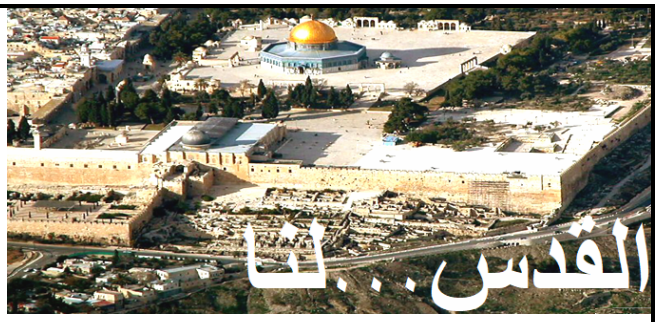
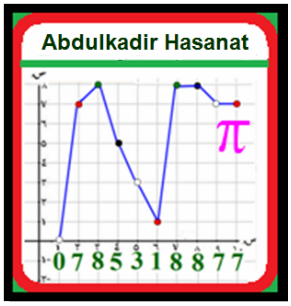
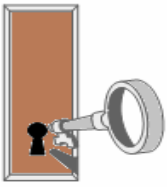


مدرسة البقعة الثانوية للبنين

Hasanat





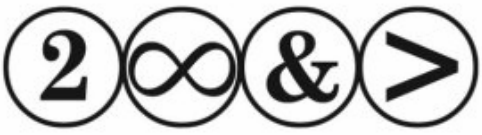
الرياضيات 2024

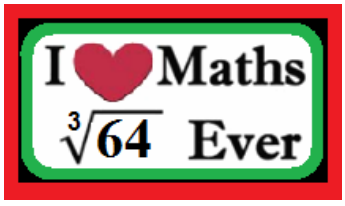
الصف الثاني الثانوي

الأدبي (2006)

مُكثف الفصل الأول

الأستاذ : عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77





مراجعة تأسيسية : أهم المفاهيم الأساسية

السالب والموجب ... باختصار

يتم الحل على مرحلتين : حسب العملية

جمع أو طرح

المرحلة الأولى

تحدد إشارة الناتج من خلال (إشارة الأكبر)

$-5-6=-$

$-3+7=+$

$4-9=-$

المرحلة الثانية

إيجاد قيمة الناتج

متشابهان في الإشارة ⇐ نجمع (- - أو ++)

مختلفان في الإشارة ⇐ نطرح (- + أو + -)

$-5-6=-11$

$-3+7=+4$

$4-9=-5$

ضرب أو قسمة

تحدد إشارة الناتج من خلال:

متشابهان في الإشارة (- - أو ++) ⇐ الناتج موجب

مختلفان في الإشارة (- + أو + -) ⇐ الناتج سالب

(لا يوجد إشارة الأكبر)

$(-2)\times(-3)=+$

$(-6)\times(+4)=-$

$(+8)\div(-4)=-$

إيجاد قيمة الناتج

نضرب أو نقسم حسب العملية المطلوبة

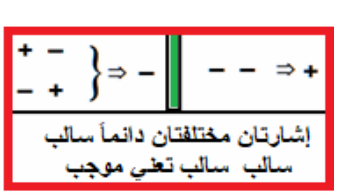
$(-2)\times(-3)=+6$

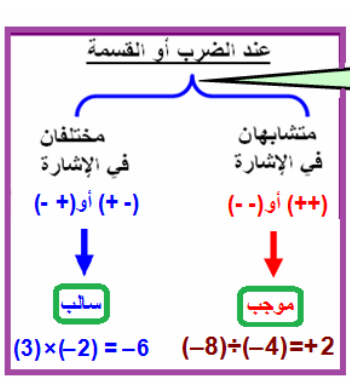
$(-6)\times(+4)=-24$

$(+8)\div(-4)=-2$

Hasanat

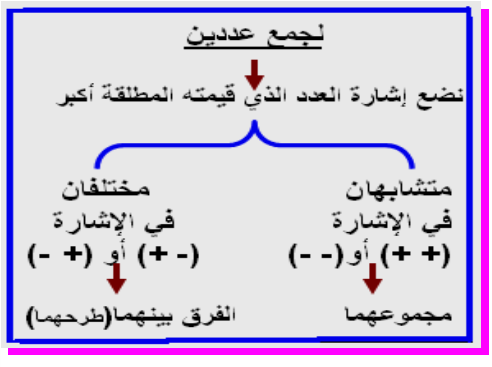
الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77





لا يوجد (إشارة الأكبر)

Hasanat



أخطاء قاتلة : بحجة سالب وسالب = موجب (الصواب(−8) لأنه جمع وليس ضرباً) 1) $-3-5=+8$

2) $-3\times5=+15$ لأن إشارة الأكبر موجبة (الصواب(−15) لا يوجد أكبر عند الضرب)

3) $-4-4=0$ (الصواب(−8) لأن كلاهما سالب فنجمع)

التحليل إلى العوامل :

التحليل إلى العوامل في المقادير الجبرية ،هو كتابة المقدار على شكل حاصل ضرب مجموعة من المقادير كل منها أصغر منه درجة ،ولا يمكن تحليل أيا منها

ومن طرقه (العامل المشترك ، الفرق بين مربعين ...) ولتجنب الأخطاء نقوم بذلك على شكل خطوات :

أولاً:العامل المشترك : دائماً نبدأ بالسؤال التالي : هل يوجد عامل مشترك؟(10 –5x ،

مثلاً:

1) $5x - 10 = 5x - 5(2) = 5(x - 2)$

2) $3x^2 + 6x = 3\,xx + 2(3)x = 3x(x+2)$

ثانياً:الفرق بين مربعين:إذا لم يكن هناك عامل مشترك، نلاحظ فيما إذا كان المقدار فرق بين مربعين أو مكعبين :

مثلاً:

1) $x^2 - 9 = (x)^2 - (3)^2 = (x-3)(x+3)$

2) $x^2 + 4 =$ لا يمكن تحليلها لأن المميز سالب (المميز $b^2 - 4ac$)

3) $x^3 - 8 = (x)^3 - (2)^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

4) $x^3 + 27 = (x)^3 + (3)^3 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

ثالثاً: إذا لم يكن كذلك نلاحظ فيما إذا كان ثلاثي حدود : $ax^2 + bx + c$

تحليل ثلاثي الحدود : $x^2 + bx + c$: نبحث عن عددين حاصل ضربهما (c) ومجموعهما (b)

1) $x^2 + 2x - 15$: نبحث عن عددين حاصل ضربهما (-15) ومجموعهما (2)

$x^2 + 2x - 15 = (x-2)(x+5)$ وهما (2– ، 5) لذلك :

وهذا يعني أن الاقتران $f(x) = x^2 + 2x - 15$ يقطع محور السينات عند النقطتين (x=2)،(x= – 5)

ويمكن استخدام القانون العام

$x^2+12x+32=0$ a=1 b=12 c=32

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2-4(1)(32)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{144-128}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-12 \pm 4}{2}$$

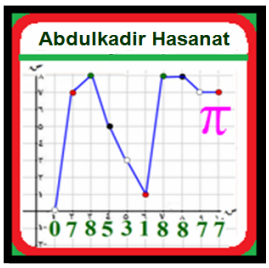
$$= \frac{-12+4}{2} \quad x=-4 \qquad = \frac{-12-4}{2} \quad x=-8$$

2) $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

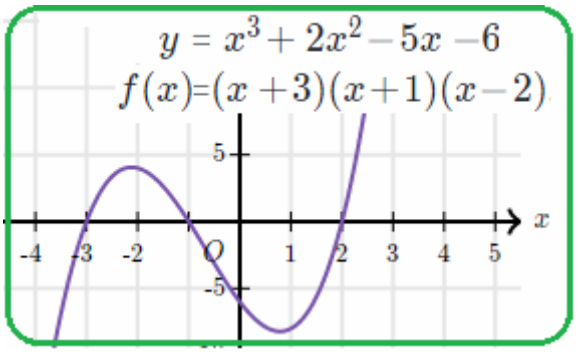
3) $x^2 - 9x + 20 = (x-5)(x-4)$

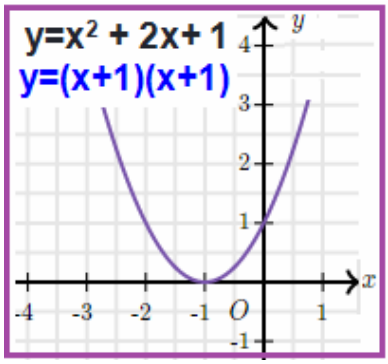
4) $x^2 - 8x - 20 = (x-10)(x+2)$

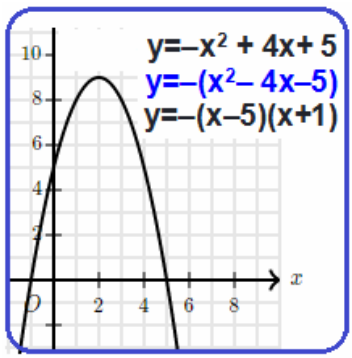
5) $x^2 + x - 20 = (x+5)(x-4)$



يمكن ملاحظة مفهوم التحليل إلى العوامل من خلال التمثيل البياني للاقتران المرافق وعلاقته بالمقطع من المحور (x)







1) $x^2 + 8x + 12 = (x \quad)(x \quad)$

2) $x^2 - 4x - 32 = (x \quad)(x \quad)$

3) $x^2 - 11x + 24 = (x \quad)(x \quad)$

4) $x^2 + x - 2 = (x \quad)(x \quad)$

5) $x^2 + 10x + 24 = (x \quad)(x \quad)$

6) $x^2 + 12x + 35 = (x \quad)(x \quad)$

7) $x^2 - 3x - 40 = (x \quad)(x \quad)$

8) $x^2 + 3x - 4 = (x \quad)(x \quad)$

9) $x^2 + 4x - 12 = (x \quad)(x \quad)$

10) $x^2 - 14x + 45 = (x \quad)(x \quad)$

11) $x^2 + 5x - 6 = (x \quad)(x \quad)$

12) $x^2 - 4 = (x \quad)(x \quad)$

13) $x^2 - 6x - 7 = (x \quad)(x \quad)$

14) $x^2 + 6x - 16 = (x \quad)(x \quad)$

15) $x^2 + 11x + 28 = (x \quad)(x \quad)$

16) $x^2 + 10x + 16 = (x \quad)(x \quad)$

17) $x^2 - 25x + 24 = (x \quad)(x \quad)$

18) $x^2 + 12x + 27 = (x \quad)(x \quad)$

19) $x^2 - 13x + 36 = (x \quad)(x \quad)$

20) $x^2 + 5x - 24 = (x \quad)(x \quad)$

21) $x^2 - 5x - 6 = (x \quad)(x \quad)$

22) $x^2 - 5x + 6 = (x \quad)(x \quad)$

23) $x^2 - 13x + 30 = (x \quad)(x \quad)$

24) $x^2 - 13x - 30 = (x \quad)(x \quad)$

ملاحظة: هناك حالات لا نجد فيها عددين صحيحين يحققان الشرطين السابقين عندها نستخدم المميز والقانون العام

$2x^2 + x - 6 =$ هناك أكثر من طريقة

$(2x \quad)(x \quad)$

القريبان

البعيدان

$(2x - 3)(x + 2)$

حاصل ضرب القريبين : $-3x$

حاصل ضرب البعيدين : $4x$

المجموع = x = الحد الأوسط

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

أو عن طريق القانون العام :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a=2 \ , \ b=1 \ , \ c=-6$$

$$x = \frac{-1 \mp \sqrt{1 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = \frac{-1 \mp \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \mp 5}{4}$$

$$x = \frac{-3}{2} \qquad x = 2$$

$$y = ax^2 + bx + c \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \qquad a=2 \ / \ b=5 \ / \ c=-3$$

$$\frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$= \frac{-5 \pm 7}{4} = \frac{-5+7}{4} \text{ or } \frac{-5-7}{4} = \frac{2}{4} \text{ or } \frac{-12}{4} = \left\{\frac{1}{2}, -3\right\}$$

الأستاذ
عبدالقادر الحسنات
٠٧٨٥٣١٨٨٧٧

حل المعادلات: هناك نوعان من المعادلات الجبرية بمتغير واحد ، وهما : الخطية وغير الخطية

أ) **الخطية** : وهي على الصورة : $ax + b = c$ ، نتعامل معها مثل الميزان ذو الكفتين

طرف المتغيرات (المجاهيل) — طرف الأعداد (الثوابت)

طريقة الحل : يجب تجميع الحدود المحتوية على (x) في أحد طرفي المعادلة ثم القسمة على معامل (x)

1) $2x + 5 = 9$

$2x + 5 - 5 = 9 - 5$

$2x = 4$

$2x \div 2 = 4 \div 2$

$x = 2$

2) $3x - 8 = 7x + 1$

$3x - 7x = 1 + 8$

$-4x = 9$

$x = \frac{9}{-4} = \frac{-9}{4}$

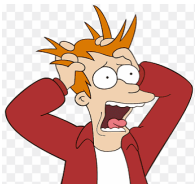
Hasanat

ب) **التربيعية** : صورتها العامة : $ax^2 + bx + c = 0$

طريقة الحل : يجب أن نجعل الطرف الأيمن صفراً ،ثم نقوم بتحليل الطرف الأيسر وكتابته على شكل حاصل ضرب عدة مقادير لكي نستخدم القاعدة ($ab = 0 \rightarrow a = 0$ or $b = 0$) ثم حل المعادلات الناتجة

1) $x^2 - x = 6 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0$

إما $(x - 3 = 0)$ أو $(x + 2 = 0)$ ومنها $x = 3 , x = -2$



2) $x^3 + 2x^2 = 11x + 12 \rightarrow x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$

$(x + 4)(x - 3)(x + 1) = 0$

إما $(x + 4 = 0)$ أو $(x - 3 = 0)$ أو $(x + 2 = 0)$

ومنها $x = -2 , x = 3 , x = -4$

3) $x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x - 4) = 0 \rightarrow x = 0 , x = 4$

ملاحظة(1): للمعادلة التربيعية على الأكثر حلان (جذران) : فقد لا يكون لها حل في ح

مثل : $x^2 + 4 = 0$ أو $x^2 + 3x + 4 = 0$

ملاحظة(2): يمكن استخدام القانون العام لحل أي معادلة تربيعية على الصورة : $ax^2 + bx + c = 0$

المميز = $b^2 - 4ac$

القانون العام :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ولا يوجد حل للمعادلة في R إذا كان المميز سالباً (وتكون أولية)

---

13) أنظمة المعادلات

هناك طريقتان لحل نظام مكون من معادلتين خطيتين (أي إيجاد زوجاً مرتباً يحقق المعادلتين في نفس الوقت)

وهما : 1) طريقة الحذف elimination

أساسها : التخلص من أحد المتغيرين بجمع المعادلتين ثم إيجاد قيمة المتغير الآخر

$x + 2y = 6$

$x - y = 3$

نضرب المعادلة الثانية في (2)

$x + 2y = 6$

$2x - 2y = 6$

نجمع $3x = 12$

$x = 4$

وبالتالي $y = 1$

2) طريقة التعويض substitution

ملخصها :جعل أحد المتغيرين موضوعاً للقانون في إحدى المعالتين وتعويض قيمته في الأخرى لحلها

$x + 2y = 6$

$x - y = 3$

نجعل (x) موضوعا للقانون في المعادلة الثانية

$x = 3 + y$

نعوض القيمة في الأولى $3 + y + 2y = 6$

$3 + 3y = 6$

ومنها $3y = 3$ $y = 1$

$x = 4$

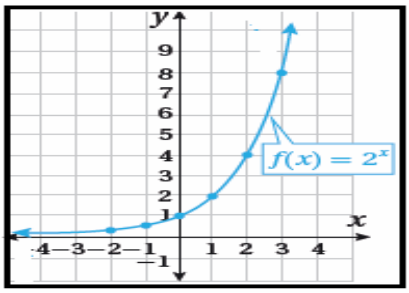
مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح
الأستاذ عبدالقادر الحسنات

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

الدرس 1
الاقترانات الأُسِّية
Exponential Functions

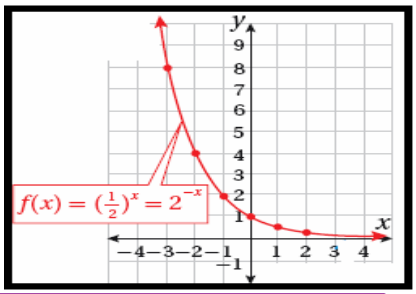
يُعتبر الاقتران $f(x)=ab^{x-h}+k$ تحويلا هندسيا لمنحنى الاقتران $f(x)=b^x$

عند كتابة الاقتران الأسي بهذه الصورة ، فيمكن إيجاد المدى وخط التقارب الأفقي وتحديد التزايد والتناقص



مُتزايد $b>1$ ، مُتناقِص $0<b<1$

$f(x)=b^{-x}=\left(\frac{1}{b}\right)^x$

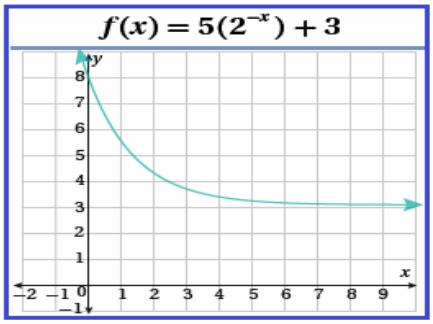


لإيجاد المقطع من (x) نضع y=0
لإيجاد المقطع من (y) نضع x=0

خصائص $f(x)=ab^{x-h}+k$

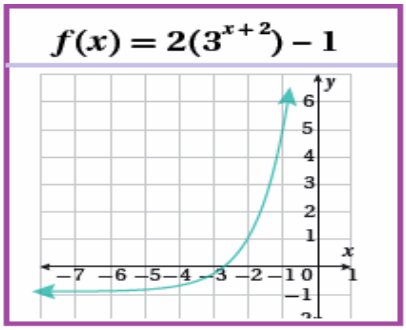
- مجال الاقتران $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- مدى الاقتران $f(x)$ هو الفترة (k,∞).
- الاقتران $f(x)$ مُتزايِد إذا كان $b>1$.
- الاقتران $f(x)$ مُتناقِص إذا كان $0<b<1$.
- للاقتران $f(x)$ خط تقارب أفقيًّا هو المستقيم $y=k$.

$f(x)=5(2^{-x})+3$



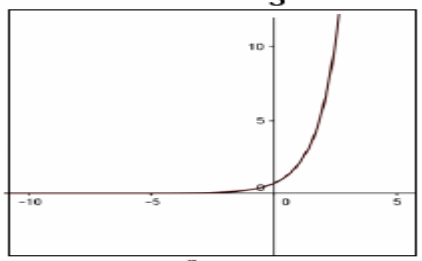
$f(x)=5(2)^{-x}+3=5(2^{-1})^x+3$
$=5(\frac{1}{2})^x+3$
المـــدى $(3,\infty)$
خـــط التقـــارب $y=3$
متنـــــاقص $\frac{1}{2}<1$

$f(x)=2(3^{x+2})-1$



$f(x)=2(3)^{x+2}-1$
$=2(3)^{x+2}+(-1)$
المـــدى $(-1,\infty)$
خـــط التقـــارب $y=-1$
متزايـــــد $3>1$

$h(x)=6(\frac{1}{3})^{2-x}$

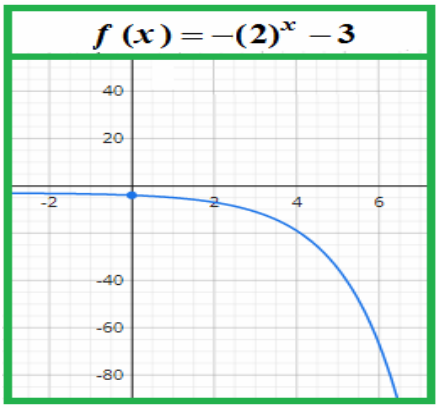


$h(x)=6(\frac{1}{3})^{2-x}=6(\frac{1}{3})^{-(x-2)}$
$=6((\frac{1}{3})^{-1})^{(x-2)}=6(3)^{x-2}+0$
المـــدى $(0,\infty)$
خـــط التقـــارب $y=0$
متزايـــــد $3>1$

ملاحظة: إذا كانت (a) سالبة ، فلا تغيير على خط التقارب الأفقي ، ولكن المدى يصبح $(-\infty,k)$ بدلاً من (k,∞)

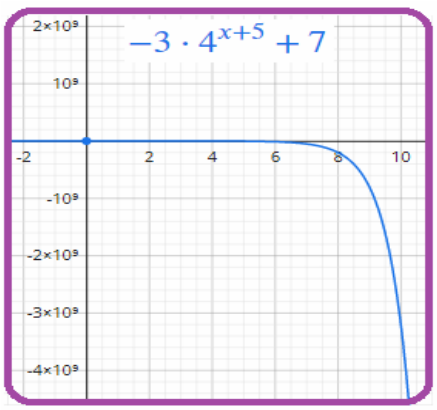
وعكس قاعدة التزايد والتناقص

$f(x)=-(2)^x-3$



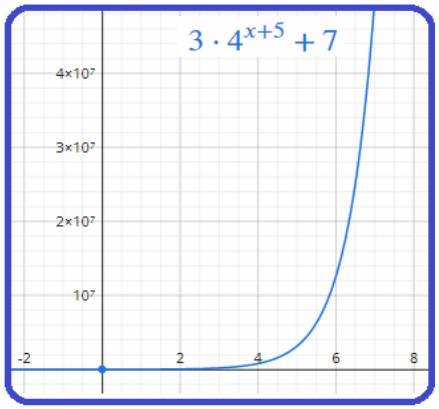
المـــدى $(-\infty,-3)$
متنـــــاقص

$-3\cdot4^{x+5}+7$



المـــدى $(-\infty,7)$
متنـــــاقص

$3\cdot4^{x+5}+7$



المـــدى $(7,\infty)$
متزايـــــد

إذا كان: $a^x = a^y$ ، فإنّ $x = y$ ، حيث: $a > 0, a \neq 0$

$$3^{2x} = 81 \Rightarrow 3^{2x} = 3^4$$
$$\Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$4^{x+1} = 32 \Rightarrow (2^2)^{x+1} = 2^5 \Rightarrow 2x + 2 = 5 \Rightarrow x = 1.5$$

		الاقتران	المقطع من x	المقطع من y	خط التقارب الأفقي	المدى
1)	$f(x) = 3^{2x}$	–	$y = 1$	$y = 0$		$(0, \infty)$
2)	$f(x) = 2^{3x} - 16$	$x = 1.3$	$y = -15$	$y = -16$		$(-16, \infty)$
3)	$f(x) = 2^x + 8$	–	$y = 9$	$y = 8$		$(8, \infty)$
4)	$f(x) = 2^{1-x} - 4$	$x = -1$	$y = -2$	$y = -4$		$(-4, \infty)$
5)	$f(x) = 2(3)^{x+1}$					
6)	$f(x) = 2(3)^x + 1$					
7)	$f(x) = -2(3)^{x+1}$					
8)	$f(x) = 1 - 2(3)^x$					
9)	$f(x) = -2(3)^{6-2x}$					
10)	$f(x) = 1 - 3(2)^{-x}$					

أجد خط التقارب الأفقي لكل اقتران ممّا يأتي، ثم أُحدِّد مجاله ومداه، مُبيِّنًا إذا كان مُتناقِصًا أم مُتزايِدًا:

11 $f(x) = 5^{x-1} + 2$ 12 $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 5$ 13 $f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^{x+5} - 6$ 14 $f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$

11	$f(x) = 5^{x-1} + 2$	لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 2$	مدى هذا الاقتران هو $(2, \infty)$
		مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R	الاقتران $f(x)$ متزايد
12	$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 5$	لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -5$	المدى هو $(-5, \infty)$
		مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R	الاقتران متناقص
13	$f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^{x+5} - 6$	لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = -6$	
		مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R	المدى هو $(-6, \infty)$ الاقتران متناقص
14	$f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$	لهذا الاقتران خط تقارب أفقي هو $y = 1$	
		مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R	المدى هو $(1, \infty)$ الاقتران متزايد

تُمثّل المعادلة $N(t)=(\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$ الكمية المتبقّية N بالغرامات من عيّنة كتلتها 1 g من الراديوم 226 حيث t الزمن بالسنوات.

