الرياضيات 2023 / 2024

الثاني الثانوي الأدبي

Collins

مُكثف الفصل الثاني

مكثف الفصل الثاني

الأستاذ : عبدالقادر الحسنات
عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

I ❤ Maths $\sqrt[3]{64}$ Ever

2 ∞ & >

I LOVE MATH
SAID NO ONE EVER!

مُكثف الدرس 1 التكامل غير المحدود
Indefinite Integral

الاقتران الأصلي

إذا كان $F(x)$ اقترانًا أصليًّا للاقتران المتصل $f(x)$، فإنَّ أيَّ اقتران أصلي آخر للاقتران $f(x)$ يُكتَب في صورة: $G(x) = F(x) + C$، حيث C ثابت: $f(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C]$

1)الاقتران الأصلي للاقتران (2x) يعني : **ما هو الاقتران الذي مشتقته تساوي (2x)** ؟

والجواب (x^2) أو $(x^2 + 4)$ أو $(x^2 - 3)$ ... وباختصار نكتب مقداراً ثابتاً رمزه (C) : $(x^2 + c)$

أتدرّب وأحُلّ المسائل أجد اقترانًا أصليًّا لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

1) $f(x) = x^7$ 3) $f(x) = -10$ 4) $f(x) = 8x$

1	$f(x) = x^7$	$G(x) = \frac{1}{8}x^8 + C$
3	$f(x) = -10$	$G(x) = -10x + C$
4	$f(x) = 8x$	$G(x) = 4x^2 + C$

2)التكامل غير المحدود:

$$\int a\,x^n\,dx = \frac{a\,x^{n+1}}{n+1} + c = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c \quad , \quad n \neq -1$$

يمكن توزيع التكامل في حالتي الجمع والطرح فقط ولكن لا يمكن ذلك عند الضرب أو القسمة

فإذا كان هناك تكامل لحاصل ضرب اقترانين فيجب إيجاد حاصل ضربهما أولاً ثم توزيع التكامل على الحدود الناتجة

ملاحظة : هناك حالتان لا يمكن فيهما إجراء التكامل مباشرةً (نحتاج إلى خطوة تجهيز) وهما :

1) x في المقام (دائماً نرفعها إلى البسط ونعكس إشارة قوتها بشرط قوتها ≠ 1)

2) x تحت الجذر (دائماً نحولها إلى قوة كسرية)

أتحقق من فهمي 11 أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int 6\,dx$ b) $\int x^8\,dx$ c) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$ d) $\int \frac{1}{x^5}\,dx$

أتحقق من فهمي صفحة 11

a	$\int 6dx = 6x + C$
b	$\int x^8 dx = \frac{1}{8+1}x^{8+1} + C = \frac{1}{9}x^9 + C$
c	$\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$
d	$\int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = -\frac{1}{4}x^{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$

أتحقّق من فهمي 13 أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \frac{x^4-8x^3}{x^2}\,dx$ b) $\int (3x+2)(x-1)\,dx$ c) $\int x(x^3-7)\,dx$

أتحقق من فهمي صفحة 13

a	$\int \frac{x^4-8x^3}{x^2}dx = \int\left(\frac{x^4}{x^2}-\frac{8x^3}{x^2}\right)dx = \int (x^2-8x)dx = \frac{1}{3}x^3-4x^2+C$
b	$\int (3x+2)(x-1)dx = \int (3x^2-3x+2x-2)dx = \int (3x^2-x-2)dx = x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+C$
c	$\int x(x^3-7)dx = \int (x^4-7x)dx = \frac{1}{5}x^5-\frac{7}{2}x^2+C$

أتدرّب وأحُلّ المسائل أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

8) $\int \frac{10}{\sqrt{x}}\,dx$ 12) $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\sqrt{x^3}\right)dx$ 16) $\int (x-1)^2\,dx$

8	$\int \frac{10}{\sqrt{x}}dx = \int 10x^{-\frac{1}{2}}dx = 20x^{\frac{1}{2}}+C = 20\sqrt{x}+C$
12	$\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\sqrt{x^3}\right)dx = \int \left(3x^{-\frac{1}{3}}-x^{\frac{3}{2}}\right)dx = \frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C = \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$
16	$\int (x-1)^2dx = \int (x^2-2x+1)dx = \frac{1}{3}x^3-x^2+x+C$

17) $\int \frac{x^3+8}{x+2}\,dx$ 18) $\int \sqrt{x}(x-1)\,dx$ 19) $\int (2x-3)(3x-1)\,dx$

17	$\int \frac{x^3+8}{x+2}dx = \int \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}dx = \int (x^2-2x+4)dx = \frac{1}{3}x^3-x^2+4x+C$
18	$\int \sqrt{x}(x-1)dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$
19	$\int (2x-3)(3x-1)dx = \int (6x^2-2x-9x+3)dx = 2x^3-\frac{11}{2}x^2+3x+C$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

16) $\int x\sqrt{x}\,dx$ 17) $\int \frac{x^2-1}{x-1}\,dx$ 18) $\int x^2(1-x^3)\,dx$

16	$\int x\sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$
17	$\int \frac{x^2-1}{x-1}dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}dx = \int (x+1)dx = \frac{1}{2}x^2+x+C$
18	$\int x^2(1-x^3)dx = \int (x^2-x^5)dx = \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^6+C$

وزارة أدبي 2023

1) إذا كان $f(x) = -7x^{-8}$ ، فإن أي اقتران أصلي للاقتران $f(x)$ يُكتب على الصورة:

a) $G(x) = -8x^{-7} + C$ b) $G(x) = x^{-8} + C$

c) $G(x) = -8x^{-9} + C$ d) $G(x) = x^{-7} + C$

2) $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx$ هو:

a) $3\sqrt[3]{x^2} + C$ b) $\sqrt[3]{x^2} + C$ c) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x^2} + C$ d) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2} + C$

3) $\int \frac{x^2-4}{x-2} dx$ هو:

a) $x^2 - 2x + C$ b) $x^2 + 2x + C$

c) $\frac{1}{2}x^2 + 2x + C$ d) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

وزارة أدبي تكميلي 2023

1) إذا كان $f(x) = -3x^{-4}$ ، فإن أي اقتران أصلي للاقتران $f(x)$ يكتب على الصورة:

a) $G(x) = \frac{1}{x^3} + C$ c) $G(x) = 3x^{-3} + C$

b) $G(x) = -\frac{1}{x^3} + C$ d) $G(x) = -3x^{-3} + C$

2) $\int \frac{7x-2x^2}{x} dx$ هو:

a) $7x - 2x^2 + C$ c) $\frac{7}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + C$

b) $7x - x^2 + C$ d) $\frac{7}{2}x - \frac{2}{3}x^2 + C$

3) $\int x(x^4 - 3)\, dx$ هو:

a) $\frac{1}{5}x^5 - 3x + C$ c) $\frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{2}x^2 + C$

b) $\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + C$ d) $\frac{1}{6}x^6 - 3x + C$

