-4 \times -2 = 8$	⑧ $\frac{-12}{4} = -3$
③ $-3 \times 5 = -15$	⑥ $\frac{-8}{2} = -4$	⑨ $\frac{4}{2} = 2$

تدريبات " ضرب "

① $2 \times 3 =$	⑥ $-2 \times 4 =$	⑪ $4 \times 0 =$
② $4 \times 6 =$	⑦ $-7 \times 6 =$	⑫ $5 \times 1 =$
③ $7 \times 8 =$	⑧ $-5 \times 9 =$	⑬ $-6 \times -1 =$
④ $9 \times -9 =$	⑨ $10 \times -7 =$	⑭ $-5 \times 0 =$
⑤ $6 \times -4 =$	⑩ $4 \times -5 =$	⑮ $-5 \times 3 =$

تدريبات " قسمة "

① $\frac{-15}{3} =$	⑥ $\frac{-15}{15} =$	⑪ $\frac{-3}{1} =$
② $\frac{3}{-15} =$	⑦ $\frac{3}{3} =$	⑫ $\frac{11}{-1} =$
③ $\frac{-12}{6} =$	⑧ $\frac{-9}{-3} =$	⑬ $\frac{3}{9} =$
④ $\frac{6}{-12} =$	⑨ $\frac{0}{-3} =$	⑭ $\frac{-9}{81} =$
⑤ $\frac{14}{2} =$	⑩ $\frac{0}{7} =$	⑮ $\frac{1}{4} =$

ثانيًا : الأسس

	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2	16^2
العدد تربيع $(\text{العدد})^2$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256

ملاحظة

احفظهم منيح عشان تحل بسرعة

	1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3	9^3	10^3	11^3
العدد تكعيب $(\text{العدد})^3$	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331

أمثلة

① $(a)^n \rightarrow (a)$ موجب

$7^2 = 49$ $\quad 4^2 = 16$ $\quad 10^2 = 100$ $\quad 5^2 = 25$

$3^3 = 27$ $\quad 5^3 = 125$ $\quad 2^3 = 8$ $\quad 8^0 = 1$

② $(-a)^n$

- n عدد زوجي ← الناتج موجب
- n عدد فردي ← الناتج سالب
- n = صفر ← 1

$(-2)^2 = 4$ $\quad (-1)^2 = 1$ $\quad (-3)^2 = 9$ $\quad (-4)^3 = -64$

$(-5)^3 = -125$ $\quad (-1)^3 = -1$ $\quad (-7)^0 = 1$ $\quad (-3)^0 = 1$

تدريبات

① $2^3 =$

② $3^2 =$

③ $4^2 =$

④ $1^5 =$

⑤ $1^6 =$

⑥ $(-2)^3 =$

⑦ $(-3)^2 =$

⑧ $(-4)^2 =$

⑨ $(-1)^5 =$

⑩ $(-1)^6 =$

⑪ $3^0 =$

⑫ $(-4)^0 =$

⑬ $1^0 =$

ثالثًا : الجذور

جدول مهم جداً جداً للحفظ

$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$
$2^6 = 64$
$2^7 = 128$
$2^8 = 256$
$2^9 = 512$
$2^{10} = 1024$

$3^2 = 9$
$3^3 = 27$
$3^4 = 81$
$3^5 = 243$

$4^2 = 16$
$4^3 = 64$
$(4)^4 = 256$

$5^2 = 25$
$5^3 = 125$
$5^4 = 625$

$10^2 = 100$
$10^3 = 1000$
$10^4 = 10\ 000$
$10^5 = 100\ 000$
$10^6 = 1\ 000\ 000$

Mohammad Awwad

لا تجعل لنجاحك سقف يؤويه , دع النّجاح
يصل عنان السّماء لا حدود له

رابعًا: خواص الأسس

1) الأس السّالب (اقلب)

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \text{or} \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

- n ■ ← الأس
- a ■ ← الأساس

أمثلة

① $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

② $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{4}$

تدريبات

① $2^{-4} =$

② $\frac{1}{4^{-2}} =$

③ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} =$

④ $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} =$

2) الأس كسر

" يمكن تحويله إلى جذر "

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

- m ■ ← الأس
- n ■ ← دليل الجذر

أمثلة

① $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9^1} = \sqrt{9} = 3$

② $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

③ $25^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{25^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$

تدريبات

① $4^{\frac{3}{2}} =$

② $27^{\frac{-1}{3}} =$

③ $(125)^{\frac{1}{3}} =$

ملاحظة

يمكن تحويل الجذر إلى أس

① $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}$

② $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}$

3) الضرب عند تشابه الأساس " نجمع الأسس ونضرب المعاملات "

$$ax^n \times bx^m = (a \times b)x^{n+m}$$

جمع الأسس

معامل — معامل — ضرب المعاملات — الأساس نفسه

أمثلة

① $2x^2 \times 5x^3 = (2 \times 5)x^{2+3} = 10x^5$

② $5a \times 2a^2 \times 6b^2 = (5 \times 2)a^{1+2} \times 6b^2 = 10a^3 \times 6b^2$

الأساس b مختلف عن a

تدريبات

① $3b \times 4b^2 =$

② $2x \times 4x^3 =$

③ $n^6 \times n^{-3} =$

④ $x^5 \times x =$

⑤ $2a \times 3a \times 7b^2 =$

4) القسمة عند تشابه الأساس " نطرح الأسس ونقسم المعاملات "

$$\frac{ax^n}{bx^m} = \frac{a}{b}x^{n-m}$$

أمثلة

① $\frac{2a^5}{3a^4} = \frac{2}{3}a^{5-4} = \frac{2}{3}a$

② $\frac{4x^6}{2x^2} = 2x^4$

تدريبات

① $\frac{8b^4}{4b^2} =$

② $\frac{3x^2}{9x^2} =$

③ $\frac{25x^6}{5x} =$

④ $\frac{4x^2}{7x^5} =$

5) في حالة الرّفع تضرب الأسس

$$(a^m)^n = a^{m\times n}$$

أمثلة

② $(2^2)^3 = 2^{2\times3} = 2^6$

① $(2^3)^4 = 2^{3\times4} = 2^{12}$

تدريبات

② $(2^4)^5 =$

① $(2^3)^5 =$

④ $(3^2)^5 =$

③ $(3^2)^4 =$

6) الأس يتوزع على

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$ ← القسمة (كسر)

$$(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$$ ← الضرب

أمثلة الكسور

② $\left(\frac{11}{5}\right)^2 = \frac{11^2}{5^2} = \frac{121}{25}$

① $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

④ $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$

③ $\left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1^3}{7^3} = \frac{1}{343}$

⑥ $\left(\frac{-4}{7}\right)^2 = \frac{(-4)^2}{7^2} = \frac{16}{49}$

⑤ $\left(\frac{-13}{14}\right)^2 = \frac{(-13)^2}{14^2} = \frac{169}{196}$

⑧ $\left(\frac{-4}{9}\right)^3 = \frac{(-4)^3}{9^3} = \frac{-64}{729}$

⑦ $\left(\frac{-3}{8}\right)^3 = \frac{(-3)^3}{8^3} = \frac{-27}{512}$

انتبه !!

السّالب يذهب فقط للبسط أو المقام

تدريبات " الكسور "

① $\left(\frac{1}{5}\right)^2 =$

② $\left(\frac{13}{15}\right)^2 =$

③ $\left(\frac{7}{8}\right)^2 =$

④ $\left(\frac{1}{8}\right)^3 =$

⑤ $\left(\frac{6}{10}\right)^3 =$

⑥ $\left(\frac{3}{4}\right)^3 =$

⑦ $\left(-\frac{1}{9}\right)^2 =$

⑧ $\left(-\frac{5}{6}\right)^2 =$

⑨ $\left(-\frac{3}{7}\right)^2 =$

⑩ $\left(-\frac{1}{10}\right)^3 =$

⑪ $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 =$

⑫ $\left(-\frac{8}{9}\right)^3 =$

أمثلة الضرب

① $(2 \times 3)^2 = 2^2 \times 3^2$

$= 4 \times 9$

$= 36$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\ \ 4} \\ 25 \\ \times\ 49 \\ \hline 229 \\ +1000 \\ \hline 1225 \end{array}$$

② $(5 \cdot 7)^2 = 5^2 \cdot 7^2$

$= 25 \times 49$

$= 1225$

③ $(-9 \times 2)^2 = (-9)^2 \times (2)^2$

$= 81 \times 4$

$= 324$

④ $(4 \times -2)^3 = 4^3 \times (-2)^3$

$= 64 \times -8$

$= -512$

تدريبات " الضرب "

① $(7 \times 3)^2 =$

② $(-3 \times 2)^2 =$

③ $(3a)^2 =$

④ $(-2 \times 3)^3 =$

⑤ $(5x)^3 =$

⑥ $(6 \times 5)^2 =$

⑦ $(-4 \times 5)^2 =$

⑧ $(-7x)^2 =$

⑨ $(ab)^3 =$

⑩ $(-5n)^3 =$

AWA2EL LEARN 2 BE

خامساً :حل المعادلات الأسية بشكلها البسيط

نعتمد على القاعدة **عند تشابه الأساس تتساوى الأسس**

مثال : $5^2 = 5^x$

الأساس نفسه , اذا يجب أن تتساوى الأسس أي $x=2$

أمثلة اوجد قيمة الاس (x) في كل مما يلي :

① $2^x = 2^3$

$x = 3$

② $5^x = 25$

$5^x = 5^2$

$x = 2$

③ $2^x = 8$

$2^x = 2^3$

$x = 3$

④ $5^x = 125$

$5^x = 5^3$

$x = 3$

⑤ $2^x = 64$

$2^x = 2^6$

$x = 6$

في حال لم تعرف 2 أس ماذا يُعطيك 64 قد تلجأ للتحليل

2^6	2	64
	2	32
	2	16
	2	8
	2	4
	2	2
		1

⑥ $10^x = 10,000$

$10^x = 10^3$

$x = 3$

⑦ $3^x = 1$

$3^x = 3^0$

$x = 0$

⑨ $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{27}{125}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^3$

$x = 3$

⑩ $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{25}{9}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^2$

$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

$x = -2$

تدريبات

اوجد قيمة (x) الاس في كل مما يلي:

① $7^x = 49$

② $8^x = 512$

③ $7^x = 1$

④ $10^x = 10,000$

⑤ $3^x = 243$

⑥ $9^x = \left(\frac{1}{9}\right)$

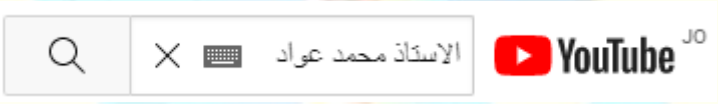
• ملاحظة : استخدم التحليل

3 | 243

⑦ $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{9}$

⑧ $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{27}{8}$

⑨ $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$



في الوقت المنسب , ستأتيك الأمنيات

المؤجلة اترسم في قلبك فرحاً مَحتوماً

الاقترانات الأسّية:

■ في الكتاب الاقتران الأسي لديه صورتين :

$f(x) = ab^{x}$

حيث : عددان حقيقيان a,b

$b > 0 , b \neq 1$

$a \neq 0$

$f(x) = ab^{x-h} + k$

حيث : أعداد حقيقية a , b , k , h

$b > 0 , b \neq 1$

$a \neq 0$

ليش ؟!

$b > 0$ لازم تكون (+) , لأنه إذا كانت (-)
رح تكون غير معرّفة عند بعض القيم

$b \neq 1$ لأنه 1 أس أي رقم رح يضل واحد
فالاقتران رح يكون ثابت $f(x) = a$

وبشكل عام بعرف انه اقتران أسي لما
المتغير يكون قاعد مكان الأس
ليس أسي $f(x) = x^{3}$
لأنه المتغير موجود في الأساس لا في الأس

■ أمثلة على الاقترانات الأسئلة بصورتيه

① $f(x) = 5(2^{x})$
$a = 5 , b = 2, k = 0$

② $f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$
$a = 3 , b = \frac{1}{2} , k = 0$

③ $f(x) = (0.2)^{x}$
$a = 1 , b = 0.2 , k = 0$

④ $f(x) = 5(3)^{x+1} - 2$
$a = 5 , b = 3 , h = -1 , k = -2$

⑤ $f(x) = 2(3)^{x+2} - 1$
$a = 2 , b = 3 , h = -2 , k = -1$

■ أي من الاقترانات الآتية يعتبر مثالا على اقتران أسي , ثم حدد قيم a , b , k :

① $f(x) = 5(3)^{x}$

② $f(x) = 4(-2)^{x}$

③ $f(x) = (4)^{2x}$

④ $f(x) = \sqrt{x} + 5$

⑤ $f(x) = (2)^{-x}$

⑥ $f(x) = 3(4)^{x+2} - 5$

⑦ $g(x) = -2(0.5)^{x+3} - 7$

⑧ $h(x) = x^{20} + 3$

⑨ $h(x) = x - 3^{x}$

مثال أجد كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

① $f(x) = (4)^x , x = 3$

$= (4)^3$

$= (64)$

② $f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4 , x = -2$

$= 3\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 4$

$= 3(2)^2 - 4$

$= 3(4) - 4$

$= 12 - 4$

$= 8$

تذكّر :

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

نتخلص من الأس السالب

↓

اقلب الكسر

③ $f(x) = (3)^x , x = 4$

$= (3)^4$

$= (81)$

④ $f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1 , x = -1$

$= 2\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 1$

$= 2(3)^1 - 1$

$= 2(3) - 1$

$= 6 - 1$

$= 5$

⑤ $f(x) = (13)^x , x = 2$

$= (13)^2$

$= 169$

⑥ $f(x) = 4(5)^x , x = 3$

$= 4(5)^3$

$= 4(125)$

$= 500$

⑦ $f(x) = 7\left(\frac{1}{2}\right)^x , x = 3$

$= 7\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$= 7\left(\frac{1^3}{2^3}\right)$

$= 7\left(\frac{1}{8}\right)$

$= \frac{7}{8}$

تذكّر :

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

توزع الأس

فوق

تحت

⑧ $f(x) = -(3)^x + 7 , x = 4$

$= -(3)^4 + 7$

$= -(81) + 7$

$= -74$

⑨ $f(x) = -(2)^x + 1 , x = 6$

$= -(2)^6 + 1$

$= -(64) + 1$

$= -64 + 1$

$= -63$

⑩ $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 12 , x = 3$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^3 - 12$

$= \left(\frac{1^3}{4^3}\right) - 12$

$= \frac{1}{64} - \frac{12 \times 64}{1 \times 64}$

$= \frac{1}{64} - \frac{768}{64}$

$= \frac{-767}{64}$

للتبسيط عليك توحيد المقامات

11. $f(x) = 3(2)^x , x = -1$

$\frac{3}{2}$

12. $f(x) = (3)^{x-2} , x = 2$

تذكر $a^0 = 1$

1

13. $f(x) = (9)^{-x} , x = 2$

$\frac{1}{81}$

14. $f(x) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^x , x = 4$

$\frac{5}{16}$

15. $f(x) = -(3)^x + 5 , x = 3$

-22

16. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3 , x = 2$

$\frac{13}{4}$

17. $f(x) = -4\left(\frac{1}{5}\right)^x + 3 , x = -1$

-17

18. $f(x) = 5\,(3)^{x+1} - 4 , x = 3$

401

19. $f(x) = (11)^x , x = 3$

1331

20. $f(x) = -5\,(2)^x , x = 1$

-10

21. $f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^x , x = 2$

$\frac{3}{49}$

22. $f(x) = -(5)^x + 4 , x = 4$

-621

23. $f(x) = 3^x + 1 , x = 5$

244

24. $f(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x - 3 , x = 2$

$\frac{-242}{81}$

■ إذا كان $f(x) = 3\left(\frac{5}{2}\right)^x + 6$ فما قيمة $f(2)$:

أ) $\frac{99}{4}$ ب) $\frac{97}{4}$ ج) $\frac{99}{6}$ د) $\frac{97}{6}$

■ إذا كان $f(x) = 9(3)^x$ فما قيمة $f(-3)$:

أ) $\frac{1}{9}$ ب) $-\frac{1}{9}$ ج) $\frac{1}{3}$ د) $-\frac{1}{3}$

■ ما قيمة الثابت m التي تجعل الاقتران $f(x) = 3^x + mx$ اقتران أسي :

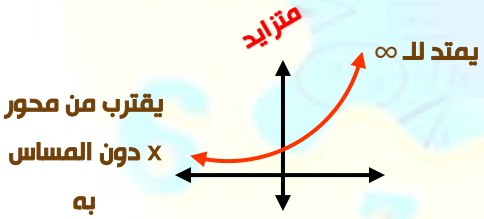
أ) 1 ب) 0 ج) -1 د) 2

■ التمثيل البياني للاقتران الأسي وخصائصه :

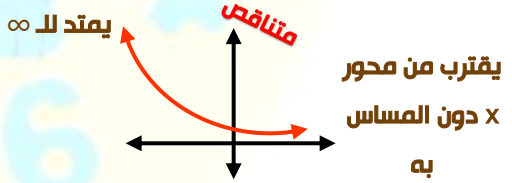
التمثيل البياني للاقتران الأسي وخصائصه :

الحالة 1 : $f(x) = ab^x$ ⇦ a عدد موجب

• التمثيل البياني بشكل عام يكون :



$1 < b$



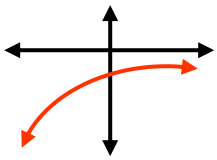
$0 < b < 1$

• خصائصه :

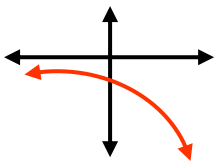
المجال (قيم x)	المدى (قيم y)	خط التقارب الأفقي	المقطع الصّادي (x = 0)	متزايد أو متناقص
مجموعة الأعداد الحقيقية IR (- ∞ , ∞)	(k , ∞) وهنا k = 0 إذًا (0, ∞)	المستقيم y = k وهنا k = 0 إذًا y = 0	y = a	متزايد b > 1 متناقص 0 < b < 1

الحالة 2 : $f(x) = ab^x$ ⇦ a عدد سالب

- **التمثيل البياني بشكل عام يكون : (انعكاس للتمثيل السابق حول محور x)**



$0 < b < 1$



$1 < b$

- **خصائصه : " سنغير بعض الخصائص "**

المجال (قيم x)	المدى (قيم y)	خط التقارب الأفقي	المقطع الصّادي (x = 0)	متزايد أو متناقص
R (- ∞ , ∞)	(- ∞ , k) وهنا k = 0 إذًا (-∞, 0)	المستقيم y = k وهنا k = 0 إذًا y = 0	y = a	متزايد 0 < b < 1 متناقص 1 < b

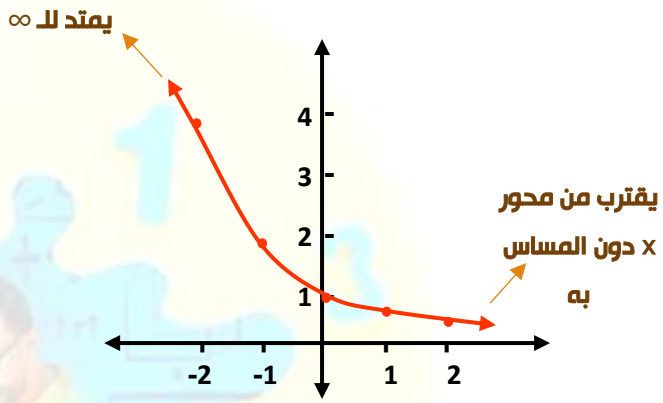
- **التمثيل البياني بشكل دقيق مطلوب فقط للحالة الأولى :**

$f(x) = ab^x$ ⇦ a عدد موجب

مثال مثّل كل مما يلي ثم قارن بينهما لتوجد بعض الخصائص :

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $0 < b < 1$ ← كسر

X	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
(x,y)	(-2,4)	(-1,2)	(0,1)	$(1,\frac{1}{2})$	(2,1)



1) المجال "قيم x": مجموعة الأعداد الحقيقية IR

2) المدى "قيم y" : مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (0 , ∞)

3) خط التقارب الأفقي هو محور x $y = 0$

4) الاقتران متناقص دائمًا في حالة $0 < b < 1$ زادت x , قلت y

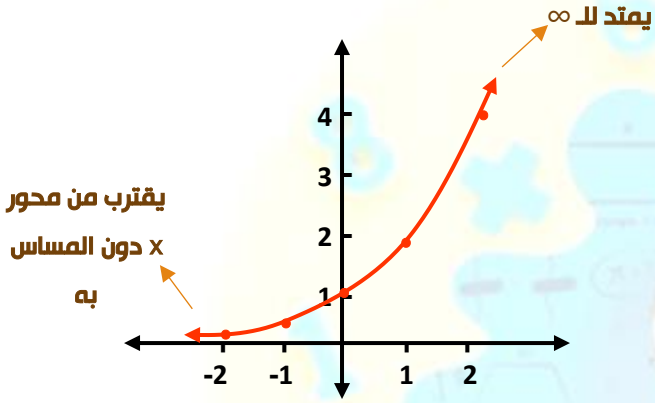
5) المقطع الصادي $x = 0$ المقطع الصادي هو $y=a$ (وين الرسمة بتقطع محور y) وهو $y = 1$

6) الاقتران واحد لواحد (1-1)

كل عنصر في x له صورة واحدة y

$f(x) = 2^x$ $b > 1$

X	-2	-1	0	1	2
f (x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
(x,y)	$(-2,\frac{1}{4})$	$(-1,\frac{1}{2})$	(0,1)	(1,2)	(2,4)



1) المجال "قيم x": مجموعة الأعداد الحقيقية IR

2) المدى "قيم y" : مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (0 , ∞)

3) خط التقارب الأفقي هو محور x $y = 0$

4) الاقتران متزايد دائمًا في حالة $b > 1$ زادت x , زادت y

5) المقطع الصادي $x = 0$ وهو $y = 1$

6) الاقتران واحد لواحد (1-1)

كل عنصر في x له صورة واحدة y

فكّر !