1) أجد كمّية الراديوم 226 المتبقية بعد 3240 سنة.

$N(t)=(\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$

$N(3240)=(\frac{1}{2})^{\frac{3240}{1620}}=(\frac{1}{2})^{2}=0.25$

2) بعد كم سنة يبقى من كمّية الراديوم 0.125 g؟

$N(t)=(\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$

$0.125=(\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}} \rightarrow \frac{1}{8}=(\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}} \rightarrow (\frac{1}{2})^{3}=(\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}} \Rightarrow 3=\frac{t}{1620} \rightarrow t=4860$

أتحقّق من فهمي: يُمثّل الاقتران: $f(x)=500\,(2)^{x}$ عدد الخلايا البكتيرية في عيّنة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات:

a) أجد عدد الخلايا البكتيرية في العيّنة بعد 5 ساعات.

b) بعد كم ساعةً يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العيّنة 4000 خلية؟

أتحقق من فهمي صفحة 16

a) $f(5)=500(2)^{5}=500(32)=16000$

b) $4000=500(2)^{x} \Rightarrow 8=(2)^{x} \Rightarrow (2)^{3}=(2)^{x} \Rightarrow x=3$

بكتيريا: يُمثّل الاقتران: $f(x)=7000\,(1.2)^{x}$ عدد الخلايا البكتيرية في تجربة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات:

15) أجد عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة.

16) أجد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة.

17) بعد كم ساعةً يصبح عدد الخلايا البكتيرية 10080 خلية؟

15) $f(0)=7000(1.2)^{0}=7000(1)=7000$

16) $f(12)=7000(1.2)^{12}\approx 62413$

17) $10080=7000(1.2)^{x} \Rightarrow 1.44=(1.2)^{x}$

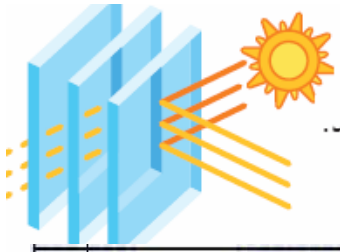
$(1.2)^{2}=(1.2)^{x} \Rightarrow x=2$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

ضوء: يُمثّل الاقتران: $f(x)=100\,(0.97)^{x}$ النسبة المئوية للضوء المارّ خلال x من الألواح الزجاجية المتوازية:

18) أجد النسبة المئوية للضوء المارّ خلال لوح زجاجي واحد.

19) أجد النسبة المئوية للضوء المارّ خلال 3 ألواح زجاجية.



18) $f(1)=100(0.97)^{1}=100(0.97)=97$

نسبة الضوء المارّ خلال لوح زجاجي واحد هي 97%

19) $f(3)=100(0.97)^{3}\approx 91$

نسبة الضوء المارّ خلال 3 ألواح زجاجية هي 91%

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

الأستاذ عبدالقادر الحسنات

أسئلة الوزارة / أدبي 2023 / الدرس الأول

1) إذا كان $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ ، فإنّ $f(-3)$ تساوي:

a) $\frac{1}{8}$ b) $-\frac{1}{8}$ c) 8 d) -8

2) خط التقارب الأفقي للاقتران $f(x)=5^{x+1}-3$ هو:

a) $y=3$ b) $y=-3$ c) $y=1$ d) $y=-1$

a) يُمثل الاقتران $f(x)=300(2)^{\frac{x}{3}}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة في تجربة مخبرية.

بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 1200 خلية ؟ (9 علامات)

أسئلة الوزارة / فندقي 2023 / الدرس الأول

1- قيمة الاقتران: $f(x)=5^x$ عند $x=-2$ هي:

a) 10 b) $\frac{1}{10}$ c) 25 d) $\frac{1}{25}$

2- الاقتران الأسي المتزايد هو:

a) $f(x)=2^{-x}$ b) $f(x)=2\left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ d) $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$

a) إذا كان الاقتران: $f(x)=3(2)^{x-1}+5$ ، فأجب عن كل ممّا يأتي: (8 علامات)

1) جد مجال ومدى الاقتران f . 2) جد خط التقارب الأفقي للاقتران 3) بيّن إذا كان الاقتران f متزايدًا أم متناقصًا.

أسئلة الوزارة / أدبي 2023 تكميلي / الدرس الأول

1) قيمة الاقتران $f(x)=-3(2)^x$ عند $x=3$ هي:

a) -24 b) 24 c) -18 d) 18

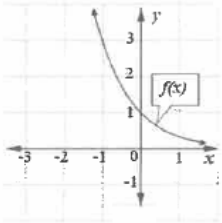
2) يمثل الشكل الآتي التمثيل البياني لمنحنى الاقتران $f(x)$. واحدة مما يأتي تُمثل قاعدة $f(x)$ هي:

a) $f(x)=3^x$

b) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $f(x)=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$

d) $f(x)=-(3^x)$



3) مدى الاقتران $f(x)=5^x-1$ هو:

a) $(-\infty,-1)$ b) $(-\infty,1)$ c) $(1,\infty)$ d) $(-1,\infty)$

4) خط التقارب الأفقي للاقتران $f(x)=4^{x-3}+7$ هو:

a) $x=7$ b) $x=-7$

c) $y=7$ d) $y=-7$

أسئلة الوزارة / فندقي 2023 تكميلي / الدرس الأول

1- قيمة الاقتران: $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ عند $x=-3$ هي:

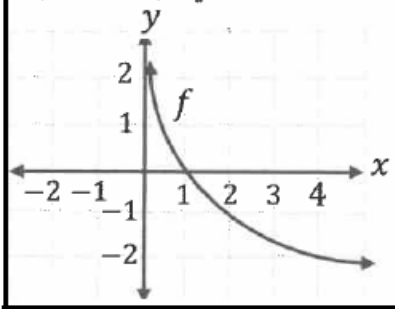
a) 64 b) 16 c) $\frac{1}{64}$ d) $\frac{1}{16}$

2- الاقتران الأسي المتناقص من بين الاقترانات الآتية هو:

a) $f(x)=3^x$ b) $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$

c) $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ d) $f(x)=(3.3)^x$

a) معتمدًا الشكل المجاور الذي يُمثّل منحنى الاقتران f ، أجب عن كلّ ممّا يأتي: (8 علامات)



1) بيّن إذا كان $f(x)$ اقتران أسّي أم لوغارتمي.

2) جد مجال ومدى الاقتران f

3) جد خطوط التقارب للاقتران (إن وجدت).

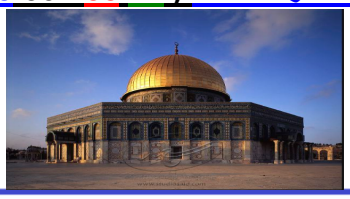
4) بيّن إذا كان الاقتران f متزايدًا أم متناقصًا.

b) إذا كان: $f(x)=2^{-x}$ ، فأجب عن كلّ ممّا يأتي: (10 علامات)

1) أكمل جدول القيم الآتي:

x	-2	.....	0	1	.....
$y=f(x)$	.....	2	.....	.....	$\frac{1}{4}$

2) مثّل الاقتران f بيانيًا مستعينًا بالجدول أعلاه.



الدرس 2 النمو والاضمحلال الأُسّي
Exponential Growth and Decay

1) **مفهوم أساسي** اقتران النمو الأُسّـي هو كل اقتران أُسّي يتزايد بنسـبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

t الفترة الزمنية، و a الكمّية الابتدائية، و r النسبة المئوية للنمو في فترة زمنية مُحدَّدة.

$$A(t) = a(1+r)^t$$

عامل النمو: أساس العبارة الأُسّية $(1+r)$

مثال1) بلغ عدد سكان الوطن العربي عام 2000 حوالي 291 مليون نسمة تقريبا فإذا كانت نسبة النمو السكّاني 2.3 % سنويًا، جد عدد السكان المتوقع عام 2025 (أي بعد 25 سنة).

$$A(t)=a(1+r)^t \Rightarrow A(25)=(291)(1+\frac{2.3}{100})^{25}=(291)(1+0.023)^{25}\approx 513.8$$

مثال2) يتزايد عدد الأغنام في إحدى المَزارع بنسبة 22 % سنويًا ، جد عدد الأغنام بعد (5) سنوات علمًا بأنَّ عددها في المزرعة حالياً هو(1321) رأسا .

Hasanat

$$A(t)=a(1+r)^t \Rightarrow A(5)=(1321)(1+\frac{22}{100})^{5}=(1321)(1.22)^{5}\approx 3570$$

مسألة اليوم بلغ عدد سكّان المملكة الأردنية الهاشمية نحو 10.8 ملايين نسمة عام 2020م.

إذا كانت نسبة النمو السكّاني قرابة 2.6% سنويًا، فأجد العدد التقريبي للسكّان عام 2030م. ≈ 13.960

أتحقّق من فهمي في دراسة شملت إحدى مَزارع الأبقار، تبيَّن أنَّ عدد الأبقار في المزرعة يزداد بنسبة 18% سنويًا:

a) أكتب اقتران النمو الأُسّي الذي يُمثّل عدد الأبقار بعد t سنة، علمًا بأنّ عددها في المزرعة عند بَدْء الدراسة هو 327 بقرة.

b) أجد عدد الأبقار بعد 3 سنوات من بَدْء الدراسة. ≈ 537

مفهوم أساسي اقتران الاضمحلال الأُسّـي هو اقتران أُسّي يتناقص بنسـبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

t الفترة الزمنية، و a الكمّية الابتدائية، و r النسبة المئوية للنمو في فترة زمنية مُحدَّدة.

$$A(t) = a(1-r)^t$$

عامل النمو: أساس العبارة الأُسّية $(1+r)$

مثال) اشترى أحمد سيّارة تعمل على الكهرباء بمبلغ JD 25000 . إذا كان ثمن السيّارة يقلّ بنسبة 10 % سنويًا؛ جد ثمن السيّارة بعد 5 سنوات.

$$A(t)=a(1-r)^t$$

$$\Rightarrow A(5)=25000(1-0.1)^5=25000(0.9)^5=14762.25$$

مثال) اشترى محمد دراجة نارية بمبلغ JD 8950 . إذا كان ثمن السيّارة يقلّ بنسبة 4.5 % سنويًا؛ جد ثمن السيّارة بعد 6 سنوات. (الجواب 6789.6)

أتحقّق من فهمي اشترت سوسن سـيّارة هجينة قابلة للشحن بمبلغ JD 28500.

إذا كان ثمن السـيّارة يقلُّ بنسبة 5% سنويًا، ≈ 23213

a) أكتب اقتران الاضمحلال الأُسّي لثمن السيّارة بعد t سنة. b) أجد ثمن السيّارة بعد 4 سنوات.

مفهوم أساسي يُمكِن حساب جُمْلة المبلغ المستحق في حالة الربح المُركَّب باستعمال الصيغة الآتية:

n: عدد مرّات إضافة الربح المُركَّب في السنة. t: عدد السنوات.

r: مُعدَّل الفائدة السنوي الذي يُكتَب في صورة عشرية. P: المبلغ الأصلي

$$\text{جُمْلة المبلغ} = A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

مثال1) استثمر سليمان مبلغ JD 9000 في شركة، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 1.46 % ، وتضاف كل (3) أشهر ، جد جُمْلة المبلغ بعد (3) سنوات.

$$A(t)=P(1+\frac{r}{n})^{nt}\ ,\ n=\frac{\text{(عدد الأشهر)}}{\text{(عدد المرات)}}=\frac{12}{3}=4$$

$$\Rightarrow A(3)=(9000)(1+\frac{0.0146}{4})^{4(3)}=9402.2$$

مثال2) استثمر ماجد مبلغ (8000 JD) في بنك بنسبة ربح مركب قيمتها(1.34 %) بحيث تضاف كل(6) أشهر جد جملة المبلغ بعد (4) سنوات

$$A=P(1+\frac{r}{n})^{nt}=8000(1+\frac{0.0134}{2})^{2(4)}=8438.9$$

مثال3) استثمر عماد مبلغ (4000 JD) في بنك بنسبة ربح مركب قيمتها(6 %) بحيث تضاف كل يوم جد جملة المبلغ بعد (5) سنوات

$$A=P(1+\frac{r}{n})^{nt}=4000(1+\frac{0.06}{365})^{365(5)}=5546.3$$

أتحقّق من فهمي استثمرت تهاني مبلغ JD 5000 في شركة، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 2.25%، وتضاف كل 6 أشهر. أجد جُمْلة المبلغ بعد 5 سنوات. ≈ 5591.85

استثمر ربيع مبلغ JD 1200 في شركة، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 10%، وتضاف كل شهر:

10 أكتب صيغة تُمثِّل جُمْلة المبلغ بعد t سنة. 11 أجد جُمْلة المبلغ بعد 5 سنوات. ≈ 1974.37

استثمرت هند مبلغ JD 6200 في شركة، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 8.4%، وتضاف كل يوم:

12 أكتب صيغة تُمثِّل جُمْلة المبلغ بعد t سنة. 13 أجد جُمْلة المبلغ بعد 6 سنوات. ≈ 10262.45

الاقتران الأُسّي الطبيعي: $f(x)=e^x$ و الربح المُركَّب المستمر

مفهوم أساسي يُمكِن حساب جُمْلة المبلغ المستحق في حالة الربح المُركَّب المستمر باستعمال الصيغة الآتية:

r: مُعدَّل الفائدة المستمر الذي يُكتَب في صورة عشرية. t: عدد السنوات. P: المبلغ الأصلي

$$\text{جُمْلة المبلغ} = A = Pe^{rt}$$

مثال1) أودع ماجد مبلغ(4000 JD) في بنك بمعدل فائدة قدرها (5 %) ،واحتسب البنك الفائدة باستمرار جد جملة المبلغ بعد 10 سنوات

$$A(t)=Pe^{rt}\Rightarrow A(10)=(4000)\,e^{(0.05)(10)}=6595$$

مثال2) أودع سالم مبلغ(5000 JD) في بنك بمعدل فائدة قدرها (3 %) ، واحتسب البنك الفائدة باستمرار ، إذا بلغت جملة المبلغ بعد (t) سنة (10000)، جد عدد السنين

$$A(t)=P\ e^{rt}\Rightarrow 10000=(5000)\,e^{0.03t}\Rightarrow 2=e^{0.03t}$$

$$\ln 2=\ln e^{0.03t}\Rightarrow 0.69=(0.03t)\ln e\Rightarrow t=\frac{0.69}{0.03}=23$$

أتحقّق من فهمي أودعت سارة مبلغ JD 6300 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 3.2%. أجد جُمْلة المبلغ بعد 9 سنوات.

$A = 6300e^{0.032\times 9} \approx 8402.67$

14 أودع حسام مبلغ JD 9000 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 3.6%. أجد جُمْلة المبلغ بعد 7 سنوات.

14 $A = Pe^{rt} \Rightarrow A = 9000e^{0.036\times 7} \approx 11579.36$

15 أودعت ليلى مبلغ JD 8200 في حساب بنكي، بنسبة ربح مُركَّب مستمر مقدارها 4.9%. أجد جُمْلة المبلغ بعد 9 سنوات.

15 $A = Pe^{rt} \Rightarrow A = 8200e^{0.049\times 9} \approx 12744.94$

16 أعَدَّ باحث دراسة عن تكاثر ذباب الفاكهة، وتوصَّل إلى أنَّه يُمكِن تمثيل العدد التقريبي للذباب بالاقتران: $P(t) = 20e^{0.03t}$، حيث P عدد الذباب بعد t ساعة. أجد عدد ذباب الفاكهة بعد 72 ساعة من بَدْء الدراسة، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

16 $P(t) = 20e^{0.03t} \Rightarrow P(72) = 20e^{0.03\times 72} \approx 173$

أسئلة الوزارة / 2023

3) يبلغ عدد المشاركين في جمعية خيرية (40) شخصًا هذه السنة، ويُتوقع زيادة هذا العدد بنسبة 7% كل سنة. ما اقتران النمو الأسي الذي يُمثل عدد المشاركين بعد t سنة؟

a) $A(t) = 40(0.93)^t$
c) $A(t) = 40(0.07)^t$
b) $A(t) = 40(1.07)^t$
d) $A(t) = 40(1.7)^t$

b) استثمر معاذ مبلغ JD7000 في شركة بنسبة ربح مُركب تبلغ 1.5% وتُضاف كل 4 أشهر. جد جملة المبلغ بعد 5 سنوات؟ (11 علامة)

أسئلة الوزارة / 2023 تكميلي

5) يُمثل الاقتران $A(t) = 200(1.43)^t$ اقتران النمو الأسي لعدد الدجاج في مزرعة دواجن حيث t الزمن بالسنوات. قيمة عامل النمو تساوي:

a) 0.43 b) 1.43 c) 143 d) 43

6) أودع تاجر مبلغ JD5000 في حساب بنكي بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 2.5% . المقدار الذي يُعبّر عن جملة المبلغ بعد 4 سنوات هو:

a) $A = 5000(1.025)^{0.1}$
c) $A = 5000e^{10}$
b) $A = 5000(1.025)^{10}$
d) $A = 5000e^{0.1}$

السؤال الثاني: (13 علامة)

a) اشترى شخص جهاز حاسوب بمبلغ JD550 . إذا كان ثمن الحاسوب يتناقص بنسبة 10% سنويًا، فما ثمن جهاز الحاسوب بعد 5 سنوات؟ (6 علامات)

b) استثمر تاجر مبلغ JD20000 في شركة بنسبة ربح مركب تبلغ 16% ، وتُضاف كل 6 أشهر. ما جملة المبلغ بعد نصف سنة ؟ (7 علامات)

إذا كان: $x>0, b>0, b\neq 1$، فإنَّ:

الصورة اللوغاريتمية	الصورة الأُسِّية
$\log_b x = y$	$b^y = x$

الدرس 3 الاقترانات اللوغاريتمية Logarithmic Functions

مفهوم اللوغاريتم :

$\log_2 8$ تعني : كم مرة نضرب العدد (2) في نفسه ليكون الناتج (8) ؟؟؟ الجواب (3) . إذاً $\log_2 8 = 3$

كذلك : $\log_5 25$ تعني : (5) أس كم تساوي (25) ؟؟؟ الجواب (2) . إذاً $\log_5 25 = 2$

أي أن أي صيغة أسية يمكن تحويلها إلى لوغاريتمية (بشرط الأساس موجب ولا يساوي 1)

$$(2)^6 = 64 \Leftrightarrow Log_2(64) = 6$$

$$Log_3(81) = 4 \Leftrightarrow (3)^4 = 81$$

أتحقَّق من فهمي أكتب كل معادلة لوغاريتمية ممّا يأتي في صورة أُسِّية:

a) $\log_2 16 = 4$

b) $\log_7 7 = 1$

c) $\log_3\left(\frac{1}{243}\right) = -5$

d) $\log_9 1 = 0$

أتحقَّق من فهمي أكتب كل معادلة أُسِّية ممّا يأتي في صورة لوغاريتمية:

a) $7^3 = 343$

b) $49^{\frac{1}{2}} = 7$

c) $(2)^{-5} = \frac{1}{32}$

d) $17^0 = 1$

ويمكن إيجاد قيمة اللوغاريتم عن طريق تحويله إلى معادلة أسية ، ثم حلها

1) $\log_2 8 \Rightarrow \log_2 8 = y \Rightarrow 2^y = 8$
$\Rightarrow 2^y = 2^3 \Rightarrow y = 3$

2) $\log_7 \sqrt{7} \Rightarrow \log_7 \sqrt{7} = y \Rightarrow 7^y = \sqrt{7}$
$\Rightarrow 7^y = 7^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

3) $\log_9 3 \Rightarrow \log_9 3 = y \Rightarrow 9^y = 3$
$\Rightarrow (3^2)^y = 3 \Rightarrow 3^{2y} = 3^1$
$\Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

4) $\log_{10} 0.01 \Rightarrow \log_{10} 0.01 = y \Rightarrow 10^y = 0.01$
$\Rightarrow 10^y = \frac{1}{100} \Rightarrow 10^y = 10^{-2}$
$\Rightarrow y = -2$

خصائص اللوغاريتمات :

الجذر التربيعي يُلغي التربيع ..... والعكس

$$x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = x \ , \ (\sqrt{x})^2 = x$$

كذلك اللوغاريتم والأس أو القوة متعاكسان ....
كل منهما يُلغي الأخر عندما يكون الأساس نفسه

$$Log_4(4)^7 = 7 \quad ، \quad 3^{\text{Log}_3(5)} = 5$$

مفهوم أساسي الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان: $b > 0, b \neq 1$، فإنَّ:

• $\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
• $\log_b b = 1$	$b^1 = b$
• $\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
• $b^{\log_b x} = x, \ x > 0$	$\log_b x = \log_b x$

$$a^{Log_a x} = x$$

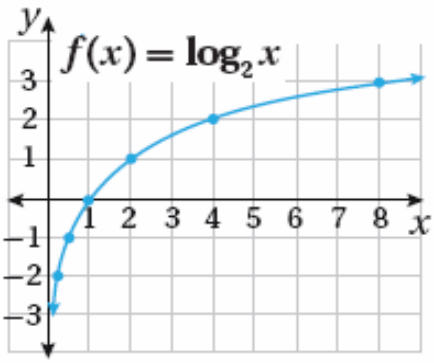
أتحقّق من فهمي أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

a) $\log_2 1$ b) $\log_{32}\sqrt{32}$ c) $\log_9 9$ d) $8^{\log_8 13}$

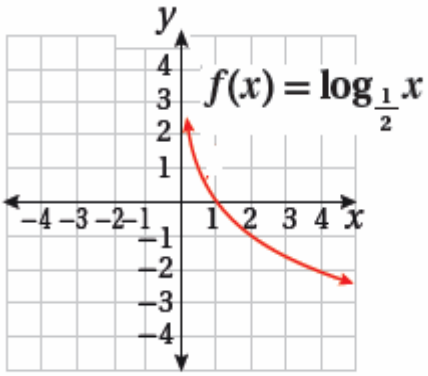
أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

13) $\log_3 81$ 14) $\log_{25} 5$ 15) $\log_2 32$ 17) $\log_{10} 0.001$ 18) $\log_{\frac{3}{2}} 1$

19) $\log_{\frac{1}{4}} 4$ 20) $(10)^{\log_{10}\frac{1}{8}}$ 21) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{(2)^7}}$ 22) $\log_a \sqrt[5]{a}$ 24) $8^{\log_8 5}$



- مجال الاقتران هو الفترة $(0, \infty)$.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المقطع x هو 1
- لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور y؛ لأنَّ $x > 0$ دائمًا.
- الاقتران له خط تقارب رأسي هو المحور y.
- الاقتران مُتزايِد.