وزارة فندقي 2023

a) جد كلًا من التكاملات الآتية: 1) $\int \frac{6x^3-x^2+2}{x} dx$ (7 علامات)

وزارة فندقي تكميلي 2023

16- ناتج: $\int \frac{1}{x^2} dx$ هو:

a) $\frac{1}{x} + c$ c) $\frac{2}{x^3} + c$

b) $\frac{-2}{x^3} + c$ d) $-\frac{1}{x} + c$

a) جد كلًا من التكاملات الآتية: 1) $\int 4(3x+4)(2x-1)\, dx$

مُكثف

الدرس 2 الشرط الأوَّلي

Initial Condition

1) **قاعدة:** **التكامل عملية عكسية للتفاضل** ، أي أن التكامل يُلغي المشتقة الأولى و المشتقة الأولى تُلغي التكامل.

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

ميل المماس = المشتقة الأولى

$$\int f'(x)\,dx = f(x)$$

ملاحظة: نستخدم القاعدة حسب الحاجة أو حسب المطلوب في السؤال :

فإذا كان المُعطى هو المشتقة الأولى فإنا نكامل الطرفين لإلغاء المشتقة والحصول على قاعدة الاقتران ثم نجد قيمة الثابت c عن طريق الاستفادة من الشرط الأولي: $f(x_1) = y_1$ أو يمر في (x_1 , y_1)

وإذا كان المعطى هو تكامل المشتقة الأولى أو تكامل قاعدة الاقتران فإنا نشتق الطرفين لإلغاء التكامل والحصول على ما بداخله

أتحقق من فهمي 16 أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = 6x^2 + 5$، ومَرَّ منحناه بالنقطة $(1, 9)$

أتحقق من فهمي صفحة 16

$f(x) = 2x^3 + 5x + C$

$9 = 2(1)^3 + 5(1) + C \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = 2x^3 + 5x + 2$

أتدرّب وأحُلّ المسائل في كلٍّ ممّا يأتي المشـتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$.

أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

3 $f'(x) = 6x^2 - 4x + 2;\ (1, 9)$ **2** $f'(x) = x^2 - 4;\ (0, 7)$

2

$f(x) = \int (x^2 - 4)dx = \frac{1}{3}x^3 - 4x + C$

$7 = \frac{1}{3} \times (0)^3 - 4(0) + C \Rightarrow C = 7$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 7$

3

$f(x) = \int (6x^2 - 4x + 2)dx$

$= 2x^3 - 2x^2 + 2x + C$

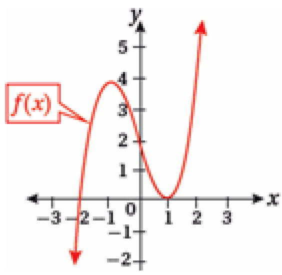
$9 = 2(1)^3 - 2(1)^2 + 2(1) + C$

$C = 7$

$f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x + 7$

9 يُبيِّن الشـكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$، حيث: $f'(x) = 3x^2 - 3$.

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$.



9

منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0, 2)$ إذن: $f(0) = 2$

$f(x) = \int (3x^2 - 3)dx = x^3 - 3x + C$

$2 = (0)^3 - 3(0) + C \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 2$

2) الشرط الأوَّلي: الحركة في مسار مستقيم

اقتـران الموقع هو اقتران أصلي لاقتران السـرعة المتجهة ؛ $s'(t) = v(t)$

واقتران السرعة المتجهة هو اقتران أصلي لاقتران التسارع ؛ $v'(t) = a(t)$

باختصار : تكامل (التسارع) = السرعة ... تكامل (السرعة) = الموقع (المسافة)

أتحقَّق من فهمي 18

يتحرَّك جُسَـيْم في مسار مسـتقيم، وتعطى سـرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 36t - 3t^2$، حيث t الزمن بالثواني، و v سـرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية.

إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

أتحقق من فهمي صفحة 18

$s(t) = \int v(t)dt = \int (36t - 3t^2)dt = 18t^2 - t^3 + C$

$0 = 18(0)^2 - (0)^3 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(t) = 18t^2 - t^3 \Rightarrow s(3) = 18(3)^2 - (3)^3 = 135$

إذن، موقع الجسيم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة هو: $135\ m$

أتحقَّق من فهمي 20

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسـارعه بالاقتران: $a(t) = 4t - 4$، حيث t الزمن بالثواني، و a تسـارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَـيْم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها 5 m/s، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

أتحقق من فهمي صفحة 20

$v(t) = \int a(t)dt = \int (4t - 4)dt = 2t^2 - 4t + C_1$

$v(0) = 5 \Rightarrow 5 = 2(0)^2 - 4(0) + C_1 \Rightarrow C_1 = 5 \Rightarrow v(t) = 2t^2 - 4t + 5$

$s(t) = \int v(t)dt = \int (2t^2 - 4t + 5)dt = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 5t + C_2$

بدأ حركته من نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$ ⇐ $C_2 = 0$

$s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 5t \Rightarrow s(3) = \frac{2}{3}(3)^3 - 2(3)^2 + 5(3) = 15$

7 إذا كان ميـل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $f'(x) = \sqrt{x}$، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$، علمًا بأنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(9, 25)$.

9 إذا كان ميـل المماس لمنحنـى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 8$، ومَرَّ منحناهـا بنقطة الأصل، فأجد الإحداثي x لجميع نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x، مُبرِّرًا إجابتي.