هل يوجد مقطع سيني

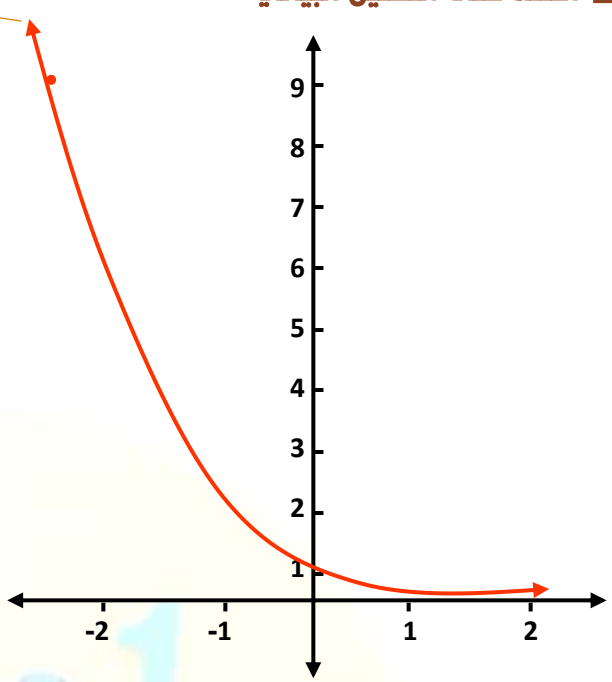
0788118727

■ أمثلة على التمثيل البياني :

تذكر وضع الأسهم

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

X	-2	-1	0	1	2
f (x)	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
(x,y)	(-2,9)	(-1,3)	(0,1)	$(1,\frac{1}{3})$	$(2,\frac{1}{9})$
	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ $3^2 = 9$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ $3^1 = 3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{0} = 1$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{1} = \frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2} = \frac{1}{9}$



- أجب عن الأسئلة التابعة للاقتران أعلاه :

① حدد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

المجال هو IR , المدى هو IR + أو (0 , ∞) , خط التقارب الأفقي هو محور x أو y = 0

② جد المقطعين من المحورين الإحداثيين.

المقطع الصادي هو y = 1 (مقطع صادي يعني x = 0)

لا يوجد مقطع سيني لأنه يقترب من محور x ولا يمسه إطلاقًا

③ هل الاقتران f (x) متزايد أم متناقص ؟

متناقص , كلما زادت قيم x قلّت قيم y

④ هل الاقتران f (x) واحد لواحد ؟

نعم , لأنه لكل قيمة x يوجد صورة واحدة له على y

■ ما هو المقطع الصادي فيما يلي :

مقطع صادي يعني x = 0 ← إذا المقطع الصادي هو y = a

① $f(x) = 5\,(3)^x$ $a = 5$ إذًا المقطع الصادي هو y = 5	② $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $a = 1$ إذًا المقطع الصادي هو y = 1	③ $f(x) = -\,(3)^x$ $a = -1$ إذًا المقطع الصادي هو y = -1
④ $f(x) = -2\,(5)^x$	⑤ $f(x) = (4)^x$	⑥ $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$

■ مثل بيانيًا كل مما يلي ,ثم أوجد مجاله ومداه والمقطع الصادي ,ثم حدّد إذا كان متزايدًا أم متناقصًا :

① $f(x) = 4^x$

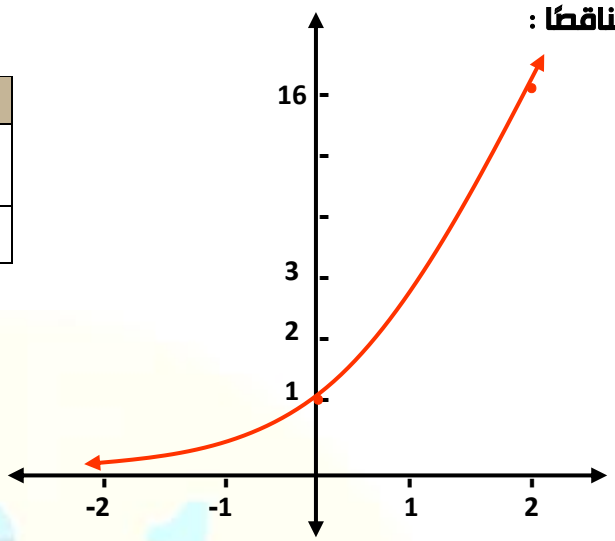
X	-2	-1	0	1	2
f (x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16
(x,y)	$(-2,\frac{1}{16})$	$(-1,\frac{1}{4})$	(0,1)	(1,4)	(2,16)

$f(-2) = 4^{-2}$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

$f(-1) = 4^{-1}$

$= \left(\frac{1}{4}\right)$



المجال هو R

المدى $(0 , \infty)$

المقطع الصادي هو (a) إذا $y = 1$

إذا متزايد $b = 4 > 1$

---

② $f(x) = 7\left(\frac{1}{7}\right)^x$

X	-2	-1	0	1	2
f (x)	343	49	7	1	$\frac{1}{7}$
(x,y)	(-2,343)	(-1,49)	(0,7)	(1,1)	$(2,\frac{1}{7})$

$f(-2) = 7\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$

$= 7\ (7)^2$

$= 7 \times 49 = 343$

$f(-1) = 7\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$

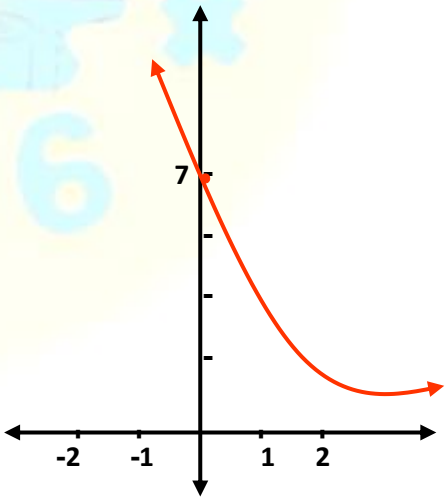
$= 7\ (7)^1 = 49$

$f(1) = 7\left(\frac{1}{7}\right)^1$

$= 7\left(\frac{1}{7}\right) = 1$

$f(2) = 7\left(\frac{1}{7}\right)^2$

$= 7\left(\frac{1}{49}\right) = \left(\frac{7}{49}\right) = \left(\frac{1}{7}\right)$



المجال هو R

المدى $(0 , \infty)$

المقطع الصادي هو (a) إذا $y = 7$

إذا متناقص $b = \frac{1}{7}$

③ إذا كان $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}$ فأجب عما يأتي :

① أكمل الجدول المجاور :

X	0	1	2	3	4
f(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

② ارسم منحنى الاقتران مستعينًا بالجدول.

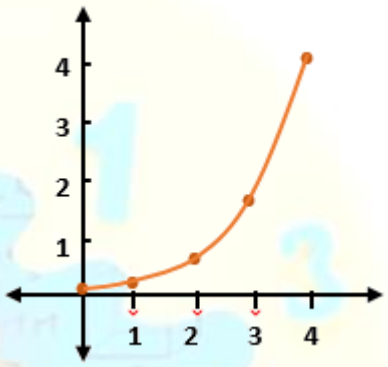
$f(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-0}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}$

$f(1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{1}{2}$

$f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1$

$f(3)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$

$f(4)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=(2)^{2}=4$



تدريبات

④ $f(x)=(9)^{-x}$

③ $f(x)=7\,(6)^{x}$

⑥ $f(x)=(6)^{-x}$

⑤ $f(x)=3\,(4)^{x}$

■ خصائص الاقتران الأسي بالصورة الثانية :

$f(x)=ab^{x-h}+k$

$a, b, h, k \in IR$

$a>0, b>0, b\neq 1$

⇦ a موجبة

[غير مطلوب الرسم هنا] الحالة (1) :

مجاله	مداه	متزايد أم متناقص ؟	خط التقارب الأفقي
مجموعة الأعداد الحقيقية R	الفترة (K, ∞)	متزايد $b>1$ متناقص $0<b<1$	المستقيم $y=k$

لا يُطلب هنا المقطع الصادي

الحالة (2) : $f(x)=ab^{x-h}+k$ ⇦ a سالبة

0788118727

أمثلة أوجد خط التقارب الأفقي لكل اقتران مما يأتي , ثم حدّد مجاله ومداه مبيّنا إذا كان متناقصًا أم متزايدًا :

① $f(x) = 5(3)^{x+1} - 2$

إذا الصورة الثانية $a = 5 , b = 3 , k = -2$ (a موجبة)

1) خط التقارب الأفقي هو $y = -2$

2) المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

3) المدى هو $(-2 , \infty)$

4) بما أن $b = 3$ إذًا $b > 1$ فهو متزايد

---

② $f(x) = 7(2)^{-x} + 3 \quad \rightarrow \quad f(x) = 7\left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 3$

(a موجبة) $a = 7 , b = \frac{1}{2} , k = 3$

1) خط التقارب الأفقي هو $y = 3$

2) المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

3) المدى هو $(3 , \infty)$

4) $b = \frac{1}{2}$ إذًا $0 < b < 1$ فإن الاقتران متناقص

---

③ $f(x) = -3(4)^{x} + 1$

$f(x) = -3(4)^{x} + 1$

$a = -3 , b = 4 , k = 1$

(a سالبة)

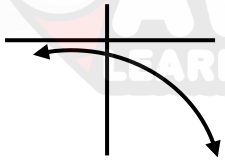
1) خط التقارب الأفقي $y = 1$

2) المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

مجاله	مداه	متزايد أم متناقص ؟	خط التقارب الأفقي
R	$(-\infty , K)$	متزايد $0 < b < 1$ متناقص $b > 1$	المستقيم $y = k$

3) المدى (سيتغير لأن a سالبة) هو $(-\infty , 1)$

4) متناقص لأنه $b = 4$ وقيمة a سالبة , إذًا تنعكس القاعدة



④ $f(x) = 2(3)^{x+2} - 1$

$a = 2 , b = 3 , k = -1$

1) خط التقارب الأفقي هو $y = -1$, 2) المجال R

3) المدى هو $(-1 , \infty)$, 4) $b = 3 > 1$ إذًا متزايد

(a موجبة)

⑤ $f(x) = -\frac{1}{4}(3)^{x-1} + 2$

a سالبة , إذا بفتح عيني

$a = -\frac{1}{4} , b = 3 , k = 2$

1) خط التقارب الأفقي $y = 2$

2) المجال R 3) المدى "بنعكس" $(-\infty , 2)$

4) $b = 3 > 1$ (بنعكس) متناقص

⑥ $f(x) = 4(5)^{-x}$

$f(x) = 4(\frac{1}{5})^{x}$

$a = 4 , b = \frac{1}{5} , k = 0$

(a موجبة)

1) خط التقارب الأفقي $y = 0$ (محور x)

2) المجال R 3) المدى $(0 , \infty)$

4) $b = \frac{1}{5}$ إذا متناقص

⑦ $f(x) = 5^{x-1} + 2$

⑧ $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 5$

⑨ $f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^{x+5} - 6$

⑩ $f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$

⑪ $f(x) = 7^{x-2} + 1$

⑫ $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+1} - 3$

⑬ $f(x) = 5\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 7$

⑭ $f(x) = 7(4)^{x-5} + 3$

⑮ $f(x) = -3(2)^{x} + 1$

⑯ $f(x) = -10\left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 3$

سؤال ضع دائرة :

خط التقارب الأفقي للاقتران $f(x) = 4(3)^x$ هو :

a) $y = 4$ b) $y = 1$ c) $y = 3$ d) $y = 0$

d , لأن $k = 0$

سؤال ادرس الاقتران $f(x) = 1 - 2^x$, ثم أجب عمّا يليه :

1) مجال الاقتران

2) مدى الاقتران

3) المقطع الصادي

4) هل الاقتران متزايد أم متناقص ؟

5) جد خط التقارب الأفقي

سنكسب رهان الحياة يوماً ما كان جهادنا
على أحلامنا عبثًا , تذكّر أن كل مر سيمر

■ تطبيقات حياتية على الاقتران الأسي :

مثال 1 حساب عدد الكائنات الحية التي تتكاثر سريعًا :

حشرات : يمثل الاقتران $f(x) = 30(2)^x$ عدد حشرات الخنفساء الدقيق 10 في كيس دقيق , حيث x عدد الأسابيع منذ بداية رصد وجودها في الكيس

① جد عدد هذه الحشرات في كيس الدقيق بعد 6 أسابيع

عدد الحشرات : $f(x)$

عدد الأسابيع : x

المجهول $f(x)$

المعطى $x = 6$, لأنها عدد أسابيع ← إذًا تعويض مباشر

$f(x) = 30(2)^x$

$f(6) = 30(2)^6 = 30(64) = 1920$

إذًا عدد الحشرات بعد 6 أسابيع في كيس الدقيق هو 1920 حشرة

② بعد كم أسبوعًا يصبح عددها في الكيس 7680 حشرة ؟

المجهول هو عدد الأسابيع يعني x

المعطى هو عدد الحشرات يعني $f(x) = 7680$

$f(x) = 30\,(2)^x$

$\frac{7680}{30} = \frac{30\,(2)^x}{30}$

$256 = 2^x$

$2^8 = 2^x$

$x = 8$

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

ملاحظة

تعلّم سابقه التحليل إلى عوامل

- إذًا بعد 8 أسابيع يصبح عدد الحشرات 7680

مثال 2 البكتيريا :

يمثل الاقتران $f(x) = 500\,(2)^x$ عدد الخلايا البكتيرية في عينة مخبرية حيث x الزمن بالساعات :

عدد الخلايا : $f(x)$

عدد الساعات : x

① جد عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 ساعات

المجهول : عدد الخلايا يعني $f(x)$

المعطى : 5 ساعات يعني $x = 5$

$f(x) = 500\,(2)^x$

$= 500\,(2)^x$

$= 500\,(32)$

$= 16000$

- إذًا عدد الخلايا البكتيرية هو 16000 خلية بعد 5 ساعات

② بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العينة 4000 خلية ؟

المجهول هو عدد الساعات يعني x

المعطي هو عدد الخلايا يعني $f(x) = 4000$

$f(x) = 500\,(2)^x$

$\frac{4000}{500} = \frac{500\,(2)^x}{500}$

$8 = 2^x$

$2^3 = 2^x$

$x = 3$

قاعدة

عند تساوي الأساس تتساوى الأسس

- إذًا بعد 3 ساعات يصبح عدد الخلايا 4000 خلية

مثال 3 بكتيريا : يمثل الاقتران $f(x) = 7000\ (1.2)^x$ عدد الخلايا البكتيرية في تجربة مخبرية،
حيث x الزمن بالساعات :

عدد الخلايا : $f(x)$
عدد الساعات : x

① جد عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة

المجهول : عدد الخلايا يعني $f(x)$

المعطى : بداية التجربة يعني $x = 0$

$$f(0) = 7000\ (1.2)^0$$
$$= 7000$$

- إذًا عدد الخلايا البكتيرية 7000 خلية

② جد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة :

المجهول : عدد الخلايا يعني $f(x)$

المعطى : بعد 12 ساعة يعني $x = 12$

$$f(x) = 7000\ (1.2)^x$$
$$f(12) = 7000\ (1.2)^{12}$$ استخدام آلة حاسبة
$$= 62412.1$$
$$\approx 62412$$ خلية

③ بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 10080 خلية ؟

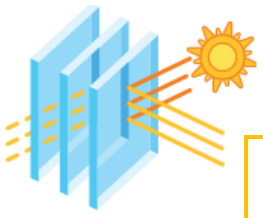
المجهول : عدد الساعات يعني x

المعطى : عدد الخلايا تعني $f(x) = 10080$

$$f(x) = 7000\ (1.2)^x$$
$$\frac{10080}{7000} = \frac{7000}{7000}\ (1.2)^x$$
$$1.44 = 1.2^x$$ استخدام آلة حاسبة
$$\frac{144}{100} = \left(\frac{12}{10}\right)^x$$
$$x = 2$$

- إذًا بعد ساعتين

مثال 4 الضوء : يمثل الاقتران $f(x) = 100\ (0.97)^x$ نسبة الضوء المار خلال X من الألواح الزجاجية المتوازية :



نسبة الضوء : $f(x)$
عدد الألواح الزجاجية : x

① جد نسبة الضوء المار خلال لوح زجاجي واحد
② جد نسبة الضوء المار خلال لوحين زجاجيين

الحل : ① المجهول : نسبة الضوء يعني $f(x)$, المعطى : زجاج واحد يعني $x = 1$

$$f(x) = 100\ (0.97)^x$$

$$f(1) = 100\ (0.97)^1$$
$$= 100 \times 0.97 = 97$$

إذًا نسبة الضوء 97٪

② المجهول : نسبة الضوء , المعطى : عدد الألواح يعني $x = 2$

$$f(3) = 100\left(\frac{97^2}{100^2}\right)$$
$$= \frac{(97)^2}{100} \quad = 97^2\%$$

مثال 5 سرطان البنكرياس : يمثل الاقتران $P(t) = 100\ (0.3)^t$ نسبة المتعافين من مرضى سرطان البنكرياس , ممن هم في المرحلة المتقدمة , حيث تعافوا بعد t سنة من التشخيص الأولي للمرض :

نسبة المتعافين : $P(t)$
عدد السنوات بعد التعافي : t

① جد نسبة المتعافين بعد سنة من التشخيص الأولي للمرض
② بعد كم سنة تصبح نسبة المتعافين 9 ٪ ؟

① المجهول : نسبة المتعافي يعني $P(t)$
المعطى : بعد سنة يعني $t = 1$

$$P(t) = 100\ (0.3)^t$$
$$P(1) = 100\ (0.3)^1$$
$$= 100 \times 0.3$$
$$= 30$$

إذًا نسبة المتعافين 30 ٪

② المجهول : عدد السنوات يعني t
المعطى : نسبة المتعافين يعني $t = a$

$$P(t) = 100\ (0.3)^t$$
$$\frac{9}{100} = \frac{100}{100}(0.3)^t$$
$$\frac{9}{100} = \left(\frac{3}{10}\right)^t$$
$$\frac{9}{100} = \frac{3^t}{10^t}$$
$$\left(\frac{3}{10}\right)^2 = \left(\frac{3}{10}\right)^t$$