- مجال الاقتران هو الفترة $(0, \infty)$.
- المدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المقطع x هو 1
- لا يوجد للاقتران مقطع مع المحور y؛ لأنَّ $x > 0$ دائمًا.
- الاقتران له خط تقارب رأسي هو المحور y.
- الاقتران مُتناقِص.

4) مجال الاقتران اللوغاريتمي: $f(x) = \log_b g(x)$ هو قيم (x) التي يكون عندها g(x) موجبا

لا يمكن إيجاد اللوغاريتم للعدد غير الموجب: $\text{Log}_2(-2) \ , \ \text{Log}_3(-1) \ , \ \text{Log}_4(0)$ قيم غير معرفة

الاقتران	$f(x)=\log_5 x$	$g(x)=\log_5(x-1)$	$f(x)=3-\log_2(4-x)$	$g(x)=\log_3(x)-1$
مجاله	$x>0$	$x>1$	$x<4$	$x>0$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي ممّا يأتي:

31 $f(x)=\log_3(x-2)$ 32 $f(x)=5-2\log_7(x+1)$ 33 $f(x)=-3\log_4(-x)$

31	$f(x)=\log_3(x-2) \Rightarrow x-2>0 \Rightarrow x>2 \Rightarrow (2,\infty)$ مجال هذا الاقتران هو
32	$f(x)=5-2\log_7(x+1) \Rightarrow x+1>0 \Rightarrow x>-1 \Rightarrow (-1,\infty)$ مجال هذا الاقتران هو
33	$f(x)=-3\log_4(-x) \Rightarrow -x>0 \Rightarrow x<0 \Rightarrow (-\infty,0)$ مجال هذا الاقتران هو

34 أجد قيمة a التي تجعل منحنى الاقتران: $f(x)=\log_a x$ يمرُّ بالنقطة $(32,5)$.

35 أجد قيمة c التي تجعل منحنى الاقتران: $f(x)=\log_c x$ يمرُّ بالنقطة $(-4,\frac{1}{4})$.

34	$f(32)=\log_a 32 \Rightarrow 5=\log_a 32 \Rightarrow a^5=32 \Rightarrow a^5=(2)^5 \Rightarrow a=2$
35	$f\left(\frac{1}{81}\right)=\log_c \frac{1}{81} \Rightarrow -4=\log_c \frac{1}{81} \Rightarrow c^{-4}=\frac{1}{81} \Rightarrow \frac{1}{c^4}=\frac{1}{81}$ $c^4=81 \rightarrow c=\pm\sqrt[4]{81} \rightarrow c=\pm 3$ $\quad c=3 \Leftarrow$ أساس اللوغاريتم لا يكون سالبًا

إعلانات: يُمثِّل الاقتران: $P(a)=10+20\log_5(a+1)$ مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من مُنتَج جديد، حيث a المبلغ (بمئات الدنانير) الذي تُنفِقه الشركة على إعلانات المُنتَج.

وتعني القيمة: $P(1)\approx 19$ أنَّ إنفاق 100 JD على الإعلانات يُحقِّق إيرادات قيمتها 19000 JD من بيع المُنتَج:

36 أجد $P(4)$، و$P(24)$، و$P(124)$. 37 أُفسِّر معنى القِيَم التي أوجدْتُها في الفرع السابق.

36	$P(a)=10+20\log_5(a+1)$ $P(4)=10+20\log_5(4+1)=10+20\log_5 5=10+20(1)=30$ $P(24)=10+20\log_5(24+1)=10+20\log_5 25=10+20(2)=50$ $P(124)=10+20\log_5(124+1)=10+20\log_5 125=10+20(3)=70$
37	القيمة $P(4)=30$ تعني أن إنفاق 400 JD على الإعلانات يحقق إيرادًا قيمته 30000 JD من بيع المنتج القيمة $P(24)=50$ تعني أن إنفاق 2400 JD على الإعلانات يحقق إيرادًا قيمته 50000 JD من بيع المنتج القيمة $P(124)=70$ تعني أن إنفاق 12400 JD على الإعلانات يحقق إيرادًا قيمته 70000 JD من بيع المنتج

الملخص

*** إذا كان $y=f(x)=Log_2(x-1)-4$ ، وأردنا أن نجد

1) المجال : نضع ما بداخل اللوغاريتم أكبر من صفر ونحل المتباينة الناتجة : $x-1>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow x\in(0,\infty)$

2) المقطع من (x) نضع (y = 0) ونحل المعادلة ، فينتج أن

$$Log_2(x-1)-4=0 \Rightarrow Log_2(x-1)=4 \Rightarrow x-1=2^4 \Rightarrow x=17$$

3) المقطع من (y) نضع (x = 0) فينتج أن : قيمة غير معرفة لذلك لا يقطع المحور (y)

$$y=Log_2(0-1)-4=\boxed{Log_2(-1)}-4$$

4) خط التقارب الرأسي: نساوي ما بداخل اللوغاريتم بالصفر ونحل المعادلة الناتجة : $x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

ملاحظة : في الاقتران ($f(x)=Log(x+a)+c$):إذا كانت الإضافة أو الطرح داخل اللوغاريتم (+a) فإن ذلك يعني الإزاحة يمين (-) أو يسار(+)

ولكن إذا كانت الإضافة أو الطرح على كامل الاقتران (+c) فإنه يتم إزاحة المنحنى إلى الأعلى(+) أو الأسفل (-)

	الاقـــــتران	المجـال	المقطع من x	المقطع مـن y	خط التقارب الرأسي
1)	$f(x) = Log_2(x+4)$	$x > -4$	$x = -3$	$y = 2$	$x = -4$
2)	$f(x) = Log(2x-6)$	$x > 3$	$x = 3.5$	$---$	x = 3
3)	$f(x) = Log_3(x-1)-2$	$x > 1$	x=10	$---$	x = 1
4)	$f(x) = Log_4(x+2)+1$	$x > -2$	$x = -1.75$	$y = 1.5$	$x = -2$
5)	$f(x) = Log_5(8-2x)$	$x < 4$	x=3.5	$y = Log_5 8$	x = 4
6)	$f(x) = Log_3(x+9)$				
7)	$f(x) = Log(3x-12)$				
8)	$f(x) = Log_{\frac{1}{2}}(4-2x)-8$				

أسئلة الوزارة / الدرس الثالث

5) قيمة $\log_3 9^5$ هي:

a) 9 b) 7 c) 5 d) 10

6) مجال الاقتران $f(x) = \log_7(x-3)$ هو:

a) $(-3, \infty)$ b) $(3, \infty)$

c) $(-\infty, -3)$ d) $(-\infty, 3)$

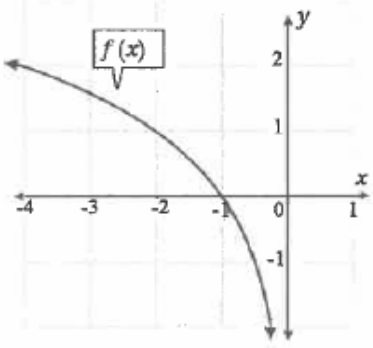
7) يُمثل الشكل الآتي التمثيل البياني لمنحنى الاقتران $f(x)$. أيّ الآتية يُمثل قاعدة الاقتران $f(x)$ ؟

a) $f(x) = -\log_2 x$

b) $f(x) = \log_2(-x)$

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$



الدرس 4 قوانين اللوغاريتمات Laws of Logarithms

$\log_8 1 = 0$ | $\log_3 1 = 0$ | $\log_{\frac{2}{3}} 1 = 0$

$Log_4 0 = ($ غير معرف $)$

$b\ ,\ x\ ,\ y \in R^+,\ p \in R\ ,\ b \neq 1 \Rightarrow$

1) $\log_b (xy) = \log_b (x) + \log_b (y)$

2) $\log_b (\frac{x}{y}) = \log_b (x) - \log_b (y)$

3) $\log_b (x)^p = p \times \log_b (x)$

$Log_4 x^3 = 3Log_4 x$

$Log_9 3x^5 \neq 5Log_9 3x$

$Log_3 4x^2 = Log_3 4 + Log_3 x^2$
$= Log_3 4 + 2Log_3 x$

أمثلة

1) $Log_3(15) = Log_3(3\times 5) = Log_3 3 + Log_3 5 = 1 + Log_3 5$

$Log_4 3 \times Log_4 5 \neq Log_4(3\times 5)$ | $Log_4 3 \times Log_4 5 \neq Log_4 3 + Log_4 5$

2) $Log_5(\frac{4}{7}) = Log_5 4 - Log_5 7 \ldots$ $Log_4 3 \div Log_4 5 \neq Log_4(\frac{3}{5})$ | $Log_7(\frac{2}{9}) \neq \frac{Log_7 2}{Log_7 9}$

3) $Log_4 16 = Log_4 (4)^2 = 2Log_4 4 = 2$

4) $Log_5 \sqrt{5} = Log_5 (5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} Log_5 5 = \frac{1}{2}$

$\log_4 4 = 1$

5) $\log_3 4 = 1.26\ ,\ \log_3 6 = 1.63 \Rightarrow \log_3 24 = ?$

$\log_3 24 = L\ og_3 (4\times 6) = L\ og_3 4 + L\ og_3 6$

$= 1.26 + 1.63 = 2.89$

$\log_7 7 = 1$

6) $\log_4 5 = 1.16\ ,\ \Rightarrow L\ og_4 25 = ?$

$\log_4 25 = L\ og_4 (5\times 5) = L\ og_4 5^2 = (2) \log_4 5$

$= (2)(1.16) = 2.32$

$\log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = 1$

تمارين

$Log_5 2 = 0.43\ ,\ Log_5 9 = 1.37\ \Rightarrow$ 1) $Log_5 \frac{8}{81}$ 2) $Log_5 \sqrt[3]{18}$ 3) $Log_5 \frac{4}{9}$

$$Log_b 3 = 0.9 \ , \ Log_b 4 = 1.4 \ , \ Log_b 0.5 = -0.7 \Rightarrow$$

1) $Log_b (8) =$

2) $Log_b (6) =$

3) $Log_b \sqrt{3} =$

4) $Log_b (\frac{3}{2}) =$

5) $Log_b (\frac{2}{3}) =$

6) $Log_b (\frac{1}{4}) =$

أتحقّق من فهمي إذا كان: $\log_b 7 \approx 1.21$، وكان: $\log_b 2 \approx 0.43$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $\log_b 14$ b) $\log_b \frac{2}{7}$ c) $\log_b 32$ d) $\log_b \frac{1}{49}$

a	$\log_b 14 = \log_b (2 \times 7) \approx 1.64$	b	$\log_b \frac{2}{7} = \log_b 2 - \log_b 7 \approx -0.78$
c	$\log_b 32 = \log_b 2^5 \approx 2.15$	d	$\log_b \frac{1}{49} = \log_b 1 - \log_b 49 \approx -2.42$

أتدرّب وأحُلّ المسائل 40 إذا كان: $\log_a 6 \approx 0.778$، وكان: $\log_a 5 \approx 0.699$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) $\log_a \frac{5}{6}$ 2) $\log_a 30$ 3) $\frac{\log_a 5}{\log_a 6}$

4) $\log_a \frac{1}{6}$ 5) $\log_a 900$ 6) $\log_a \frac{18}{15}$

7) $\log_a (6a^2)$ 8) $\log_a \sqrt[4]{25}$ 9) $(\log_a 5)(\log_a 6)$

1	−0.079	4	−0.778	7	2.778
2	1.477	5	2.954	8	0.350
3	0.90	6	0.079	9	0.544

الأستاذ عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

أخطاء شائعة

1) مجموع لوغاريتمي عددين للأساس نفسه = لوغاريتم (حاصل ضرب العددين)...ولكن العكس غير صحيح

أي أن : لوغاريتم (المجموع) لا يساوي (حاصل ضرب) اللوغاريتمين $Log_3(5+6)\neq Log_3 5\times Log_3 6$

كذلك : لوغاريتم (المجموع) لا يساوي (مجموع) اللوغاريتمين $Log_3(5+6)\neq Log_3 5+Log_3 6$

$a\ ,x\ ,y\in R^+,\ a\neq 1\Rightarrow$	$Log_a(x+y)\neq Log_a x+Log_a y$
$Log_a x+Log_a y=Log_a(x\times y)$	$Log_a(x+y)\neq Log_a x\times Log_a y$

2) طرح لوغاريتمي عددين للأساس نفسه = لوغاريتم (الأول ÷ الثاني)...أيضاً العكس غير صحيح

أي أن : لوغاريتم (الطرح) لا يساوي (لوغاريتم الأول ÷ لوغاريتم الثاني) $Log_4(7-2)\neq \frac{Log_4 7}{Log_4 2}$

كذلك :
لوغاريتم (الطرح) لا يساوي لوغاريتم(الأول) – لوغاريتم(الثاني) $Log_4(7-2)\neq Log_4 7-Log_4 2$

$a\ ,\ x\ ,\ y\in R^+,\ a\neq 1\Rightarrow$	$x>y$	$Log_a(x-y)\neq \frac{Log_a x}{Log_a y}$
$Log_a x-Log_a y=Log_a\frac{x}{y}$		$Log_a(x-y)\neq Log_a x-Log_a y$

3) إذا كان اللوغاريتم مضروباً في عدد ، يجب أن نحوله إلى قوة قبل إجراء أي عملية

$$2Log_3 4+Log_3 5=Log_3 4^2+Log_3 5=Log_3(16\times 5)$$

$$2Log_3 4+Log_3 5\neq 2Log_3(4\times 5)$$

4)عند وجود لوغاريتم لحاصل ضرب مقدارين أحدهما مرفوعا لقوة (دون الآخر) نحول إلى جمع لوغاريتمين ثم القوة

$$Log_4(7x^3)\neq 3Log_4 7x$$

$$Log_4(7x^3)=Log_4 7+Log_4 x^3=Log_4 7+3Log_4 x$$

OR $$Log_4(7x^3)=Log_4(\sqrt[3]{7})^3x^3=Log_4(\sqrt[3]{7}x)^3=3Log_4\sqrt[3]{7}x=3Log_4\sqrt[3]{7}+3Log_4 x$$

2) كتابة اللوغاريتمات بالصورة المُطوَّلة

نحتاجُ أحياناً إلى إعادة كتابة عبارات لوغاريتمية بصورة مطوّلة ، فنستخدم قوانين اللوغاريتمات لعمل ذلك

$$1) Log_3(5x^3\sqrt{y}) = Log_3(5) + Log_3(x^3) + Log_3(\sqrt{y})$$

$$= Log_3 5 + 3Log_3 x + \frac{1}{2}Log_3 y$$

أتحقَّق من فهمي أكتب كل مقـــدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُطوَّلة،

علمًا بـــأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

a) $\log_2 a^2 b^9$ b) $\log_5 \frac{(x+1)^3}{8}$ c) $\log_3 \frac{x^7 y^3}{z^5}$ d) $\log_b \sqrt[3]{\frac{x^7 b^2}{y^5}}$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُطوَّلة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

10) $\log_a x^2$ 11) $\log_a \left(\frac{a}{bc}\right)$ 12) $\log_a (\sqrt{x}\sqrt{y})$

13) $\log_a \left(\frac{\sqrt{z}}{y}\right)$ 14) $\log_a \frac{1}{x^2 y^2}$ 15) $\log_a \sqrt[5]{32x^5}$

16) $\log_a \frac{(x^2 y^3)^2}{(x^2 y^3)^3}$ 17) $\log_a (x+y-z)^7, x+y>z$ 18) $\log_a \sqrt{\frac{x^{12} y}{y^3 z^4}}$

3) كتابة اللوغاريتمات بالصورة المُختصَرة

نحتاجُ أحياناً إلى كتابة المقدار اللوغاريتمي على شكل لوغاريتم واحد ، فنستخدم قوانين اللوغاريتمات أيضاً

$$Log_a x^5 - 2Log_a xy = Log_a x^5 - Log_a (xy)^2$$

$$= Log_a \frac{x^5}{(xy)^2} = Log_a \frac{x^5}{x^2 y^2} = Log_a \frac{x^3}{y^2}$$

أتحقَّق من فهمي

أكتب كل مقـــدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُختصَرة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل

أعدادًا حقيقيةً موجبةً: a) $\log_5 a + 3\log_5 b$ b) $5\log_b x + \frac{1}{2}\log_b y - 9\log_b z$

أتحقّق من فهمي

يُمثِّل الاقتران: $M(t) = 92 - 28\log_{10}(t+1)$ النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكَّرها طالب من مادَّة مُعيَّنة بعد t شهرًا من إنهائه دراستها. أجد النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكَّرها هذا الطالب بعد 29 شهرًا من إنهائه دراسة المادَّة، علمًا بأنَّ $\log_{10} 3 \approx 0.4771$، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المُختصَرة، علمًا بأنَّ المُتغيِّرات جميعها تُمثِّل أعدادًا حقيقيةً موجبةً:

19 $\log_a x + \log_a y$

20 $\log_b (x+y) - \log_b (x-y),\ x>y$

21 $\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x}$

22 $\log_a (x^2-4) - \log_a (x+2),\ x>2$

23 $2\log_b x - 3\log_b y + \frac{1}{3}\log_b z$

24 $\log_b 1 + 2\log_b b$

أسئلة الوزارة 2023

8) أيّ المقادير الآتية يكافئ المقدار $3\log a + \log b - \log c$ ، علمًا بأنّ المتغيرات جميعها تمثل أعدادًا حقيقية موجبة؟

a) $\log\left(\frac{a^3 b}{c}\right)$ b) $\log(a^3 + b - c)$ c) $\log\left(\frac{ab}{c}\right)^3$ d) $\log\left(\frac{3ab}{c}\right)$

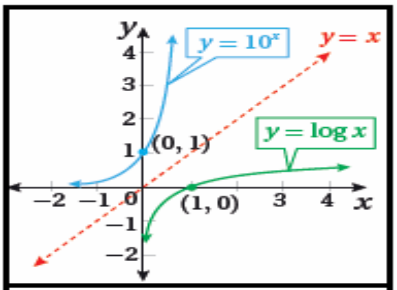
* إذا كان $\log_a 7 \approx 1.21$ ، $\log_a 3 \approx 0.68$ ، فأجب عن الفقرتين 9 و 10 الآتيتين:

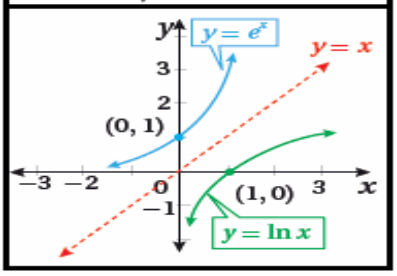
9) قيمة $\log_a 21$ هي:

a) 0.53 b) 1.89 c) 3.63 d) 4.76

10) قيمة $\log_a \left(\frac{a}{7}\right)$ هي:

a) 0.21 b) −0.21 c) 0.83 d) −0.83





الدرس 5
المعادلات الأُسِّية
Exponential Equations

1) اللوغاريتم الاعتيادي، واللوغاريتم الطبيعي :

يُطلَق على اللوغاريتم للأساس 10 أو (Log_{10}) اسم اللوغاريتم الاعتيادي

ويُكتَب عادةً من دون أساس. وهو الاقترانَ العكسي للاقتران الأُسِّي: $y = 10^x$

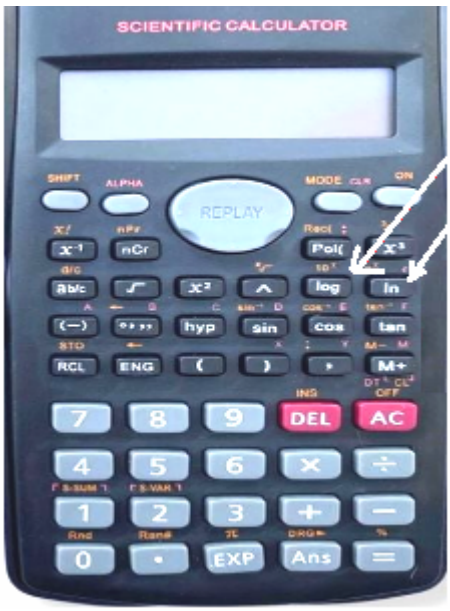
$$y = \log_{10} x \ , x > 0 \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad 10^y = x$$

أمّا اللوغاريتم للأساس e أو (Log_e) فيُسمّى اللوغاريتم الطبيعي (natural logarithm)،ورمزه (Ln) .

وهو الاقترانَ العكسي للاقتران الأُسِّي الطبيعي $y = e^x$

$$y = \ln x \ , x > 0 \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad e^y = x$$

تنطبق خصائص اللوغاريتمات على اللوغاريتم الاعتيادي واللوغاريتم الطبيعي، ويُمكِن الاستفادة منها في إيجاد قيمة كلٍّ منهما حيث تحوي الآلة الحاسبة زِرًّا خاصًّا باللوغاريتم الاعتيادي(log) ، وزِرًّا خاصًّا باللوغاريتم الطبيعي هو(ln) ويُمكِن من خلالهما إيجاد قيمة اللوغاريتم لأيِّ عدد حقيقي موجب.