7 $f(x) = \int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C \Rightarrow f(9) = 25 \Rightarrow \frac{54}{3} + C = 25 \Rightarrow C = 7 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 7$

9 $y = \int (3x^2 - 12x + 8)\,dx = x^3 - 6x^2 + 8x + C$

$0 - 0 + 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y = x^3 - 6x^2 + 8x$

لإيجاد الإحداثيات لنقاط تقاطع المنحنى مع محور x نعوض $y = 0$ في قاعدة العلاقة:

$0 = x^3 - 6x^2 + 8x \Rightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0 \Rightarrow x(x-2)(x-4) = 0$

$\Rightarrow x = 0, x = 2, x = 4$

وزارة أدبي 2023

4) إذا كان $f'(x) = 12x^2 + 4x$ ، فإن قاعدة الاقتران $f(x)$ الذي يمر منحناه بالنقطة $(1,9)$ هي:

a) $f(x) = 12x^3 + 4x^2 + 5$ c) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3$

b) $f(x) = 12x^3 + 4x^2 - 5$ d) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 3$

a) يتحرك جُسيم في مسار مستقيم وتُعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 6t^2 - 4$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية، إذا كان الموقع الابتدائي للجُسيم هو 4m ، فجد موقع الجُسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة. (12 علامة)

وزارة فندقي 2023

22- إذا كان: $f'(x) = 3x^2 - 4x$ ، وكان منحنى الاقتران $f(x)$ يمر بالنقطة $(1,4)$، فإنّ قاعدة الاقتران $f(x)$ هي:

a) $x^3 - 2x^2 + 5$ b) $x^3 - 2x^2 + 3$ c) $x^3 - 2x^2 - 5$ d) $x^3 + 2x^2 + 3$

وزارة أدبي 2023 تكميلي

4) إذا كان $f'(x) = 3x^2 - 4$ ، فإن قاعدة الاقتران $f(x)$ الذي يمر منحناه بالنقطة $(1,0)$ هي:

a) $f(x) = x^3 - 4x + 3$ c) $f(x) = x^3 - 4x + 1$

b) $f(x) = x^3 - 4x - 3$ d) $f(x) = x^3 - 4x - 1$

8) يتغير عدد السكان في إحدى القرى شهريًا بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران $P'(t) = 2t^{\frac{1}{2}}$ ، حيث t عدد الأشهر من الآن، $P(t)$ عدد السكان. مقدار الزيادة في عدد سكان القرية في الأشهر التسعة القادمة يساوي:

a) 6 b) 3 c) 36 d) 18

a) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو $f'(x) = 4\sqrt[3]{x} - 2x$ ، فما قاعدة الاقتران $f(x)$ علمًا بأن منحناه يمر بالنقطة $(1,12)$ ؟ (8 علامات)

b) يتحرك جُسيم في مسار مستقيم، ويُعطى تسارعه بالاقتران $a(t) = 2t + 1$ ، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسيم هو 5m ، وكانت سرعته المتجهة هي 4m/s بعد ثانية واحدة من بدء الحركة، فجد موقع الجُسيم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة. (11 علامة)

وزارة فندقي 2023 تكميلي

22- إذا كان الاقتران: $C'(x) = 6x^2 - 20x + 20$ يُمثل التكلفة الحدية لإنتاج إحدى الشركات من الألعاب الإلكترونية، حيث x عدد الألعاب الإلكترونية المُنتجة، وكانت تكلفة إنتاج اللعبة الإلكترونية الواحدة JD35 ، فإنّ اقتران التكلفة $C(x)$ لإنتاج x لعبة إلكترونية هو:

a) $C(x) = 6x^3 - 20x^2 + 20x + 23$ c) $C(x) = 2x^3 - 10x^2 + 20x + 23$

b) $C(x) = 6x^3 - 20x^2 + 20x - 23$ d) $C(x) = 2x^3 - 10x^2 + 20x - 23$

مُكثف

الدرس 3 التكامل المحدود
Definite Integral

1) إيجاد قيمة تكامل محدود :

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

التكامل المحدود إذا كان الاقتـران $f(x)$ متصلًا علـى الفترة $[a, b]$،
وكان $F(x)$ يُمثِّل أيَّ اقتران أصلي للاقتران $f(x)$، فإنَّ: $\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

أتدرّب وأحُلّ المسائل أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

7) $\int_1^3 (x-2)(x+2)\ dx$

8) $\int_{-3}^3 (9-x^2)\ dx$

9) $\int_1^4 \frac{2+\sqrt{x}}{x^2}\ dx$ 3) dx

7: $\int_1^3 (x-2)(x+2)dx = \int_1^3 (x^2-4)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big|_1^3 = \frac{2}{3}$

8: $\int_{-3}^3 (9-x^2)dx = \left(9x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-3}^3 = \left(9(3) - \frac{1}{3}(3)^3\right) - \left(9(-3) - \frac{1}{3}(-3)^3\right) = 36$

9: $\int_1^4 \frac{2+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int_1^4 \left(\frac{2}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)dx = \int_1^4 \left(2x^{-2} + x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = \left(-2x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^4$

$= \left(\frac{-2}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)\Big|_1^4 = \left(\frac{-2}{4} - \frac{2}{\sqrt{4}}\right) - \left(\frac{-2}{1} - \frac{2}{\sqrt{1}}\right) = \frac{5}{2}$

أتحقّق من فهمي 24 إذا كان: $\int_0^k 6x^2\ dx = 2$، فأجد قيمة الثابت k.

أتحقق من فهمي صفحة 24

$\int_0^k 6x^2 dx = 2 \Rightarrow 2x^3\Big|_0^k = 2 \Rightarrow 2k^3 - 2(0)^3 = 2 \Rightarrow 2k^3 = 2 \Rightarrow k = 1$

أتدرّب وأحُلّ المسائل

24) إذا كان: $\int_1^m (6x-10)\ dx = 4$، فأجد قيمة الثابت m.

29) تحدٍّ: إذا كان: $\int_1^5 (2ax+7)\ dx = 4a^2$، فأجد قيمة الثابت a.

24: $\int_1^m (6x-10)dx = 4 \Rightarrow (3x^2 - 10x)\Big|_1^m = 4$

$(3m^2 - 10m) - \left(3(1)^2 - 10(1)\right) = 4 \Rightarrow 3m^2 - 10m + 7 = 4$

$3m^2 - 10m + 3 = 0 \Rightarrow (3m-1)(m-3) = 0$

$3m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$, $m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$

29: $\int_1^5 (2ax+7)\ dx = 4a^2 \Rightarrow (ax^2 + 7x)\Big|_1^5 = 4a^2$

$\left(a(5)^2 + 7(5)\right) - \left(a(1)^2 + 7(1)\right) = 4a^2 \Rightarrow 25a + 35 - a - 7 = 4a^2$

$24a + 28 = 4a^2 \Rightarrow 4a^2 - 24a - 28 = 0 \Rightarrow a^2 - 6a - 7 = (a-7)(a+1) = 0$

$a - 7 = 0 \Rightarrow a = 7$, $a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

3) خصائص التكامل المحدود :

خصائص التكامل المحدود إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين متصلين على الفترة $[a, b]$، وكان k ثابتًا، فإنَّ:	3 $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
1 $\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$	4 $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
2 $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$	5 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

أتحقَّق من فهمي 26

إذا كان: $\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = 5, \int_{4}^{1} f(x)\ dx = 2, \int_{-1}^{1} h(x)\ dx = 7$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\int_{-1}^{1} (f(x) + 3h(x))\ dx$ b) $\int_{-1}^{4} f(x)\ dx$ c) $\int_{1}^{-1} 4h(x)\ dx$