إذًا $t = 2$ بعد سنتين

مثال 6 بكتيريا : يمثل الاقتران $f(x) = 400\ (2)^{\frac{x}{3}}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة في تجربة مخبرية

عدد الخلايا : $f(x)$
عدد الساعات : x

① جد عدد الخلايا البكتيرية عند بدء التجربة
② جد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة
③ بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 102400 خلية ؟

① المجهول : عدد الخلايا يعني $f(x)$
المعطى : بدء التجربة يعني 0 ساعة
$x = 0$

$f(x) = 400\ (2)^{\frac{x}{3}}$

$f(0) = 400\ (2)^{\frac{0}{3}}$

$= 400\ (2)^{0}$

$= 400\ (1) = 400$

إذًا 400 خلية

② المجهول : عدد الخلايا يعني $f(x)$
المعطى : عدد الساعات $x = 12$

$f(x) = 400\ (2)^{\frac{x}{3}}$

$f(12) = 400\ (2)^{\frac{12}{3}}$

$= 400\ (2)^{4}$

$= 400 \times 16 = 6400$

إذًا 6400 خلية

③ المجهول : عدد الساعات يعني x , المعطى : عدد الخلايا $f(x) = 102400$

$f(x) = 400\ (2)^{\frac{x}{3}}$

$\frac{102400}{400} = \frac{400}{400}\ (2)^{\frac{x}{3}}$

$\frac{1024}{4} = (2)^{\frac{y}{3}}$

$256 = (2)^{\frac{x}{3}}$

$2^{8} = (2)^{\frac{x}{3}}$

$\frac{x}{3} = 8$

$x = 24$

24 ساعة

256
4 | 1024
- 8
22
- 20
24
- 24
00

مثال 7 خزان : يمثل الاقتران $f(x) = 2\ (0.75)^{x}$ كمية الماء المتبقية في خزّان (بالمتر المكعب) بعد x ساعة نتيجة ثقب فيه :

① جد كمية الماء المتبقية في الخزان بعد ساعة واحدة
② ما الزمن الذي تصبح فيه كمية الماء المتبقية في الخزان $\frac{9}{8}m^3$ تقريبا

① $f(1) = 2\ (0.75)^{1}$

$= 2\ (0.75)$

$= 1.5\ m^3$

تذكّر :
$\frac{9}{8} \div 2$
$\frac{9}{8} \times \frac{1}{2}$
$= \frac{9}{16}$

② $f(x) = 2\ (0.75)^{x}$

$= 2 \div \frac{9}{8} = \frac{2}{2}(0.75)^{x}$

$\frac{9}{16} = (0.75)^{x}$

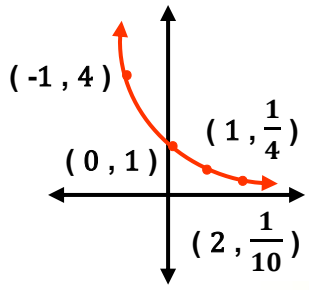
$\left(\frac{3}{4}\right)^{2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{x}$

$x = 2$

تذكّر :
$\left(\frac{3}{4}\right) = 0.75$

■ مهارات تفكير عُليا :

① يبين الشكل المجاور التمثيل البياني لمنحنى الاقتران : $f(x) = ab^x$, أجد $f(3)$ مبررًا إجابتك



1) $a = 1$ لأن a هي المقطع الصادي

2) نأخذ أي نقطة مثلًا (-1 , 4)
x f(x)

$f(x) = b^x$ لأن $a = 1$

$4 = (b)^{-1}$

$4 = \left(\frac{1}{b}\right)^1$

$\frac{4}{1} = \frac{1}{b}$

$b = \frac{1}{4}$

إذًا $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

---

② اكتشف المختلف : أي الاقترانات الآتية مختلفة , برّر إجابتك .

$y = 3^x$, $f(x) = 2(4)^x$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 5(3)^x$

لأنه اقتران متناقص , أما البقية فهي إقترانات متزايدة

---

③ إذا كان الاقتران $f(x) = ab^x$ أسيًا فبيّن أن $\frac{f(x+1)}{f(x)} = b$

$f(x+1) = ab^{x+1}$

$f(x) = ab^x$

$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{ab^{x+1}}{ab^x} = \frac{b^x \cdot b}{b^x} = b$

AWA2EL LEARN 2 BE

ملخص مهم للدرس الأول

① الاقتران الأسي بصورة $f(x) = ab^x$

مجاله	مداه	خط التقارب الأفقي	$x = 0$ المقطع الصّادي	متزايد عندما	متناقص
R	R^+ $(0, \infty)$	محور x $y = 0$	$y = a$	$b > 1$	$0 < b < 1$ كسر b

② الاقتران الأسي بصورة $f(x) = ab^{x-b} + k$

مجاله	مداه	خط التقارب الأفقي	المقطع الصّادي	متزايد عندما	متناقص
R	(k, ∞)	$y = k$	لا يطلب ولكنه عندما $x = 0$	$b > 1$	$0 < b < 1$

③ الاقتران الأسي بصورة $f(x) = -ab^x$ هو انعكاس للاقتران $f(x) = ab^x$ حول محور x

(قيمة a سالبة)

مجاله	مداه	خط التقارب الأفقي	المقطع الصّادي	متزايد	متناقص
R	$(-\infty, 0)$	$y = 0$	$y = a$	$0 < b < 1$	$b > 1$

④ الاقتران الأسي بصورة $f(x) = -ab^{x-h} + k$ هو انعكاس للاقتران $f(x) = ab^x$ حول محور السينات (قيمة a سالبة)

مجاله	مداه	خط التقارب الأفقي	المقطع الصّادي	متزايد (يعكس)	متناقص (يعكس)
R	$(-\infty, k)$	$y = k$	لا يطلب	$0 < b < 1$	$b > 1$

اختبار قصير

1 إذا كان $f(x) = 3(4)^x - 2$ فإن قيمة $f(2)$ تساوي :

أ) 48 ب) 46 جـ) $\frac{-29}{4}$ د) $\frac{29}{4}$

2 أحد الآتية يعتبر اقترانًا أسيًا :

أ) $f(x) = x^2$ ب) $f(x) = \sqrt{x} + 3$

جـ) $f(x) = 2^x$ د) $f(x) = x^2 - 3^x$

3 أحد الاقترانات الأسية الآتية يُعتبر اقترانًا متزايدًا :

أ) $f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ب) $f(x) = 3(4)^x$

جـ) $f(x) = 4(x)^3$ د) $f(x) = (2)^{-x}$

4 مجال الاقتران $f(x) = 3(2)^x - 1$ هو :

أ) $(-\infty, \infty)$ ب) $(0, \infty)$

جـ) $(-\infty, 0)$ د) $(0, 3)$

5 مدى الاقتران $f(x) = 3(2)^x - 1$ هو :

أ) $(-1, \infty)$ ب) $(-\infty, -1)$

جـ) $[-1, \infty)$ د) $(-\infty, -1]$

6 خط التقارب الأفقي لمنحنى الاقتران $f(x) = (4)^x$ هو :

أ) $y = 0$ ب) $y = 1$ جـ) $x = 0$ د) $x = 1$

7 خط التقارب الأفقي لمنحنى الاقتران $f(x) = (2)^x - 3$ هو :

أ) $y = -3$ ب) $y = 3$ جـ) $x = -3$ د) $x = 3$

سؤال تميّز

8 إذا كانت العلاقة بين عدد عناصر البكتيريا A في تجمع جرثومي ,والزمن t تعطى بالعلاقة $A = 8(2)^t$ حيث t : الزمن بالساعات , فما عدد الساعات اللازمة ليصل عدد البكتيريا في هذا التجمع إلى 512 عنصر ؟

■ **مسألة اليوم :** يمثل الاقتران : $P(t) = 325\ (0.25)$ تركيز دواء في دم مريض بعد t ساعة من تناوله .أجد تركيز الدواء بعد 5 ساعات من تناوله .

Mohammad Awwad

مسح رمز QR لمتابعة الحساب

TikTok

MOHDAWWWAD

الاستاذ محمد عواد

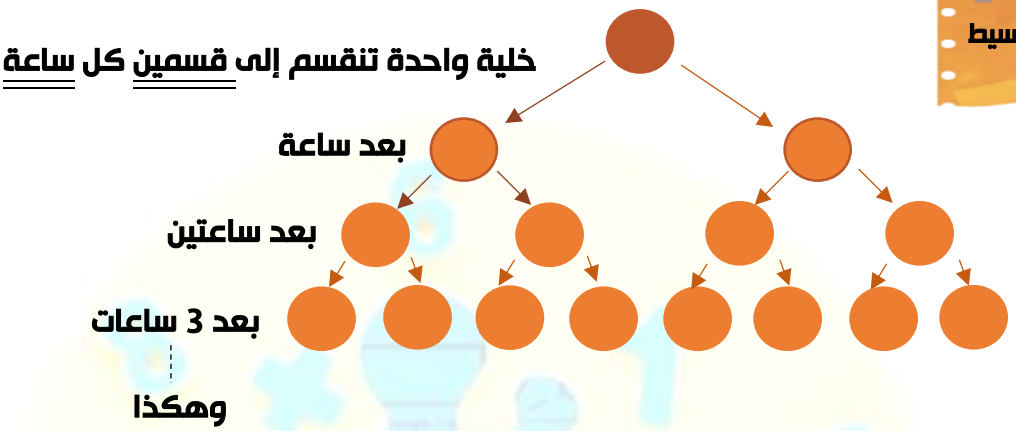
YouTube JO

النمو والاضمحلال الأسّي

1 ■ اقتران النمو الأسّي :

تزداد بعض الكميات بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية

مثال بسيط



• إذا أردنا معرفة عدد الخلايا بعد 10 ساعات يمكن استخدام اقتران أسي يصف لنا هذا النمو بما أنه :

① يوجد تزايد

② نسبته ثابته كل مرة تنقسم كل خلية إلى 2

③ الزمن ثابت (بعد كل ساعة يحدث الانقسام)

إذًا $f(t)=2^t$ يعبر عن هذا التزايد

عدد الساعات : t
عدد الخلايا : f (t)

■ اقتران النمو الأسي : اقتران أسي يتزايد بـ نسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية [3 صفات]

وبالرموز: $A(t) = a(1 + r)^t$

- a : الكمية الابتدائية
- 1 + r : الأساس : عامل النمو
- r : النسبة المئوية للنمو
- t : الفترة الزمنية للنمو

■ إذا كانت $a=20$ ، $r=0.25$ فإن معادلة النمو تساوي؟

$$A(t)=a(1+r)^t$$

$$A(t)=20(1+0.25)^t \rightarrow A(t)=20(1.25)^t$$

■ إذا كانت الكمية الابتدائية a=10 ، والنسبة المئوية للنمو r=30% فإن معادلة النمو تساوي :

$$A(t)=a(1+r)^t$$

$$A(t)=10(1+0.3)^t$$

$$A(t)=10(1.3)^t$$

■ إذا كانت الكمية الابتدائية تساوي (20) وكان عامل النمو يساوي (1.25) جد معادلة النمو الاسي

$$A(t)=a(1+r)^t$$

عامل النمو

$$A(t)=20(1.25)^t$$

هام جداً

$$30\ \% = \frac{30}{100} = 0.3$$

أمثلة من الحياة

① خراف : في دارسة شملت إحدى مزارع الأغنام، تبين أن عدد الخراف في المزرعة يزداد بنسبة مئوية 31٪ سنويا:

a) اكتب اقتران النمو الاسي الذي يمثل عدد الخراف بعد t سنة علمًا بأن عددها في المزرعة عند بدء الدراسة هو 1524 خروفا

اولًا اكتب قاعدة الاقتران الذي نريده $A(t) = a(1+r)^t$

a الكمية الابتدائية	r النسبة المئوية	t عدد السنوات	A (t)
1524 الدلالة عند بدء الدراسة	31% = a0.31	t المجهول	تعبر عن عدد الخراف بعد t سنة

$$A(t) = 1524\ (1+0.31)^t$$

$$A(t) = 1524(1.31)^t$$

b) جد عدد الخراف بعد 5 سنوات من بدء الدراسة

المجهول : عدد الخراف ← يعني A (t) , المعطى : عدد السنوات ← يعني t = 5

$$A(t) = 1524\ (1.31)^t$$

$$A(5) = 1524(1.31)^5$$

باستخدام الآلة الحاسبة ≈ 5880 , إذا عدد الخراف بعد 5 سنوات هو 5880 خروفًا تقريبًا.

② في دراسة شملت إحدى مزارع الأبقار ، تبين أن عدد الأبقار في المزرعة يتزايد بنسبة تبلغ نحو 18٪ سنويا:

a) اكتب اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد الأبقار بعد t سنة ،علما بأن عددها في المزرعة عند بدء الدراسة هو 327 بقرة.

a الكمية الابتدائية	r النسبة المئوية	tعدد النوات	A(t)
327 الدلالة عند بدء الدراسة	18% = 0.18	مجهول	عدد الأبقار بعد سنة

اقتران النمو الأسي

$$A(t) = a(1+r)^t$$

$$A(t) = 327(1+0.18)^t$$

$$A(t) = 327(1.18)^t$$

b) جد عدد الأبقار بعد 3 سنوات من بدء الدراسة.

المجهول : عدد الأبقار ← يعني A(t) , المعطى : عدد السنوات ← يعني t=3

$$A(t) = 327(1.18)^t$$

$$A(3) = 327(1.18)^3$$

باستخدام الآلة الحاسبة

---

③ يبلغ عدد المشاركين في مؤتمر طبي 150 شخص هذه السنة وبتوقع زيادة هذا العدد بنسبة 8 ٪ كل سنة:

a) اكتب اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد المشاركين بعد t سنة

A(t)	T	R	a
عدد المشاركة	مجهول	8 % = 0.08	150

$$A(t) = a(1+r)^t$$

$$A(t) = 150(1+0.08)^t$$

$$A(t) = 150(1.08)^t$$

b) جد عدد المشاركين المتوقع بعد 5 سنوات

المجهول: عدد المشاركين ← يعني A(t) , المعطى : عدد السنوات ← يعني t=5

$$A(t) = 150(1.08)^t$$

$$A(5) = 150(1.08)^5$$

④ استخدام 50 ألف شخص موقعا إلكترونيا تعليميا سنة 2019 م, ثم ازداد عدد مستخدمي الموقع بنسبة ٪ 15 كل سنة :

a) اكتب اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد مستخدمي الموقع بعد t سنة

A	R	T	A(t)
50 ألف	15 % = 0.15	عدد السنوات	عدد مستخدمي الموقع

$$A(t) = a(1+r)^t$$

$$A(t) = 50000(1+0.15)^t$$

$$A(t) = 50000(1.15)^t$$

b) جد عدد مستخدمي الموقع سنة 2025:

المجهول : عدد مستخدمي الموقع ← يعني $A(t)$

المعطى: عدد السنوات بعد 2019 حتى الوصول لـ 2025 (أي بعد 6 سنوات) يعني ← $t=6$

$$A(t) = 50000(1.15)^t$$

$$A(6) = 50000(1.15)^6$$

---

⑤ استخدم 35 الف شخص موقعا الكترونيا تعليميا هذه السنة ومن المتوقع ان يزداد هذا العدد بنسبة ٪ 2 كل سنة :

a) اكتب اقتران النمو الاسي الذي يمثل عدد مستخدمي الموقع بعد t سنة.

A	R	T	A(t)
35 ألف	2 % = 0.02	عدد السنوات	عدد مستخدمي الموقع

$$A(t) = a(1+r)^t$$

$$A(t) = 35000(1+0.02)^t$$

$$A(t) = 35000(1.02)^t$$

b) جد عدد مستخدمي الموقع بعد 7 سنوات:

المجهول : عدد مستخدمي الموقع ← يعني $A(t)$, المعطى: عدد السنوات ← يعني $t=7$

$$A(t) = 35000(1.02)^t$$

$$A(7) = 35000(1.02)^7$$

⑥ بلغ عدد سكان لواء المُوقّر (شرق عاصمة عمان) 84370 نسمة تقريبا سنة 2015م ، إذا كانت نسبة النمو السكاني في اللواء 2.4٪ سنويا، فاجب عن السؤالين الآتيين :

a) اكتب اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد سكان اللواء بعد t سنة.

A	r	t	A(t)
84370 سنة 2015	2.4 % = 240	عدد السنوات	عدد سكان اللواء بعد t سنة

$$A(t) = a(1+r)^t$$

$$A(t) = 84370(1+240)^t$$

$$A(t) = 84370(241)^t$$

b) جد العدد التقريبي لسكان اللواء سنة 2030:

المجهول : عدد السكان ← يعني $A(t)$

المعطى : 2030 أي بعد 15 سنة من عام 2015 ← يعني $t=15$

$$A(t) = 84370(241)^t$$

$$A(15) = 84370(241)^{15}$$

سؤال بلغ عدد سكان المملكة الاردنية الهاشمية عام 2020 ← 15 مليون نسمة فإذا كانت نسبة النمو السكاني 2 ٪ سنويا , فأجب عما يلي :

① اكتب اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد السكان بالمليون بعد t سنة.

② جد عدد السكان التقريبي بعد سنتين

③ جد عدد السكان التقريبي عام 2025.

سؤال إذا كان النمو السكاني في احدى البلدات يخضع لقانون النمو وكان عدد سكان البلدة 300 نسمة عام 2020 وازداد العدد بانتظام بمعدل 4٪ سنويا , فاحسب عدد سكان البلدة عام 2025.

سؤال بلغ عدد سكان المملكة الأردنية الهاشمية نحو 8.10 ماليين نسمة 2020 عام. إذا كانت نسبة النمو السكاني قرابة 6.2٪ سنوي فأجد العدد التقريبي للسكان عام 2030م.