1 $\log 2.7$ ⇒ log 2.7 = 0.4313637642

2 $\log(1.3 \times 10^5)$ ⇒ log (1.3 × 10 x^n 5) = 5.113943352

3 $\ln 17$ ⇒ ln 17 = 2.833213344

ويمكن حل فرع (2) باستعمال قوانين اللوغاريتمات أيضا

$$Log(1.3 \times 10^5) = Log(1.3) + Log(10^5)$$
$$= Log(1.3) + 5Log(10) = 0.1139 + 5(1) = 5.1139$$

أتحقَّق من فهمي 43

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

a) $\log 13$ b) $\log(3.1 \times 10^4)$ c) $\ln 0.25$

a	$\log 13 \approx 1.1$
b	$\log(3.1 \times 10^4) \approx 4.5$
c	$\ln 0.25 \approx -1.4$

2) تغيير الأساس :

معظم الآلات الحاسبة تحتوي على زرَّين للوغاريتمات، هما : Log و Ln .
ولإيجاد قيمة لوغاريتم أساسه مختَلف ($Log_4 7$) ، نستعمل القاعدة الآتية :

$$Log_b a = \frac{Log(a)}{Log(b)} = \frac{Ln(a)}{Ln(b)} = \frac{Log_c(a)}{Log_c(b)}$$

$$a,b,c \in R^+,\ a \neq 1,\ b \neq 1,\ c \neq 1$$

باختصار :
نختار أي عدد موجب (غير الواحد)
ونجعله أساساً للعددين المعطيين ،
الأساس القديم في المقام والآخر في البسط

$$Log_4(7) = \frac{Log_5(7)}{Log_5(4)} \quad , \quad Log_3(8) = \frac{Log_6(8)}{Log_6(3)} \quad , \quad Log_9(1.2) = \frac{Ln(1.2)}{Ln(9)} = \frac{Log(1.2)}{Log(9)}$$

$$1)\ Log_4 8 = \frac{Log\,8}{Log\,3} = \frac{0.903}{0.477} = 1.89$$

$$\boxed{OR} \quad = \frac{Ln\,8}{Ln\,3} = \frac{2.079}{1.098} = 1.89$$

$$2)\ Log_2 1.3 = \frac{Log\,1.3}{Log\,2} = \frac{0.1139}{0.301} = 0.3785$$

$$\boxed{OR}\ Log_2 1.3 = Log_2 \frac{13}{10} = Log_2 13 - Log_2 10 = \frac{Ln\,13}{Ln\,2} - \frac{Log\,10}{Log\,2}$$

$$= \frac{2.5649}{0.6931} - \frac{1}{0.301} = 3.7006 - 3.322 = 0.3783$$

$$3)\ Log_{\frac{2}{5}} 4 = \frac{Ln\,4}{Ln\,0.4} = \frac{1.39}{-0.92} = -1.5$$

$$\boxed{OR}\ Log_{\frac{2}{5}} 4 = \frac{Ln\,4}{Ln\,\frac{2}{5}} = \frac{Ln\,4}{Ln\,2 - Ln\,5} = \frac{1.39}{0.69 - 1.61} = \frac{1.39}{-0.92} = -1.5$$

$$4)\ Log_4 5 = 1.16 \quad , \quad Log_4 6 = 1.29 \quad \Rightarrow Log_5 6 = ?$$

$$Log_5 6 = \frac{Log_4 6}{Log_4 5} = \frac{1.29}{1.16} = 1.11$$

$$5)\ Log_5 8 = 1.29 \Rightarrow (Log_3 8 \times Log_5 3) = ?$$

$$Log_3 8 \times Log_5 3 = \frac{Log_5 8}{Log_5 3} \times Log_5 3 = Log_5 8 = 1.29$$

أتحقّق من فهمي 44 أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إنْ لزم):

a) $\log_3 51$ b) $\log_{\frac{1}{2}} 13$

a	$\log_3 51 = \frac{\log 51}{\log 3} \approx 3.58$
b	$\log_{\frac{1}{2}} 13 = \frac{\log 13}{\log \frac{1}{2}} \approx -3.70$

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة:

1. $\log 19$
2. $\log (2.5 \times 10^{-3})$
3. $\ln 3.1$
4. $\log_2 10$
5. $\log_3 e^2$
6. $\ln 5$

1	$\log 19 \approx 1.3$
2	$\log(2.5 \times 10^{-3}) \approx -2.6$
3	$\ln 3.1 \approx 1.1$
4	$\log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} \approx 3.3$
5	$\log_3 e^2 = \frac{\ln e^2}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3} \approx 1.8$
6	$\ln 5 \approx 1.6$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إنْ لزم):

7. $\log_3 33$
8. $\log_{\frac{1}{3}} 17$
9. $\log_6 5$
10. $\log_7 \frac{1}{7}$
11. $\log 1000$
12. $\log_3 15$

7	$\log_3 33 = \frac{\log 33}{\log 3} \approx 3.18$
8	$\log_{\frac{1}{3}} 17 = \frac{\log 17}{\log \frac{1}{3}} \approx -2.58$
9	$\log_6 5 = \frac{\log 5}{\log 6} \approx 0.90$
10	$\log_7 \frac{1}{7} = \log_7 1 - \log_7 7 = 0 - 1 = -1$
11	$\log 1000 = 3$
12	$\log_3 15 = \frac{\log 15}{\log 3} \approx 2.46$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

الأستاذ عبدالقادر الحسنات

المعادلات الأُسِّية

المعادلة الأُسِّية : هي معادلة تتضمَّن قوى أُسسها مُتغيِّرات ، ويتطلَّب حَلُّها كتابة طرفي المعادلة في صورة قوَّتين للأساس نفسه، ثم المقارنة بين أُسَّي الطرفين

$$a^x = a^y \Rightarrow x = y \quad (a > 0 \ , \ a \neq 1)$$

$$2^{3x+1} = 8 \Rightarrow 2^{3x+1} = 2^3 \Rightarrow 3x + 1 = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

ولكن ماذا لو لم يكن هناك إمكانية لكتابة طرفي المعادلة في صورة قوَّتين للأساس نفسه ، مثلاً : $4^{3x-7} = 25$

في هذه الحالة نستعمل خاصية المساواة اللوغاريتمية

$$x = y \Leftrightarrow Log_b x = Log_b y \quad (b \ , x \ , y \in R^+ , \ b \neq 1)$$

1) $Ln(4^{2x}) = Ln(5) \Rightarrow (2x)Ln(4) = Ln(5) \Rightarrow x = \frac{Ln(5)}{(2)Ln(4)} = 0.58$

2) $2^x = 6 \Rightarrow Log\, 2^x = Log\, 6 \Rightarrow x\ Log\, 2 = Log\, 6$

$$\Rightarrow x = \frac{Log\, 6}{Log\, 2} = \frac{0.778}{0.301} = 2.58$$

$$OR : Ln\, 2^x = Ln\, 6 \Rightarrow x = \frac{Ln\, 6}{Ln\, 2} = \frac{1.79}{0.69} = 2.58$$

أتحقَّق من فهمي 48 أحُلُّ المعادلات الأُسِّية الآتية، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية:

a) $7^x = 9$ b) $2e^{5x} = 64$ c) $7^{2x+1} = 2^{x-4}$

a) $7^x = 9$

$\log 7^x = \log 9$

$x \log 7 = \log 9$

$x = \frac{\log 9}{\log 7} \approx 1.1292$

b) $2e^{5x} = 64$

$e^{5x} = 32$

$\ln e^{5x} = \ln 32$

$5x = \ln 32$

$x = \frac{1}{5}\ln 32 \approx 0.6931$

c) $7^{2x+1} = 2^{x-4}$

$\log 7^{2x+1} = \log 2^{x-4}$

$(2x+1)\log 7 = (x-4)\log 2$

$2x \log 7 + \log 7 = x \log 2 - 4 \log 2$

$2x \log 7 - x \log 2 = -\log 7 - 4 \log 2$

$x(2 \log 7 - \log 2) = -\log 7 - 4 \log 2$

$x = \frac{-\log 7 - 4 \log 2}{2 \log 7 - \log 2} \approx -1.4751$

تمارين

1) $8^x = 7$

2) $e^{2x-1} = 8$

3) $6^{2x-3} = 4^{x+2}$

4) $5^{x-2} = 1$

*** أحياناً نضطر إلى تحويل المعادلة الأسية إلى معادلة غير خطية بفرض u :

1) $4^x - 2^x = 20 \Rightarrow 2^{2x} - 2^x - 20 = 0 \;:::\; u = 2^x$

$\Rightarrow u^2 - u - 20 = 0 \Rightarrow (u-5)(u+4) = 0$

$\Rightarrow u = 5 \;,\; u = -4 \Rightarrow \boxed{2^x = 5} \;,\; \boxed{2^x = -4 \quad (\text{تهمل})}$

$\Rightarrow 2^x = 5 \Rightarrow Ln\,2^x = Ln\,5 \Rightarrow x = \dfrac{Ln\,5}{Ln\,2} = \dfrac{1.6}{0.69} \approx 2.3$

2) $25^x + 4 \times 5^x - 12 = 0 \Rightarrow 5^{2x} + 4 \times 5^x - 12 = 0 \;:::\; u = 5^x$

$\Rightarrow u^2 + 4u - 12 = 0 \Rightarrow (u-2)(u+6) = 0$

$\Rightarrow u = 2 \;,\; u = -6 \Rightarrow \boxed{5^x = 2} \;,\; \boxed{5^x = -6 \quad (\text{تهمل})}$

$\Rightarrow 5^x = 2 \Rightarrow Log_5 5^x = Log_5 2$

$\Rightarrow x\,Log_5 5 = Log_5 2 \Rightarrow x(1) = \dfrac{Ln\,2}{Ln\,5} = \dfrac{0.69}{1.6} \approx 0.43$

3) $6^{2x} - 11 \times 6^x + 30 = 0 \Rightarrow (6^x)^2 - 11(6^x) + 30 = 0 \;:::\; u = 6^x$

$\Rightarrow u^2 - 11u + 30 = 0 \Rightarrow (u-5)(u-6) = 0$

$\Rightarrow u = 5 \;,\; u = 6 \Rightarrow \boxed{6^x = 5} \;,\; \boxed{6^x = 6}$

$\Rightarrow 6^x = 5 \Rightarrow Ln\,6^x = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6^x = 6$

$\Rightarrow x = \dfrac{Ln\,5}{Ln\,6} = 0.89 \ldots\ldots\ldots\ldots x = 1$

4) $9^x - 10 \times 3^x = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 10(3^x) = 0 \;:::\; u = 3^x$

$\Rightarrow u^2 - 10u = 0 \Rightarrow u(u-10) = 0$

$\Rightarrow u = 10 \;,\; u = 0 \Rightarrow \boxed{3^x = 10} \;,\; \boxed{3^x = 0 \quad (\text{تهمل})}$

$\Rightarrow 3^x = 10 \Rightarrow Log\,3^x = 10$

$\Rightarrow x = \dfrac{Log\,10}{Log\,3} = \dfrac{1}{0.48} \Rightarrow x = 2.1$

5) $9^x - 3^x - 2 = 0$

$u = 3^x \Rightarrow u^2 - u - 2 = 0$

$(u-2)(u+1) = 0 \Rightarrow u = 2 \;,\; u = -1$

$u = 2 \Rightarrow 3^x = 2 \Rightarrow Ln\,3^x = Ln\,2 \Rightarrow x = \dfrac{Ln\,2}{Ln\,3} \approx 0.6$

$u = -1 \Rightarrow 3^x = -1 (\text{مستحيل}) \Rightarrow x \in \phi$

أتحقّق من فهمي 48 أحُلُّ المعادلات الأُسّية الآتية، d) $4^x + 2^x - 12 = 0$

D $4^x + 2^x - 12 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x - 12 = 0 \Rightarrow u^2 + u - 12 = 0$

$(u+4)(u-3) = 0 \Rightarrow u = -4$ أو $u = 3 \Rightarrow 2^x = -4$ أو $2^x = 3$

المعادلة $2^x = -4$ ليس لها حل لأن $2^x > 0$ لكل قيم المتغير x

$2^x = 3 \quad \rightarrow x = \log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.5850$

تمارين

1) $9^x - 28 \times 3^x + 27 = 0$..... $x = 0 \ , \ x = 3$

2) $5^x + 25 \times 5^{-x} = 10$..... $x = 1$

3) $4^x - 9 \times 2^x = 36$..... $x = 3.6$

4) $8^x - 5 \times 2^x = 0$..... $x = 1.16$

4) تطبيقات حياتية وعلمية. :

أتحقّق من فهمي 48 قُدِّر عدد سكّان العالَم بنحو 6.5 مليار نسمة عام 2006م.

ويُمثِّل الاقتران: $P(t) = 6.5(1.014)^t$ عدد سكّان العالَم (بالمليار نسمة)

بعد t عامًا منذ عام 2006م. بعد كم سنةً من عام 2006م سيبلغ عدد سكّان العالَم 9 مليار نسمة؟

أتحقق من فهمي مثال 4 صفحة 48

$9 = 6.5(1.014)^t$

$\frac{9}{6.5} = (1.014)^t \Rightarrow \ln\frac{9}{6.5} = \ln(1.014)^t \Rightarrow \ln\frac{9}{6.5} = t \ln 1.014 \Rightarrow t = \frac{\ln\frac{9}{6.5}}{\ln 1.014} \approx 23$

أسئلة الوزارة أدبي 2023

11) إذا كان $\log 12 \approx \frac{11}{10}$ ، $\log 5 \approx \frac{7}{10}$ ، فإنّ قيمة $\log_5 12$ تقريبًا هي:
(a) $\frac{11}{7}$ b) $\frac{7}{11}$ c) $\frac{4}{10}$ d) $\frac{18}{10}$

12) حل المعادلة الأسية $4e^{-2x} = 24$ هو:
a) $-\ln 3$ b) $\ln 3$ (c) $-\frac{\ln 6}{2}$ d) $\frac{\ln 6}{2}$

13) حل المعادلة الأسية $2^x = 3$ هو:
(a) $\frac{\log 3}{\log 2}$ b) $\frac{\log 2}{\log 3}$ c) $\log\frac{3}{2}$ d) $\log\frac{2}{3}$

14) يُمثل الاقتران $N(t) = 50 + 10e^{0.2t}$ عدد ذباب الفاكهة بعد (t) ساعة من بدء دراسة عليها.
العدد الأصلي للذباب عند بدء الدراسة هو:
a) 70 b) 10 c) 50 (d) 60

a) يُمثل الاقتران $f(x) = 300(2)^{\frac{x}{3}}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة في تجربة مخبرية.
بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 1200 خلية ؟ (9 علامات)

وزارة أدبي 2023 تكميلي

15) حَل المعادلة الأسية $5^{2x} - 3(5^x) = 0$ هو:
a) $\frac{\ln 3}{\ln 5}$ b) $\frac{\ln 5}{\ln 3}$ c) $\ln\frac{5}{3}$ d) $\ln\frac{3}{5}$

أسئلة متوقعة للأدبي (مراجعة مكثفة) / الفصل الأول– وحدة الاقترانات الأسية واللوغاريتمية

السؤال الأول : ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

1) إذا كان $f(x)=(\frac{1}{3})^{x-1}$ ، فإن قيمة $f(-1)$ تساوي :

$a)\ 9 \qquad b)\ -9 \qquad c)\ \frac{1}{9} \qquad d)\ -\frac{1}{9}$

---

2) قيمة الاقتران $f(x)=(2)^{2x-3}$ عند x = 0 هي :

$a)\ -6 \qquad b)\ -\frac{1}{8} \qquad c)\ -8 \qquad d)\ \frac{1}{8}$

---

3) مدى الاقتران $f(x)=(3)^{x-2}+4$ هو :

$a)\ (2,\infty) \qquad b)\ (4,\infty) \qquad c)\ (-\infty,4) \qquad d)\ (-\infty,-4)$

---

4) مدى الاقتران $f(x)=5-(4)^{3-x}$ هو :

$a)\ (5,\infty) \qquad b)\ (3,\infty) \qquad c)\ (-\infty,5) \qquad d)\ (-\infty,-5)$

---

5) خط التقارب الأفقي للاقتران $f(x)=4(5)^{x+1}+2$ هو :

$a)\ y=1 \qquad b)\ y=-2 \qquad c)\ y=2 \qquad d)\ y=4$

---

6) المقطع X لمنحنى الاقتران $f(x)=2^{x-3}-8$ هو : $a)\ 8 \qquad b)\ 6 \qquad c)\ 3 \qquad d)\ \phi$

---

7) المقطع Y لمنحنى الاقتران $f(x)=3^{x+2}-1$ هو : $a)\ 8 \qquad b)\ 6 \qquad c)\ 2 \qquad d)\ \phi$

---

8) إذا كان $f(x)=2^{x+a}-3$ وكان $f(-1)=5$ ، فإن قيمة الثابت (a) تساوي :

$a)\ 8 \qquad b)\ -4 \qquad c)\ 4 \qquad d)\ 6$

---

9) الاقتران الأسي المتناقص هو :

$a)f(x)=3^{x+2} \qquad b)f(x)=4^{1-x} \qquad c)f(x)=(\frac{3}{2})^{x-1} \qquad d)f(x)=2(5)^{x-1}$

---

10) إذا كان الاقتران $P(t)=1000(0.2)^{t-1}$ يُمثِّل النسبة المئوية للمتعافين من مرض ما ، حيث تعافوا بعد (t) سنة من تلقي العلاج لأول مرة ، بعد كم سنة تصبح النسبة المئوية للمتعافين (8%) ؟

$a)\ 2 \qquad b)\ 8 \qquad c)\ 3 \qquad d)\ 4$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	d	b	c	c	b	a	c	b	d

11) تتزايد قيمة قطعة أرض بمعدل 7.5 % سنوياً ، إذا كانت قيمتها حالياً 12500 JD ، فإن قيمتها بعد 5 سنوات تساوي:

a) 14356 *b*) 17945.4 *c*) 6771.9 *d*) 8464.8

---

12) يتناقص عدد نوع من الطيور في إحدى المحميات الطبيعة بنسبة (10 %) ، جد عدد الطيور بعد (3) سنوات ، علمًا بأنّ عددها الآن يساوي 12000 طائر .

a) 8748 *b*) 1200 *c*) 15972 *d*) 120

---

13) استثمر رجل مبلغ 5000 JD في شركة ، بنسبة ربح مُركَّب تبلغ 1.23 % ، وتضاف كل (4) أشهر ، جد جُمْلة المبلغ بعد (6) سنوات.

a) 5382.1 *b*) 4643.6 *c*) 5015.4 *d*) 5124.3

---

14) أودع رجل مبلغ (2000 JD) في بنك بمعدل فائدة قدرها (5 %) ،واحتسب البنك الفائدة باستمرار جد جملة المبلغ بعد 10 سنوات

a) 296826.3 *b*) 4000 *c*) 3297.4 *d*) 6594.8

---

15) أودع رجل مبلغ(5000 JD) في بنك بمعدل فائدة قدرها (3 %) ، واحتسب البنك الفائدة باستمرار ، إذا بلغت جملة المبلغ بعد (t) سنة (10000)، جد عدد السنين

a) 5 *b*) 10 *c*) 23 *d*) 12

---

16) $Log_{\frac{1}{3}} 1$ يساوي : *a*) 3 *b*) 1 *c*) 0 *d*) غـير معـرف

---

17) $Log_2 0$ يساوي : *a*) 2 *b*) 1 *c*) 0 *d*) غـير معـرف

---

18) إذا كانت $3^2 = 9$ ، فإن الصورة اللوغاريتمية لهذه المعادلة الأسية هي :

a) $Log_2 9 = 3$ *b*) $Log_3 9 = 2$ *c*) $Log_3 2 = 9$ *d*) $Log_9 3 = 2$

---

19) قيمة $\log_9 27$ هي : *a*) 3 *b*) 9 *c*) $\frac{3}{2}$ *d*) $\frac{1}{3}$

---

20) إذا كانت $Log_b \frac{1}{32} = -5$ ، فإن قيمة الثابت (b) تساوي :

a) 2 *b*) -4 *c*) 4 *d*) 5

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b	*a*	*a*	*d*	*c*	*c*	*d*	*b*	*c*	*a*

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

21) إذا كان $Log_7 3 = 0.56$ ، فإن قيمة $Log_3 7$ تساوي :

$a) -0.56$ $b) -0.65$ $c) 1.78$ $d) 3.56$

---

22) إذا كانت $4\,e^{2x} = 6$ ، فإن قيمة (x) تساوي :

$a) 0.2$ $b) -0.2$ $c) 2$ $d) 0.4$

---

23) قيمة $Log_2 8^5$ هي :

$a) 5$ $b) 15$ $c) 3$ $d) 20$

---

24) قيمة $6^{Log_6 5}$ هي :

$a) 6$ $b) 5$ $c) \frac{5}{6}$ $d) 6^4$

---

25) قيمة $10^{Log\,0.1}$ هي :

$a) 0.1$ $b) 0.01$ $c) 10$ $d) 100$

---

26) قيمة $3^{(Log_3 9+2)}$ هي :

$a) 9$ $b) 11$ $c) 81$ $d) 18$

---

27) مجال الاقتران $f(x) = Log_2(x-5)+4$ هو :

$a) (5,\infty)$ $b) (2,5)$ $c) (-\infty,5)$ $d) (2,\infty)$

---

28) مجال الاقتران $f(x) = 3 - Log_5(x+1)$ هو :

$a) (3,\infty)$ $b) (-1,\infty)$ $c) (-1,3)$ $d) (-\infty,1)$

---

29) خط التقارب الرأسي للاقتران $f(x) = 2 + Log_5(x-3)$ هو :

$a) x = 2$ $b) x = -2$ $c) x = 3$ $d) x = 5$

---

30) المقطع X لمنحنى الاقتران $f(x) = Log_5(x+3)$ هو :

$a) 2$ $b) -3$ $c) \phi$ $d) -2$

---

31) المقطع Y لمنحنى الاقتران $f(x) = Log_2(x+8)$ هو :

$a) -7$ $b) -8$ $c) \phi$ $d) 3$

---

32) المقطع Y لمنحنى الاقتران $f(x) = Log_4(x-8)$ هو :

$a) 8$ $b) 4$ $c) \phi$ $d) 2$

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
c	a	b	b	a	c	a	b	c	d	d	c

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

*** إذا كانت $\log_2 7 = 2.8$ ، $\log_2 5 = 2.3$ ، $\log_2 3 = 1.58$

فأجب عن الأسئلة (33 – 45) مستعملا المعلومات المعطاة فقط ، ودون آلة حاسبة :

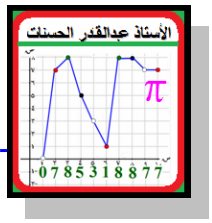
33) $\log_2 35 =$ a) 0.5 b) 5.1 c) 4.11 d) 6.44

34) $Log_2 45 =$ a) 5.46 b) 3.88 c) 8.88 d) 9.936

35) $\log_2 2.5 =$ a) 1.25 b) 1.3 c) 4.6 d) 1.5

36) $Log_2 \frac{3}{7} =$ a) 4.424 b) 0.56 c) 1.2 d) -1.2

37) $\frac{\log_2 3}{\log_2 7} =$ a) 0.43 b) -1.22 c) 1.8 d) 0.56



38) $\log_2 14 =$ a) 4.16 b) 3.8 c) 0.357 d) 1.4

39) $Log_2 \sqrt[5]{9} =$ a) 3.95 b) 0.95 c) 0.63 d) 7.9

40) $\log_2 \frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt{14}} =$ a) 3.19 b) -0.2 c) -0.61 d) 0.69

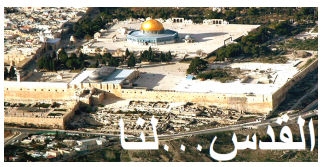
41) $\log_2 \frac{25}{\sqrt{7}} =$ a) 3.2 b) 2.3 c) 4.4 d) 1.8

42) $(\log_2 5)^2 =$ a) 4.6 b) 4.3 c) 5.29 d) 1.25

43) $Log_2 (5)^2 =$ a) 4.6 b) 4.3 c) 5.29 d) 1.25

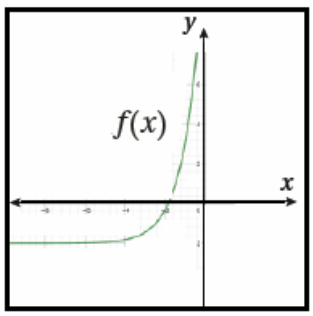
44) $Log_5 7 =$ a) $\frac{2.3}{2.8}$ b) $\frac{2.3}{1.58}$ c) $\frac{28}{15.8}$ d) $\frac{28}{23}$

45) $Log_2 (\frac{1}{3}) =$ a) $\frac{1}{1.58}$ b) $-\frac{1}{1.58}$ c) -1.58 d) 0.58

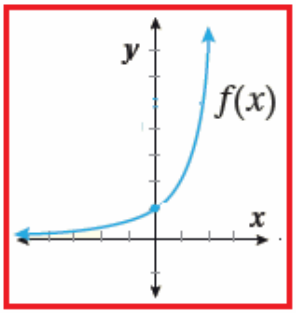


33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
b	a	b	d	d	b	c	c	a	c	a	d	c

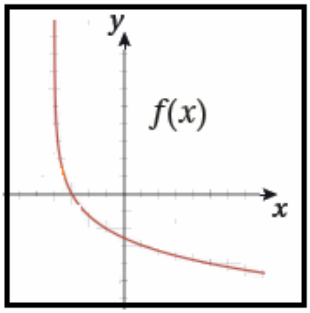
46) الاقتران الذي منحناه متناقص فيما ياتي هو :



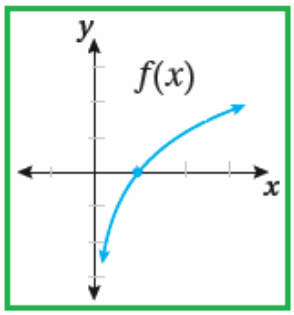
(a)