أتحقق من فهمي صفحة 26

a	$\int_{-1}^{1}(f(x)+3h(x))dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} 3h(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + 3\int_{-1}^{1} h(x)dx = 5+3(7) = 26$
b	$\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{4}^{1} f(x)dx = 5-2 = 3$
c	$\int_{1}^{-1} 4h(x)dx = -\int_{-1}^{1} 4h(x)dx = -4\int_{-1}^{1} h(x)dx = -4(7) = -28$

إذا كان: $\int_{1}^{2} f(x)\ dx = -4, \int_{1}^{5} f(x)\ dx = 6, \int_{1}^{5} g(x)\ dx = 8$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

18 $\int_{2}^{2} g(x)\ dx$

19 $\int_{5}^{1} (g(x) - 2)\ dx$

20 $\int_{1}^{2} (3f(x) + x)\ dx$

21 $\int_{2}^{5} f(x)\ dx$

22 $\int_{1}^{5} \big(f(x) - g(x)\big)\ dx$

23 $\int_{1}^{5} \big(4f(x) + g(x)\big)\ dx$

18	$\int_{2}^{2} g(x)dx = 0$
19	$\int_{5}^{1} (g(x)-2)dx = \int_{5}^{1} g(x)dx - \int_{5}^{1} 2dx = (-8) - ((2x)\vert_5^1)$ $= (-8) - \big((2(1)) - (2(5))\big) = 0$
20	$\int_{1}^{2} (3f(x)+x)dx = \int_{1}^{2} 3f(x)dx + \int_{1}^{2} xdx = 3\int_{1}^{2} f(x)dx + \left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big\vert_1^2$ $= 3(-4) + \left(\frac{1}{2}(2)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2\right) = -\frac{21}{2}$
21	$\int_{2}^{5} f(x)dx = \int_{2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{5} f(x)dx = -(-4) + 6 = 10$
22	$\int_{1}^{5} (f(x)-g(x))dx = \int_{1}^{5} f(x)dx - \int_{1}^{5} g(x)dx = 6-8 = -2$
23	$\int_{1}^{5} (4f(x)+g(x))dx = \int_{1}^{5} 4f(x)dx + \int_{1}^{5} g(x)dx$ $= 4\int_{1}^{5} f(x)dx + \int_{1}^{5} g(x)dx = 4(6) + 8 = 32$

4) تكاملات الاقترانات المُتشعِّبة: إذا احتوت فترة التكامل على قواعد مُختلِفة للاقتران؛ نُجزِّئ التكامل عند نقاط التشعُّب

أتحقَّق من فهمي 27

a) إذا كان: $f(x)=\begin{cases}1+x &, x<1\\ 2x &, x\geq 1\end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

b) إذا كان: $f(x)=|x-3|$، فأجد قيمة: $\int_{-1}^{4} f(x)dx$.

أتحقق من فهمي صفحة 27

a بما أن الاقتران تشعب عند 1، فإنني أجزئ التكامل عنده:

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-2}^{1}(1+x)dx+\int_{1}^{2}2x\,dx$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^{1}+x^2\Big|_{1}^{2}=\left(1+\frac{1}{2}(1)^2\right)-\left(-2+\frac{1}{2}(-2)^2\right)+(2^2-1^2)=\frac{9}{2}$$

b أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة:

$$f(x)=|x-3|=\begin{cases}3-x, & x<3\\ x-3, & x\geq 3\end{cases}$$

بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده:

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx=\int_{-1}^{3}(3-x)dx+\int_{3}^{4}(x-3)dx=\left(3x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{3}+\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)\Big|_{3}^{4}$$

$$=\left(3(3)-\frac{1}{2}(3)^2\right)-\left(3(-1)-\frac{1}{2}(-1)^2\right)+\left(\frac{1}{2}(4)^2-3(4)\right)-\left(\frac{1}{2}(3)^2-3(3)\right)=\frac{17}{2}$$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

17 إذا كان: $f(x)=\begin{cases}-x^2+5 &, x<0\\ x+5 &, x\geq 0\end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$.

13 $\int_{-1}^{4}|3x-6|\,dx$

13 $\int_{-1}^{4}|3x-6|dx$

بما أن الاقتران تشعب عند 2 فإنني أجزئ التكامل عنده

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة:

$$|3x-6|=\begin{cases}6-3x, & x<2\\ 3x-6, & x\geq 2\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{4}|3x-6|dx=\int_{-1}^{2}(6-3x)dx+\int_{2}^{4}(3x-6)dx=\left(6x-\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{2}+\left(\frac{3}{2}x^2-6x\right)\Big|_{2}^{4}$$

$$=\left(6(2)-\frac{3}{2}(2)^2\right)-\left(6(-1)-\frac{3}{2}(-1)^2\right)+\left(\frac{3}{2}(4)^2-6(4)\right)-\left(\frac{3}{2}(2)^2-6(2)\right)=\frac{39}{2}$$

17

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx=\int_{-1}^{0}(-x^2+5)dx+\int_{0}^{2}(x+5)dx$$

$$=\left(-\frac{1}{3}x^3+5x\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{1}{2}x^2+5x\right)\Big|_{0}^{2}=\frac{50}{3}$$

5) التكامل المحدود، ومقدار التغيُّر

المشتقة هي مُعدَّل تغيُّر كمِّية بالنسبة إلى كمِّية أُخرى عند لحظة ما.مُعدَّل تغيُّر f(x) بالنسبة إلى المُتغيِّر x هو f '(x) .
ولكنْ، يكون مُعدَّل التغيُّر f '(x) معلومًا في بعض الأحيان، ويتعيَّن معرفة مقدار التغيُّر في f(x)
عند تغيُّر x من x = a إلى x = b ، الذي يُعبَّر عنه بالمقدار: f(b) – f(a) ، عندئذٍ يُمكِن استعمال التكامل المحدود
لإيجاد مقدار التغيُّر على النحو الآتي:

مقدار التغيُّر إذا كان $f'(x)$ متصلًا على الفترة $[a, b]$، فإنَّ مقدار التغيُّر في $f(x)$ عند تغيُّر x من $x = a$ إلى $x = b$ هو: $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx$

مثال: يُمثِّل الاقتران: P'(x) = 165 - 0.1x الربح الحدِّي الشهري(بالدينار) لكل جهاز لوحي تبيعه إحدى الشركات،
حيث x عدد الأجهزة اللوحية المَبيعة شهريًّا، وP(x) ربح بيع x قطعة شهريًّا بالدينار.
1) جد مقدار التغيُّر في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية إلى 1100 جهاز،
علمًا بأنَّ عدد الأجهزة المَبيعة الآن هو 1000 جهاز.