2 ■ اقتران الاضمحلال الأسّي : " اضمحلال يعني تناقص "

يمكن تمثيل النقص في كمية ما بـ نسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية , باستعمال الاقتران الآتي : [3 صفات]

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

- a ← الكمية الابتدائية
- (1 - r) ← عامل الاضمحلال
- r ← النسبة المئوية للاضمحلال
- t ← الفترة الزمنية للاضمحلال

أمثلة من الحياة

① كيمياء : تتناقص 5g من عنصر الكروم بما نسبته 2.45 % يوميًا نتيجة تفاعله مع الهواء :

a) اكتب اقتران الاضمحلال الاسي الذي يمثل كمية الكروم (بالغرام) بعد t يوميًا

A (t)	t	r	a
كمية الكروم (بالغرام)	عدد الأيام	2.45 % = 0.0245	5g

$A(t) = a(1-r)^t$

$A(t) = 5(1-0.0245)^t$

$A(t) = 5(0.9755)^t$

b) جد كمية الكروم (بالغرام) بعد 3 أيام

المجهول : كمية الكروم ← يعني $A(t)$, المعطى : عدد الأيام ← يعني $t = 3$

$$A(t) = 5(0.9755)^t$$

$$A(3) = 5(0.9755)^3$$

② سيارة : اشترت سوسن سيارة هجينة قابلة للشحن بمبلغ JD 28500 , إذا كان ثمن السيارة يقل بنسبة 5 % سنويًا , فأجب عن السؤالين الآتيين :

a) اكتب اقتران الاضمحلال الأسي لثمن سيارة بعد t سنة

A (t)	t	r	a
ثمن السيارة	عدد السنوات	5 % = 0.05	28500

$A(t) = a(1-r)^t$

$A(t) = 28500\,(1-0.05)^t$

$A(t) = 28500\,(0.95)^t$

b) جد ثمن السيارة بعد 4 سنوات

المجهول : ثمن السيارة ← يعني $A(t)$, المعطى : عدد السنوات ← يعني $t = 4$

$$A(t) = 28500\,(0.95)^t$$

$$A(4) = 28500\,(0.95)^4$$

---

③ سيارة : يتناقص ثمن سيارة سعرها JD 17350 بنسبة 3.5 % سنويًا :

a) اكتب اقتران الاضمحلال الأسي لثمن سيارة بعد t سنة

A (t)	t	r	a
ثمن السيارة	عدد السنوات	3.5 % = 0.035	17350

$A(t) = a(1-r)^t$

$A(t) = 17350\,(1-0.035)^t$

$A(t) = 17350\,(0.965)^t$

b) جد ثمن السيارة بعد 3 سنوات

المجهول : ثمن السيارة ← يعني $A(t)$, المعطى : عدد السنوات ← يعني $t = 3$

$$A(t) = 17350\,(0.965)^t$$

$$A(3) = 17350\,(0.965)^3$$

سأصل إلى أكثر مما أظن

④ بكتيريا : يتناقص عدد الخلايا البكتيرية في عينة مخبرية بنسبة 27 % كل ساعة بعد إضافة مضاد حيوي إلى العينة :

a) اكتب اقتران الاضمحلال الأسي الذي يمثل عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة , علمًا بأن عددها عند إضافة المضاد الحيوي هو 15275 خلية

A (t)	t	r	a
عدد الخلايا	عدد السنوات	27 % = 0.27	15275

$$A(t) = a(1-r)^t$$
$$A(t) = 15275\,(1-0.027)^t$$
$$A(t) = 15275\,(0.73)^t$$

b) جد عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 7 ساعات

المجهول : عدد الخلايا ← يعني $A(t)$, المعطى : عدد الساعات ← يعني $t = 7$

$$A(t) = 15275\,(0.73)^7$$

---

⑤ دجاج : يَنفُق الدجاج في مزرعة للدواجن بنسبة 25 % يوميًا نتيجة إصابته بمرض ما. جد العدد المتبقي منه بعد 5 أيام من بدء المرض , علمًا بأن عدده الأولي في المزرعة هو 1550 دجاجة

- ملاحظة : في هذا المثال لم يكتب لنا مباشرة اكتب قانون النمو أو الاضمحلال الأسي , ولكن بما أنه تم استخدام كلمة (ينفُق) أي يموت فإنه دلالة على النقصان إذا سنستخدم قانون الاضمحلال الأسي

A (t)	t	r	a
عدد الدجاج بعد t يوم	5 أيام	25 % = 0.25	1550

$$A(t) = a(1-r)^t$$
$$A(t) = 1550\,(1-0.25)^t$$
$$A(t) = 1550\,(0.75)^t$$
$$A(5) = 1550\,(0.75)^5$$

368 ≈ دجاجة بعد 5 أيام

ابقَ قويًا فقصّتك لم تنتهي بعد

⑥ تلوث : في دراسة علمية تناولت درجة تأثير التلوث في عدد الأسماك التي تعيش في إحدى البحيرات , توصّل العلماء إلى أنّ عدد الأسماك في البحيرة يقل بنسبة 20 % كل سنة :

a) اكتب اقتران الاضمحلال الأسي الذي يمثل عدد الأسماك في البحيرة بعد t سنة , علمًا بأن عددها عند بدء الدراسة هو 12000 سمكة

A (t)	t	r	a
عدد الأسماك بعد t سنة	عدد السنوات	20 % = 0.20=0.2	12000

$$A(t) = a(1-r)^t$$
$$A(t) = 12000\,(1-0.2)^t$$
$$A(t) = 12000\,(0.8)^t$$

b) جد عدد الأسماك في البحيرة بعد 3 سنوات

المجهول : عدد الأسماك ← يعني A (t) , المعطى : عدد السنوات ← يعني $t = 3$

$$A(t) = 12000\,(0.8)^t$$
$$A(3) = 12000\,(0.8)^3$$

---

⑦ سيارة : يتناقص ثمن سيارة سعرها JD 19725 بنسبة 3 % سنويًا :

a) اكتب اقتران الاضمحلال الأسي لثمن سيارة بعد t سنة

A (t)	t	r	a
ثمن السيارة	عدد السنوات	3 % = 0.03	19725

$$A(t) = a(1-r)^t$$
$$A(t) = 19725\,(1-0.03)^t$$
$$A(t) = 19725\,(0.97)^t$$

b) جد ثمن السيارة بعد 4 سنوات

المجهول : ثمن السيارة ← يعني A (t) , المعطى : عدد السنوات ← يعني $t = 4$

$$A(t) = 19725\,(0.97)^t$$
$$A(4) = 19725\,(0.97)^4$$

جذور التّعليم مريرة ,
لكن ثمارها حلوة

⑧ يقاس الضغط الجوي بوحدة تسمى هيكتوباسكال (hPa) , ويبلغ هذا الضغط عند سطح البحر 1000 hPa, ويتناقص بنسبة 12 % لكل كيلومتر فوق سطح البحر

بدل t فقط تغيير

a) اكتب اقتران الاضمحلال الأسي للضغط الجوي عند ارتفاع h كيلومترًا عن سطح البحر رموز

A (h)	h	r	a
الضغط الجوي عند ارتفاع h	عدد الكيلومترات فوق سطح البحر	12 % = 0.12	1000

$A(h) = a(1-r)^h$

$A(h) = 1000\,(1-0.12)^h$

$A(t) = 1000\,(0.88)^h$

b) عند أي ارتفاع تساوي قيمة الضغط نصف قيمة الضغط الجوي عند سطح البحر ؟

المجهول : الارتفاع ← يعني h

المعطى : الضغط الجوي " نصف الضغط الجوي عند سطح البحر " ← يعني $A(h) = \frac{1}{2}(1000) = 500$

$$A(h) = 1000\,(0.88)^h$$

$$\frac{500}{1000} = \frac{1000}{1000}\,(0.88)^h$$

$$\frac{1}{2} = (0.88)^h$$

تحل لاحقًا باستخدام اللوغاريتمات

سؤال اشترى أحمد سيارة تعمل على الشحن الكهربائي بمبلغ 25000 , إذا كان ثمن السيارة يقل بنسبة 10 ٪ سنويًا , فأجب عما يلي :

① اكتب اقتران الاضمحلال الأسي لثمن السيارة بعد t سنة

② جد ثمن السيارة بعد (5) سنوات

سؤال حقن طبيب مريضا بمادة علاجية , فإذا كان تركيز هذه المادة يقل في جسم المريض بنسبة 10 ٪ يوميًا , فاكتب اقتران الاضمحلال الذي يمثل تناقص تركيز المادة العلاجية بعد t يوم

(أكتب الصيغة فقط بدون a)

سؤال أي الاقترانات الآتية يُعتبر اقتران نمو :

a) $A(t) = 4(0.8)^t$

b) $A(t) = 3(1.2)^t$

c) $A(t) = 3(0.2)^t$

d) $A(t) = 9(0.3)^t$

---

3 ■ الربح المركّب :

يمكن حساب جملة المبلغ المستحق في حالة الربح المركب باستعمال الصّيغة الآتية :

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

- A : جملة المبلغ
- P : المبلغ الأصلي (رأس المال)
- n : عدد مرات إضافة الربح المركب في السنة
- t : عدد السنوات
- r : معيار الفائدة السنوي الذي يكتب في صورة عشرية

الكلام صعب !! لذلك سأفسر معنى كل رمز بشرح المثال التالي ⇐ **فركّز**

AWA2EL LEARN 2 BE
الاستاذ محمد عواد YouTube JO

مثال استثمر سليمان مبلغ JD 9000 في شركة صناعية بنسبة ربح مركب تبلغ % 1.46 وتضاف كل 3 أشهر , جد جملة المبلغ بعد 3 سنوات

خلّينا نحلل السؤال جملة جملة ...

- استثمر سليمان مبلغ JD 9000 ⇐ إذًا رأس المال اللي حطه في الشركة 9000 وهو المبلغ الأصلي يعني (P)
- بنسبة ربح مركب تبلغ 1.46% = 0.0146 ⇐ الفائدة خلال السنة كلها هي 0.0146 (r)

السنة كلها يعني بعد 12 شهر !!

شهر 1	شهر 2	شهر 3 تضاف	شهر 4	شهر 5	شهر 6 تضاف	شهر 7	شهر 8	شهر 9 تضاف	شهر 10	شهر 11	شهر 12 تضاف

- تضاف كل 3 أشهر ⇐ عدد مرات إضافة الربع (n) المركب في السنة = 4 مرات

يعني خلال السنة سيضاف الربح (4) مرات يمكن حسابها $4 = \frac{12}{3}$ عدد شهور السنة / تضاف كل 3 شهور

- جد جملة المبلغ بعد 3 سنوات ⇐ جملة المبلغ (A) ، مجهول 3 سنوات (t)

إذًا

t	n	r	P
3	4	0.0146	9000

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A = 9000\left(1 + \frac{0.0146}{4}\right)^{4\times 3}$$

$$\approx 9402.21$$

انّها مسؤوليّتي من أجل أيّامي العظيمة

MOHDAWWWAD

② استثمرت تهاني مبلغ JD 5000 في شركة , بنسبة ربح مركب تبلغ % 2.25 , وتضاف كل 6 أشهر

جد جملة المبلغ بعد 5 سنوات

نحلل جملة ...

- استثمرت بمبلغ 5000 ⇐ رأس المال أي $P = 5000$
- بنسبة ربح مركب تبلغ % 2.25 ⇐ 0.0225 $r = 0.0225$
- تضاف كل 6 أشهر ⇐ يعني تضاف مرتين (2) في السنة $\frac{12}{6} = 2$ $n = 2$
- جد جملة المبلغ بعد 5 سنوات ⇐ $t = 5$ عدد السنوات ، مجهول A جملة المبلغ

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A = 5000\left(1 + \frac{0.0225}{2}\right)^{2(5)}$$

$$A = 5000\,(1.118)$$

$$\approx 5592 \text{ JD}$$

---

③ استثمر ربيع مبلغ JD 1200 في شركة , بنسبة ربح مركب تبلغ % 10 وتضاف كل شهر :

a) اكتب صيغة تمثل جملة المبلغ بعد t سنة

- استثمر بمبلغ 1200 ⇐ رأس المال $P = 1200$
- بنسبة ربح مركب تبلغ % 10 ⇐ 0.1 $r = 0.1$
- تضاف كل 6 أشهر ⇐ يعني تضاف 12 مرة خلال السنة $\frac{12}{1} = 12$ $n = 12$
- الصيغة وعدد السنوات t

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A = 1200\left(1 + \frac{0.1}{12}\right)^{12t}$$

b) جد جملة المبلغ بعد 5 سنوات $(t = 5)$

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A = 1200\left(1 + \frac{0.01}{12}\right)^{12(5)}$$

④ استثمر عامر مبلغ JD 8000 في شركة صناعية , بنسبة ربح مركب تبلغ 5.5 % وتضاف كل شهر

a) اكتب صيغة تمثل جملة المبلغ بعد t سنة

نحلل جملة جملة ...

- استثمر بمبلغ 8000 ⇐ رأس المال $P = 8000$
- نسبة ربح مركب تبلغ 5.5 % ⇐ 0.055 $r = 0.055$
- تضاف كل شهر ⇐ يعني تضاف 12 مرة خلال السنة $n = 12$
- الصيغة بدلالة t ← t مجهول

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A = 8000\left(1 + \frac{0.055}{12}\right)^{12t}$$

b) جد جملة المبلغ بعد 3 سنوات $(t = 3)$

$$A = 8000\left(1 + \frac{0.055}{12}\right)^{12(3)}$$

---

⑤ استثمرت هند مبلغ JD 6200 في شركة , بنسبة ربح مركب تبلغ 8.4 % وتضاف كل يوم :

a) أكتب صيغة تمثل جملة المبلغ بعد t سنة b) أجد جملة المبلغ بعد 6 سنوات.

---

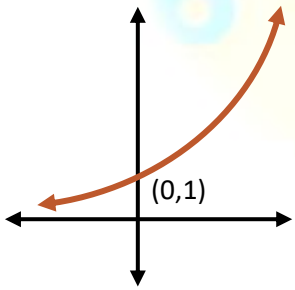
4 ■ الاقتران الأسي الطبيعي :

هو نفس الاقتران الاسي الذي تعرفت عليه سابقا $f(x)=ab^x$, ولكن يسمى (الطبيعي) عندما يكون الأساس هو الأساس الطبيعي (e)

- يسمى العدد النيبيري (e) وهو عدد غير نسبي

$e \approx 2.718281828...$

$f(x)=e^x$



مجاله R

مداه R^+

متزايد لأن $b = e > 1$

توجد تطبيقات حياتية تستخدم هذا النوع من الاقترانات الأسية وهو الربح المركب المستمر

كلمة السر هي المستمر

لحساب جملة المبلغ في حالة الربح المركب المستمر باستعمال الصيغة :

$A = Pe^{rt}$

جملة المبلغ ←

المبلغ الأصلي ←

r : معيار الفائدة السنوي الذي يكتب في صورة عشرية

t : عدد السنوات

أمثلة

① أودع علي مبلغ 4500 JD في حساب بنكي بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 4 % , جد جملة المبلغ بعد 10 سنوات

نحلّل جملة جملة ...

- أودع علي مبلغ 4500 ⇐ المبلغ الأصلي $P=4500$
- نسبة ربح مركب مستمر ⇐ كلمة السر مستمر $r=0.04$
  " يعني أستخدم e "
- جد جملة المبلغ بعد 10 سنوات ⇐ $t=10$

$$A = Pe^{rt}$$
$$A = 4500e^{0.04(10)}$$
$$A = 4500e^{0.4}$$
$$\approx 6713.21 \text{ JD}$$

---

② أودعت سارة مبلغ 6300 JD في حساب بنكي بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 3.2 % , جد جملة المبلغ بعد 9 سنوات

$$P = 6300$$
$$r = 3.2\ \% = 0.032$$
$$t = 9$$

كلمة السر ⇐ مستمر يعني نستخدم :

$$A = Pe^{rt}$$
$$A = 6300e^{0.032\,(9)}$$

---

③ أودعت ليلى مبلغ 8200 JD في حساب بنكي بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 4.9 % , جد جملة المبلغ بعد 9 سنوات

$$P = 800$$
$$r = 4.9\ \% = 0.049$$
$$t = 9$$

كلمة السر ⇐ مستمر يعني نستخدم :

$$A = Pe^{rt}$$
$$A = 8200e^{0.049\,(9)}$$

---

④ أعد بحث دراسة عن تكاثر ذباب الفاكهة وتوصل الى انه يمكن تمثيل العدد التقريبي للذباب بالاقتران $P(t)=20e^{0.03t}$ حيث P عدد الذباب بعد t ساعه جدد عدد الذباب الفاكهة بعد 72 ساعه من بدء الدراسة مقربا الإجابة الى اقرب عدد صحيح

$$P(72)=20e^{0.03(72)}$$

⑤ أودع سعيد مبلغ JD 800 في حساب بنكي بنسبه ربح مركب مستمر مقدارها 4.5% جد جملة المبلغ بعد 5 سنوات

كلمة السر ⇐ مستمر يعني نستخدم :

$P = 800$
$r = 4.5\ \% = 0.045$
$t = 5$

$A = Pe^{rt}$

$A = 800e^{0.045\,(5)}$

---

⑥ أودع حسام مبلغ JD 60000 في حساب بنكي بنسبه ربح مركب مستمر مقدارها 6% , جد جملة المبلغ بعد 17 سنة

كلمة السر ⇐ مستمر يعني نستخدم :

$P = 60000$
$r = 6\ \% = 0.06$
$t = 17$

$A = Pe^{rt}$

$A = 60000\ e^{0.06\,(17)}$

---

⑦ أودع حسـام مبلغ JD 9000 في حسـاب بنكي، بنسبة ربح مركب مقدارها 3.6٪ , أجد جملة المبلغ بعد 7 سنوات

---

⑧ أودعت ليلى مبلغ JD 8200 في حسـاب بنكي، بنسبة ربح مركب مقدارها 4.9٪ , أجد جملة المبلغ بعد 9 سنوات

"أسئلة مهارات التفكير العليا للدرس الثاني"

سؤال 1 اكتشف الخطأ : أوجد رامي جمله مبلغ مقداره JD 250 بعد ايداعه في حساب بنكي بعد 3 سنوات , بنسبه ربح مركب تبلغ ٪ 1.25 و تضاف كل 3 اشهر كما يأتي:

$$A = 250\left(1 + \frac{1.25}{4}\right)^{4(3)}$$
$$=6533.29$$

- استخدم النسبة المئوية كما هي ويجب كتابتها بصورة عشرية

$$1.25\% = 0.0125$$

سؤال 2 تحد: اكتب اقترانا يمثل عدد المصابين بالانفلونزا الموسمية بعد t أسبوعا علما بأن العدد يتضاعف بقدار 3 مرات كل اسبوع

ملخص مهم للدرس الثاني

1- اقتران النمو الأسي : $A(t) = a\,(1+r)^{t}$

2- اقتران الاضمحلال الأسي : $A(t) = a\,(1-r)^{t}$

3- الربح المركب $A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$

4- الربح المركب المستمر $A = Pe^{rt}$

" كلمة السر "

ابدأ من حيثُ أنت

استعمل ما تملِك

قُمْ بما تستطيع

الاقترانات اللوغريتمية

ملاحظة سابقة

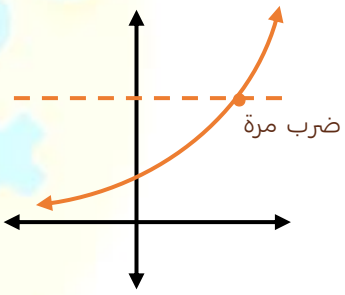
اقتران واحد لواحد 1-1 : هو الاقتران الذي يكون فيه كل عنصر في المدى يرتبط ب عنصر واحد فقط في المجال , يعني كل عنصر في y يرتبط ب عنصر واحد فقط في x

- **كيف نعرف من الرسم؟ باستخدام اختبار الخط الأفقي :**

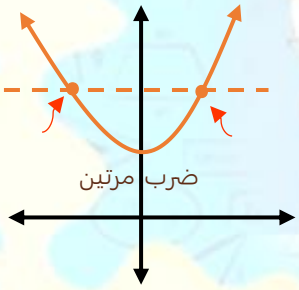
إذا ضرب الخط مرتين او اكثر بالرسمة ← ليس اقتران 1-1

مرة واحدة بالرسمة ← اقتران 1-1

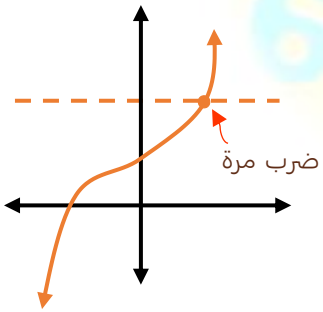
أمثلة



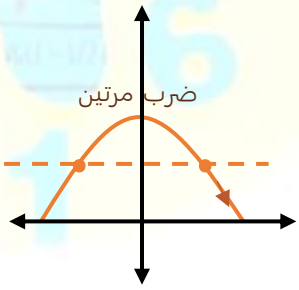
" اقتران واحد لواحد "



" اقتران ليس واحد لواحد "



" اقتران واحد لواحد "



" اقتران ليس واحد لواحد "

- **ومن ميزات الاقتران واحد لواحد يمكن ايجاد اقتران عكسي له**

طيب شو يعني اقتران عكسي؟

$f(x)$: اقتران واحد لواحد مكتوب بصورة بدلالة $y = x$

$f^{-1}(x)$: هو اقتران عكسي للاقتران $f(x)$ مكتوب بصورة بدلالة $x=y$

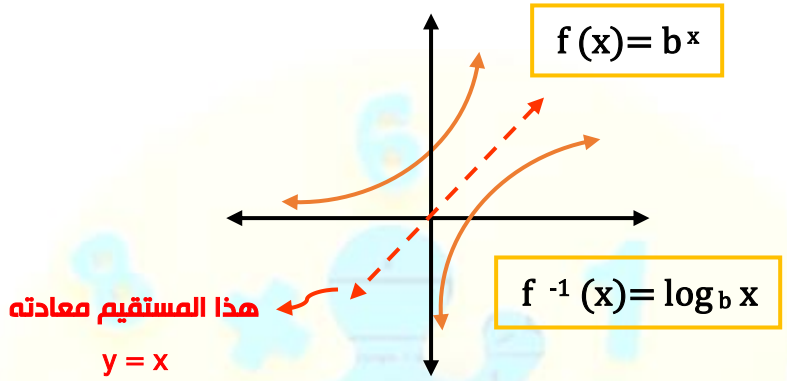
المهم بما ان الاقتران الأسّي $f(x) = b^x$ هو اقتران واحد لواحد

إذا فيمكن ايجاد اقتران عكسي له والاقتران العكسي هو صاحبنا (الاقتران اللوغاريتمي)

$$g(x) = log_b\, x$$

ويُقرأ : لوغاريتم x للأساس b ، $x > 0$ دائما جوا اللوغ (+)

وفي الرسم البياني التالي نوضح الاقترانين معا والرابط بينهما



ملاحظة

$f^{-1}(x)$ انعكاس لـ $f(x)$ حول $y = x$

" يعني لو حطينا مراية عالخط بنعكس تمامًا عالجهة المقابلة "

أمثلة

اقرا كل من الاقترانات اللوغاريتمية الآتية :

① $f(x) = \log_3 27$

لوغاريتم ال27 للأساس 3

② $f(x) = \log_2 4$

لوغاريتم ال4 للأساس 2

③ $f(x) = \log_9 81$

لوغاريتم ال81 للأساس 9

④ $f(x) = \log_5 25$

لوغاريتم ال25 للأساس 5

⑤ $f(x) = \log_{12} 144$

لوغريتم ال144 للأساس 12

إذا شو العلاقة بين الصورة الأسية والصورة اللوغاريتمية !