(b)



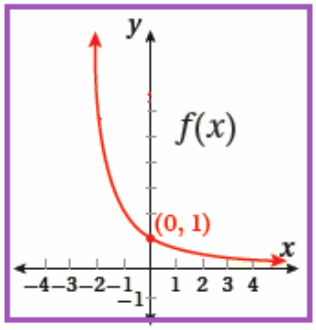
(c)



(d)

---

47) يُمثل الشكل الآتي التمثيل البياني لمنحنى الاقتران f(x) ، واحدة مما ياتي يمثل قاعدة f(x) وهى :

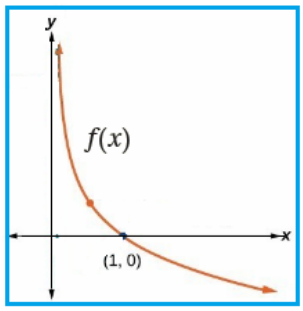


$a)\ f(x)=3^x$ $\quad b)\ f(x)=-(3)^x$

$c)\ f(x)=(\frac{1}{3})^x$ $\quad d)\ f(x)=-(\frac{1}{3})^x$

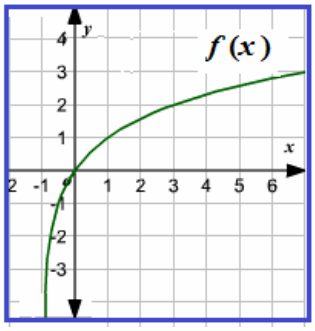
---

48) يُمثل الشكل الآتي التمثيل البياني لمنحنى الاقتران f(x) ، أي الآتية يمثل قاعدة الاقتران f(x) ؟



$a)\ f(x)=Log_2(-x)$ $\quad b)\ f(x)=-(2)^x$

$c)\ f(x)=Log_2(x)$ $\quad d)\ -Log_2(x)$



* معتمدا الشكل المجاور والذي منحنى الاقتران اللوغاريتمي f(x) ،
أجب عن السؤالين (49 ، 50) الآتيين :

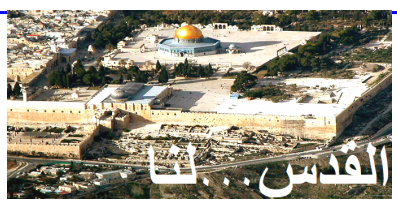
49) مجال الاقتران f(x) هو :

$a)\ (3,\infty)$ $\quad b)\ (0,\infty)$ $\quad c)\ (-\infty,3)$ $\quad d)\ (-1,\infty)$

---

50) خط التقارب الرأسي للاقتران f(x) هو :

$a)\ x=3$ $\quad b)\ x=-1$ $\quad c)\ y=3$ $\quad d)\ x=1$



46	47	48	49	50
c	c	d	d	b

السؤال الثاني : أكمل الفراغات بما يناسب في الجدولين الآتيين :

		خـــط التقـــارب الأفقـــي	المقطـع مـن y	المقطـع مـن x	المـــــدى	الاقـــــتران
1)	$f(x)=3^{2x+1}-27$					
2)	$f(x)=2^{x-1}+8$					
3)	$f(x)=(\frac{1}{2})^{x-3}+1$					
4)	$f(x)=16-4^{2x}$					

		خط التقارب الرأسي	المقطع من y	المقطع من x	المجال	الاقـــــتران
1)	$f(x)=Log_2(x-8)$					
2)	$f(x)=Log(3x+6)$					
3)	$f(x)=Log_3(x+2)-1$					
4)	$f(x)=Log_{\frac{1}{4}}(x-2)+1$					

السؤال الثالث : حل المعادلات الأسية الآتية :

1) $(5)^{x^2-9}=1$ 2) $2\,e^{x-1}=3$ 3) $16^x+4^{x+1}=12$

السؤال الرابع : أكمل الفراغ فيما يأتي :

1) الصورة المطولة للمقدار $Log_b\frac{3\sqrt{x}}{a^2}$ هي :

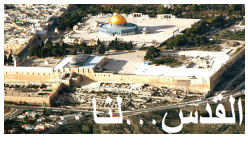
2) الصورة المختصرة للمقدار $Log_a 8-Log_a 2+2Log_a 5$ هي :

3) الصورة المختصرة للمقدار $Log_5 6\times Log_4 5$ هي : ..... (احتماله ضعيف) الجواب : $Log_4 6$

السؤال الخامس : أودع رجل مبلغ (4000 JD) في بنك بمعدل فائدة قدرها (4 %)،واحتسب البنك الفائدة باستمرار، جد جملة المبلغ بعد (10) سنوات

السؤال السادس : إذا كان انتشار أحد الفيروسات المعدية في دولة ما يُعطى بالاقتران $v(t)=20\,e^{0.2\,t}$ حيث (t) الزمن بالأيام ، جد عدد الأيام اللازمة ليصل عدد المصابين إلى (10000) شخص

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح
الأستاذ عبدالقادر الحسنات



الأستاذ
عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

الدرس 1 قاعدة السلسلة The Chain Rule

مراجعة قواعد الاشتقاق :

	$y=f(x)$	$\frac{dy}{dx}=f'(x)$
1)	$a\,x^n$	$a\,n\,x^{n-1}$
2)	$g(x)\pm h(x)$	$g'(x)\pm h'(x)$

إذا كان $y=ax^n$ ، حيث n عدد حقيقي ؛ فإنّ $\frac{dy}{dx}=anx^{n-1}$

إذا كان $y=(g(x))^n$، حيث n عدد حقيقي ؛ فإنّ $\frac{dy}{dx}=n(g(x))^{n-1}\times g'(x)$

$$f(x)=3x^5 \Rightarrow f'(x)=3\times 5x^{5-1}=15x^4$$

1) $f(x)=5x^2-3x+4 \Rightarrow f'(x)=10x-3$

2) $f(x)=5-3x^{-4}-x+\pi^2 \Rightarrow f'(x)=12x^{-5}-1$

3) $f(x)=(3x+4)(x-1)=3x^2+x-4 \Rightarrow f'(x)=6x+1$

4) $\frac{d}{dx}(8-x^{\frac{3}{2}})=(0-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})=-\frac{3}{2}\sqrt{x}$

البسط – المقام
المقام

$\frac{a}{b}-1=\frac{a-b}{b}$

5) $f(x)=x^4+x^3 \Rightarrow f'(x)=4x^3+3x^2$

$\Rightarrow f'(-2)=4(-2)^3+3(-2)^2=-32+12=-20$

6) $f(x)=(3x^2-7x-2)^{\frac{5}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{5}{2}(3x^2-7x-2)^{\frac{3}{2}}(6x-7)$

7) $f(x)=\sqrt[7]{x^5}+\frac{3}{x^2}-8 \Rightarrow f(x)=x^{\frac{5}{7}}+3x^{-2}-8$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{5}{7}x^{\frac{5}{7}-1}+3(-2)x^{-2-1}=\frac{5}{7}x^{\frac{-2}{7}}-6x^{-3}$

$\sqrt[3]{x^5}=x^{\frac{5}{3}}$

$\frac{3}{x^4}=3x^{-4}$

8) $f(x)=\frac{x^4-3x^5+\sqrt[3]{x}}{x^2} \Rightarrow f(x)=\frac{x^4}{x^2}-\frac{3x^5}{x^2}+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2}$

$=x^{4-2}-3x^{5-2}+x^{\frac{1}{3}-2}=x^2-3x^3+x^{\frac{-5}{3}}$

$\Rightarrow f'(x)=2x-9x^2-\frac{5}{3}x^{\frac{-8}{3}}$

9) $y=\sqrt{x}-\frac{5}{x^2}$

10) $y=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{4}{x^2}+1$

توزيع البسط على المقام

$$\frac{x\pm y}{z}=\frac{x}{z}\pm\frac{y}{z}$$

11) $y=7-5\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}$

12) $f(x)=\sqrt[5]{2x^3-1}$

13) $y=\frac{x^5-x^{-2}}{x}$

14) $y=\frac{2-7x}{3x}$

تحذير

$$\frac{a}{b\pm c}\neq\frac{a}{b}\pm\frac{a}{c}$$

15) $f(x)=\frac{x^4+x^2-6}{\sqrt{x}}$

16) $y=\frac{x^5-8x^6}{4x^2}$

$$\frac{3}{\frac{4}{5}}=3\div\frac{4}{5}=3\times\frac{5}{4}=\frac{3\times5}{4}$$

17) $f(x)=\sqrt[5]{2x^3-1}$

18) $y=\frac{1}{(1-4x^2)^3}$

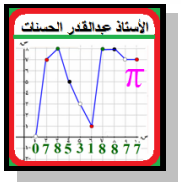
$$\frac{\frac{9}{2}}{7}=\frac{9}{2}\div7=\frac{9}{2}\times\frac{1}{7}=\frac{9}{2\times7}$$

قاعدة السلسلة

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران المُركَّب: $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ باستعمال القاعدة الآتية: $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\times g'(x)$

وبصيغة أُخرى، إذا كان: $y=f(u)$، وكان: $u=g(x)$، فإنَّ: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$



1) $y=(3x^2-5)^4$

$u=3x^2-5\Rightarrow y=u^4$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=4u^3\times6x=24x(3x^2-5)^3$

2) $y=\sqrt[3]{4x-x^3}$

$u=4x-x^3\Rightarrow y=\sqrt[3]{u}=u^{\frac{1}{3}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\frac{1}{3}u^{\frac{-2}{3}}\times(4-3x^2)=\frac{1}{3}(4x-x^3)^{\frac{-2}{3}}(4-3x^2)$

3) $y=(5-x^4)^2$

4) $y=\frac{4}{\sqrt[5]{x^2+x}}$

a) $y=(x^2-2)^4 \Rightarrow u=x^2-2\ ,\ y=u^4$

$\frac{dy}{dx}=4u^3\times2x=8xu^3=8x(x^2-2)^3$

b) $y=\sqrt{x^3+4x}=(x^3+4x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow u=x^3+4x\ ,\ y=u^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\times(3x^2+4)=\frac{3x^2+4}{2\sqrt{x^3+4x}}$

أتحقّق من فهمي 56 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $y=(x^2-2)^4$

b) $y=\sqrt{x^3+4x}$

مشـــتقة الاقتران المُركّـــب $f(g(x))$ هي
حاصل ضرب مشـــتقة الاقتران الخارجي f عند الاقتران الداخلي $g(x)$ في مشتقة الاقتران الداخلي $g(x)$.

1) $f(x)=x^3+1\ ,\ g(x)=x^2-1 \Rightarrow (fog)'(-2)=?$

$f'(x)=3x^2\ ,\ g'(x)=2x$

$g(-2)=3\ ,\ g'(-2)=-4\ ,\ f'(3)=27$

$\Rightarrow (fog)'(-2)=f'(g(-2))\times g'(-2)=f'(3)\times(-4)=27\times(-4)=-108$

---

2) $f(5)=3\ ,\ f'(6)=2\ ,\ g(5)=6\ ,\ g'(5)=4 \Rightarrow (fog)'(5)=?$

$(fog)'(5)=f'(g(5))\times g'(6)=f'(6)\times 4=(2)(4)=8$

---

3) $f'(5)=6\ ,\ g(7)=5\ ,(fog)'(7)=-12\ \Rightarrow g'(7)=?$

$\Rightarrow (fog)'(7)=f'(g(7))\times g'(7)=f'(5)\times g'(7)=-12$

$\Rightarrow 6\times g'(7)=-12\ \Rightarrow g'(7)=-2$

---

4) $f'(x)=\dfrac{x}{x^2+1}\ ,\ g'(1)=3\ ,\ g(1)=2 \Rightarrow (fog)'(1)=?$

$(fog)'(1)=f'(g(1))\times g'(1)$

$=f'(2)\times 3=\dfrac{2}{(2)^2+1}\times 3=\dfrac{6}{5}$

إذا كان: $g(2)=-3, g'(2)=6, h(3)=2, h'(3)=-2$ ، فأجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عندما $x=3$:

23 $f(x)=g(h(x))$

24 $f(x)=(h(x))^3$

مهارات التفكير العليا

25 تبرير: إذا كان: $h(x)=f(g(x))$، حيث: $f(u)=u^2-1$، وكان: $g(2)=3, g'(2)=-1$،
فأجد $h'(2)$، مُبرِّرًا إجابتي.

قاعدة سلسلة القوّة

إذا كان n أيَّ عدد حقيقي، وكان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ: $\frac{d}{dx}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$

*** عند اشتقاق القوس المرفوع إلى قوة ، نشتق القوة أولاً ثم نضرب في مشتقة ما بداخل القوس

$$f(x)=(g(x))^n \Rightarrow f'(x)=n\ (g(x))^{n-1}(g'(x))$$

بشـــرط قابليـــة الاشـــتقاق للاقـــتران $g(x)$

1) $f(x)=(2x+5)^3 \Rightarrow f'(x)=3(2x+5)^2(2)$

2) $f(x)=(2x^3+5x)^7 \Rightarrow f'(x)=7(2x^3+5x)^6(6x^2+5)$

3) $f(x)=\sqrt[4]{(x^2+5)^3} \Rightarrow f(x)=(x^2+5)^{\frac{3}{4}} \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{4}(x^2+5)^{\frac{-1}{4}}(2x)$

حالة خاصة بالجذر التربيعي :

$$f(x)=\sqrt{g(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

مشتقة الجذر التربيعي: $\frac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{2 \times \text{الجذر}}$

$g(x)>0$, قابـــل للاشـــتقاق $g(x)$

1) $f(x)=\sqrt{x^2+x} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$

2) $f(x)=\sqrt{(x^3+4x)^7} \Rightarrow f'(x)=\frac{7(x^3+4x)^6(3x^2+4)}{2\sqrt{(x^3+4x)^7}}$

3) $f(x)=(\sqrt{x^3}-2x)^5 \Rightarrow f'(x)=5(\sqrt{x^3}-2x)^4(\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}-2)$

أتحقّق من فهمي 58 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

a) $f(x)=(x^4+1)^5, x=1$ b) $f(x)=\sqrt{x^2+3x+2}, x=2$ c) $y=\sqrt[4]{(2x^2-7)^5}, x=4$

a	$f'(x)=5(x^4+1)^4(4x^3)=20x^3(x^4+1)^4 \Rightarrow f'(1)=320$
b	$f'(x)=\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+2}} \Rightarrow f'(2)=\frac{2(2)+3}{2\sqrt{2^2+3\times2+2}}=\frac{7}{2\sqrt{12}}$
c	$f(x)=\sqrt[4]{(2x^2-7)^5}=(2x^2-7)^{\frac{5}{4}} \Rightarrow f'(x)=\frac{5}{4}(2x^2-7)^{\frac{1}{4}}(4x)=5x\times\sqrt[4]{2x^2-7}$ $f'(4)=5\times4\times\sqrt[4]{2(4)^2-7}=20\sqrt[4]{25}$

مشتقة المجموع ، ومشتقة الفرق ، ومشتقة مضاعفات القوّة :

إذا كان الاقتران f والاقتران g قابلين للاشتقاق، وكان a عددًا حقيقيًّا، فإنَّ :

- $(af)'(x) = af'(x)$
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

$$1)\ f(x) = (x^2-7)^3 + (4x^3) \Rightarrow f'(x) = 3(x^2-7)^2(2x) + (4)(3x^2)$$

$$2)\ f(x) = x^2 + x^3 - 2x^4 + 9 \Rightarrow f'(x) = 2x + 3x^2 - 8x$$

$$3)\ f(x) = \sqrt[4]{(x^2+5)^3} \Rightarrow f(x) = (x^2+5)^{\frac{3}{4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4}(x^2+5)^{\frac{-1}{4}}(2x)$$

$$4)\ f(x) = \frac{7}{(2x+5)^3} + \sqrt{x^3+1} \Rightarrow f(x) = 7(2x+5)^{-3} + (x^3+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -21(2x+5)^{-4}(2) + \tfrac{1}{2}(x^3+1)^{-\frac{1}{2}}(3x^2)$$

$$5)\ f(x) = 2(4x^3+5x)^7 \Rightarrow f'(x) = 14(4x^3+5x)^6(12x^2+5)$$

1 $f(x) = 5(1-x^2)^3 + 4x + 7$

2 $f(x) = (2x+1)^3 - \sqrt{3x^2-2x}$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

أتحقَّق من فهمي 59 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = (1+x^3)^4 + x^8 + 2$

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1} - (x-3)^3$

a	$f'(x) = 4(1+x^3)^3(3x^2) + 8x^7 = 12x^2(1+x^3)^3 + 8x^7$
b	$f(x) = (2x-1)^{\frac{1}{3}} - (x-3)^3 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}(2) - 3(x-3)^2(1)$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = (1+2x)^4$

2 $f(x) = (3-2x^2)^{-5}$

3 $f(x) = (x^2-7x+1)^{\frac{3}{2}}$

4 $f(x) = \sqrt{7-x}$

5 $f(x) = 4(2+8x)^4$

6 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4x-8}}$

7 $f(x) = \sqrt{5+3x^3}$

8 $f(x) = \sqrt{x} + (x-3)^2$

9 $f(x) = \sqrt[3]{2x-x^5} + (4-x)^2$

10 $f(x) = (\sqrt{x}+5)^4$

11 $f(x) = \sqrt{(2x-5)^3}$

12 $f(x) = (2x^3-3x^2+4x+1)^5$

مُعدَّل التغيُّر: باختصار نشتق ونعوض القيمة المطلوبة

أتحقّق من فهمي 61

صناعة: يُمثِّل الاقتران: $P(t)=\sqrt{10t^2+t+229}$ إجمالي الأرباح السنوية لإحدى الشركات الصناعية (بآلاف الدنانير)، حيث t عدد السنوات بعد عام 2015م:

a) أجد مُعدَّل تغيُّر إجمالي الأرباح السنوي للشركة بالنسبة إلى الزمن t.

b) أجد مُعدَّل تغيُّر إجمالي الأرباح السنوي للشركة عام 2020م، مُفسِّرًا معنى الناتج.

قاعدة السلسلة، والمُتغيِّر الوسيط

مُعدَّل تغيُّر y بالنسبة إلى x يساوي مُعدَّل تغيُّر y بالنسبة إلى u مضروبًا في مُعدَّل تغيُّر u بالنسبة إلى x

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$y=(2x-5)^{10}$$

$$u=2x-5 \Rightarrow y=u^{10}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$=10u^9\times 2$$

$$=20(2x-5)^9$$

$$y=u^4 \quad ، \quad u=5x^3-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$=4u^3\times(15x^2-2)=4(5x^3-2x)^3(15x^2-2)$$

$$y=u^4 \quad ، \quad u=5x^3-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

$$=4u^3\times(15x^2-2)$$

$$=4(5x^3-2x)^3(15x^2-2)$$

أتحقّق من فهمي 62

إذا كان: $y=u^5+u^3$، حيث: $u=3-4x$، فأجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x=2$.

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

15) $y=5u^2+3u, u=x^3+1$

16) $y=\sqrt[3]{2u+5}, u=x^2-x$

Yasanat

الدرس 2 مشتقتا الضرب والقسمة
Product and Quotient Rules

1) مشتقة ضرب اقترانين

$$A(x)=f(x)\times g(x)\Rightarrow A'(x)=f'(x)\times g(x)+g'(x)\times f(x)$$

بشـــرط قابليـــة الاشـــتقاق لكـــل مـــن $f(x),g(x)$

أو :

(مشتقة حاصل ضرب اقترانين = مشتقة الأول × الثاني + مشتقة الثاني × الأول) : أربعة أقواس: ( )( )+( )( )

---

1) $f(x)=(x^2+1)(2x^3-5x)$

$$\Rightarrow f'(x)=(2x)(2x^3-5x)+(6x^2-5)(x^2+1)$$

---

2) $f(6)=4\ ,\ f'(6)=-2\ ,\ g(6)=-3\ ,\ g'(6)=1\Rightarrow (f\times g)'(6)=?$

$$\Rightarrow (f\times g)'(6)=f'g+g'f=(-2)(-3)+(1)(4)=10$$

$$(f\times g)'(a)=f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$$

---

3) $f(5)=-2\ ,\ f'(5)=-1\ ,\ g'(5)=4\ ,\ (f\times g)'(5)=8\Rightarrow g(5)=?$

أتحقّق من فهمي 65 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=(x^3+4)(7x^2-4x)$ b) $f(x)=(\sqrt{x}+1)(3x-2)$

2) مشتقة قسمة اقترانين

$$A(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow A'(x)=\frac{f'(x)\times g(x)-g'(x)\times f(x)}{(g(x))^2}$$

بشـــرط قابليـــة الاشـــتقاق لكـــل مـــن $f(x),g(x)$ $\quad g(x)\neq 0$

مشتقة خارج قسمة اقترانين = (مشتقة البسط × المقام – مشتقة المقام × البسط) / (المقام)^2

خمسة أقواس: ( )( ) – ( )( ) / ( )^2

---

1) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(1)\times(1+x^2)-(2x)\times(x)}{(1+x^2)^2}$

---

2) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}\Rightarrow f'(-2)=?$

$$f'(x)=\frac{(1)\times(x^2+1)-(2x)\times(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(-2)=\frac{(1)\times(4+1)-(-4)\times(-2+1)}{(4+1)^2}=\frac{5-4}{(5)^2}=\frac{1}{25}$$

أتحقّق من فهمي 67 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$ b) $f(x)=\dfrac{x^{-3}}{x^2+1}$

مثال: $f(3)=-2\ ,\ f'(3)=1\ ,\ g'(3)=3\ ,\ \left(\dfrac{f}{g}\right)'(3)=1\Rightarrow g(3)=?$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(3)=\frac{(1)(g)-(3)(-2)}{(g)^2}=1\Rightarrow g^2=g+6\Rightarrow g^2-g-6=0$$

$$\Rightarrow (g-3)(g+2)=0\Rightarrow \boxed{g(3)=3}\quad or\quad \boxed{g(3)=-2}$$

أتحقّق من فهمي 70 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^3}$ b) $f(x)=\dfrac{3}{2x+1}$

أتحقّق من فهمي 68

سكّان: يُمثّل عدد سكّان بلدة صغيرة بالاقتران: $P(t)=\dfrac{5}{2t^2+9}$، حيث t الزمن بالسنوات منذ الآن، وP عدد السكّان بالآلاف:

a) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t.

b) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في البلدة عندما $t=2$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

أتحقّق من فهمي 71 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=20x(4x^3-1)^6$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x+2)^4}$

إذا كان: $f(2)=4, f'(2)=-1, g(2)=3, g'(2)=2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

26 $(fg)'(2)$ 27 $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)$ 28 $(3f+fg)'(2)$

الدرس 3 مشتقتا الاقتران الأُسّي الطبيعي والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

$e^{x+3}=e^{x}\times e^{3}$

*** إذا كان أساس الاقتران هو العدد النيبيري (e) فإن الاقتران $f(x)=e^{x}$
يسمى الاقتران الأسي الطبيعي حيث (e) عدد غير نسبي يساوي تقريباً (2.7)

نظرية إذا كان: $f(x)=e^{x}$، حيث e العدد النيبيري، فإنَّ: $f'(x)=e^{x}$

مشتقته = نفسه

$$f(x)=x^{3}+e^{x}+8\Rightarrow f'(x)=3x^{2}+e^{x}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{5}{e^{3-x}}-e^{\sqrt{x}}\Rightarrow f'(x)=?$$

$$f(x)=\frac{x^{3}}{\sqrt{x}}+\frac{6\sqrt[3]{x}-xe^{x}+4x^{2}}{2x}\Rightarrow f'(x)=?$$