$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(x)\, dx$$

$$P(1100) - P(1000) = \int_{1000}^{1100} (165 - 0.1x)\, dx = (165x - 0.05x^2)\Big|_{1000}^{1100}$$

$$= (165(1100) - 0.05(1100)^2) - (165(1000) - 0.05(1000)^2)$$

$$= 6000$$

25 تغيُّر التكلفة: يُمثِّل الاقتران: $C'(x) = 6x + 1$ التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل قطعة تُنتِجها إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتَجة، و$C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد مقدار التغيُّر في التكلفة عند زيادة الشركة إنتاجها من 10 قطع إلى 20 قطعة شهريًّا.

25
$$C'(x) = 6x + 1$$

$$f(b) - f(a) = \int_a^b C'(x)dx$$

$$f(20) - f(10) = \int_{10}^{20} (6x+1)dx = (3x^2 + x)\Big|_{10}^{20}$$

$$= (3(20)^2 + 20) - (3(10)^2 + 10) = 910$$

26 تلوُّث: يُلوِّث مصنعٌ بحيرةً بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $N'(t) = 280t^{3/2}$، حيث t عدد الأشهر منذ الآن، و$N(t)$ عدد الكيلوغرامات من المُلوِّثات التي يطرحها المصنع في البحيرة. كم كيلوغرامًا من المُلوِّثات يدخل البحيرة منذ الآن حتى 4 أشهر؟

26
$$N'(t) = 280t^{\frac{3}{2}}$$

$$N(t) = \int_0^4 280\, t^{\frac{3}{2}}\, dx = 112\, t^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4$$

$$= 112\sqrt{4^5} - 112\sqrt{0^5} = 3584$$

وزارة أدبي 2023

* إذا كان $\int_{-3}^{2} g(x)dx = 2$ ، $\int_{-3}^{2} f(x)dx = -5$ ، فأجب عن الفقرتين 5 وَ6 الآتيتين:

5) قيمة $\int_{-3}^{2}\left(f(x) - 2g(x)\right)dx$ تساوي:

a) -1 b) 1 c) -9 d) 9

6) قيمة $\int_{2}^{-3}(f(x) + 4)dx$ تساوي:

a) -25 b) 25 c) 15 d) -15

7) إذا كان $\int_{0}^{k} 6x^2dx = 16$ ، فإن قيمة الثابت k تساوي:

a) -2 b) 2 c) -4 d) 4

13) قيمة $\int_{0}^{1} 12(x-1)^5dx$ هي:

a) 2 b) -2 c) 4 d) -4

b) إذا كان $f(x) = |x-5|$ ، فجد $\int_{0}^{6} f(x)dx$ (9 علامات)

b) يُمثل الاقتران $R'(x) = 200 - 0.2x$ الربح الحدي الشهري (بالدينار) لكل قطعة من منتج تبيعه إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج شهريًا، و$R(x)$ ربح بيع x قطعة شهريًّا من المنتج بالدينار. جد مقدار التغير في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية إلى 120 قطعة، علمًا بأن عدد القطع المبيعة الآن هو 100 قطعة. (10 علامات)

وزارة أدبي 2023 تكميلي

* إذا كان $\int_{-1}^{2} f(x)dx = -2$, $\int_{-1}^{3} f(x)dx = -1$, $\int_{3}^{-1} g(x)dx = 5$ ، فأجب عن الفقرتين 5 و 6 الآتيتين:

5) قيمة $\int_{-1}^{3}(2f(x) - g(x))dx$ تساوي:

a) -7 b) -6 c) 3 d) 4

6) قيمة $\int_{2}^{3}(f(x) + 3)dx$ تساوي:

a) 0 b) 2 c) 3 d) 4

7) إذا كان $\int_{k}^{2k-1} 2\,dx = 18$ ، فإن قيمة الثابت k تساوي:

a) 10 b) -10
c) 8 d) -8

b) إذا كان $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 10 &, \quad x < 3 \\ 2x + 11 &, \quad x \geq 3 \end{cases}$ ، أوجد $\int_{0}^{4} f(x)dx$ (9 علامات)

وزارة فندقي 2023

16- قيمة: $\int_0^1 6\sqrt{x}\,dx$ هي:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) 4 d) 9

17- قيمة: $\int_0^1 (3x^2-2x)\,dx$ هي:

a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\frac{1}{4}$ d) 0

18- إذا كان: $\int_1^k 3\,dx = 24$ ، فإنّ قيمة الثابت k هي:

a) 8 b) 9 c) 6 d) 7

19- إذا كان: $\int_3^4 g(x)\,dx = -2$ ، فإنّ قيمة $\int_4^3 6\,g(x)\,dx$ هي:

a) -6 b) 2 c) -12 d) 12

23- إذا كان: $\int_{-1}^2 f'(x)\,dx = -6$ ، وكان $f(-1)=3$ ، فإنّ قيمة $f(2)$ هي:

a) 3 b) -6

c) -3 d) 6

24- إذا كان: $f(x)=\begin{cases}5x^4 & , x<1\\ 5 & , x\geq 1\end{cases}$ ، فإنّ قيمة $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ هي:

a) 0 c) 10

b) 2 d) 28

c) إذا كان: $\int_0^3 f(x)\,dx=-2$, $\int_0^7 f(x)\,dx = 6$, $\int_0^7 g(x)\,dx=5$ فجد قيمة كل ممّا يأتي:(11علامة)

1) $\int_0^7 (f(x)-g(x))\,dx$ 2) $\int_0^3 (2f(x)+4)\,dx$ 3) $\int_3^7 f(x)\,dx$

وزارة فندقي 2023 تكميلي

17- قيمة: $\int_1^3 (8x+3)\,dx$ هي:

a) 11 b) 20 c) 23 d) 38

18- إذا كان: $\int_{-1}^5 k\,dx = -36$ ، فإنّ قيمة الثابت k هي:

a) 9 b) -9 c) -6 d) 6

19- إذا كان: $\int_b^a g(x)\,dx = -15$ ، فإنّ قيمة $\int_a^b \frac{g(x)}{3}\,dx$ هي:

a) -5 b) 5 c) 45 d) -45

23- إذا كان: $\int_{-2}^2 f'(x)\,dx = 7$ ، وكان $f(2)=-7$ ، فإنّ قيمة $f(-2)$ هي:

a) -14 b) 14

c) -7 d) 7

c) إذا كان: $\int_2^8 g(x)\,dx = 12$, $\int_2^8 f(x)\,dx = 4$, $\int_2^5 f(x)\,dx=-4$ فجد قيمة كل ممّا يأتي:
(11 علامة)