اذا كان $b \neq 1$ ، $b > 0$ ، $x > 0$ **فإن:**

(+) (+)

$b^y = x$ **اذا وفقط اذا** $\text{Log}_b x = y$

الأساس الأس الأساس الأس

$\log_b x = y$ $b^y = x$

احفظ الدويرة

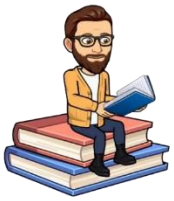
أمثلة

اكتب كل معادله لوغاريتميه مما يأتي في صوره أسية :

① $\log_2 8 = 3$ $2^3 = 8$	② $\log_{23} 23 = 1$ $23^1 = 23$	③ $\text{Log}_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2$ $10^{-2} = \frac{1}{100}$
④ $\log_7 1 = 0$ $7^0 = 1$	⑤ $\log_7 7 = 1$ $7^1 = 7$	⑥ $\log_2 16 = 4$ $2^4 = 16$
⑦ $\log_3\left(\frac{1}{243}\right) = -5$ $3^{-5} = \frac{1}{243}$	⑧ $\text{Log}_9 1 = 0$ $9^0 = 1$	⑨ $\log_7 343 = 3$ $7^3 = 343$
⑩ $\log_4 256 = 4$ $4^4 = 256$	⑪ $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$ $125^{\frac{1}{3}} = 5$	⑫ $\log_{36} 6 = 0.5$ $36^{0.5} = 6$
⑬ $\log_9 1 = 0$ $9^0 = 1$	⑭ $\log_{57} 57 = 1$ $57^1 = 57$	⑮ $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$ $64^{\frac{1}{3}} = 4$
⑯ $\log_5 625 = 4$ $5^4 = 625$	⑰ $\log_3 729 = 6$ $3^6 = 729$	⑱ $\log_{64} 8 = 0.5$ $64^{0.5} = 8$

⑲ $\log_7 1 = 0$ $7^0 = 1$	⑳ $\log_{43} 43 = 1$ $43^1 = 43$	

■ ويمكن ايضا العكس ⇐ كتابة المعادلة الأسية في صورة لوغاريتمية



مثال : $2^3 = 8 \longrightarrow \log_2 8 = 3$ الأس بطير لهناك والأساس بوقع

أمثلة

اكتب في المعادلة الأسية مما يأتي في صورة لوغاريتميه :

① $8^3 = 512$ $\log_8 512 = 3$	② $25^{\frac{1}{2}} = 5$ $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$	③ $(5)^{-3} = \frac{1}{125}$ $\log_5 \frac{1}{125} = -3$	④ $27^0 = 1$ $\log_{27} 1 = 0$
⑤ $7^3 = 343$ $\log_7 343 = 3$	⑥ $49^{\frac{1}{2}} = 7$ $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$	⑦ $(2)^{-5} = \frac{1}{32}$ $\log_2 \frac{1}{32} = -5$	⑧ $17^0 = 1$ $\log_{17} 1 = 0$
⑨ $4^5 = 1024$ $\log_4 1024 = 5$	⑩ $3^{-4} = \frac{1}{81}$ $\log_3 \frac{1}{81} = -4$	⑪ $7^3 = 343$ $\log_7 343 = 3$	⑫ $5^{-2} = 0.04$ $\log_5 0.04 = -2$
⑬ $(32)^1 = 32$ $\log_{32} 32 = 1$	⑭ $8^0 = 1$ $\log_8 1 = 0$	⑮ $2^6 = 64$ $\log_2 64 = 6$	⑯ $4^{-3} = \frac{1}{64}$ $\log_4 \frac{1}{64} = -3$
⑰ $6^3 = 216$ $\log_6 216 = 3$	⑱ $5^{-3} = 0.008$ $\log_5 0.008 = -3$	⑲ $(51)^1 = 51$ $\log_{51} 51 = 1$	⑳ $9^0 = 1$ $\log_9 1 = 0$

ومن الأمثلة السابقة نستنتج أن اللوغاريتم جوابه هو أس

إذا يمكن استخدام قوانين الأسس لإيجاد الجواب

مثال: اوجد قيمة اللوغاريتم التالي دون استخدام الآلة الحاسبة

$\text{Log}_2 8 = 3$

الجواب هو الأس

تذكّر الدوّيرة

على حين $2^{\boxed{3}} = 8$

لاحقًا استخدم عقلك بسرعة

أمثلة جد قيمة كل مما يأتي من دون استخدام الآلة الحاسبة :

① $\log_2 64 = 6$ $2^{\square} = 64$	② $\log_{13} \sqrt{13} = \frac{1}{2}$ $13^{\square} = \sqrt{13}$ تذكّر أن الجذر التربيعي يعبر عنه بالأس $\frac{1}{2}$ والجذر التكعيبي يعبر عنه بالأس $\frac{1}{3}$	③ $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$ $36^{\square} = 6$ قل العدد يعني بفكّر الجذر
④ $\text{Log}_{10} 0.1 = -1$ $10^{\square} = 0.1$ $10^{\square} = \frac{1}{10}$ انقلبت ← بفكّر بالأس السالب	⑤ $\log_5 25 = 2$ $5^{\square} = 25$	⑥ $\log_8 \sqrt{8} = \frac{1}{2}$ $8^{\square} = \sqrt{8}$
⑦ $\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$ $81^{\square} = 9$ قلت بفكر بالجذور	⑧ $\log_3 \frac{1}{27} = -3$ $3^{\square} = \frac{1}{27}$ نزلت بفكر بالسالب	⑨ $\log_2 64 = 6$ $2^{\square} = 64$ زادت وبس بفكر بالأس الموجب
⑩ $\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$ $81^{\square} = 9$ قلت	⑪ $\log_2 32 = 5$ $2^{\square} = 32$ زادت أس موجب	⑫ $\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$ $25^{\square} = 125$ زادت أس موجب $5^{2\square} = 5^3$ $2\times\square=3$ $\square = \frac{3}{2}$ مهم
⑬ $\log_{10} 0.0001 = -4$ $10^{\square} = 0.0001$ $10^{\square} = \frac{1}{10000}$ نزلت (أس سالب)	⑭ $\log_{\frac{5}{3}} 1 = 0$ $\left(\frac{5}{3}\right)^{\square} = 1$	⑮ $\log_{\frac{1}{6}} 6 = -1$ $\frac{1}{6} = 6$ طلعت (أس سالب)

"لا فوز من غير مشقة، صراعتنا تُحدد نجاحاتنا"

⑯ $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$ $25^{\square} = 5$ قلت جذر	⑰ $\log_4 32 = \frac{5}{2}$ مهم $4^{\square} = 32$ $2^{2\square} = 2^5$ $2 \times \square = 5$ $\square = \frac{8}{2}$	⑱ $\log_{49} 343 = \frac{3}{2}$ مهم $49^{\square} = 343$ $7^{2\square} = 7^{\square}$ $2 \times \square = 3$ $\square = \frac{3}{2}$
⑲ $\log_{10} 0.001 = 10^{-3}$ $10^{\square} = 0.001$ $10^{\square} = \frac{1}{1000}$ نزلت (أس سالب)	⑳ $\log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$ $\left(\frac{3}{2}\right)^{\square} = 1$	21 $\log_{\frac{1}{4}} 4 = -1$ $\left(\frac{1}{4}\right)^{\square} = 4$ طلعت (أس سالب)
22 $\log_3 81 = 4$ $3^{\square} = 81$		

☆ = ♡ زادت فكّر بالأس الموجب	☆ = ♡ قلت فكّر بالأس (الكسر) لأنه بمثل جذر	☆ = ♡ طلعت أو نزلت غيّرت مكانها ↓ فكّر بالأس السالب	☆ = ♡ ما زبط ولا احتمال , لاحظ الأسئلة 12 , 18 , 17

■ وفي الامثلة السابقة (وانت بتحل) أكيد لاحظت بعض الخصائص الاساسية للوغاريتمات

$b^{\log_b x} = x$ $x > 0$	$\log_b b^x = x$	$\log_b b = 1$	$\log_b 1 = 0$
لأنه $\log_b x = \log_b x$	لأنه $\log^x = \log^x$	$b^1 = b$ لأنه دائمًا الأس (1) ما بأثر نهائي	$b^0 = 1$ لأنه دائمًا الرقم لأس صفر جوابه (1)

أمثلة جد قيمة كل مما يأتي دون استخدام الآلة الحاسبة:

① $\log_3 1 = 0$ لوغ الواحد دايمًا صفر	② $\log_2 1 = 0$	③ $(10)^{log_{10}\frac{1}{8}} = \frac{1}{8}$	④ $log_a \sqrt[5]{a}$ $log_a a^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$
⑤ $\log_9 9 = 1$	⑥ $\log_5 5 = 1$	⑦ $8^{log_8 5} = 5$	⑧ $8^{\log_8 13}$ $= 13$
⑨ $7^{\log_7 5}$ $= 5$	⑩ $log_2 \frac{1}{\sqrt{(2)^7}}$ $\sqrt[b]{n^a} = n^{\frac{a}{b}}$ $log_2 2^{-\frac{7}{2}} = -\frac{7}{2}$ تذكّر الداخل / الخارج	⑪ $log_{17} \sqrt{17} =$ $\log_{17} 17^{1/2} = \frac{1}{2}$	⑫ $log_{10}(1 \times 10^{-9})$ $log_{10}(10^{-9})$ $= -9$
⑬ $log_{32} \sqrt{32}$ $= \frac{1}{2}$	⑭ $(10)^{log_{10}\frac{1}{9}}$ $= \frac{1}{9}$	⑮ $Log_3 \frac{1}{\sqrt{(3)^6}}$ $log_3 3^{\frac{-6}{2}} = \frac{-6}{2} = 3$	⑯ $Log_b^{\sqrt[7]{b}}$ $log_b b^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7}$
⑰ $log_{10}(1 \times 10^{-5})$ $log_{10}(10^{-5}) = -5$	⑱ $4^{log_4 3}$ $= 3$	19 $log_3 81$	20 $log_{10} 0.001$

"اركض وراء كُل ما تُريد، واقترب من كُل الأشياء التي تشعُر أنها ستُسعدك، وتشبث بكُل من يُطبع في قلبك فرحًا، اعمل لأجل ما تُحب."

■ خصائص الاقتران اللوغاريتمي وتمثيله بيانيا :

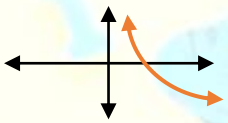
• **خصائص الاقتران اللوغاريتمي :**

$$f(x) = \log_b x \quad , \quad x > 0$$

المجال	المدى	المقطع (x) ($y = 0$)	المقطع (y) ($x = 0$)	خط التقارب الرأسي	خط التقارب الأفقي	متزايد	متناقص
$R+$ $(0, \infty)$	R	$X = 1$	لا يوجد لأنه $x > 0$ دائمًا	محور y $x = 0$	لا يوجد	$b > 1$	$0 < b < 1$ (كسر)

• **الشكل العام للتمثيل البياني :**

$$f(x) = \log_b x \, , x > 0$$



$0 < b < 1$

$b > 1$

■ تمثيل الاقتران اللوغاريتمي بيانيا :

تمثيل بياني ← يعني جدول ← نحدد نقاط (x,y) ← نحددها على

أمثلة

مثل بيانيا كل اقتران مما يأتي ثم حدد :

1) المجال والمدى , 2) مقطعيه من المحورين الاحداثيين

3) خطوط تقاربه الرأسي والأفقي , 4) هل الاقتران متزايد ام متناقص ؟

① $f(x) = \log_2 x$

1. نكتب الاقتران على الصورة الأسية

$$\log_2 X = y \quad \Leftrightarrow \quad 2^y = X$$

2. نعمل جدول وهالمرة رح نعمل العكس

نحدد قيم (y) أولا ← بعدين بنطلع قيم (x)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-2	-1	0	1	2
(x,y)	$(\frac{1}{4}, -2)$	$(\frac{1}{2}, -1)$	(1 , 0)	(2 , 1)	(4 , 2)

أوّلًا ←

- المجال: مجموعه من الاعداد الحقيقية الموجبة R^+

$(0,\infty)$

- المدى: مجموعه الاعداد الحقيقيه R

- المقطع $x = 1$

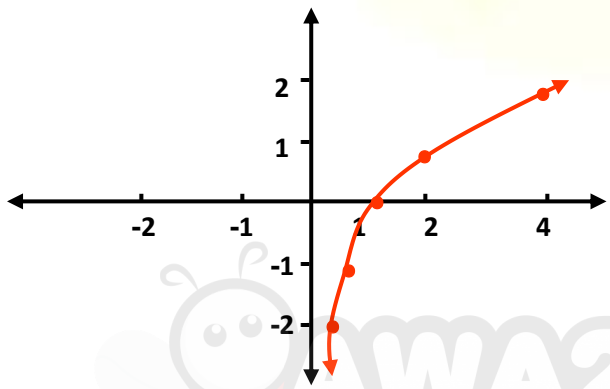
لا يوجد مقطع لـ y

- خط التقارب الافقي : لا يوجد

خط التقارب الرأسي : هو محور y (x = 0)

- الاقتران متزايد

(كلما زادت قيمة x زادت قيمة y) لاحظ $b > 1$



② $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

1. نكتب الاقتران على الصورة الأسية

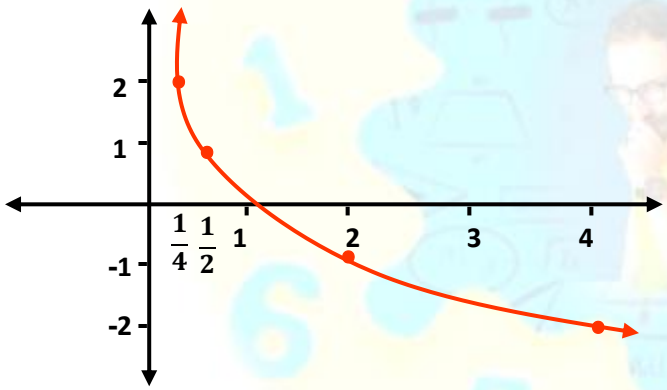
$$\log_{\frac{1}{2}} x = y$$
$$\frac{1^y}{2} = x$$

2. نحدد y اولا

x	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	-2	-1	0	1	2
(x,y)	$(4,-2)$	$(2,-1)$	$(1,0)$	$(\frac{1}{2},1)$	$(\frac{1}{4},2)$

← أوّلًا

- المجال: مجموعة من الاعداد الحقيقية الموجبة R^+ $(0,\infty)$
- المدى: مجموعه الاعداد الحقيقية R
- المقطع $x=1$ (x) , لا يوجد مقطع لـ y
- خط التقارب الأفقي : لا يوجد
- خط التقارب الراسي : هو محور y ($x = 0$)
- الاقتران متناقص لاحظ $0< b <1$ (كسر)



أختار الصمود دائمًا ليس انا الذي يليق به الانهيار

نكمّل الأمثلة :

③ $f(x) = \log_3 x$

1. نكتب الاقتران على الصورة الأسية

$$\log_3 X = y \quad \Leftrightarrow \quad 3^y = X$$

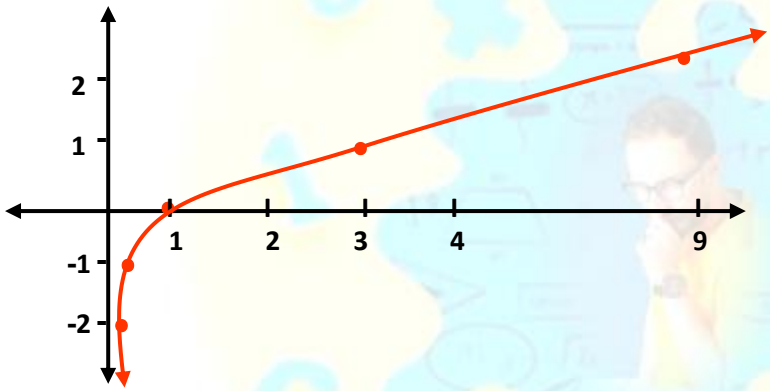
2. نحدد قيم y **أولا**

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
y	-2	-1	0	1	2
(x,y)	$(\frac{1}{9}, -2)$	$(\frac{1}{3}, -1)$	(1 , 0)	(3 , 1)	(9 , 2)

← أولًا

الآن نستطيع الإجابة قبل الرسم :

- **المجال:** R^+ $(0,\infty)$ • **المدى:** R
- **المقطع** $x = 1$, **لا يوجد مقطع لـ** y
- **خط التقارب الأفقي : لا يوجد**
- **خط التقارب الرأسي : هو محور** y $(x=0)$
- $b = 3 > 1$, **إذًا الاقتران متزايد**



④ $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

نستطيع الإجابة قبل الرسم

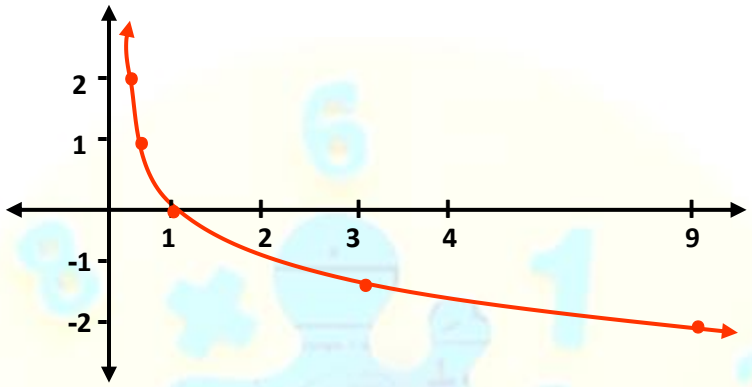
- **المجال:** R^+ $(0,\infty)$ • **المدى:** R
- **المقطع** $x = 1$, **لا يوجد مقطع لـ** y
- **خط التقارب الرأسي : هو محور** y $(x=0)$
- $b = \frac{1}{3}$ $0 < \frac{1}{3} < 1$, **إذًا متناقص**
- **نكتب الصورة الأسية**

$$\log_{\frac{1}{3}} x = y$$

$$\frac{1^y}{3} = x$$

x	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
y	-2	-1	0	1	2
(x,y)	$(9,-2)$	$(3,-1)$	$(1,0)$	$(\frac{1}{3},1)$	$(\frac{1}{9},2)$