أتحقّق من فهمي 74 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=2e^{x}+3$ b) $f(x)=\sqrt[3]{x}+e^{x}$ c) $y=xe^{x}$

ملاحظة: عندما تكون القوة في الاقتران الأسي تختلف عن (x)، نضرب في مشتقتها بعد (اشتقاق) الاقتران الأسي

$$f(x)=e^{g(x)}\Rightarrow f'(x)=e^{g(x)}\times(g'(x))$$

بشـــرط قابليـــة الاشـــتقاق للاقـــتران $g(x)$

1) $f(x)=7e^{3x-1}\Rightarrow f'(x)=7e^{3x-1}(3)$

2) $f(x)=e^{x^{2}+3x}\Rightarrow f'(x)=e^{x^{2}+3x}(2x+3)$

3) $f(x)=2x\ e^{x^{3}}\Rightarrow f'(x)=(2)(e^{x^{3}})+(e^{x^{3}})(3x^{2})(2x)$

$\Rightarrow f'(0)=(2)(1)+(1)(0)(0)=2$

4) $f(x)=\frac{3}{x^{2}}\ e^{-x^{3}}\Rightarrow f'(x)=$

5) $f(x)=x^{2}\ e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow f'(x)=$

أتحقّق من فهمي 75 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=e^{7x+1}$ b) $f(x)=e^{x^{3}}$ c) $f(x)=5e^{\sqrt{x}}$

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي :

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

إذا كان: $f(x)=\ln x$، حيث: $x>0$، فإنَّ: $f'(x)=\frac{1}{x}$

اللوغاريتم الطبيعي : يُسمّى اللوغاريتم للأساس (e) اللوغاريتم الطبيعي ، ويُرمز له (Ln)

$\ln e=1$ $\quad$ $\ln 1=0$ $\quad$ Ln0: غير معرف $\quad$ $Ln\ x^3=3Ln\ x$

$Ln\ 3x^5\neq 5Ln\ 3x$ $\quad$ $Ln\ 4x^2=Ln\ 4+Ln\ x^2=Ln\ 4+2Ln\ x$

1) $f(x)=8Lnx\Rightarrow f'(x)=(8)(\frac{1}{x})=\frac{8}{x}$

2) $f(x)=Ln(5x^3)=Ln(5)+Ln(x^3)=Ln(5)+3Ln(x)\Rightarrow f'(x)=0+\frac{3}{x}=\frac{3}{x}$

3) $f(x)=(Lnx)^2\Rightarrow f'(x)=2(Lnx)(\frac{1}{x})=\frac{2}{x}Lnx$

4) $f(x)=Ln(x^2)=2\,Lnx\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{x}$

$Ln(x)^a=a\ Ln(x)$

$Ln(x\ y)=Lnx+Lny$ $\quad$ استخدام قوانين اللوغاريتمات يُسهل عملية الاشتقاق

أتحقّق من فهمي 78 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=4\ln x$ $\quad$ b) $f(x)=\sqrt{x}+\ln x$ $\quad$ c) $y=\frac{\ln x}{x}$

$Ln\frac{x}{y}=Lnx-Lny$

عندما يكون ما بداخل اللوغاريتم يختلف عن (x)

$f(x)=Ln(g(x))\Rightarrow f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$ $\quad$ g(x) قابـــل للاشـــتقاق , $g(x)>0$

1) $f(x)=Ln(x^2-5x+7)\Rightarrow f'(x)=\frac{2x-5}{x^2-5x+7}$

2) $f(x)=Ln(x^2e^x)\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x)(e^x)+(e^x)(x^2)}{x^2e^x}$

3) $f(x)=x\ Ln(x^2+1)\Rightarrow f'(x)=(1)(Ln(x^2+1))+(\frac{2x}{x^2+1})(x)$

أتحقّق من فهمي 80 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=\ln(8x)$ $\quad$ b) $f(x)=2\ln(x^7)$ $\quad$ c) $f(x)=\ln(9x+2)$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = 2e^x + 1$
2. $f(x) = e^{3x+9}$
3. $f(x) = (x^2 + 3x - 9)\,e^x$
4. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^4}$
5. $f(x) = 6e^{\sqrt{x}}$
6. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$
7. $f(x) = (e^x + 2)(e^x - 1)$
8. $f(x) = e^{-2x}\,(2x - 1)^5$
9. $f(x) = x^3 - 5e^{2x}$

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

10. $f(x) = 3 \ln x$
11. $f(x) = x^3 \ln x$
12. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$
13. $f(x) = x^2 \ln (4x)$
14. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$
15. $f(x) = \ln\sqrt{x^2 - 1}$
16. $f(x) = (\ln x)^4$
17. $f(x) = \ln (x^2 - 5)$
18. $f(x) = x^4 \ln x - \dfrac{1}{2}e^x$
19. $f(x) = e^{2x} \ln x$
20. $f(x) = (\ln 3x)(\ln 7x)$
21. $f(x) = \ln (e^x - 2)$

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

22. $f(x) = e^{2x-1} \ln (2x - 1), x = 1$
23. $f(x) = \dfrac{\ln x^2}{x}, x = 4$

الدرس 4 مشتقتا اقتران الجيب واقتران جيب التمام
Sine and Cosine Functions Derivatives

$$f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x \quad or \quad \frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

$$\sin^2 x=(\sin x)^2$$

$$f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x \quad or \quad (\cos x)'=-\sin x$$

$$\sin x^2 \neq (\sin x)^2$$

1) $f(x)=\cos x+5\sin x+4 \Rightarrow f'(x)=-\sin x+5\cos x$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

2) $f(x)=6\cos x+5x+4\pi \Rightarrow f'(x)=-6\sin x+5$

3) $f(x)=3\sin x+\sin\pi \Rightarrow f'(x)=3\cos x+0$

$f(x)=4\cos x \Rightarrow f'(x)=4-\sin x$ .....(خطأ)

$f(x)=4\cos x \Rightarrow f'(x)=4(-\sin x)=-4\sin x$

أتحقّق من فهمي 83 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=7+\sin x$ b) $f(x)=3x-\cos x$ c) $f(x)=3\sin x+2\cos x$

أتحقّق من فهمي 84 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=e^x\cos x$ b) $f(x)=\dfrac{x+\cos x}{\sin x}$

إذا كان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ: $\dfrac{d}{dx}\left(\sin\left(g(x)\right)\right)=\cos\left(g(x)\right)\times g'(x)$

$\dfrac{d}{dx}\left(\cos g(x)\right)=-\sin g(x)\times g'(x)$

نضرب في مشتقة الزاوية

خطأ شائع

1) $f(x)=\sin 4x^3 \Rightarrow f'(x)=\cos 4x^3(12x^2)$, $f'(x)=\cos 12x^2$

2) $f(x)=4\cos(Lnx) \Rightarrow f'(x)=-4\sin(Lnx)(\dfrac{1}{x})$

3) $f(x)=x^3\sin(2x) \Rightarrow f'(x)=(3x^2)(\sin(2x))+(\cos(2x))(2)(x^3)$

أتحقَّق من فهمي 86 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \cos 5x$ b) $f(x) = \sqrt{\sin x}$ c) $f(x) = \ln(\cos 3x)$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل 86 أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 2\cos x + \sin x$ 3) $f(x) = \sin x - \cos x$ 4) $f(x) = x \sin x$

5) $f(x) = \sin x \cos x$ 6) $f(x) = e^x \sin x$ 8) $f(x) = \sin(x^2 + 1)$

9) $f(x) = \ln(\sin x)$ 16) $f(x) = 4\sin^2 x$ 21) $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{\sin x}$

أسئلة متوقعة للأدبي (مراجعة مكثفة) / الفصل الأول– وحدة التفاضل

السؤال الأول : ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

1) $f(x)=x^4+x^3 \Rightarrow f'(-2)=$ $a)\ -20$ $b)\ -44$ $c)\ 14$ $d)\ -12$

---

2) $f(x)=24\sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(-1)=$ $a)\ 8$ $b)\ -8$ $c)\ 6$ $d)\ -72$

---

3) $f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(2)=$ $a)\ 4$ $b)\ -4$ $c)\ \frac{1}{4}$ $d)\ -\frac{1}{4}$

---

4) $f(2)=3\ ,\ f'(3)=5\ ,\ g(2)=3\ ,\ g'(2)=4 \Rightarrow (fog)'(2)=$

$a)\ 20$ $b)\ 12$ $c)\ 15$ $d)\ 24$

---

5) $f'(1)=4\ ,\ g(5)=1\ ,(fog)'(5)=-12\ \Rightarrow g'(5)=?$

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 12$ $d)\ -48$

---

6) $f(x)=Lnx\ ,\ g(x)=x^2 \Rightarrow (fog)'(x)=$ $a)\ x$ $b)\ \frac{2}{x}$ $c)\ \frac{1}{x}$ $d)\ \mathrm{Ln}\frac{1}{x}$

---

7) $f(x)=Lnx^5 \Rightarrow f'(x)=$ $a)\ 5x$ $b)\ \frac{1}{x}$ $c)\ \frac{5}{x}$ $d)\ 5Lnx^4$

---

8) $f(x)=2\cos x+\sin\pi \Rightarrow f'(x)=$ $a)\ 2-\sin x$ $b)\ 2\sin x$

$c)\ -2\sin x+\cos\pi$ $d)\ -2\sin x$

---

9) $f(x)=\sin x+\cos x \Rightarrow f'(x)=$ $a)\ \cos x+\sin x$ $b)\ \cos x-\sin x$

$c)\ -\cos x-\sin x$ $d)\ -\cos x+\sin x$

---

10) $y=\frac{x^4-2x^2}{x^3} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=$ $a)\ \frac{4x^3-4x}{2x}$ $b)\ x-\frac{2}{x}$ $c)\ 1-\frac{2}{x^2}$ $d)\ 1+\frac{2}{x^2}$

Hasanat

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	a	d	a	b	b	c	d	b	d

11) $y=u^2+5u\ ,\ u=2-3x \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} =$ $a)\ 9$ $b)\ -9$ $c)\ 21$ $d)\ -5$

---

12) $f(x)=(h(x))^3,\ h(2)=-2\ ,\ h'(2)=-4 \Rightarrow f'(2)=$

$a)\ 24$ $b)\ -24$ $c)\ 48$ $d)\ -48$

---

13) $f(x)=x^2e^x \Rightarrow f'(1)=$ $a)\ e$ $b)\ 3e$ $c)\ 3e^2$ $d)\ 2e$

---

14) إذا كان $f(x)=\frac{x}{x+1}$, فإن $f'(2)=$

$a)\ \frac{1}{2}$ $b)\ \frac{1}{9}$ $c)\ \frac{5}{9}$ $d)\ \frac{-1}{9}$

---

15) إذا كان $f(x)=\ln x^2$, فإن $f''(x)$ يساوي :

$a)\ 2\ln x$ $b)\ \frac{-2}{x^2}$ $c)\ \frac{2}{x}$ $d)\ \frac{2}{x^2}$

---

16) إذا كان $f(x)=(x^2-1)(x^2+1)$ فإن $f'(x)$ تساوي :

$a)\ 4x^2$ $b)\ -4x$ $c)\ 4x$ $d)\ 4x^3$

---

17) إذا كان $f(x)=\sin x\ \cos x$ فإن $f'(x)$ تساوي :

$a)\ 2\sin x$ $b)\ 2\cos x$ $c)\ \cos^2 x-\sin^2 x$ $d)\ -\sin x\ \cos x$

---

*معتمدا المعلومات الآتية ، أجب عن الأسئلة (18، 19، 20) : $f(1)=5, f'(1)=-2, g(1)=2, g'(1)=4$

18) $(f\ g)'(1)$ تساوي: $a)\ 16$ $b)\ -2$ $c)\ -24$ $d)\ -8$

19) $(\frac{f}{g})'(1)$ تساوي: $a)\ 6$ $b)\ 4$ $c)\ -4$ $d)\ -6$

20) $(3f-g)'(1)$ تساوي: $a)\ -2$ $b)\ -8$ $c)\ -10$ $d)\ -6$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b	d	b	b	b	d	c	a	d	c

21) إذا كان $g(2)=1, g'(2)=2, f(2)=4$ وكانت $(f\ g)'(2)=5$ فإن $f'(2)=$

$a)\ 2 \qquad b)\ 13 \qquad c)\ -3 \qquad d)\ -2$

---

22) إذا كان $f'(3)=8$ وكانت $f(3)=g'(3)=4$ $(\frac{f}{g})'(3)=1$ فإن $g(3)=$

$a)\ -4 \qquad b)\ 8 \qquad c)\ -4,4 \qquad d)\ 4$

---

23) إذا كان $g(x)$ $f(x)=x^3$ $g(-1)=-2$ $g'(-1)=2$ فإن $f'(-1)=$

$a)\ -4 \qquad b)\ -8 \qquad c)\ -6 \qquad d)\ 8$

---

24) إذا كان $f(x)=e^x+\ln x$ فإن $f'(1)$ يساوي :

$a)\ e+1 \qquad b)\ e \qquad c)\ 0 \qquad d)\ \frac{1}{e}$

---

25) إذا كان $f(x)=e^x \ln x$ فإن $f'(1)$ يساوي :

$a)\ e+1 \qquad b)\ e \qquad c)\ 0 \qquad d)\ \frac{1}{e}$

---

26) $f(x)=ax^3-Ln5x+ax \ , \ f'(-1)=3 \Rightarrow a=$ $a)\ \frac{1}{2} \quad b)\ 2 \quad c)\ -2 \quad d)\ -1$

---

27) $f(x)=4\ e^{x-1} \Rightarrow f'(0)=$ $a)\ -4\ e \quad b)\ 4\ e^{-1} \quad c)\ 4 \quad d)\ 3\ e$

---

28) $f(x)=2\sin^3 x \Rightarrow f'(x)=?$

$a)\ 3\sin x\ \sin 2x \quad b)\ 6\sin x\ \cos x \quad c)\ 6\sin x \quad d)\ 6\sin^2 x$

---

29) $f(x)=\sqrt{1-x^3} \Rightarrow f'(-2)=$ $a)\ -24 \quad b)\ -2 \quad c)\ 2 \quad d)\ -12$

---

30) $f(x)=(x\ g(x))^2 \ , \ g'(-1)=-2 \ , \ g(-1)=4 \Rightarrow f'(-1)=?$

$a)\ -16 \qquad b)\ -8 \qquad c)\ 48 \qquad d)\ -48$

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
c	d	b	a	b	a	b	a	b	d

السؤال الثاني : جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي عند قيمة (x) في حال أعطيت :

1) $f(x)=\frac{x}{2x+3}$, $x=1$	2) $f(x)=x^3(3x-1)^2$, $x=1$
3) $f(x)=(x^2-x^3)^2$, $x=-1$	4) $f(x)=(e^x-e^{-x})^3$, $x=0$
5) $f(x)=Ln(5x-4)^7$	6) $f(x)=x^3\sin 2x^2$
7) $f(x)=Ln(\cos 2x)$	8) $f(x)=\sin(Ln\,4x)$
9) $f(x)=e^{2x}\sin^2 3x$	10) $f(x)=Ln(\frac{3}{\cos x+2})^3$
11) $y=u^3-5u$, $u=6\sqrt{x}$, $x=1$	12) $y=Ln(u+1)$, $u=e^{2x}$
13) $f(x)=e^x\sin 3x\ \cos^2 x$	14) $5y+3e^{2x}+xy=6x$

السؤال الثالث : يُمثِّل عدد سكّان بلدة صغيرة بالاقتران: $P(t)=(3t^2+100)(t+10)$
حيث t الزمن بالسنوات منذ الآن ، و P عدد السكّان :

أ) جد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t

ب) جد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في البلدة عندما t = 4 .

السؤال الرابع : يُمثِّل الاقتران: $C(x)=100\sqrt{x^2-0.1x}$ تكلفة إنتاج x قطعة من مُنتَج مُعيَّن :
مُعدَّل تغيُّر تكلفة الإنتاج بالنسبة إلى عدد القطع المُنتَجة عندما يكون عدد القطع المُنتَجة 20 قطعة.

السؤال الخامس : إذا كان $y=x-\sin x\ \cos x$ ، فأثبت أن $\frac{dy}{dx}=2\sin^2 x$

أسئلة الوزارة على وحدة التفاضل

وزارة 2023 / أدبي

15) إذا كان $S(x) = 200\sqrt{5x^2 + 100}$ ، فإنّ معدل تغير الاقتران S بالنسبة إلى x هو:

a) $S'(x) = \frac{5x}{\sqrt{5x^2+100}}$ b) $S'(x) = \frac{1000x}{\sqrt{5x^2+100}}$ c) $S'(x) = \frac{2000x}{\sqrt{5x^2+100}}$ d) $S'(x) = \frac{10x}{\sqrt{5x^2+100}}$

16) إذا كان $h(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان $f(x) = g(h(x))$ حيث $h'(2) = 5$,

$h(2) = -1$, $g'(-1) = 3$, $g(-1) = 2$ ، فإنّ $f'(2)$ هي: a) 10 b) 0 c) 3 d) 15

17) إذا كان v و u اقترانين قابلين للاشتقاق حيث $v'(1) = 2$, $v(1) = 3$, $u'(1) = 1$, $u(1) = -1$ ،

فإنّ $\left(\frac{v}{u}\right)'(1)$ هي: a) 2 b) -5 c) 1 d) -3

18) إذا كان $f(x) = e^3 + 2e^{-x}$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) $-2e^{-x}$ b) $3e^2 - 2e^{-x}$ c) $2e^{-x}$ d) $3e^2 + 2e^{-x}$

19) إذا كان $f(x) = x^3 - e^{2x}$ ، فإنّ $f'(1)$ هي:

a) $1 - e^2$ b) $1 - 2e^2$ c) $3 - e^2$ d) $3 - 2e^2$

20) إذا كان $f(x) = \ln(7x)$ ، فإنّ $f'(x)$ هي: a) $\frac{x}{7}$ b) $\frac{7}{x}$ c) $\frac{1}{7x}$ d) $\frac{1}{x}$

21) إذا كان $f(x) = x \ln x$ ، فإنّ $f'(e)$ هي: a) 2 b) 1 c) -1 d) -2

15	16	17	18	19	20	21
b	d	b	a	d	d	a

السؤال الثالث: (38 علامة)

a) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $y = \sqrt[3]{x^2 + 7}$, $x = 1$

2) $y = u^2 - 3u + 1$, $u = x^3 + 1$, $x = 2$ (16 علامة)

b) جد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = (4x - 3)^6 (7 - 2x)$

2) $f(x) = \sin 4x + \frac{5}{\cos x}$

3) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos^2 x$ (22 علامة)

وزارة 2023 تكميلي / أدبي

16) إذا كان $f(x) = (7-2x)^5$ ، فإن $f'(x)$ هي:

a) $-10(7-2x)^4$ b) $10(7-2x)^4$ c) $5(7-2x)^4$ d) $-5(7-2x)^4$

17) إذا كان $g(x) = 20\left(1-\frac{4}{1+x^2}\right)$ ، فإن معدل تغير الاقتران g بالنسبة إلى x هو:

a) $\frac{80}{(1+x^2)^2}$ b) $\frac{-80}{(1+x^2)^2}$ c) $\frac{160x}{(1+x^2)^2}$ d) $\frac{-160x}{(1+x^2)^2}$

18) إذا كان $f(x)$ وَ $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x=1$ ، وكان $f'(1)=5$, $f(1)=4$, $g(1)=3$, $g'(1)=-2$ فإن $(4f+fg)'(1)$ يساوي:

a) 27 b) 10 c) 28 d) 0

19) إذا كان u اقترانًا قابلًا للاشتقاق ، حيث $u'(5)=-6$, $u(5)=-3$ ، فإن $\left(\frac{12}{u}\right)'(5)$ هي:

a) -2 b) 2 c) -8 d) 8

20) إذا كان $f(x) = e^{x^3} + \ln x$ ، فإن $f'(1)$ يساوي:

a) e b) $3e$ c) $e+1$ d) $3e+1$

16	17	18	19	20
a	c	a	d	d

Hasanat

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

السـؤال الثالث: (34 علامة)

a) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند قيمة x المعطاة: (13 علامة)

1) $y = 4(5-x)^3 + 2x$, $x=3$

2) $y = 2u^3 + 8u + 1$, $u = \sqrt{x}$, $x=4$

b) جد مشتقة كل اقتران مما يأتي: (21 علامة)

1) $f(x) = \ln(x^2+2x+3) + \sin^2 x$

2) $f(x) = 2e^{x^2}\ln x + \cos 5x$, $x>0$

3) $f(x) = \frac{xe^6}{x-1}$, $x \neq 1$

وزارة 2023 / فندقي

7- إذا كان $g(x)=\frac{4x-1}{x}$ ، فإنّ $g'(x)$ هي:

a) $-\frac{1}{x^2}$ b) $\frac{1}{x^2}$ c) $\frac{1}{x}$ d) $-\frac{1}{x}$

8- إذا كان: $f(x)=(5-4x)^3$ ، فإنّ قيمة $f'(1)$ هي:

a) 12 b) 15 c) -12 d) -15

9- إذا كان: $f(x)=\frac{2x}{x-3}$ ، فإنّ قيمة $f'(2)$ هي:

a) -6 b) 2 c) -2 d) 6

10- إذا كان: $f(x)=\ln e^x$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) e^x b) 1 c) e^{-x} d) -1

11- إذا كان: $f(x)=xe^{2x}$ ، فإنّ $f'(x)$ هي:

a) e^{2x} b) $2e^{2x}$ c) $2xe^{2x}+1$ d) $e^{2x}(2x+1)$

** إذا كان: $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عند $x=1$ ،
وكان: $f(1)=4\,,f'(1)=2\,,g(1)=1\,,g'(1)=-3$ ، **فأجب عن الفقرتين 12, 13 الآتيتين:**

12- قيمة: $(fg)'(1)$ هي:

a) -10 b) 10 c) -14 d) 14

13- قيمة: $(f+2g)'(1)$ هي:

a) 4 b) -4 c) 12 d) -12

7	8	9	10	11	12	13
b	*c*	*a*	*b*	*d*	*a*	*b*

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

a) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة إزاء كل منها: (17 علامة)

1) $y=x\ln x+\sqrt{5-x^2}\quad,\quad x=1$

2) $y=2u^3-4u\quad,\quad u=x^2-3\quad,\quad x=2$

c) يمثّل الاقتران: $N(t)=4(3t^2+20)(t+10)$ عدد سكان إحدى القرى (بالآلاف)، حيث t الزمن بالسنوات. (10 علامات)

1) جد معدل تغيّر عدد السكان بالنسبة إلى الزمن t .

2) جد معدل تغيّر عدد السكان عندما $t=2$ ، مفسرًا معنى الناتج.