1) $\int_2^8 (2f(x)-\frac{1}{4}g(x))\,dx$ 2) $\int_5^2 (2-f(x))\,dx$ 3) $\int_5^8 f(x)\,dx$

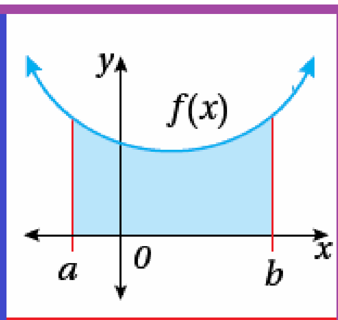
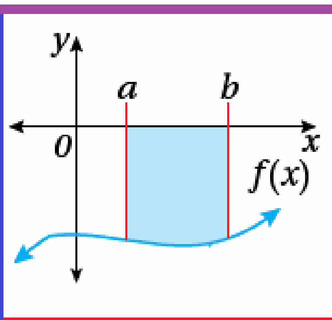
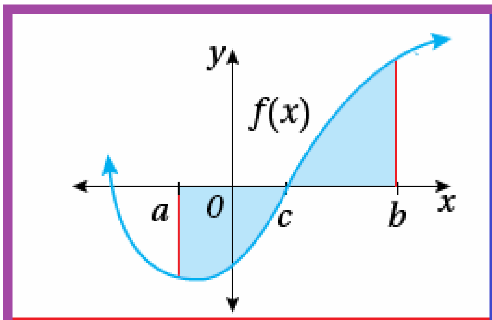
الدرس 4 المساحة Area

مُكثف

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران f والمحور(x) والمستقيمين x= a ,x= b تساوي $\int_a^b f(x)\,dx$

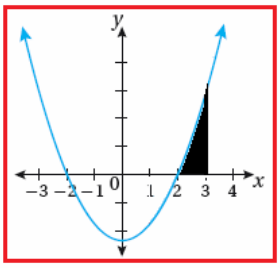
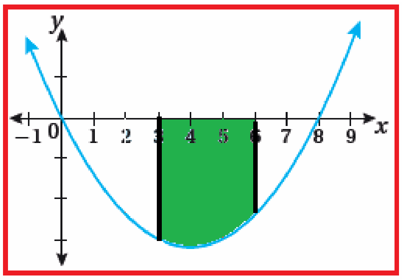
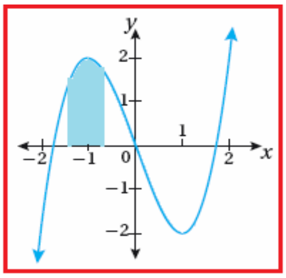
وإذا كانت المنطقة تحت المحور(x) : تكون المساحة معكوس ناتج التكامل (نأخذ القيمة المطلقة للناتج)

وإذا كان هناك جزء من المنطقة فوق المحور(x) وجزء تحته : نجزئ التكامل ونجد كل منطقة على حدة

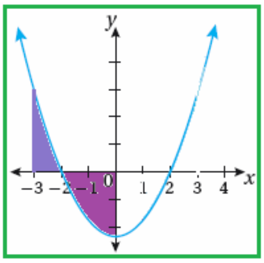
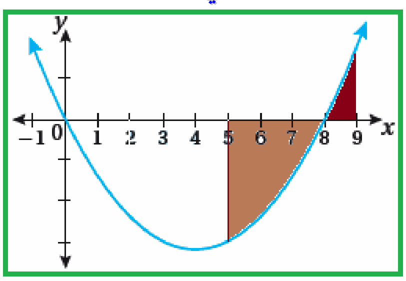
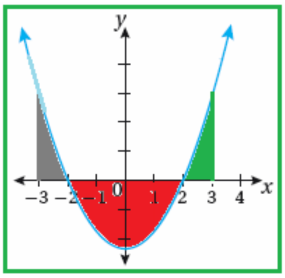
حالات المساحة	المنطقة المطلوبة فوق (x)	المنطقة المطلوبة تحت (x)	جزء من المنطقة فوق وآخر تحت (x)
			
	$A=\int_a^b f(x)\,dx$	$A=-\int_a^b f(x)\,dx$	$A=-\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

الخطوة الأولى عند إيجاد المساحة هي : إيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x في الفترة المعطاة (إنْ وُجِدت أو أعطيت فترة) ،
وذلك بمُساواة قاعدة الاقتران بالصفر، ثم حَلُّ المعادلة الناتجة ، وهناك احتمالان :

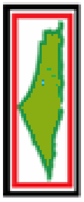
1) صفر (أو أصفار) الاقتران لا تنتمي إلى الفترة المطلوبة : في هذه الحالة لا نجزئ التكامل

2) صفر أو أحد أصفار الاقتران ينتمي إلى الفترة المطلوبة : في هذه الحالة نجزئ التكامل ونجد كل تكامل على حدة

1) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، وتقع فوق هذا المحور



أتحقّق من فهمي 33 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x + 3$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = 3$.

أتحقق من فهمي صفحة 33

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = x + 3 = 0$

$\Rightarrow x = -3$ بما أن -3 لا تنتمي إلى الفترة $[-1, 3]$، إذن نهملها.

نختار عددًا ضمن الفترة $[-1, 3]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0) = 0 + 3 = 3 > 0$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x

$$A = \int_{-1}^{3} (x + 1)dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{3} = \left(\frac{1}{2}(3)^2 + 3\right) - \left(\frac{1}{2}(-1)^2 - 1\right) = 8$$

2) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، وتقع أسفل هذا المحور

أتحقّق من فهمي 34 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 4$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = 1$.

أتحقق من فهمي صفحة 34

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = x^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow x = 2 , x = -2$ بما كلا العددين $-2, 2$ لا ينتمي إلى الفترة $[-1, 1]$، إذن نهملها

نختار عددًا ضمن الفترة $[-1, 1]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(0) = 0 - 4 = -4 < 0$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x

$$A = -\int_{-1}^{1} (x^2 - 4)dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big|_{-1}^{1} = -\left(\left(\frac{1}{3}(1)^3 - 4(1)\right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 - 4(-1)\right)\right) = \frac{22}{3}$$

3) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، ولا تكون محدودة بمستقيمين

أتحقّق من فهمي 38

a) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 5x + 4$، والمحور x.

b) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 9x$، والمحور x.