أوّلًا ←



سنينُ الجَهدِ وإن طالت ستُطوى.. لها أمدٌ وللأمدِ انقضاءُ

⑤ $f(x) = \log_5 x$

⑥ $g(x) = \log_4 x$

⑦ $h(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

⑧ $r(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

⑨ $f(x) = \log_{10} x$

⑩ $g(x) = \log_{6} x$

⑪ $f(x) = \log_{8} x$

⑫ $g(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$

⑬ $r(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

⑭ $r(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$

⑮ $f(x) = \log_9 x$

⑯ $g(x) = \log_{11} x$

⑰ $h(x) = \log_7 x$

⑱ $p(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

ملخص مهم للدرس الثالث

- يشمل المقارنة بين خصائص الاقتران اللوغاريتمي والأسي :

	الصورة الأسية $f(x)=ab^x$	الصورة الأسية $f(x)=ab^{x-h}+k$	الصورة اللوغريتمية $f(x)=\log_b x$
المجال	R	R	$(0,\infty)$, R^+
المدى	a (+) $(0,\infty)$, R^+	(k,∞)	R
	a (-) $(-\infty,0)$	$(-\infty,k)$	
المقطع لمحور x	لا يوجد	لا يوجد	$x=1$ النقطة $(1,0)$
المقطع لمحور y	$y=1$ النقطة $(0,1)$	لا يُطلب	لا يوجد
خط التقارب الأفقي	محور x $y=0$	المستقيم $y=k$	لا يوجد
خط التقارب الرأسي	لا يوجد	لا يوجد	محور x $y=0$
متزايد	a (+) $b>1$	$b>1$	$b>1$
	a (-) $0<b<1$	$0<b<1$	
متناقص	a (+) $0<b<1$	$0<b<1$	$0<b<1$
	a (-) $b>1$	$b>1$	

■ قلنا بأن مجال الاقتران $f(x)=\log_b x$ هو R^+ دائمًا يعني دائما لازم جوا اللوغ (+)

فماذا إذا كان الاقتران بهذه الصورة $f(x)=\log_b g(x)$ اقتران

فيجب أن يكون $g(x)>0$ لأنه دائما جوا اللوغ (+)

أمثلة

جد مجال كل اقتران لوغاريتمي مما يأتي : " دائمًا عند كتابة الفترة (الكبير , الصغير) "

① $f(x) = \log_4(x+3)$

$x + 3 > 0$

$-3 \quad -3$

$x > -3$

$(-3, \infty)$

② $f(x) = \log_5(8-2x)$

$8 - 2x > 0$

$-8 \quad -8$

$\frac{-2x}{-2} > \frac{-8}{-2}$

$x < 4$

$(-\infty, 4)$

تذكّر :
القسمة على (-)
في المتباينة
تقلبها

③ $f(x) = \log_7(5-x)$

$5 - x > 0$

$5 > x$

$(-\infty, 5)$

يمكن نقلها لتجنب
القسمة على سالب
(نفس النتيجة)

④ $f(x) = \log_5(9+3x)$

$9 + 3x > 0$

$-9 \quad -9$

$\frac{3x}{3} > \frac{-9}{3}$

$x > -3$

$(-3, \infty)$

⑤ $f(x) = \log_3(x-2)$

$x - 2 > 0$

$+2 \quad +2$

$x > 2$

$(2, \infty)$

⑥ $f(x) = 5 - 2\log_7(x+1)$

$x + 1 > 0$

$x > -1$

$(-1, \infty)$

" وإن قل في الطريق صبرك لا تقف ولا تنطفئ ولا تنثني، ربُ الحياة معك . "

⑦ $f(x) = -3\log_4(-x)$

$\frac{-x}{-1} > \frac{0}{-1}$

$x < 0$

$(-\infty, 0)$

⑨ $f(x) = 7 + 2\log_5(x-2)$

$x - 2 > 0$

$+2 \quad +2$

$x > 2$

$(2, \infty)$

⑧ $f(x) = \log_2(x+3)$

$x + 3 > 0$

$x > -3$

$(-3, \infty)$

⑩ $f(x) = -5\log_7(-x)$

$-x > 0$

$0 > x$

$(-\infty, 0)$

■ أسئلة متنوعة :

① جد قيمة a التي تجعل منحنى الاقتران $f(x) = \log_a x$ يمر بالنقطة $(32, 5)$

x f(x)

$\log_a 32 = 5$

$a^5 = 32$

$\boxed{a = 2}$

② جد قيمة C التي تجعل منحنى الاقتران $f(x) = \log_c x$ يمر بالنقطة $\left(\frac{1}{4}, -4\right)$

x f(x)

$\log_c \frac{1}{4} = -4$

$C^{-4} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{c^4} = \frac{1}{4}$

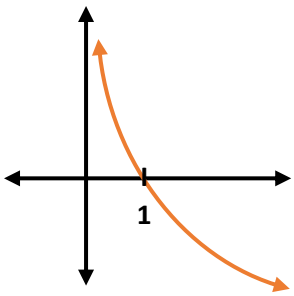
$\frac{1}{(C^2)^2} = \frac{1}{2^2}$

$\sqrt{c^2} = \sqrt{2}$

$\boxed{c = \sqrt{2}}$

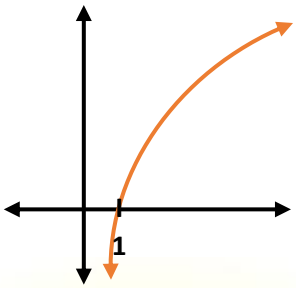
③ اكتب بجانب كل اقتران مما يأتي رمز تمثيله البياني المناسب مبررًا إجابتك :

$f(x) = \log_3(x)$



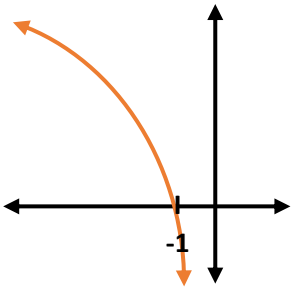
$g(x) = -\log_3 x$
السالب هنا يعني
انعكاس حول محور
x للاقتران $\log_3 x$

$f(x) = \log_3(-x)$



$\log_3(x)$
$b = 3 > 1$
متزايد ومجال $x > 0$

$g(x) = -\log_3 x$



$f(x) = \log_3(-x)$
لان المجال هنا
$(-\infty, 0)$
$-x > 0$
$x < 0$

" ملاحظة مهمة (مهارات التفكير العليا للدرس الثالث) "

خط التقارب الرأسي هو دائمًا $x = \square$

هذا الرقم يكون نفسه أحد أطراف فترة المجال

أمثلة

① $f(x) = \log_5(x-2)$

المجال $(2, \infty)$

هذا الرقم في طرف الفترة

اذا خط التقارب الرأسي

$x = 2$

② $g(x) = \log(x+3)$

المجال $(-3, \infty)$

اذا خط التقارب الرأسي

$x = -3$

③ جد مجال كل اقتران لوغاريتمي مما يأتي ، محددًا خط (خطوط) تقاربه الرأسي

$f(x) = \log_3 x^2$

④ تمثل المعادلة $\log_{10}\left(\frac{1}{12}\right) = -0.0125x$ العلاقة بين شدة الضوء I بوحدة lumen والعمق x بالأمتار في إحدى البحيرات . كم تبلغ شدة الضوء عند عمق 10 m ؟

⑤ يستعمل الاقتران $R = log_{10}\left(\frac{I}{I_{10}}\right)$ لحساب قوة زلزال وفق مقياس ريختر , حيث I شدة الزلزال المراد قياسه , و I_0 أقل شدة للزلزال الذي يمكن للإنسان الإحساس به , ماذا يمثل الرمز log في هذا الاقتران

⑥ $f(x) = \log_3(x^2)$

⑦ $f(x) = \log_3(x^2 - x - 2)$

⑧ $f(x) = \log_3\left(\frac{x+1}{x-5}\right)$

⑨ اكتشف الخطأ : كتبت منى المعادلة الأسية $4^{-3} = \frac{1}{64}$ في صورة لوغاريتمية كما يأتي :

$\log_4(-3) = \frac{1}{64}$ ✗

أكتشف الخطأ الذي وقعت فيه منى , ثم أصحّحه .

تأسيس الدرس الرابع

1 ■ جمع وطرح الأعداد العشريّة :

أ) صف طابور ، ب) المكان الفاضي حط صفر ، جـ) انتبه على الإشارة

الفاصلة العشرية .

أمثلة أوجد ناتج ما يلي :

① 1.59 + 2.32 $\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\\ 1.59\\ +\ 2.32\\ \hline 3.91 \end{array}$	② 1.59 - 2.32 الصغير - الكبير = - 0.73 $\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 12\ 12}\\ \cancel{2}.\cancel{32}\\ -\ 1.59\\ \hline 0.73 \end{array}$ انتبه لأن بالسؤال إشارة الكبير سالبة
③ 1.21 + 0.43 $\begin{array}{r} 1.21\\ +\ 0.43\\ \hline 1.64 \end{array}$	④ 1.21 + 0.43 $\begin{array}{r} {\scriptstyle 0\ 1\ 11}\\ \cancel{1}.\cancel{21}\\ -\ 0.43\\ \hline 0.78 \end{array}$ 0.78 + لأن إشارة الكبير (+)
⑤ 0.699 + 0.7783 $\begin{array}{r} 0.6990 \leftarrow \text{نضع 0 لأنه مكان فاضي}\\ +\ 0.7783\\ \hline 1.4773 \end{array}$	⑥ 1 + 0.312 $\begin{array}{r} 1.000\\ +\ 0.312\\ \hline 1.312 \end{array}$ الفاصلة العشرية دائمًا على يمين العدد الصحيح
⑦ 0 – 0.315 = - 0.315	⑧ 5 – 1.89 $\begin{array}{r} {\scriptstyle 4\ 9\ 10}\\ \cancel{5}.\cancel{00}\\ -\ 1.89\\ \hline 3.11 \end{array}$ 3.11 + لأن إشارة الكبير (+)

" وإن قل في الطريق صبرك لا تقف ولا تنطفئ ولا تنثني , ربّ الحياة معك "

2 ■ ضرب عدد بـ عدد عشري :

أ) نضرب عادي , نتجاهل الفاصلة

ب) نعد كم عدد بعد الفاصلة

جـ) نعيد الفاصلة على الجواب النهائي , نعد من اليمين

أمثلة

① $2 \times 0.\underline{35}$ منزلتين

2×35

$$\begin{array}{r} {}^{1}35 \\ \times\ 2 \\ \hline 70 \end{array}$$

0.70 ← نعد منزلتين

$= 0.70$

② $5 \times 0.\underline{43}$ منزلتين

5×43

$$\begin{array}{r} {}^{1}43 \\ \times\ 5 \\ \hline 215 \end{array}$$

2.15 ← نعد منزلتين

$= 2.15$

③ $2 \times 1.\underline{477}$ 3 منازل

2×1477

$$\begin{array}{r} {}^{1\,1}1477 \\ \times\ \ 2 \\ \hline 2954 \end{array}$$

2.954 ← نعد 3 منازل

$= 2.954$

④ $2 \times 1.\underline{464}$ 3 منازل

2×1464

$$\begin{array}{r} {}^{1}1464 \\ \times\ \ 2 \\ \hline 2928 \end{array}$$

2.928 ← نعد 3 منازل

$= 2.928$

⑤ $2 \times 0.\underline{936}$ 3 منازل

2×936

$$\begin{array}{r} {}^{1}936 \\ \times\ \ 2 \\ \hline 1872 \end{array}$$

1.872 ← نعد 3 منازل

$= 1.872$

⑥ $25 \times 1.\underline{301}$ 3 منازل

25×1301

$$\begin{array}{r} {}^{1}1301 \\ \times\ \ 25 \\ \hline {}_{1}6505 \\ +26020 \\ \hline 32525 \end{array}$$

32.525 ← نعد 3 منازل

$= 32.525$

قوانين اللوغاريتمات

■ كما تعلّمت سابقًا: قوانين الأسس ← وظفتها في ← تبسيط المقادير الأسية

أيضًا يوجد: قوانين اللوغاريتمات ← ستوظفها ← لتبسيط المقادير اللوغاريتميّة

المقارنة بين القوانين لتسهيل حفظها :

	قوانين الأسس	قوانين اللوغاريتمات $b \neq 1$
قانون الضرب	$b^x \times b^y = b^{x+y}$ عند الضرب ← تجمع الأسس	$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
قانون القسمة	$\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}, b \neq 0$ عند القسمة ← تطرح الأسس	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
قانون القوة	$(b^x)^y = b^{xy}$ عند الرفع ← تضرب الأسس	$\log_b x^P = P \log_b x$, $P \in R$ الأس يطلع برّا

تذكّر
x, y أعداد موجبة لأنها داخل اللوغ

لاحظ :

$$\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y$$

الضرب في الدّاخل ← بتحول لجمع في الخارج

$$\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

القسمة في الداخل ← بتحول لطرح في الخارج

لذلك $\frac{\log_2 5}{\log_2 3}$ لا تتحوّل لطرح لأن القسمة ليست داخل اللوغ الواحد

$\log_2 5 \times \log_2 3$ لا تتحول لجمع لأن الضرب ليس داخل اللوغ الواحد

أمثلة

① إذا كان : $log_a 5 \approx 2.32$ وكان $log_a 3 \approx 1.59$, فجد كلًا مما يأتي :

نكتب المعطيات في الصندوق :

$log_a 5 \approx 2.32$

$log_a 3 \approx 1.59$

a) $log_a 15$

$= log_a (3 \times 5)$

$= log_a 3 + log_a 5$

$\approx 1.59 + 2.32$

≈ 3.91

- ننظر لهذا الرقم ⑮
- بدنا نستخدم الأرقام ③ ⑤
- باستخدام العمليات الحسابية أس أو ÷ أو ×
- عشان يطلع معنا ⑮

b) $log_a \frac{3}{5} = log_a 3 - log_a 5$

$\approx 1.59 - 2.32$

≈ -0.73

c) $log_a \frac{1}{9} = log_a 1 - log_a 9$

$= 0 - log_a 3^2$

$= 0 - 2log_a 3$

$\approx 0 - 2(1.59)$

≈ -3.18

سابقًا تعلمنا

$log_b 1 = 0$

$9 = 3^2$

d) $\frac{log_a 5}{log_a 3}$ هل يمكن استعمال قانون القسمة لإيجاد الناتج ؟

لا لاحظ القسمة ليست داخل اللوغاريتم الواحد

$\approx \frac{2.32}{1.59}$ غير مطلوب الناتج النهائي

0788118727

② إذا كان : $\log_b 7 \approx 1.21$ وكان $\log_b 2 \approx 0.43$, فجد كلًا مما يأتي :

نكتب المعطيات في الصندوق :

$\log_b 7 \approx 1.21$
$\log_b 2 \approx 0.43$

a) $\log_b 14$

$14 = 7 \times 2$

$= \log_b (7 \times 2)$
$= \log_b 7 + \log_b 2$
$\approx 1.21 + 0.43$
≈ 1.64

b) $\log_b \frac{2}{7} = \log_b 2 - \log_b 7$
$\approx 0.43 - 1.21$
≈ -0.78

c) $\log_b 32 = \log_b 32$

$32 = 2^5$

$= \log_b 2^5$
$= 5\log_b 2$
$\approx 5\,(0.43)$
≈ 2.15

b) $\log_b \frac{1}{49} = \log_b 1 + \log_b 49$

$49 = 7^2$

$= 0 - \log_b 7^2$
$= 0 - 2\log_b 7$
$\approx -2(1.21)$
≈ -2.42

طريقة أخرى :

$\log_b \frac{1}{49} = \log_b 49^{-1}$
$= -1 \log_b 7^2 = -2 \log_b 7 \approx -2.42$

③ اكتشف الخطأ في الحل الآتي ثم صححه :

$\log_2 5x = (\log_2 5)\,(\log_2 x)$

هنا العلاقة ضرب — حسب قوانين الأسس تتحوّل إلى جمع

$\log_2 5x = \log_2 5 + \log_2 x$

④ إذا كان : $\log_a 6 \approx 0.776$ وكان $\log_a 5 \approx 0.699$, فجد كلًا مما يأتي :

$\log_a 6 \approx 0.778$
$\log_a 5 \approx 0.699$

1) $\log_a \frac{5}{6} = \log_a 5 - \log_a 6$
$\approx 0.699 - 0.778$
≈ -0.079

2) $\log_a 30 = \log_a (5 \times 6)$
$30 = 5 \times 6$
$= \log_a 5 + \log_a 6$
$\approx 0.699 + 0.778$
≈ 1.477

3) $\frac{\log_a 5}{\log_a 6} \approx \frac{0.699}{0.778}$
القسمة في الخارج لا تطبق القانون

4) $\log_a \frac{1}{6} = \log_a 1 - \log_a 6$
$= 0 - \log_a 6 \approx -0.778$

5) $\log_a 900 = \log_a (5 \times 6)^2$
$900 = 30^2$
$30 = 5 \times 6$
$= 2 \log_a (5 \times 6)$
$= 2 [\log_a 5 + \log_a 6]$
$\approx 2 [0.699 + 0.778]$
$\approx 2 [1.477]$
≈ 2.954

6) $\log_a \frac{18}{15} = \log_a \frac{6 \times 3}{5 \times 3} = \log_a \frac{6}{5}$
$= \log_a 6 - \log_a 5$
$\approx 0.778 - 0.699$
≈ 0.079

7) $log_a(6a^2) = log_a(6 \times a^2)$

$= log_a 6 + log_a a^2$

$= log_a 6 + 2\, log_a a$ ← قاعدة قديمة

$\approx 0.778 + 2\,(1)$

$\approx 0.778 + 2$

≈ 2.778

---

8) $log_a \sqrt[4]{25} = log_a \sqrt[4]{(5)^3}$

$= log_a 5^{\frac{3}{4}}$

$= \frac{3}{4} log_a 5$

$\approx \frac{3}{4}(0.669)$

$\approx \frac{2.007}{4} \approx \frac{2}{4} \approx 0.5$

تذكّر

$\sqrt[b]{n^a} = n^{\frac{a}{b}}$

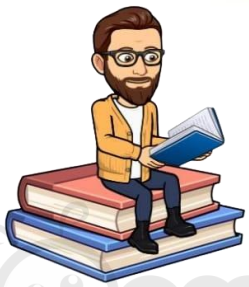
الداخل

الخارج

---

9) $(log_a 5)(log_a 6) \approx (0.699)(0.778)$

الضرب في الخارج لا نطبق قوانين اللوغاريتمات



" اركض وراء كُل ما تُريد، واقترب من كُل الأشياء التي تشعُر أنها ستُسعدك ، وتشبُث بكُل من يُطبع في قلبك فرحًا ، اعمل لأجل ما تُحب "

⑤ إذا كان : $log_5 4 = k$ فاكتب كل مما يأتي بدلالة k : سؤال مهم ومختلف

1) $log_5 16 = log_5 4^2$

$= 2\ log_5 4$

$= 2\ (k) = 2k$

$16 = 4^2$

---

2) $log_5 0.25 = log_5 \frac{1}{4}$

$= log_5 4^{-1} = -1\ log_5 4 = -k$

$\frac{1}{4}$ تقرأ 0.25

---

3) $log_5 256 = log_5 4^4$

$= 4log_5 4 = 4k$

$256 = 4^4$

---

4) $log_{25} 4$

لاحظ اختلفت قيمة b عن السؤال

من السؤال $5^k = 4$

لنفرض أن $log_{25} 4 = y$

$25^y = 4$

$25^y = 5^k$

عند تساوي الأساس تتساوى الأسس

$5^{2y} = 5^k$

$\frac{2}{2} y = \frac{k}{2}$

$y = \frac{k}{2}$

نعود للفرض $log_{25} 4 = y$

$log_{25} 4 = \frac{k}{2}$

⑥ إذا كان : $\log_a 7 \approx 0.936$ وكان $\log_a 3 \approx 0.528$, فجد كلًا مما يأتي :

$\log_a 3 \approx 0.528$
$\log_a 7 \approx 0.936$

1) $\log_a \frac{3}{7} = \log_a 3 - \log_a 7$
$\approx 0.528 - 0.936 \approx -0.408$

2) $\log_a 21$
$21 = 7 \times 3$
$= \log_a (7 \times 3)$
$= \log_a 7 + \log_a 3$
$\approx 0.936 + 0.528 \approx 1.464$

3) $\frac{\log_a 3}{\log_a 7} \approx \frac{0.528}{0.936}$

4) $\log_a \frac{1}{7} = \log_a 7^{-1}$
$= -1 \log_a 7 \approx -0.936$

5) $\log_a 441$
$441 = 21 \times 21$
$= 21^2$
$21 = 7 \times 3$
$= \log_a 21^2$
$= \log_a (7 \times 3)^2$
$= 2 [\log_a 7 + \log_a 3]$
$\approx 2 [0.936 + 0.528]$
$\approx 2 (1.464) \approx 2.928$

6) $\log_a \frac{49}{27} = \log_a 49 - \log_a 27$
$= \log_a 7^2 - \log_a 3^3$
$= 2 \log_a 7 - 3 \log_a 3$
$\approx 2 (0.963) - 3 (0.528)$
$\approx 1.872 - 1.584 \approx 0.288$

7) $\log_a (7a^2) = \log_a 7 + \log_a a^2$
$= \log_a 7 + 2 \log_a a^3$
$\approx 0.936 + 2 (1) \approx 2.936$

8) $\log_a \sqrt[4]{81} = \log_a \sqrt[4]{(3)^4}$
$= \log_a 3 \approx 0.528$

9) $(\log_a 3)(\log_a 7) \approx (0.528)(0.936)$

■ كتابة اللوغاريتمات بالصورة المطولة :

يعني عندي لوغاريتم واحد ← بحوله لعدة لوغاريتمات بينهم عمليات حسابية حسب القوانين اللوغاريتمية التي أخذتها سابقًا

أمثلة

اكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المطولة علمًا بأن المتغيرات جميعها تمثل أعدادًا حقيقية موجبة :

① $\log_5 x^7y^2 = \log_5 x^7 + \log_5 y^2$ قانون الضرب

$= 7\log_5 x^7 + 2\log_5 y$ قانون القوة

② $\log_7 \frac{(5x+3)^2}{4} = \log_7 (5x+3)^2 - \log_7 4$ قانون القسمة

$= 2\log_7 (5x+3) - \log_7 4$ قانون القوة

انتبه الجمع لا يتحول لضرب !