وزارة 2023 تكميلي / فندقي

7- إذا كان: $f(x) = (1-x)^{-4}$ ، فإنّ قيمة $f'(x)$ هي:

a) $4(1-x)^{-5}$ b) $-4(1-x)^{-5}$ c) $3(1-x)^{-3}$ d) $-3(1-x)^{-3}$

8- إذا كان $f(x) = \frac{1-3x}{3}$ ، فإنّ قيمة $f'(2)$ هي:

a) 3 b) -3 c) 1 d) -1

9- إذا كان $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ ، فإنّ قيمة $f'(1)$ هي:

a) 2 b) $\frac{-1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) -2

10- إذا كان $f(x) = \ln e^{1-x^3}$ ، فإنّ قيمة $f'(-1)$ هي:

a) $3e^2$ b) 3 c) $\frac{3}{e^2}$ d) -3

** إذا كان: $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عند $x = 2$ ،
وكان: $f(2) = -1, f'(2) = 1, g(2) = 2, g'(2) = 3$ ، **فأجب عن الفقرتين 11, 12 الآتيتين:**

11- قيمة: $(fg)'(2)$ هي:

a) 3 b) 2 c) 0 d) -1

12- قيمة: $(3f-g)'(2)$ هي:

a) -5 b) -1 c) 0 d) -4

15- إذا كان: $f(x) = e^{\ln(2e+1)}$ ، فإنّ $f'(1)$ هي:

a) $2e+1$ b) 2 c) $3e$ d) 0

7	8	9	10	11	12	15
a	d	c	d	d	c	d

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

a) جد $\frac{dy}{dx}$ لكل ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة إزاء كل منها:

1) $y = \sqrt[3]{x^2+x+1} + 2x\ln(x+1)$, $x = 0$ (17 علامة)

2) $y = 5u^7 + 5u$, $u = 3x^2 + 4x$, $x = -1$

c) يمثّل الاقتران: $S(t) = \frac{1000t}{0.4t+6}$ إجمالي المبيعات بآلاف الدنانير لإحدى شركات الملابس ، حيث t عدد السنوات بعد عام 2020 م (10 علامات)

1) جد معدّل تغيّر إجمالي مبيعات الشركة بالنسبة إلى الزمن t .

2) جد معدّل تغيّر إجمالي مبيعات الشركة عام 2030 م ، مفسرًا معنى الناتج.

الدرس 1 المماس والعمودي على المماس
The Tangent and Normal

$$y-y_1=m(x-x_1)\ ,\ m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}$$

معادلة أي مستقيم تكون على الصورة $(y-y_1)=m(x-x_1)$ ،

الجديد في الأمر أن الميل(m) يساوي المشتقة الأولى عند نقطة التماس

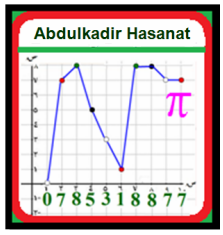
معادلة مماس منحنى الاقتران

إذا كان $f(x)$ قابلاً للاشتقاق عندما $x=a$، فإنَّ معادلة مماس منحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة التماس $(a,f(a))$ هي: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

معادلة العمودي

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

مثال 1 : إذا كان $f(x)=x^2+3x-4$ ، **فجد معادلة المماس لمنحنى هذا الاقتران عند x = 2**



$$f(x)=x^2+3x-8\Rightarrow f(3)=9+9-8=6\Rightarrow \boxed{y_1=10}$$

$$f'(x)=2x+3\Rightarrow f'(3)=6+3=9\Rightarrow \boxed{m=9}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-10=9(x-3)\Rightarrow \boxed{y=9x-17}$$

مثال 2 : إذا كان $y=\frac{1}{x-1},x\neq 1$ ، **فجد معادلة المماس والعمودي على المماس عند النقطة (1 , 2)**

$$y=\frac{1}{x-1}\quad ,\quad x_1=2\quad ,\quad y_1=1$$

$$y=\frac{1}{x-1}=(x-1)^{-1}\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx}=-(x-1)^{-2}\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}=-1}\Rightarrow$$

المماس	$y-1=-1(x-2)$
العمودي	$y-1=(x-2)$

مثال 3) جد النقاط الواقعة على منحنى $y=x^3+x-2$
والتي يكون المماس عندها موازيا للمستقيم $y=13x+7$

$$f(x)=x^3+x-2\Rightarrow m=f'(x)=3x^2+1$$

$$y=13x+7\Rightarrow m=y'=13\ \boxed{3x^2+1=13\Rightarrow x=\pm 2\Rightarrow (2,8),(-2,-12)}$$

مثال 4) إذا كان $f(x)=e^{x-3}-x$ ، **فجد قيم (x) التي يكون للاقتران عندها مماس أفقي**

$$\boxed{\text{المماس يوازي المحور x}\Leftarrow f'(x)=0}$$

$$f'(x)=e^{x-3}-1=0$$

$$\Rightarrow e^{x-3}=1=e^0\Rightarrow x-3=0\Rightarrow x=3$$

أتحقّق من فهمي 94

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=\frac{2x-1}{x}$ عندما $x=1$.

أتحقّق من فهمي 96

a) أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x)=1-\sqrt{x}$، التي يكون عندها ميل المماس $-\frac{1}{4}$

b) أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x)=-x^3+3x^2-2$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

أتحقّق من فهمي 97

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=\ln x^3$ عند النقطة $(1,0)$.

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

1. $f(x)=x^3-6x+3, (2,-1)$
5. $f(x)=x+e^x, (0,1)$
6. $f(x)=\ln(x+e), (0,1)$

إذا كان: $f(x)=4e^{2x+1}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

15. معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم: $x=-1$.
16. معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور y.

الدرس 2 المشتقة الثانية، والسرعة، والتسارع
The Second Derivative, Velocity, and Acceleration

تُستعمَل الرموز: $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, y'', $\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$, y'' للتعبير عن المشتقة الثانية

1) $f(x)=x^4 \Rightarrow f'(x)=4x^3 \Rightarrow f''(x)=12x^2$

2) $y=x^2+\sin x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=2x+\cos x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=2-\sin x$

أتحقَّق من فهمي أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=x^4-3x^2+\cos x$ b) $f(x)=\frac{2}{x^3}$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة: **104**

13) $f(x)=8x^3-3x+\frac{4}{x}, x=-2$ 14) $f(x)=\frac{1}{2x-4}, x=3$

15) إذا كان: $f(x)=px^3-3px^2+x-4$، وكانت: $f''(2)=-1$، فأجد قيمة الثابت p.

السرعة والتسارع، الحركة على خط مستقيم :

هناك ثلاثة مصطلحات : موقع الجسم $s(t)$ ، السرعة v(t) velocity والتسارع a(t) acceleration
مشتقة المسافة أو الموقع تساوي السرعة ..... ومشتقة السرعة تساوي التسارع

إذا كانت قيمة $v(t) > 0$ ، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه الموجب (يمين)
وإذا كانت قيمة $v(t) < 0$ ، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه السالب (يسار)
وعندما تكون $v(t) = 0$ فإنَّ الجسم يكون في حالة سكون.

سكون لحظي تعني أن السرعة تساوي صفرا $v(t) = 0$

يتحرك جسم في خط مستقيم، حسب العلاقة $s=12t^2-t^3$ ، فجد
1) سرعة الجسم المتجهة عندما t =2 2) تسارعه عندما t =3
3) قيم (t) التي يكون عندها في حالة سكون لحظي 4) اتجاه حركة الجسم عند t =3

$s(t)=12t^2-t^3$
$v(t)=24t-3t^2$
$a(t)=24-6t$

1) $v(2)=24(2)-3(2)^2=48-12=36$
2) $a(3)=24-6(3)=218=6$
3) $v(t)=0 \Rightarrow 24t-3t^2=0 \Rightarrow 3t(8-t)=0 \Rightarrow t=0$ أو $\boxed{t=8}$
4) $v(3)=24(3)-3(9)=45>0 \Rightarrow +$

أتحقَّق من فهمي

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 3t^2 - t^3 , t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

a) ما سرعة الجسم عندما $t = 3$؟

b) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 3$؟

c) ما تسارع الجسم عندما $t = 3$؟

d) أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

أتحقَّق من فهمي

فهد: يُمكِن نمذجة موقع فهد يطارد فريسته على أرض مستوية مُتحرِّكًا في خط مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

a) ما سرعة الفهد بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

b) ما تسارع الفهد بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

c) أجد قِيَم t التي يكون عندها الفهد في حالة سكون لحظي.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^5 - 20t^2 , t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

16) ما سرعة الجسم عندما $t = 3$؟

17) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 3$؟

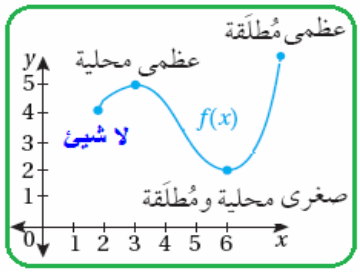
18) ما تسارع الجسم عندما $t = 3$؟

19) أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

27) تحدٍّ: إذا مثَّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 12t - 9, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني، فما سرعة الجسم عندما يكون تسارعه صفرًا؟

28) تحدٍّ: إذا مثَّل الاقتران: $s(t) = 2t^3 - 24t - 10, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني، فما تسارع الجسم عندما تكون سرعته صفرًا؟

الدرس 3 تطبيقات القِيَم القصوى Optimization Problems



اختبار المشتقة الثانية

بافتراض وجود f' و f'' لأيِّ نقطة في فترة مفتوحة تحوي c، وأنَّ: $f'(c)=0$، فإنَّه يُمكِن استنتاج ما يأتي:

- إذا كان: $f''(c)<0$، فإنَّ $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية للاقتران f.
- إذا كان: $f''(c)>0$، فإنَّ $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية للاقتران f.
- إذا كان: $f''(c)=0$، فإنَّ اختبار المشتقة الثانية يفشل.

النقطة التي يكون عندها ميل منحنى الاقتران صفرًا هي نقطة حرجة، وهذا يعني أنَّ مشتقة الاقتران عند هذه النقطة تساوي صفرًا؛ لذا يُمكِن رسم مماس أفقي عندها. إذا صغرى محلة أو عظمى محلية

1) $f(x)=(x^2-4x)^2$

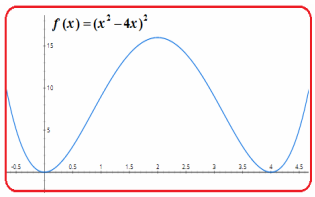
لإيجاد القيم القصوى المحلية
من خلال قاعدة الاقتران والمشتقة الثانية :

1) نجد المشتقة الأولى
2) نساويها بالصفر، ثم نجد جذورها (القيم الحرجة)
3) نجد المشتقة الثانية
4) نعوض القيم الحرجة في المشتقة الثانية
5) الناتج موجب إذا صغرى محلية
الناتج سالب إذا عظمى محلية

$$f(x)=(x^2-4x)^2$$
$$f'(x)=2(x^2-4x)(2x-4)=0$$
$$2x(x-4)(2x-4)=0$$
$$\Rightarrow x=0\ ,\ x=4\ ,\ x=2$$

$$f''(x)=2(2x-4)(2x-4)+(2)2(x^2-4x)$$

$$\Rightarrow f''(0)=(-8)(-4)+0=+$$
$$\Rightarrow f''(2)=(0)(0)+(4)(-4)=-$$
$$\Rightarrow f''(4)=2(4)(4)+4(0)=+$$



صغرى محلية عند (x=0) عظمى محلية عند (x=2) صغرى محلية عند (x=4)

---

2) $f(x)=x^3-3x+5$

$$f(x)=x^3-3x+5$$
$$f'(x)=3x^2-3=0$$
$$(x-1)(x+1)=0$$
$$\Rightarrow x=1\ ,\ x=-1$$
$$f''(x)=6x$$
$$\Rightarrow f''(1)=6(1)=+$$
$$\Rightarrow f''(-1)=6(-1)=-$$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

صغرى محلية عند (x=1)

عظمى محلية عند (x=-1)

أتحقَّق من فهمي إذا كان: $f(x)=x^3-2x^2-4x+5$، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x)=x^2-2x+5$ 2) $f(x)=20+15x-x^2-\frac{x^3}{3}$ 3) $f(x)=x^4-2x^2-2$

استراتيجية حَلّ مسائل القِيَم القصوى

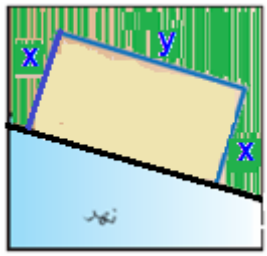
1) **أفهم المسألة:** أقرأ المسألة جيدًا، ثم أُحدِّد المعلومات اللازمة لحَلِّها.

2) **أرسم مُخطَّطًا:** أرسم مُخطَّطًا يُمثِّل المسألة، ثم أُدوِّن عليه المعلومات المُهِمَّة لحَلِّ المسألة، وأختار مُتغيِّرًا يُمثِّل الكمِّية التي أُريد أنْ أجد لها أكبر قيمة أو أقل قيمة، وأختار رموزًا للمُتغيِّرات الأُخرى في المسألة، ثم أستعمل المُتغيِّرات لكتابة اقتران قيمته القصوى هي القيمة المطلوبة.

3) **أجد القِيَم الحرجة للاقتران:** أجد القِيَم التي تكون عندها مشتقة الاقتران صفرًا.

4) **أجد القيمة القصوى المطلوبة:** أجد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى المطلوبة.

1) لدى مُزارِعٌ حقل مستطيل الشكل ، يقع على ضفة نهر ، يُريد إحاطته بسياج من ثلاث جهات فقط
إذا كان طول السياج المتوفر (1600 m) ، جد أكبر مساحة مُمكِنة للحقل يُمكِن للمُزارِع أنْ يحيط السياج بها.



$$\boxed{A=xy}:P=2x+y \Rightarrow 1600=2x+y \Rightarrow \boxed{y=1600-2x}$$

$$A=x(1600-2x)=1600x-2x^2$$

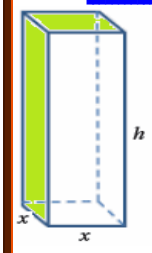
$$A'=1600-400x=0 \Rightarrow \boxed{x=400}$$

$$A''=-4:A''(400-4 \Rightarrow \boxed{\text{عظمى}}$$

$$A(400)=400(1600-2(400))=320000\ m^2$$

---

2) يُريد حداد صنع صندوق من الصفيح على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة ومفتوح من الأعلى .
إذا كان الحجم المطلوب ($32000\ cm^3$)؛
فجد أبعاد الصندوق التي تجعل كمّية الصفيح المستعملة في تصنيعه أقلّ ما يُمكن .



الحل : المطلوب أن تكون المساحة الجانبية ومساحة القاعدة السفلية أصغر ما يمكن
وهذا يعني : مساحة القاعدة + المساحة الجانبية
= مساحة المربع + محيط القاعدة × الارتفاع:

$$A=x^2+4xh$$

ولكن ، يجب أن يكون القانون بمتغير واحد فقط ، لذلك نجد أحد المتغيرين بدلالة الآخر ، من خلا المعلومة المعطاة

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع : $V=x\times x\times h$

$$V=x^2h=32000 \Rightarrow h=\frac{32000}{x^2}$$

$$A=x^2+4x\left(\frac{32000}{x^2}\right)=x^2+\frac{128000}{x}$$

$$A'=2x+\frac{-128000}{x^2}=0 \Rightarrow 2x^3=128000 \Rightarrow x^3=64000 \Rightarrow x=40$$

$$A''=2+\frac{0-(2x)(-128000)}{(x^2)^4} \Rightarrow A''(40)=2+\frac{(2(40))(128000)}{((40)^2)^4}>0 \Rightarrow \boxed{\text{صغرى}}$$

$$\Rightarrow h=\frac{32000}{x^2}=\frac{32000}{40^2}=\frac{32000}{1600}=\frac{320}{16}=20$$

أتحقّق من فهمي 110

بنى نجّار سـقفًا خشبيًّا لحظيرة حيوانات، وكان السـقف على شكل مستطيل محيطه 54 m.

أجد أكبر مساحة مُمكِنة لسطح الحظيرة.

$A = xy \Rightarrow P = 2x + 2y \Rightarrow 54 = 2x + 2y$

$27 = x + y \quad \rightarrow \quad y = 27 - x$

$A(x) = x(27 - x) = 27x - x^2$

$A'(x) = 27 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{27}{2} \Rightarrow x = \frac{27}{2}$ توجد قيمة حرجة واحدة هي

$A''(x) = -2 \rightarrow A''\left(\frac{27}{2}\right) = -2 < 0$ إذن قيمة عظمى محلية

$A\left(\frac{27}{2}\right) = \frac{729}{4} = 182.25\ m^2$ أكبر مساحة ممكنة لسطح الحظيرة هي:

أتحقّق من فهمي 113

لدى حدّادٍ صفيحةٌ معدنية مسـاحتها $54\ m^2$. أراد الحدّاد أنْ يصنع منها خزّان ماء على شكل متوازي مسـتطيلات، وأنْ يكون الخزّان مفتوحًا من الأعلى، وقاعدته مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزّان التي تجعل حجمه أكبر ما يُمكِن.

$V = x^2 h \quad \backslash \quad A = 4xh + x^2$

$54 = 4xh + x^2 \quad \rightarrow \quad 4xh = 54 - x^2 \quad \rightarrow \quad h = \frac{54 - x^2}{4x}$

$V(x) = x^2\left(\frac{54 - x^2}{4x}\right) = \frac{54x - x^3}{4} = \frac{54}{4}x - \frac{1}{4}x^3$

$V'(x) = \frac{54}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 0 \Rightarrow 54 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{54}{3} = 18 \Rightarrow x = \pm\sqrt{18}$

بما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا، فإنه توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt{18}$

$V''(x) = -\frac{3}{2}x \Rightarrow V''\left(\sqrt{18}\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{18} < 0 \Rightarrow$ قيمة عظمى محلية

$l = x = \sqrt{18}\ m,\ w = x = \sqrt{18}\ m,\ h = \frac{9}{\sqrt{18}}\ m$ أبعاد الخزان التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن هي:

أتحقّق من فهمي 115

وجدت خبيرة تسـويق أنّه لبيع x ثلّاجة من نوع جديد، فإنّ سـعر الثلّاجة الواحدة (بالدينار) يجب أنْ يكون: $s(x) = 1750 - 2x$، حيث x عدد الأجهزة المَبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الأجهـزة تعطى بالاقتران: $C(x) = 2250 + 18x$، فأجـد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن.

اقتران الإيراد $R(x) = (1750 - 2x)x = 1750x - 2x^2$

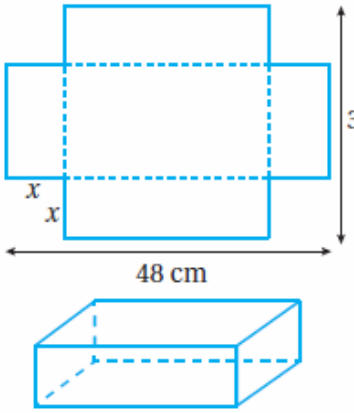
اقتران التكلفة $C(x) = 2250 + 18x$

اقتران الربح $P(x) = R(x) - C(x)$

$P(x) = 1750x - 2x^2 - 2250 - 18x = 1732x - 2x^2 - 2250$

$P'(x) = 1732 - 4x \Rightarrow 1732 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{1732}{4} = 433$

$P''(x) = -4 \rightarrow P''(433) = -4 < 0$ قيمة عظمى محلية



قطعة ورق مستطيلة الشكل، طولها 48 cm، وعرضها 30 cm. قُصَّ من زوايا القطعة مربعات مُتطابِقة، طول ضلع كلٍّ منها x cm كما في الشكل المجاور، ثم ثُنِيت لتشكيل عُلْبة:

7 أجد الاقتران الذي يُمثِّل حجم العُلْبة بدلالة x.

8 أجد قيمة x التي تجعل حجم العُلْبة أكبر ما يُمكِن.

7 حجم العلبة

$V = lwh \Rightarrow V(x) = (48-2x)(30-2x)x \ , \ 0 \le x \le 15$

$= (1440 - 96x - 60x + 4x^2)x = (1440 - 156x + 4x^2)x = 1440x - 156x^2 + 4x^3$

8

$V'(x) = 1440 - 312x + 12x^2 \Rightarrow 12x^2 - 312x + 1440 = 0$

$x^2 - 26x + 120 = 0 \Rightarrow (x-20)(x-6) = 0 \Rightarrow x = 20$ أو $x = 6$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 6$ والقيمة $x = 20$ خارج مجال اقتران الحجم. إذ يستحيل قص مربعات طول ضلع كل منها 20 cm من زوايا الورقة التي عرضها 30 cm

$V''(x) = -312 + 24x \Rightarrow V''(6) = -168 < 0 \rightarrow$ قيمة عظمى $V(6)$

إذن يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن عندما $x = 6$

يُمثِّل الاقتران: $s(x) = 150 - 0.035x$ سعر القطعة الواحدة من مُنتَج بالدينار لإحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتَجة. ويُمثِّل الاقتران: $C(x) = 16000 + 10x + 0.09x^2$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار:

9 أجد اقتران الإيراد.

10 أجد عدد القطع x الذي يتساوى عندها الإيراد الحدِّي مع التكلفة الحدِّية.

11 أجد اقتران الربح.

12 أجد عدد القطع اللازم بيعها من المُنتَج لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.

13 أجد سعر الوحدة الواحدة من المُنتَج الذي يُحقِّق أكبر ربح مُمكِن.

9 سعر المنتج الواحد هو $p(x) = 150 - 0.035x$

اقتران الإيراد $R(x) = (150 - 0.035x)x = 150x - 0.035x^2$

10 التكلفة الحدية: $C'(x) = 10 + 0.18x$

الإيراد الحدي: $R'(x) = 150 - 0.07x$

$R'(x) = C'(x) \Rightarrow 150 - 0.07x = 10 + 0.18x$

$150 - 10 = 0.07x + 0.18x \Rightarrow 140 = 0.25x \Rightarrow x = \frac{140}{0.25} = 560$

11

$P(x) = R(x) - C(x) = (150x - 0.035x^2) - (16000 + 10x + 0.09x^2)$

$= 150x - 0.035x^2 - 16000 - 10x - 0.09x^2 = 140x - 0.125x^2 - 16000$

12

$P'(x) = 140 - 0.250x \Rightarrow 140 - 0.250x = 0 \Rightarrow 140 = 0.250x$

$x = \frac{140}{0.250} = 560$ توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 560$

$P''(x) = -0.250 \Rightarrow P''(560) = -0.250 < 0$ قيمة عظمى

فيكون عدد القطع اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن هو 560 قطعة

أكبر ربح ممكن هو: $P(560) = 140(560) - 0.125(560)^2 - 16000 = 23200$

13 سعر الوحدة الواحدة من المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن $p(250) = 150 - 0.035(560) = 130.4$

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

الدرس 4
الاشتقاق الضمني والمُعدَّلات المرتبطة
Implicit Differentiation and Related Rates

الاشتقاق الضمني يُمكِن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ باتِّباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى x، مراعيًا استعمال قاعدة السلسلة عند اشتقاق حدود تتضمَّن المُتغيِّر y.

عند اشتقاق (y) نضرب في (y ') أو ($\frac{dy}{dx}$)

الخطوة 2: أُعيد ترتيب حدود المعادلة، بحيث تصبح جميع الحدود التي تحوي $\frac{dy}{dx}$ في طرف المعادلة الأيسر، والحدود الأُخرى في طرف المعادلة الأيمن.

الخطوة 3: أُخرِج $\frac{dy}{dx}$ عاملًا مشتركًا من حدود طرف المعادلة الأيسر.

الخطوة 4: أحُلُّ المعادلة بالنسبة إلى $\frac{dy}{dx}$.