أتحقق من فهمي صفحة 38 a

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = x^2 + 5x + 4 = 0$

$\Rightarrow (x + 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -4 , x = -1$ هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عددًا ضمن الفترة $[-4, -1]$، وليكن -2 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$f(-2) = (-2)^2 + 5(-2) + 4 = -2 < 0$ إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور

$$A = -\int_{-4}^{-1} (x^2 + 5x + 4)dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x\right)\Big|_{-4}^{-1} = \frac{9}{2}$$

أتحقق من فهمي صفحة 38 b

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = x^3 - 9x = 0$

$\Rightarrow x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x(x + 3)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 , x = -3 , x = 3$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عددًا ضمن الفترة $[-3, 0]$، وليكن -1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(-1) = 8 > 0 \Longleftarrow$ فوق

نختار عددًا ضمن الفترة $[0, 3]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1) = -8 < 0 \Longleftarrow$ تحت

$$A = \int_{-3}^{0} (x^3 - 9x)dx - \int_{0}^{3} (x^3 - 9x)dx = \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right)\Big|_{-3}^{0} - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{3} = \frac{81}{2}$$

4) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، ويقع أحد جزأيها فوق المحور x ، ويقع الجزء الآخر أسفل هذا المحور

أتحقّق من فهمي 36

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$f(x) = x^2 + 2x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = -3$.

أتحقق من فهمي صفحة 36

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = x^2 + 2x = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0\ , x = -2$

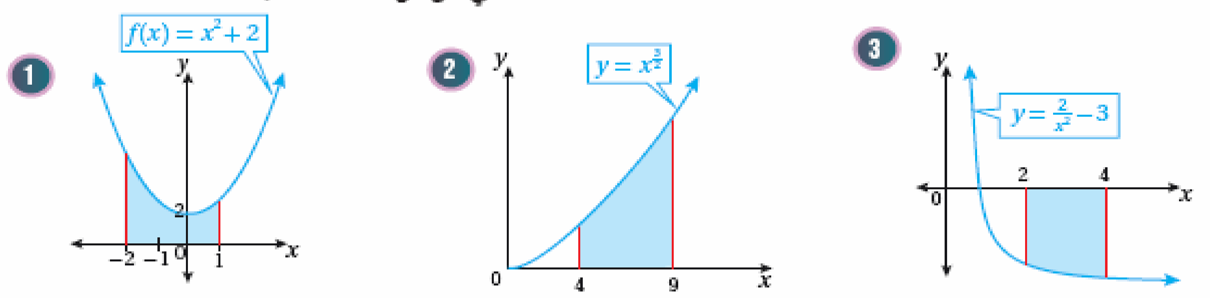
بما أن العدد -2 ينتمي إلى الفترة $[-3, -1]$، إذن نقسم الفترة إلى فترتين: $[-2, -1]$ و $[-3, -2]$

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow$ تحت $\qquad f\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{4} > 0 \Rightarrow$ فوق

$$A = \int_{-3}^{-2} (x^2 + 2x)dx - \int_{-2}^{-1} (x^2 + 2x)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big|_{-3}^{-2} - \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)\Big|_{-2}^{-1} = 2$$

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:



1
$$A = \int_{-2}^{1} (x^2 + 2)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{3}(1)^3 + 2(1)\right) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + 2(-2)\right) = 9$$

2
$$A = \int_{4}^{9} x^{\frac{3}{2}} dx = \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_{4}^{9} = \left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{x^5}\right)\Big|_{4}^{9} = \left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{9^5}\right) - \left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{4^5}\right) = \frac{422}{5}$$

3
$$A = -\int_{2}^{4} \left(\frac{2}{x^2} - 3\right) dx = -\int_{2}^{4} (2x^{-2} - 3)dx = \int_{2}^{4} (-2x^{-2} + 3)dx$$
$$= (2x^{-1} + 3x)\Big|_{2}^{4} = \left(\frac{2}{x} + 3x\right)\Big|_{2}^{4} = \left(\frac{2}{4} + 3(4)\right) - \left(\frac{2}{2} + 3(2)\right) = \frac{11}{2}$$

7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = 2$.

7 $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة: $f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x + 2 = 0$

نحسب المميز: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(2) = -20$

بما أن المميز سالب، إذن لا يوجد حلول لهذه المعادلة، وتكون حدود التكامل هي 0 و 2

نختار عددًا ضمن الفترة $[0, 2]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران: $f(1) = 3(1)^2 - 2(1) = 1 > 0$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0, 2]$

$$A = \int_{0}^{2} (3x^2 - 2x + 2)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right)\Big|_{0}^{2}$$
$$= \left(\frac{1}{3}(2)^3 - (2)^2 + 2(2)\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3 - (0)^2 + 2(0)\right) = \frac{8}{3}$$

8 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x)=9-x^2$، والمحور x.

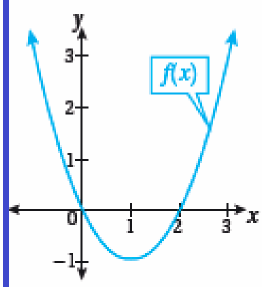
8	$f(x)=9-x^2$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:
	$f(x)=0 \Rightarrow 9-x^2=0 \Rightarrow (3+x)(3-x)=0 \Rightarrow x=-3\,, x=3$ حدود التكامل
	$f(0)=9-(0)^2=9>0$ نختار عددًا ضمن الفترة $[-3,3]$، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:
	بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[-3,3]$
	$A=\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx=\left(9x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big\vert_{-3}^{3}=\left(9(3)-\frac{1}{3}(3)^3\right)-\left(9(-3)-\frac{1}{3}(-3)^3\right)=36$

9 أجد مســاحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x)=x^3+4x$، والمحور x،

والمســتقيمين: $x=-1$، و $x=2$.

9	$f(x)=x^3+4x$ أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:
	$f(x)=0 \Rightarrow x^3+4x=0 \Rightarrow x(x^2+4)=0 \Rightarrow x=0$
	مميز العبارة التربيعية (x^2+4) سالب، لذا لا أصفار لها.
	$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3+4\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{17}{2}<0$ نختار عددًا ضمن الفترة $[-1,0]$، وليكن $-\frac{1}{2}$ ونعوضه
	بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[-1,0]$
	$f(1)=(1)^3+4(1)=5>0$ نختار عددًا ضمن الفترة $[0,2]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران:
	بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0,2]$
	$A=-\int_{-1}^{0}(x^3+4x)dx+\int_{0}^{2}(x^3+4x)dx=\int_{-1}^{0}(-x^3-4x)dx+\int_{0}^{2}(x^3+4x)dx$
	$=\left(-\frac{1}{4}x^4-2x^2\right)\Big\vert_{-1}^{0}+\left(\frac{1}{4}x^4+2x^2\right)\Big\vert_{0}^{2}=\frac{25}{4}$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x)=x^2-2x$:



13 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x.