③ $\log_4 \frac{xy^3}{z^2} = \log_4 xy^3 - \log_4 z^2$ قانون القسمة

$= \log_4 x + \log_4 y^3 - \log_4 z^2$ قانون الضرب

$= \log_4 x + 3\log_4 y - 2\log_4 z$ قانون القوة

④ $\log_a \sqrt{\frac{x^2y^3}{a^5}} = \log_a \left(\frac{x^2y^3}{a^5}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\log_a \left(\frac{x^2y^3}{a^5}\right)$

$= \frac{1}{2}[\log_a x^2y^3 - \log_a a^5]$

$= \frac{1}{2}[\log_a x^2 + \log_a y^3 - 5]$

$= \frac{1}{2}[2\log_a x + 3\log_a y - 5]$

$= 2\log_a x + \frac{3}{2}\log_a y - \frac{5}{2}$

⑤ $\log_2 a^2b^a = \log_2 a^2 + \log_2 b^9$

$= 2\log_2 a + a\log_2 b$

⑥ $\log_5 \frac{(x+1)^3}{8} = \log_5 (x+1)^3 - \log_5 8$

$= 3\log_5 (x+1) - \log_5 8$

---

⑦ $\log_3 \frac{x^7 y^3}{x^5} = \log_3 x^7 y^3 - \log_3 z^5$

$= \log_3 x^7 + \log_3 y^3 + \log_3 z^5$

$= 7\log_3 x + 3\log_3 y - 5\log_3 z$

---

⑧ $\log_a \sqrt[3]{\frac{x^7 b^2}{y^5}} = \log_b \left(\frac{x^7 b^2}{y^5}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{3} \left(\log_b \left(\frac{x^7 b^2}{y^5}\right)\right)$

$= \frac{1}{3} [\log_a x^7 b^2 - \log_b y^5]$

$= \frac{1}{3} [\log_b x^7 + \log_b b^2 - \log_b y^5]$

$= \frac{1}{3} [7\log_b x + 2 - 5\log_b y]$

$= \frac{7}{3}\log_b x - \frac{5}{3}\log_b y + \frac{2}{3}$

---

⑨ $\log_a x^7 = 7\log_a x$

---

⑩ $\log_a \left(\frac{ac}{b}\right) = \log_a ac - \log_a b$

$= \log_a a + \log_a c - \log_a b$

$= 1 + \log_a c - \log_a b$

---

⑪ $\log_a (\sqrt{x}) = \log_a x^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\log_a x$

⑫ $\log_a\left(\frac{\sqrt{xy}}{z}\right) = \log_a(\sqrt{xy}) - \log z$

$= \log_a(xy)^{\frac{1}{2}} - \log z$

$= \frac{1}{2}\log_a xy - \log z$

$= \frac{1}{2}[\log_a x + \log_a y] - \log z$

$= \frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y - \log z$

---

⑬ $\log_a \frac{1}{x^3y^4} = \log_a x^{-3}y^{-4}$

$= \log_a x^{-3} + \log_a y^{-4}$

$= -3\log_a x - 4\log_a y$

---

⑭ $\log_a \sqrt[7]{128x^7} = \log_a \sqrt[7]{128}\sqrt[7]{x^7}$

$= \log_a(128)^{\frac{1}{7}} + \log_a x$

$= \frac{1}{7}\log_a 128 + \log_a x$

---

⑮ $\log_a \frac{(x^{-1}y^2)^4}{(x^5y^{-2})^3} = \log_a\left(\frac{x^{-4}y^8}{x^{15}y^{-6}}\right)$

$= \log_a x^{-4}y^8 - \log_a x^{15}y^{-6}$

$= \log_a x^{-4} + \log_a y^8 - \log_a x^{15} + \log_a y^{-6}$

$= -4\log_a x + 8\log_a y - 15\log_a x - 6\log_a y$

⑯ $\log_a \sqrt{\frac{x^2y^3}{Z^3}} = \log_a \left(\frac{x^2y^3}{Z^3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} log \ \ \frac{x^2y^3}{Z^3}$

$= \frac{1}{2}[\log_a x^2y^3 - \log_a Z^3]$

$= \frac{1}{2}[\log_a x^2 + \log_a y^3 - \log_a Z^3]$

$= \frac{1}{2}[2\log_a x + 3\log_a y - 3\log_a Z]$

$= \log_a x + \frac{3}{2}\log_a y - \frac{3}{2}\log_a Z$

---

⑰ $\log_a (x-y+2)^9 \, , y - x < 2$

$= 9\log_a (x-y+2)$

---

⑱ $\log_a x^2 = 7 \log_a x$

⑲ $\log_a \left(\frac{a}{bc}\right)$ $= \log_a a - (\log_a b + \log_a c)$ $= \log_a a - \log_a b - \log_a c$ $= 1 - \log_a b - \log_a c$	23. $\log_a \frac{(x^2y^3)^2}{(x^2y^3)^3}$
⑳ $\log_a (\sqrt{x}\sqrt{y})$ $\frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y$	24. $\log_a (x+y-z)^7 \, , x+y>z$
21. $\log_a \left(\frac{\sqrt{z}}{y}\right)$ $\frac{1}{2}\log_a z + \log_a y$	25. $\log_a \sqrt{\frac{x^{12}y}{y^3z^4}}$
22. $\log_a \frac{1}{x^2y^2}$ $-2\log_a x + -2\log_a y$ $-2\log_a x - 2\log_a y$	26. $\log_a \sqrt[5]{32x^5}$ $\log_a 2x$ $= \log_a 2 + \log_a x$

■ كتابة اللوغاريتمات بالصورة المختصرة: (عكس المطولة)

كتابة المقدار في صورة لوغاريتم واحد :

أمثلة اكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المختصرة ، علما بأن المتغيرات جميعها اعداد حقيقية موجبة :

ملاحظة مهمة :

نستطيع أن (نلم) اللوغاريتم في لوغاريتم واحد بشرط أن الأساس نفسه

$log_{②}$ $log_{②}$

اما إذا كان مختلف لا نستطيع

$log_{②}$ $log_{③}$

---

① $3log_2 x + 4log_2 y$

$= log_2 x^3 + log_2 y^4$

$= log_2 x^3 y^4$

---

② $5\, log_a x + \frac{1}{3} log_a y - 7\, log_a z$

$= log_a x^5 + log_a y^{\frac{1}{3}} - log_a Z^7$

$= log_a x^5 y^{\frac{1}{3}} - log_a Z^{-7}$

$= log_a \frac{x^5 y^{\frac{1}{3}}}{z^7}$

---

③ $log_5 a + 3log_5 b$

$= log_5 a + \log_5 b^3$

$= \log_5 a\, b^3$

0788118727

④ $5\log_b x + \frac{1}{2}\log_b y - 9\log_b z$

$= \log_b x^5 + \log_b y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9$

$= \log_b x^5 y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9$

$= \log_b \left(\frac{x^5 y^{\frac{1}{2}}}{z^9} \right)$

---

⑤ $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$

---

⑥ $\log_b(x+y) - \log_b(x-y), x > y$

$= \log_b \frac{x+y}{x-y}$

---

⑦ $\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x}$

$= \log_a x^{-\frac{1}{2}} - \log_a x^{\frac{1}{2}}$

$= \log_a \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right) = \log_a \left(x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \right)$

$= \log_a x^{-1} = \log_a \frac{1}{x}$

---

⑧ $\log_a(x^2-4) - \log_a(x+2), x > 2$

$= \log_a \frac{x^2-4}{x+2}$

$= \log_a \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}$

$= \log_a x - 2$

⑨ $2\log_b x - 3\log_b y + \frac{1}{3}\log_b z$

$= \log_b x^2 - \log_b y^3 + \log_b z^{\frac{1}{3}}$

$= \log_b x^2 + \log_b z^{\frac{1}{3}} - \log_b y^3$

$= \log_b x^2 z^{\frac{1}{3}} - \log_b y^3$

$= \log_b \left(\frac{x^2 z^{\frac{1}{3}}}{y^3} \right)$

---

⑩ $\log_b 1 + 2\log_b b$

$0 + 2(1) = 2$

---

⑪ أحد الخيارات الآتية يكافئ المقدار $\log_a \frac{ax^5}{y^3}$:

a) $5\log_a^x - 3\log_a y + 1$

b) $a\log_a x^5 - \log_a y^3$

c) $5a\log_a x - 3\log_a y$

d) $1 - 5\log_a x - 3\log_a y$

---

⑫ أحد الخيارات الآتية يكافئ المقدار $\log_a 27 - \log_a 9 + \log_a 3$

a) $\log_a 3$ b) $\log_a 6$ c) $\log_a 9$ d) $\log_a 27$

---

⑬ $\log_a x - \log_a y = \log \frac{x}{y}$

---

⑭ $\log_b(b-1) + 2\log_b b \quad , \quad b > 1$

$= \log_b(b-1) + 2(1)$

$= \log_b(b-1) + 2$

سيأتي بها الله وإن تأخّرت

⑮ $log_a \sqrt{x} - log_a \frac{1}{\sqrt{x}}$

$= log_a x^{\frac{1}{2}} - log_a x^{\frac{-1}{2}}$

$= log_a \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right) = log_a x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = log_a x$

---

⑯ $log_a(x^2 - 25) - log_a(x + 5) \quad , \quad x > 5$

$log_a \frac{x^2 - 25}{x + 5}$

$log_a \frac{(x-5)\cancel{(x+5)}}{\cancel{(x+5)}}$

$log_a x - 5$

---

⑰ $3\, log_b 1 - log_b b$

$3(0) - 1 = 3$

---

⑱ $8\, log_b x + 4\, log_b y - \frac{1}{2} log_b z$

$= log_b x^8 + log_b y^4 - log_b z^{\frac{1}{2}}$

$= log_b x^8 y^4 - log_b z^{\frac{1}{2}}$

$= log_b \frac{x^8 y^4}{z^{\frac{1}{2}}}$

■ المسائل الحياتية :

① في تجربة لتحديد مدى تأثير المدة الزمنية في درجة تذكر الطلبة للمعلومات.
تقدمت مجموعة من الطلبة لاختبار في مادة معينة، ثم لاختبارات مكافئة لهذا الاختبار على مدار عُدد شهرية بعد ذلك ,فوجد الباحثون ان النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها احد الطلبة بعد t شهرًا من انهائه دراسة المادة تعطى بالاقتران:

$$M(t) = 85 - 25\,log_{10}(t+1)$$

جد النسبة المئوية للمادة التي يتذكرها هذا الطالب بعد 19 شهرا من انهائه دراستها، علما بأن $\log_{10}2 \approx 0.3010$ مقربًا اجابتك إلى أقرب عدد صحيح.

المعطى : عدد الأشهر بعد دراسته للمادة 19 ⇦ $t = 19$

المطلوب : النسبة المئوية ⇦ $M(t) = ?$

$$\log_{10} 2 \approx 0.3010$$

$$M(t) = 85 - 25\,log_{10}(t+1)$$
$$M(19) = 85 - 25\,log_{10}(19+1)$$
$$= 85 - 25\,log_{10}(20)$$
$$= 85 - 25\,log_{10}(2 \times 10)$$
$$= 85 - 25[\log_{10} 2 + \log_{10} 10]$$
$$= 85 - 25[0.3010 + 1]$$
$$= 85 - 25(1.3010)$$
$$= 85 - 32.5250$$
$$= 52.475$$
$$\approx 52$$

$25 \times 13010 = 325250$

$$\begin{array}{r} 1301 \\ \times \quad 23 \\ \hline 6505 \\ +\ 26020 \\ \hline 32525 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4\ 9\ 9\ 10} \\ 85.000 \\ -\ 32.525 \\ \hline 52.475 \end{array}$$

② يمثل الاقتران $M(t) = 92 - 28\,log_{10}(t+1)$ النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها الطالب من ماده معينه بعد t شهرا من انهائه دراستها .جد النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها هذا الطالب بعد 29 شهرا من انهائه دراسة المادة علما بأن $\log_{10} 3 \approx 0.4771$, مقربا الإجابة الى اقرب عدد صحيح

المعطى : عدد الاشهر بعد دراسة المادة 29 ⇦ $t = 29$

المطلوب : النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها ⇦ $M(t) = ؟$

$\log_{10} 3 \approx 0.4771$

$M(t) = 92 - 28\,log_{10}(t+1)$

$M(29) = 92 - 28\,log_{10}(29+1)$

$= 92 - 28\,log_{10}(30)$

$= 92 - 28\,log_{10}(3 \times 10)$

$= 92 - 28[\log_{10} 3 + \log_{10} 10]$

$= 92 - 28[0.4771 + 1]$

$= 92 - 28[1.4771]$

$= 92 - 51.3588$

$= 40.6412$

≈ 41

41٪

28×1.4771

28×14771

$= 513588 = 51.3588$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\ \ 3\,6\,5} \\ 14771 \\ \times \quad 28 \\ \hline {\scriptstyle 1\,1} \\ 118168 \\ +\ 395420 \\ \hline 513588 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,9\,9\,9\,10} \\ 92.0000 \\ -\ 51.3588 \\ \hline 40.6415 \end{array}$$

③ يمثل الاقتران $f(x) = 29 + 48.8\,log_6(x+2)$ النسبة المئوية لطول الطفل الذكر الان من طوله عند البلوغ , حيث x عمره بالسنوات . جد النسبه المئويه لطول الطفل عمره 10 سنوات من طوله عند البلوغ علما بان $log_6 2 \approx 0.3869$

المعطيات: عمر الطفل 10 ⇦ $x = 10$

المطلوب: النسبة المئوية ⇦ $f(10) = ؟؟$

$$log_6 2 \approx 0.3869$$

$$f(x) = 29 + 48.8\,log_6(x+2)$$

$$f(10) = 29 + 48.8\,log_6(10+2)$$

$$f(10) = 29 + 48.8\,log_6(12)$$

$$= 29 + 48.8[log_6 6 + log_6 2]$$

$$= 29 + 48.8[1 + 0.3869]$$

$$= 29 + 48.8(1.3869)$$

" سلّمت أمري للذي لا يغفل ,
ولا ينام , ولا يكسر بخاطري "

④ يمثل الاقتران $T(a) = 10 + 20\,log_6(a+1)$ مبيعات شركه من منتج جديد , حيث a المبلغ (بآلاف الدينار) الذي تنفقه الشركه على اعلانات المنتج $a \geq 0$ وتعني القيمه $T(1) \approx 17.7$ انفاق 1000JD على الاعلانات يحقق ارادات قيمتها 17700JD من بيع المنتج جد قيمه ايرادات الشركة بعد انفاقها مبلغ 11 الف دينار على الاعلانات علما بأن $log_6 2 \approx 0.3869$

المعطى: المبلغ الذي انفقته على الاعلانات 11 ألف ⇦ $a = 11$

المطلوب: قيمه الايرادات بعد ما تم دفعه ⇦ $T(11) = ؟؟$

$$T(a) = 10 + 20\,log_6(9+1)$$

$$T(11) = 10 + 20\,log_6(11+1)$$

$$T(11) = 10 + 20\,log_6 12$$

$$= 10 + 20\,log_6(6 \times 2)$$

$$= 10 + 20[log_6 6 + log_6 2]$$

$$= 10 + 20[1 + 0.3869]$$

$$= 10 + 20(1.3869)$$

$$= 10 + 27.7380$$

$$= 28.7380$$

قيمة الإيرادات $= 1000 \times 28738$ دينار

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1} \\ 13869 \\ \times \quad 2 \\ \hline 27738 \end{array}$$

■ مهارات تفكير عُليا :

① أُثبِت أنَّ $\dfrac{\log_a 216}{\log_a 36} = \dfrac{3}{2}$.

② أكتشف الخطأ في الحَلِّ الآتي، ثم أُصحِّحه:

$\log_2 5x = (\log_2 5)(\log_2 x)$ ✗

③ أُثبِت أنَّ $\log_b(b-3) + \log_b(b^2+3b) - \log_b(b^2-9) = 1$، حيث: $b > 3$، مُبرِّرًا إجابتي.

المعادلات الأسية

■ هنالك نوعان من الاقترانات اللوغاريتمية المشهورة :

لوغاريتم للأساس 10 (الاعتيادي)	لوغاريتم للأساس e (*الطبيعي*)
$\log x \ , \ x > 0$ يُكتب من دون الأساس (10) مجرد رؤية log دون اساس فاعلم بأن الاساس هو (10)	$\ln x \ , \ x > 0$ $\log_e x$ الاساس عندما يكون (e) العدد النيبيري ، يكتب بشكل آخر $\ln x$
هو الاقتران العكسي للاقتران الاسي 10^x	هو الاقتران العكسي للاقتران الاسي الطبيعي e^x
على الالة الحاسبة يوجد log	على الآلة الحاسبة يوجد ln
تذكّر $\log_a a=1 \Leftarrow \log 10=1$ لأن الاساس المخفي هو 10 تذكّر $\log_a 1=0 \Leftarrow \log 1=0$	$\ln e=1 \Leftarrow \log_e e=1$ $\ln = 0$

ملاحظة في حال أساس اللوغاريتم ليس 10 أو e

أي عدد آخر ، يوجد على الآلة الحاسبة

$\log \square$

هنا تكتب الأساس

ملاحظة تُطبق خصائص اللوغاريتمات على اللوغاريتم الاعتيادي واللوغاريتم الطبيعي.