مثال :

$$x^3+y^2+2y=3x \Rightarrow 3x^2+2yy'+2y'=3$$

$$3x^2+y'(2y+2)=3 \Rightarrow y'(2y+2)=3-3x^2$$

$$y'=\frac{3-3x^2}{2y+2}$$

$\sin(x+y)=x \Rightarrow \cos(x+y)\times y'=1$ ...خطأ

$\sin(x+y)=x \Rightarrow \cos(x+y)(1+y')=1$ ...صح

أتحقَّق من فهمي 119 أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

a) $x^2+y^2=2$ b) $5y^2-2e^x=4y$ c) $xy+y^2=4\cos x$

a) $2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx}=-2x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$

b) $10y\frac{dy}{dx}-2e^x=4\frac{dy}{dx} \Rightarrow 10y\frac{dy}{dx}-4\frac{dy}{dx}=2e^x$

$\frac{dy}{dx}(10y-4)=2e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2e^x}{10y-4}$

c) $(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)+(y)(1)+2y\frac{dy}{dx}=-4\sin x \Rightarrow (x)\left(\frac{dy}{dx}\right)+2y\frac{dy}{dx}=-4\sin x-y$

$\frac{dy}{dx}(x+2y)=-4\sin x-y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y+4\sin x}{x+2y}$

المُعدَّلات المرتبطة :

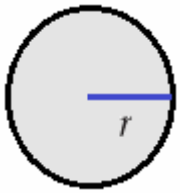
استراتيجية حلّ مسائل المُعدَّلات المرتبطة

1) فهم المسألة وقراءتها جيدًا لتحديد المُتغيِّر المطلوب إيجاد مُعدَّل تغيُّره، ومُعدَّلات التغيُّر المعطاة.
2) رسم مُخطَّطٍ يُمثِّل المسألة
3) كتابة معادلة تربط بين المُتغيِّر المطلوب إيجاد مُعدَّل تغيُّره والمُتغيِّرات التي عُلم مُعدَّلات تغيُّرها.
4) الاشتقاق بالنسبة إلى الزمن
5) التعويض في المعادلة الناتجة جميع القِيَم المعلومة للمُتغيِّرات لإيجاد مُعدَّل التغيُّر المطلوب

مثال :

1) صفيحة معدنية دائرية الشكل، تتمدد بالحرارة إذا كان معدل زيادة نصف قطرها يساوي 0.005 cm / min
أوجد معدل الزيادة في مساحة سطح الصفيحة، عندما يكون طول نصف قطرها 15 cm .

الحل : نكتب قانون مساحة الدائرة ثم نشتق ضمنيا بالنسبة للزمن
ثم نعوض (ولا يجوز التعويض قبل الاشتقاق)



$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} = 2\pi(15)(0.005) = 0.15\pi$$

أتحقّق من فهمي 121

بالونــات: نفخت هديل بالونًا على شــكل كرة، فــازداد نصف قُطْره بمُعدَّل 3 cm/s. أجد مُعــدَّل تغيُّر حجم البالون عندما يكون نصف قُطْــره 4 cm، علمًا بأنَّ العلاقــة التي تربط بين حجــم البالون (V) ونصف قُطْره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

معدل التغير المعطى: $\frac{dr}{dt} = 3$

معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=4}$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi(4)^2(3) = 192\pi \text{ cm}^3/\text{s}$$

21 هندســة: تتناقص أطوال أضلاع مُكعَّب بمُعدَّل 6 cm/s. أجد مُعدَّل تغيُّر حجم المُكعَّب عندما يكون طول ضلعه 30 cm، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم المُكعَّب (V) وطول ضلعه (x) هي: $V = x^3$.

21 معدل التغير المعطى: $\frac{dx}{dt} = -6$

معدل التغير المطلوب: $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{x=30}$

$$V = x^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt} = 3(30)^2(-6) = -16200$$

أسئلة متوقعة للأدبي (مراجعة مكثفة) / الفصل الأول– وحدة تطبيقات التفاضل

السؤال الأول : ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

1) إذا كان $f(x)=e^x+x$ فإن معادلة المماس لمنحنى الاقتران f (x) عند x = 0 هي:

$a)\ y=2x-1$ $b)\ y=2x+1$ $c)\ y=1-2x$ d) $y=2-x$

---

2) إذا كان f(x) = Lnx ، فإن معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f (x) عند النقطة (e , 1) هي :

$a)\ y=-ex-2$ $b)\ y=-ex+e^2+1$ $c)\ y=-e^x+e^2+1$ d) $y=\frac{x}{e}$

---

3) إذا كان $f(x)=e^{x-1}+Lnx$ ، فإن معادلة المماس لمنحنى f عند النقطة (1 , 1) هي :

$a)\ y=2x$ $b)\ y=2x-1$ $c)\ y=2x-2$ $d)\ y=2x+1$

---

4) إذا كان $f(x)=e^{x-6}-x$ ، فإن قيم (x) التي يكون عندها مماس أفقي لمنحنى الاقتران f هي:

a) 5 b) ln6 c) 6 d) 0 , 6

---

5) إذا كان الاقتران : $s(t)=t^2-5t+6$, $t\geq 0$, يُمثّل موقع جسم يتحرّك في مسار مستقيم ،

فإن اتجاه حركة الجسم عندما t = 1 هو : a) موجب b) سالب c) سكون d) لا شيء مما ذكر

---

6) إذا كان الاقتران : $s(t)=t^3-t^2+t$, $t\geq 0$, يُمثّل موقع جسم يتحرّك في مسار مستقيم ،

فإن سرعة الجسم عندما يكون تسارعه (4) يساوي : a) 2 b) 0 c) 6 d) 4

---

7) $x^2+y^2=9\Rightarrow y'=$ $a)\ \frac{x}{y}$ $b)\ -\frac{x}{y}$ $c)\ -\frac{y}{x}$ $d)\ \frac{y}{x}$

---

8) $xy+x^2y^2=6\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)}=$ $a)\ 2$ $b)\ -6$ $c)\ -2$ $d)\ 5$

---

9) $y^2+y=(Lnx)^3+1\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(e,1)}=$ $a)\ e$ $b)\ 3$ $c)\ 3e^2$ $d)\ e^{-1}$

---

10) $Lnx+Lny=x+y\Rightarrow y'=$ $a)\ \frac{xy-y}{x-xy}$ $b)\ \frac{xy+y}{x-xy}$ $c)\ \frac{x}{y}$ $d)\ \frac{xy+y}{x+xy}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b	b	b	c	b	a	b	c	d	a

السؤال الثاني : جد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران : $f(x)=8\sqrt{x}-9$

التي يكون عندها مماس منحنى الاقتران موازيًا للمستقيم: $y = 2x - 1$ الجواب : (4 , 7)

السؤال الثالث : جد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران $f(x)=x^3-3x^2+1$

التي يكون عندها المماس أفقيا

السؤال الرابع : إذا مَثّل الاقتران $s(t) = 6t^2 - t^3 + 1$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم :

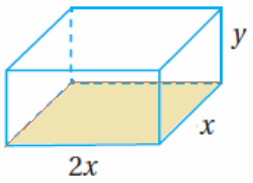
1) جد سرعة الجسم المتجهة عندما يكون تسارعه 6 2) جد تسارع الجسم عندما $t = 2$

3) جد قيم (t) التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي 3) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 3$ ؟

السؤال الخامس : إذا كان $f(x)=x^3-12x+5$ ، فاستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد

القِيَم القصوى المحلية للاقتران f

السؤال السادس : لدى حدّادٍ صفيحةٌ معدنية مساحتها ($48\ m^2$) . يريد الحدّاد أنْ يصنع منها خزّان ماء على شكل متوازي مستطيلات مغلق، وأنْ يكون طول قاعدة الخزّان مثلي عرضها
جد أبعاد الخزّان التي تجعل حجمه أكبر ما يُمكِن.



السؤال السابع : يُمثِّل الاقتران: $s(x) = 150 - 0.5x$ سعر القطعة الواحدة من منتج ما ،
حيث x عدد القطع المَبيعة. ويُمثِّل الاقتران: $C(x) = 4000 + 0.25x2$ تكلفة إنتاج x قطعة
جد عدد القطع اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم أجد أكبر ربح مُمكِن.

السؤال الثامن : يزداد حجم بالون كروي الشكل بمعدل ($192\ \pi$) ، جد معدل الزيادة في نصف قُطْره

عندما يصبح نصف القطر (4 cm)

السؤال التاسع : تتناقص أطوال أضلاع مُكعَّب بمُعدَّل (6 cm/s) . جد مُعدَّل تغيُّر حجم المُكعَّب

عندما يكون طول ضلعه (30 cm) ،

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح
الأستاذ عبدالقادر الحسنات

أسئلة الوزارة على وحدة تطبيقات التفاضل

وزارة 2023 / أدبي

22) إذا كان $f(x)=\frac{16}{x^2+3}$ ، فإنّ ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x=1$ هو:

a) 8 b) -8 c) -2 d) 2

23) إذا كان الاقتران $s(t)=5t^2-t+3\ ,\ t\geq 0$ يُمثل موقع جُسيم يتحرك في مسار مستقيم حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني، فإنّ سرعة الجسيم المتجهة عندما $t=2$ هي:

a) 21m/s b) 22m/s c) 20m/s d) 19m/s

24) إذا كان $f(x)=x^3-3x^2$ ، فإنّ للاقتران $f(x)$ قيمة صُغرى محلية عندما x تساوي:

a) 0 b) 2 c) 3 d) 1

25) إذا كان $y^2+\cos x=5$ ، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ هي:

a) $\frac{\sin x}{2}$ b) $-\frac{\sin x}{2y}$ c) $\frac{\sin x}{2y}$ d) $-\frac{\sin x}{2}$

22	23	24	25
c	d	b	c

السـؤال الرابع: (18 علامة)

a) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)=x^2-10$ عندما $x=4$ (10 علامات)

b) يُمثل الاقتران: $s(t)=2t^3-6t^2+8t\ ,\ t\geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني، فما سرعة الجسم المتجهة عندما يكون تسارعه صفرًا ؟ (8 علامات)

السـؤال الخامس: (24 علامة)

a) حديقة منزلية على شكل مستطيل، أُنشئت مقابل جدار، إذا كان محيط الحديقة من دون الجدار 400m ، فجد بعدي الحديقة اللذين يجعلان مساحتها أكبر ما يُمكن. (10 علامات)

b) يُمثل الاقتران $s(x)=1500-2x$ سعر القطعة الواحدة (بالدينار) من مُنتج معين حيث x عدد القطع المبيعة، ويُمثل الاقتران $C(x)=3000+0.5x^2$ تكلفة إنتاج x قطعة من المُنتج بالدينار. جد عدد القطع اللازم بيعها من المُنتج لتحقيق أكبر ربح ممكن. (7 علامات)

c) خزان ماء أسطواني الشكل، طول قطر قاعدته 1m . إذا مُلئ الخزان بالماء بمعدل $0.2\ \mathrm{m^3/s}$ ، فجد معدل تغير ارتفاع الماء فيه، علمًا بأنّ العلاقة التي تربط بين حجم الخزان (V) وارتفاعه (h) هي: $V=\pi r^2 h$ (7 علامات)

وزارة 2023 تكميلي / أدبي

21) ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = 2x^3 - x - 1$ عند النقطة $(-1, -2)$ هو:

a) $\frac{1}{5}$ b) $-\frac{1}{5}$ c) 5 d) -5

22) إذا كان $f(x) = x^2 + \sin 2x$ ، فإن $f''(x)$ يساوي:

a) $2 + 2\sin 2x$ b) $2 - 4\sin 2x$ c) $2 - 4\cos 2x$ d) $2 + 2\cos 2x$

23) إذا كان $f(x) = 6x - x^2$ ، فإن القيمة العظمى للاقتران $f(x)$ هي: a) 9 b) -9 c) 3 d) -3

24) يُمثل الاقتران $A(x) = 40x - 2x^2$ مساحة حديقة مستطيلة الشكل بالأمتار المربعة، حيث x أحد بعدي الحديقة. أكبر مساحة ممكنة لهذه الحديقة تساوي: a) 800 b) 600 c) 400 d) 200

25) إذا كان $3x^2 - y^3 = 13$ ، فإن قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(2, -1)$ تساوي: a) $\frac{1}{4}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) -4 d) 4

21	22	23	24	25
b	*b*	*a*	*d*	*d*

السؤال الرابع: (24 علامة)

a) جد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران $f(x) = x^3 - 3x$ التي يكون عندها المماس أفقيًا. (12 علامة)

b) يُمثل الاقتران: $s(t) = t^4 - 32t \quad , \quad t \geq 0$ موقع جسم يتحرك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني. ما تسارع الجسم عندما تكون سرعته صفرًا ؟ (12 علامة)

السؤال الخامس: (29 علامة)

a) أرادت إحدى الشركات أن تصنع خزانات معدنية على شكل متوازي مستطيلات مفتوحٍ من الأعلى، بحيث يكون حجم كل منها $32m^3$ ، وقاعدته مربعة. جد أبعاد الخزان الواحد التي تجعل مساحة سطحه أقل ما يمكن. (13 علامة)

b) يُمثل الاقتران $s(x) = 300 - 0.2x$ سعر القطعة الواحدة (بالدينار) من مُنتج لإحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتجة، ويُمثل الاقتران $C(x) = 100 + 2x$ تكلفة إنتاج x قطعة من المُنتج (بالدينار). ما عدد القطع اللازم بيعها من المُنتج لتحقيق أكبر ربح ممكن؟ (9 علامات)

c) يتغير حجم بالون كروي الشكل عند نفخه، فإذا ازداد نصف قطره بمعدل $2cm/s$. فما معدل تغير حجم البالون عندما يكون قطره $6cm$ ، علمًا بأن العلاقة التي تربط بين حجم البالون (V) ونصف قطره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (7 علامات)

وزارة 2023 / فندقي

14- ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=x^2+3x+2$ عند النقطة $(2,12)$ هو:

a) 7 b) $\frac{1}{7}$ c) -7 d) $-\frac{1}{7}$

15- الإحداثي x للنقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x)=3x^2-12x+1$ التي يكون عندها المماس أفقيًّا هو:

a) 2 b) -2 c) 0 d) -11

14	15
d	a

b) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=e^{2x}-4$ عند $x=0$ (9 علامات)

وزارة 2023 تكميلي / فندقي

13- ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=\ln(x-1)$ عند النقطة $(2,0)$ هو:

a) 1 b) -1 c) 2 d) -2

14- الإحداثي x للنقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x)=4x^2-6x+10$ التي يكون عندها ميل المماس لمنحنى f يساوي 10 هو:

a) 2 b) -2 c) 0 d) 1

13	14
a	a

b) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x)=e^{x^2-1}$ عند $x=1$ (9 علامات)

L6

مديرية التربية والتعليم لواء قصبة اربد

الامتحان التجريبي لمبحث الرياضيات للصف الثاني عشر الفرع الأدبي

للعام الدراسي 2024/2023

اسم الطالب ---------- مدة الامتحان: $\frac{\text{د}}{30}$: $\frac{\text{س}}{2}$

الشعبـــــة: اليوم والتـــاريخ: الاثنين 2023/12/18

ملحوظة مهمه: أجب عن الأسئلة الآتية جميعها وعددها (5) بحيث تكون الإجابة عن السؤال الأول على نموذج الإجابة (ورقة القارئ الضوئي) ، وتكون إجابتك عن باقي الأسئلة على أوراق الإجابة المخصصه علماً بان عدد صفحات الامتحان (4).

السـؤال الأول :(100 علامة)

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل فقرة مما يأتي، ثمّ ظلل بشكل غامق الدائرة التي تشير إليها في نموذج الإجابة (ورقة القارئ الضوئي)، علماً أن عدد فروع السؤال الأول (25).

1) إذا كانت $f(x) = -(4)^{x-1}$ فإن قيمة $f(3)$

$a)\ 16$ $b)\ -16$ $c)\ -256$ $d)\ 256$

2) إذا كان $A(t) = 400\ (1 - 0.27)^8$ فإن عامل الإضمحلال هو:

$a)\ 0.73$ $b)\ 1.27$ $c)\ 0.27$ $d)\ 400$

3) مجال الإقتران $f(x) = 3 - \log(5 - x)$

$a)\ (5, \infty)$ $b)\ (3, \infty)$ $c)\ (-\infty, 5)$ $d)\ (-\infty, 3)$

4) إذا كان $f(x) = (2)^{1-x} + 3$ فإن معادلة خط التقارب الأفقي هي.

$a)\ y = -3$ $b)\ x = -3$ $c)\ y = 3$ $d)\ x = 3$

5) قيمة a التي تجعل الإقتران $f(x) = \log_a(x+1)^3$ يمر بالنقطة $(1, 3)$

$a)\ 64$ $b)\ 8$ $c)\ 3$ $d)\ 2$

6) أي من الاقترانات الآتية متناقصاً:

$a)\ f(x) = (2)^{x-1}$ $b)\ f(x) = (2)^{1+x}$

$c)\ f(x) = (\frac{1}{2})^{x-1}$ $d)\ f(x) = \log_2(x-1)$

7) قيمة المقدار $\log_8 (\frac{\sqrt{64}}{(8)^{-3}})$ هي

$a) 1$ $b) -1$ $c) 4$ $d) 2$

8) حل المعادلة $(4)^{2x-1} = (2)^{(x+1)}$ هو

$a) \{3\}$ $b) \{2\}$ $c) \{1\}$ $d) \{-1\}$

9) إذا كان $f(x) = \log_2(x-1)$ فإن معادلة التقارب الرأسي هي

$a) y = 1$ $b) y = 0$ $c) x = 0$ $d) x = 1$

10) إذا كانت $\log_a 5 \approx 0.82$ ، $\log_a 6 \approx 1.05$ فإن قيمة $\log_a 5a^2$ هي

$a) 5.82$ $b) 1.82$ $c) 2.82$ $d) 3.05$

11) أي من المقادير التالية تكافيء المقدار $\log \frac{x^5}{c^7 y^6}$

$a) 5 \log x - 7\log c + 6\text{Log } y$ $b) 5\log x - 7\log c - 6 \log y$

$c) 5\log x + 7\log c - 6 \log y$ $d) 5\log x - \log c - 6 \log y$

12) إذا كان f , h إقترانين قابلين للاشتقاق وكان $f(x) \times h(x) = 2$ و $h(3) = -2$, $h'(3) = 4$,
$f(3) = -1, 4$ فإن $f'(3)$ يساوي:

$a) -1$ $b) -3$ $c) 2$ $d) -2$

13) إذا كان $f(x) = x \cos x$ فإن $f'(x)$

$a) \cos x - x \sin x$ $b) \cos x + x \sin x$

$c) \sin x$ $d) - \sin x$

14) إذا كان $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4$ فإن قيمة x (قيم) التي تجعل $f'(x) = -3$ هي

$a) \{1, 2\}$ $b) \{-1\}$ $c) \{-1, 1\}$ $d) \{-1, 2\}$

15) إذا كان $f(x) = 5 \ln x$ فإن $f''(x)$

$a) \frac{5}{x}$ $b) \frac{5}{x^2}$ $c) \frac{-5}{x^2}$ $d) \frac{1}{x^2}$

16) إذا كان $f(x) = xe^{2x}$ فإن $f'(0)$ يساوي:

$a) 0$ $b) 1$ $c) e$ $d) 2e$

17) إذا كان $f(x) = 3a x^2 - 5x$ وكان $f'(1) = 7$ فإن قيمة a هي:

$a) 2$ $b) -2$ $c) 4$ $d) -4$

18) إذا كان $y=\frac{u+1}{u-1}$ ، $u=\sqrt{x}$ فإن قيمة $\frac{dy}{dx}$ عندما $x=4$

$a)\ 0$ $\quad b)\ \frac{-1}{2}$ $\quad c)\ -2$ $\quad d)\ -1$

19) إذا كان $f(x)=\frac{1}{(5-2x)^2}$ فإن $f'(2)$ يساوي

$a)\ 4$ $\quad b)\ -4$ $\quad c)\ 2$ $\quad d)\ -2$

20) إذا كان $f(x)=3x^2+12x$ فإن قيمة x التي يكون للإقتران عندها مماس أفقي هي

$a)\ 1$ $\quad b)\ 2$ $\quad c)\ -1$ $\quad d)\ -2$

21) إذا كان $s(t)=5t^3-4t+2, t\geq 0$ فإن تسارع الجسم عند $t=2$ هي

$a)\ 15$ $\quad b)\ 30$ $\quad c)\ 60$ $\quad d)\ 56$

22) إذا كان $f(x)=2x^3-6x+1$ فإن القيمة العظمى المحلية للإقتران $f(x)$ هي

$a)\ -3$ $\quad b)\ 5$ $\quad c)\ 1$ $\quad d)\ -1$

23) إذا كان $f(x)=5+sin(3x)$ فإن $f''(x)$

$a)\ 5+3\ cos\ (3x)$ $\quad b)3\ cos\ (3x)$

$c)\ 9\ sin\ (3x)$ $\quad d)\ -9\ sin\ (3x)$

24) إذا كان $x^2-y^2=15$ فإن ميل العمودي للعلاقة عند النقطة $(4, 1)$ يساوي

$a)\ 4$ $\quad b)\ -4$ $\quad c)\ \frac{1}{4}$ $\quad d)\ \frac{-1}{4}$

25) تتناقص أطوال أضلاع مكعب بمعدل $(2\ cm/s)$ فإن معدل التغيير في حجم المكعب عندما يكون طول ضلعه $(5cm)$، علماً بأن العلاقة التي تربط حجم المكعب (V) وطول ضلعه (x) هي $V=x^3$

$a)\ 150cm^3/s$ $\quad b)\ 60cm^3/s$ $\quad c)\ -150cm^3/s$ $\quad d)\ -60cm^3/s$

السـؤال الثاني: (20 علامة)

$a)$ أودعت سعاد مبلغ مقداره 42000 دينار في حساب بنكي بنسبة ربح مركب مستمر مقداره 3.5% ، أوجد قيمة المبلغ بعد (7 سنوات). (11 علامة)

b) حل المعادلة الأسية التالية: (9 علامات)

$$(4)^x-3(2)^x-28=0$$

السـؤال الثالث: (38 علامة)

a) أوجد المشتقة الاولى لكل من الإقترانات التالية: (20 علامة)

1) $f(x) = sin\,(2x)\; ln\,(cos\,x)$

2) $f(x) = (\sqrt{x} + x) + e^{3-x}$

b) إذا كان $y = \frac{x^4 - 5\,ln\,x}{2e^{4x}}$ ، أثبت أنَّ: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{-5}{2e^4}$ (18 علامة)

السـؤال الرابع: (18 علامة)

a) جد معادلة المماس لمنحنى الإقتران $f(x) = 3x^2 + 7$ عندما $x = 2$. (10 علامات)

b) يمثل الإقتران $S(t) = t^3 - 9t^2 + 15\,t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث S الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني ، أوجد تسارع الجسم عندما يكون في حالة السكون اللحظي؟ (8 علامات)

السـؤال الخامس: (24 علامة)

a) قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها (1000 m) أوجد أبعاد قطعة الأرض لتكون مساحتها أكبر ما يمكن.

(12 علامة)

b) نفخ شخص بالوناً على شكل كرة فازداد نصف قطره بمعدّل 2cm/s ، أوجد معدّل تغير حجم البالون عندما يكون نصف قطره 3cm.

((علماً بأن العلاقـة التي تربط بين حجم البالون (V) ونصف قطره (r) هي ($V = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3$)) (12 علامة)

﴿انتهت الاسئلة﴾