سنين الجَهدِ وإن طالت ستُطوى ... لها أمدٌ وللأمد انقضاء

تذكّر طريقة التقريب :

1) خط تحت الهدف المذكور

2) انظر على يمين الهدف ← 5 فأكثر ⇐ +1 على الهدف

4 فأقل ⇐ يبقى الهدف كما هو

• استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربا الاجابة الى أقرب جزء من عشرة.

① $\log 2.7$ $= 0.43133$ ≈ 0.4	② $log(1.3 \times 10^5)$ $= 5.1139$ ≈ 5.1	③ $ln\ 17$ $= 2.8332$ ≈ 2.8
④ $log\ 13$ $= 1.11394$ ≈ 1.1	⑤ $log(3.1 \times 10^4)$ $= 4.49136$ ≈ 4.5	⑥ $ln\ 0.25$ $= -1.38629$ ≈ -1.4
⑦ $log\ 19$ $= 1.27875$ ≈ 1.3	⑧ $log(2.5 \times 10^{-3})$ $= -2.60205$ ≈ -2.6	⑨ $ln\ 3.1$ $= 1.1314$ ≈ 1.1
⑩ $log\ 17$ $= 1.23044$ ≈ 1.2	⑪ $log(1.5 \times 10^{-4})$ $= -3.8239$ ≈ -3.8	⑫ $ln\ 5$ $= 1.609$ ≈ 1.6
⑬ $ln\ 2.3$ $= 0.8329$ ≈ 0.8	⑭ $ln\ 7$ $= 1.9459$ ≈ 1.9	⑮ $ln\ e$ $= 1$
⑯ $ln\ 1$ $= 0$	⑰ $ln\ 10$ $= 1$	⑱ $log\ 1$ $= 0$

• يمكن تغيير أساس اللوغاريتم بكتابته على صورة حاصل قسمة لوغاريتمين للأساس نفسه

$$log_b x = \frac{log_a x}{log_a b}$$

كيف يعني

أمثلة للتوضيح ... إذا كان عنا $log_4 7$

يمكن كتابتها كالتالي :

$$\frac{log_5 7}{log_5 4} \quad , \quad \frac{log_2 7}{log_2 4} \quad , \quad \frac{log\ 7}{log\ 4} \quad , \quad \frac{ln\ 7}{ln\ 4} \quad , \dots$$

أهم شي الأساس فوق ، وتحت هو نفسه

وغالبا هذه القاعدة نستفيد منها باستخدام In أو log

أختار الصمود دائمًا ليس أنا الذي يليق به الانهيار

• جد قيمة كل مما يأتي، مقربا الاجابة إلى أقرب جزء من مئة ، باستخدام الآلة الحاسبة:

① $log_3 16$ $\frac{log\,16}{log\,3}$ $= 2.523$ ≈ 2.52	② $log_{\frac{1}{2}} 10$ $= \frac{log\,10}{log\,\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{log\,\frac{1}{2}}$ $= -3.3219$ ≈ -3.32	③ $log_3 51$ $\frac{log\,51}{log\,3}$ $= 3.578$ ≈ 3.58
④ $log_{\frac{1}{2}} 13$ $= \frac{log\,13}{log\,\frac{1}{2}}$ $= -3.7004$ ≈ -3.70	⑤ $log_3 e^2$ هنا يُفضل استخدام ln $\frac{ln\,e^2}{ln\,3} = \frac{2\,ln\,e}{ln\,3}$ $\frac{2(1)}{ln\,3}$ $\frac{2}{ln3} = 1.820$ ≈ 1.82	⑥ $log_2 10$ $= \frac{log\,10}{log\,2}$ $= \frac{1}{log\,2}$ $= 3.3219$ ≈ 3.32
⑦ $log_3 33$ $\frac{log\,33}{log\,3}$ $= 3.1826$ ≈ 3.18	⑧ $log_{\frac{1}{3}} 17$ $= \frac{log\,17}{log\frac{1}{3}}$ $= -2.5789$ ≈ -2.58	⑨ $log_6 5$ $\frac{log\,5}{log\,6}$ $= 0.8982$ ≈ 0.9

⑫ $log_3 15$ $\frac{log\ 15}{log\ 3}$ $= 2.4649$ ≈ 2.46	⑪ $log\ 1000$ يمكن حلها دون استخدام الآلة الحاسبة $= log\ 10^3$ $= 3\ log\ 10$ $= 3(1)$ $= 3$	⑩ $log_7 \frac{1}{7}$ يمكن حلها دون استخدام الآلة الحاسبة $log_7 7^{-1}$ $= -1$
⑮ $log_5 27$ $= \frac{log\ 27}{log\ 5}$	⑭ $log_2 15$ $= \frac{log\ 15}{log\ 2}$	⑬ $log_5 e^7$ $= \frac{ln\ e^7}{ln\ 5} = \frac{7\ ln\ e}{ln\ 5}$ $= \frac{7(1)}{ln\ 5} = \frac{7}{ln\ 5}$
⑱ $log_8 \frac{1}{8}$ دون استخدام الآلة الحاسبة $= log_8 8^{-1}$ $= -1\ log_8 8$ $= -1(1)$ $= -1$	⑰ $log_7 8$ $= \frac{log\ 8}{log\ 7}$	⑯ $log_{\frac{1}{4}} 19$ $= \frac{log\ 19}{log\ \frac{1}{4}}$
	⑳ $log_3 18$ $= \frac{log\ 18}{log\ 3}$	⑲ $log\ 10000$ $= log\ 10^4$ $= 4\ log\ 10$ $= 4(1)$ $= 4$

■ المعادلات الأسية :

هي المعادلة التي تتضمن قوى أسسها متغيرات

كيف نحل المعادلة الأسية (يعني نوجد قيمة المتغير)

1) الطريقة الأولى :

إذا كان $a^x = a^y$

فإن $x = y$

عندما يتساوى الأساس تتساوى الأسس

يعني .. بتخلي طرفي المعادلة على شكل أسس ,ولكن الشرط نستخدم نفس الأساس ثم الأسس تكون متساوية

أمثلة

أوجد حل المعادلات الأسية التالية :

① $3^{2x} = 81$ $3^{2x} = 3^4$ $\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$ $X = 2$	② $5^{3x} = 125$ $5^{3x} = 5^3$ $\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}$ $X = 1$	③ $2^x = 8$ $2^x = 2^3$ $X = 3$
④ $1 = 5^x$ $5^0 = 5^x$ $X = 0$	⑤ $27^{2x} = 9^{2x+1}$ $(3^3)^{2x} = (3^2)^{2x+1}$ $3^{6x} = 3^{4x+2}$ $6x = 4x + 2$ $-4x \quad -4x$ $2X = 2$ $X = 1$	

2) الطريقة الثانية :

في بعض الحالات لا يمكن كتابة طرفي المعادلة في صورة قوتين للأساس نفسه مثل المعادلة :

$3^x = 5$

نستخدم خاصية المساواة اللوغاريتمية

$log_b x = log_b y$ **إذا وفقط إذا** $x = y$

يعني ..

بندخل اللوغاريتم على طرفي المعادلة لحلها وممكن ندخل الـ (ln) على طرفي المعادلة لحلها

أمثلة **حل المعادلات الأسية الآتية مقربًا إلى أقرب منزلتين عشريتين :**

① $2^x = 13$	② $5e^{3x} = 125$	③ $2^{x+4} = 5^{3x}$
$log\, 2^x = log\, 13$	$\frac{5}{5}e^{3x} = \frac{125}{5}$	$log\, 2^{x+4} = log\, 5^{3x}$
$\frac{x\, log\, 2}{log\, 2} = \frac{log\, 13}{log\, 2}$	$e^{3x} = 25$	$(x+4)\log 2 = 3x \log 5$
$x = \frac{log\, 13}{log\, 2}$	$lne^{3x} = ln25$	$xlog2 + 4\log 2 = 3x \log 5$
$x \approx 3.7$	$3xlne = ln25$	$xlog2 - 3xlog5 = -4log2$
	$3x(1) = ln25$	$x(log2 - 3log5) = -4log2$
	$3x = ln25$	$x = \frac{-4}{log2 - 3log5}$
	$x = \frac{ln25}{3}$	$x \approx 0.67$
	$x \approx 1.07$	

لا فوز من غير مشقّة ,
صراعاتنا تُحدد نجاحاتنا

④ $9^x + 3^x - 30 = 0$

$(3^2)^x + 3^x - 30 = 0$

$(3^x)^2 + 3^x - 30 = 0$

$u^2 + u - 30 = 0$

$(u+6)(u-5) = 0$

$u = -6 \quad , \quad u = 5$

ملاحظة مهمة

$(3^2)^x + (3^x)$

نستطيع تبديل أماكن الأسس

نعوّض $u = 3^x$

$3^x = -6$

مرفوضة لأن

3^x موجب فقط

$3^x = 5$

$log\, 3^x = log\, 5$

$x log\, 3 = log\, 5$

$x = \frac{log 5}{log 3}$

$x \approx 1.46$

⑤ $7^x = 9$

$log\, 7^x = log\, 9$

$x log\, 7 = log\, 9$

$x = \frac{log 9}{log 7}$

⑥ $2e^{5x} = 64$

$\frac{2}{2} e^{5x} = \frac{64}{2}$

$e^{5x} = 32$

$ln\, e^{5x} = ln 32$

$5x ln\, e = ln 32$

$5x(1) = ln 32$

$x = \frac{ln 32}{5}$

⑦ $7^{2x+1} = 2^{x-4}$

$log\, 7^{2x+1} = log\, 2^{x-4}$

$(2x+1)\log 7 = (x-4)\log 2$

$2x log 7 + \log 7 = x log 2 - 4 \log 2$

$2x log 7 - x log 2 = -4 \log 2 - log 7$

$\frac{x(2log 7 - log 2)}{2log 7 - log 2} = \frac{-4\, log\, 2 - log 7}{2log 7 - log 2}$

$x = \frac{-4\, log\, 2 - log 7}{2log 7 - log 2}$

⑧ $4^x + 2^x - 12 = 0$

$(2^2)^x + 2^x - 12 = 0$

$(2^x)^2 + 2^x - 12 = 0$

نفرض u= 2^x

$u^2 + u - 12 = 0$

$(u+4)(u-3) = 0$

$u = -4 \quad or \quad u = 3$

$u = -4$ مرفوضة لأنها سالبة

$2^x = 3$

$log\, 2^x = log\, 3$

$x log\, 2 = log\, 3$

$x = \frac{log 3}{log 2}$

⑨ $6^x = 121$

$log\, 6^x = log\, 121$

$x log\, 6 = log\, 121$

$x = \frac{log 121}{log 6}$

⑩ $-3e^{4x} = -27$

$\frac{-3}{-3} e^{4x} = \frac{-27}{-3}$

$e^{4x} = 9$

$ln\, e^{4x} = ln 9$

$4x ln\, e = ln 9$

$4x(1) = ln 9$

$4x = ln 9$

$x = \frac{ln 9}{4}$

⑪ $5^{7x-2} = 3^{2x}$

$log\, 5^{7x-2} = log\, 3^{2x}$

$(7x-2)\, log\, 5 = 2x\, log\, 3$

$7x log 5 - 2\, log\, 5 = 2x log 3$

$7x log 5 - 2x log 3 = 2\, log\, 5$

$x(7log 5 - 2log 3) = 2\, log\, 5$

$x = \frac{2\, log\, 5}{7log 5 - 2log 3}$

⑫ $2(9)^x = 32$

$\frac{2(9)^x}{2} = \frac{32}{2}$

$9^x = 16$

$log\, 9^x = log\, 16$

$\frac{xlog9}{log9} = \frac{log16}{log9}$

$x = \frac{log16}{log9}$

⑬ $25^x + 5^x - 42 = 0$

$(5^2)^x + 5^x - 42 = 0$

$(5^x)^2 + 5^x - 42 = 0$

نفرض $u = 5^x$

$u^2 + u - 42 = 0$

$(u+7)(u-6) = 0$

$u = -7\ or\ u = 6$

$u = -7$ مرفوضة لأنها سالبة

$u = 6$

$5^x = 6$

$log\, 5^x = log\, 6$

$xlog\, 5 = log\, 6$

$x = \frac{log6}{log5}$

⑭ $27^{2x+3} = 2^{x-5}$

$log\, 27^{2x+3} = log\, 2^{x-5}$

$(2x+3)\log 27 = (x-5)\log 2$

$2xlog27 + 3\log 27 = xlog2 - 5log2$

$2xlog27 - xlog2 = -5log2 - 3\, log\, 27$

$x(2log27 - log2) = -5log2 - 3\, log\, 27$

$x = \frac{-5log2 - 3\, log\, 27}{2log27 - log2}$

⑮ $8^x = 2$

$(2^3)^x = 2$

$2^{3x} = 2^1$

$\frac{3x}{3} = \frac{1}{3}$

$x = \frac{1}{3}$

⑯ $-3e^{4x+1} = -96$

$\frac{-3}{-3}e^{4x+1} = \frac{-96}{-3}$

$e^{4x+1} = 32$

$ln\, e^{4x+1} = ln32$

$(4x+1)ln\, e = ln32$

$4x + 1 = ln32$

$\frac{4x}{4} = \frac{ln32 - 1}{4}$

$x = \frac{ln32 - 1}{4}$

⑰ $11^{2x+3} = 5^x$

$log\, 11^{2x+3} = log\, 5^x$

$(2x+3)\log 11 = x\log 5$

$2xlog11 + 3\log 11 = x\, log\, 5$

$2xlog11 - x\, log\, 5 = -3\, log\, 11$

$x(2log11 - log5) = -3\, log\, 11$

$x = \frac{-3\, log\, 11}{2log11 - log5}$

⑱ $49^x + 7^x - 72 = 0$

$(7^2)^x + 7^x - 72 = 0$ نفرض $u = 7^x$

$(7^x)^2 + 7^x - 72 = 0$

$u^2 + u - 72 = 0$

$(u+9)(u-8) = 0$

$u = -9 \; or \; u = 8$

$u = -9$ مرفوضة

$u = 8$

$7^x = 8$

$\log 7^x = \log 8$

$x \log 7 = \log 8$

$x = \frac{\log 8}{\log 7}$

⑲ $5^x = 120$

$\log 5^x = \log 120$

$x \log 5 = \log 120$

$x = \frac{\log 120}{\log 5}$

⑳ $-4e^{4x} = -64$

$\frac{-4e^{4x}}{-4} = \frac{-64}{-4}$

$e^{4x} = \ln 16$

$\ln e^{4x} = \ln 16$

$4x \ln e = \ln 16$

$4x = \ln 16$

$x = \frac{\ln 16}{4}$

21. $3^{2x+1} = 7^{5x}$

$\log 3^{2x+1} = \log 7^{5x}$

$(2x+1)\log 3 = 5x \log 7$

$2x \log 3 + \log 3 = 5x \log 7$

$2x \log 3 - 5x \log 7 = -\log 3$

$x(2\log 3 - 5\log 7) = -\log 3$

$x = \frac{-\log 3}{2\log 3 - 5\log 7}$

22. $64^x + 2(8)^x - 3 = 0$

$(8^2)^x + 2(8)^x - 3 = 0$

$(8^x)^2 + 2 8^x - 3 = 0$

$u^2 + 2u - 3 = 0$ نفرض $u = 8^x$

$(u+3)(u-1) = 0$

$u = -3 \; or \; u = 1$

مرفوضة

$8^x = 1$

$x = 0$

23. $7(4)^x = 94$

$\frac{7(4)^x}{7} = \frac{94}{7}$

$4^x = 7$

$log\, 4^x = log\, 7$

$x log\, 4 = log\, 7$

$x = \frac{log 7}{log 4}$

24. $21^{x-1} = 3^{7x+1}$

$log\, 21^{x-1} = log\, 3^{7x+1}$

$(x-1)\, log\, 21 = (7x+1)\, log\, 3$

$x\, log\, 21 - log\, 21 = 7x\, log\, 3 + log\, 3$

$x\, log\, 21 - 7x\, log\, 3 = log\, 3 + log\, 21$

$x(log 27 - 7 log 3) = log\, 3 + log\, 21$

$x = \frac{log\, 3 + log\, 21}{log 27 - 7 log 3}$

25. اختر الاجابة الصحيحة فيما يأتي:

1) حل المعادلة $ln\, e^x = 1$ هو:

a) 0 b) $\frac{1}{e}$ c) 1 d) e

$ln\, e^x = 1$

$x ln\, e = 1$

$x(1) = 1$

2) قيمة $log(0.1)^2$ هي:

a) -2 b) -1 c) 1 d) 2

$log(0.1)^2$
$= 2log\ 0.1$

$2log(\frac{1}{10})$
$2log10^{-1}$
$-2log10 = -2$

3) حل المعادلة $2^{x+1} = 4^{x-1}$ هو:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 8

$2^{x+1} = 2^{2(x-1)}$
$x + 1 = 2x - 2$
$x - 2x = -2 - 1$

$-x = -3$
$x = 3$

4) قيمة $log\ 10$ هي:

a) $2log\ 5$ b) 1 c) $log\ 5 \times log\ 2$ d) 0

5) اذا كان $log_{2x}\ x^2 = 1$ فإن قيمة x هي:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4

أو طريقة حل أخرى

$\frac{log\ x^2}{log\ 2x} = 1$

$\frac{2\ log\ x}{log\ 2 + log\ x} = \frac{1}{1}$

$2\ log\ x = log\ 2 + log\ x$

$2\ log\ x - log\ x = log\ 2$

$log\ x = log\ 2$

$x = 2$

$(2x)^1 = x^2$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0$

$x = 0\ ,x = 2$

26. اذا كان $log_5 4 = k$ فاكتب قيمة $log_{25} 4$ بدلالة k.

ملاحظة تم حل السؤال سابقا بطريقة مختلفة في الدرس الثالث.

$$log_{25} 4 = \frac{log_5 4}{log_5 25} = \frac{log_5 4}{log_5 5^2} = \frac{log_5 4}{2\, log_5 5} = \frac{k}{2(1)} = \boxed{\frac{k}{2}}$$

27. أودعت سميرة مبلغ P في حساب بنكي، بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 5٪

أ) بعد كم سنة تصبح جملة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي؟

ب) بعد كم سنة تصبح جملة المبلغ 3 أمثال المبلغ الأصلي؟

28. تناقصت أعداد حيوان الكوالا في إحدى الغابات وفق الاقتران : $N = 873e^{-0.078t}$

حيث N العدد المتبقي من هذا الحيوان في الغابة بعد t سنة.

بعد كم سنة يصبح في الغابة 97 حيوانا من الكوالا؟

29. حرارة: تُمثِّل المعادلة: $T = 27 + 219e^{-0.032t}$ درجة حرارة معدن (بالسليسيوس °C) بعد t دقيقة من بَدْء تبريده. متى تصبح درجة حرارة المعدن 100°C؟

30. **أرانب:** توصَّلت دراسة إلى أنَّ عدد الأرانب في محمية طبيعية يتزايد وَفق الاقتران: $N(t)=\frac{2000}{1+3e^{-0.05t}}$، حيث N عدد الأرانب في المحمية بعد t سنة:

أجد عدد الأرانب في المحمية عند بَدْء الدراسة.

بعد كم سنةً يصبح عدد الأرانب في المحمية 700 أرنب؟

31. يُمثِّل الاقتران: $P(t)=200e^{t}$ عدد أسماك السلمون P في نهر بعد t سنة من بَدْء دراسة مُعيَّنة عليها:

أجد عدد أسماك السلمون في النهر عند بَدْء الدراسة.

بعد كم سنةً يصبح عدد أسماك السلمون في النهر 4000 سمكة؟

■ مهارات تفكير عُليا :

① تبرير: أجد قيمة كلٍّ من k، وh إذا وقعت النقطة $(-2, k)$، والنقطة $(h, 100)$ على منحنى الاقتران: $f(x)=e^{0.5x+3}$، مُبرِّرًا إجابتي.

② أحُلُّ المعادلة: $3^{x}+\frac{4}{3^{x}}=5$.

انهض وحارب التعثُّر ،
اسلُك كُل الطُّرق التي أمامك
فلا تعلم بأي طريقٍ يمكُث قدرك