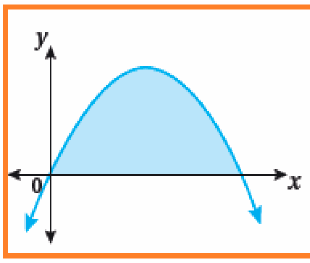
14 أجد مســاحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x، والمستقيم $x=3$.

15 أجد مســاحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x، والمستقيم $x=-1$.

13	$f(x)=x^2-2x$ حسب الشكل، فإن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة $[0,2]$
	$A=-\int_{0}^{2}(x^2-2x)dx=\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx=\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Big\vert_{0}^{2}=\frac{4}{3}$
14	$A=\int_{2}^{3}(x^2-2x)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big\vert_{2}^{3}=\left((9-9)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right)=\frac{4}{3}$
15	$A=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big\vert_{-1}^{0}=(0)-\left(-\frac{1}{3}-1\right)=\frac{4}{3}$

مهارات التفكير العليا

17 تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $y = kx(4-x)$. إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x هي 32 وحدة مربعة، فأجد قيمة الثابت k.



17

$y = kx(4-x)$

أولا نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

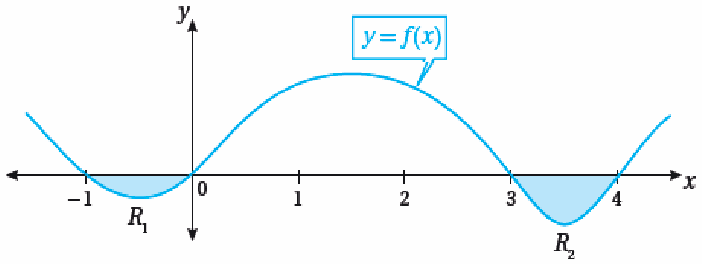
$y = 0 \Rightarrow \ kx(4-x) = 0 \Rightarrow \ x = 0 \ or \ x = 4$

حسب الشكل، فإن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة $[0, 4]$

$$A = \int_0^4 (kx(4-x))dx = \int_0^4 (4kx - kx^2)dx = \left(2kx^2 - \frac{k}{3}x^3\right)\Big|_0^4$$

$$= \left(2k(4)^2 - \frac{k}{3}(4)^3\right) - \left(2k(0)^2 - \frac{k}{3}(0)^3\right) = \frac{32}{3}k \Rightarrow \frac{32}{3}k = 32 \ \Rightarrow \ k = 3$$

18 تبرير: يُبيِّن الشكل التالي منحنى الاقتران $f(x)$. إذا كانت مساحة المنطقة R_1 هي وحدتين مربعتين، ومساحة المنطقة R_2 هي 3 وحدات مربعة، وكان: $\int_0^4 f(x)\,dx = 10$، فأجد $\int_{-1}^3 f(x)\,dx$، مُبرِّرًا إجابتي.



18

$$R_1 = 2 \ \Rightarrow -\int_{-1}^0 f(x)dx = 2 \ \Rightarrow \int_{-1}^0 f(x)dx = -2$$

$$R_2 = 3 \ \Rightarrow -\int_3^4 f(x)dx = 3 \Rightarrow \int_3^4 f(x)dx = -3$$

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx \Rightarrow 10 = \int_0^3 f(x)dx + (-3) \Rightarrow \int_0^3 f(x)dx = 13$$

$$\int_{-1}^3 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx = -2 + 13 = 11$$

7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 3$، والمحور x.

7

$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \quad \Rightarrow x = -1, x = 1$

بتعويض $x = 0$ نجد أن: $f(0) = 0 - 3 = -3 < 0$ أي أن المنحنى يقع تحت المحور x في الفترة [-1, 1]، ولذا نجد المساحة كالآتي:

$$A = -\int_{-1}^1 (3x^2 - 3)dx = \int_{-1}^1 (3 - 3x^2)dx$$

$$= (3x - x^3)\Big|_{-1}^1$$

$$= (3 - 1) - (-3 + 1) = 4$$

8 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 - 6x$، والمحور x.

$$x^3 - 5x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 5x - 6) = 0$$
$$\Rightarrow x(x-6)(x+1) = 0$$
$$\Rightarrow x = 0, x = 6, x = -1$$

بتعويض $x = 1$ نجد أن: $f(1) = 1 - 5 - 6 = -10 < 0$ أي أن المنحنى يقع تحت المحور x في الفترة $[0, 6]$، وبتعويض $x = -0.1$ نجد أن:

$$f(-0.1) = (-0.1)^3 - 3(-0.1)^2 - 6(-0.1) = -0.001 - 0.03 + 0.6 = 0.569 > 0$$

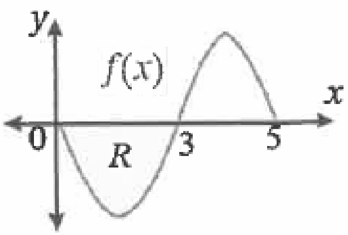
أي أن المنحنى يقع فوق المحور x في الفترة [-1, 0]، ولذا فإننا نجد المساحة على النحو الآتي:

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - 5x^2 - 6x)dx + \left(-\int_{0}^{6} (x^3 - 5x^2 - 6x)dx\right)$$
$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - 3x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 3x^2\right)\Big|_{0}^{6}$$
$$= (0) - \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{3} - 3\right) + (-324 + 360 + 108) - (0) = \frac{1741}{12}$$

8

وزارة أدبي 2023

8) يبين الشكل الآتي منحنى الاقتران $f(x)$ ، إذا كانت مساحة المنطقة R تساوي 5 وحدات مربعة، وكان $\int_0^5 f(x)dx = -3$ ، فإن قيمة $\int_3^5 f(x)dx$ تساوي:



a) -8　　c) -2

b) 8　　d) 2

9) التكامل المحدود الذي قيمته تساوي مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 9x - x^2$ والمحور x هو:

a) $\int_0^9 (9x - x^2)dx$　　b) $\int_9^0 (9x - x^2)dx$　　c) $\int_0^3 (9x - x^2)dx$　　d) $\int_3^0 (9x - x^2)dx$

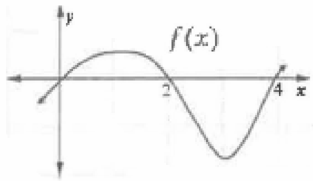
c) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^3 - 16x$ ، والمحور x . (11 علامة)

وزارة أدبي 2023 تكميلي

9) التكامل المحدود الذي قيمته تساوي مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = (x+1)(x-2)$ والمحور x هو:

a) $-\int_{-1}^{2} f(x)dx$ b) $\int_{-1}^{2} f(x)dx$ c) $\int_{-2}^{1} f(x)dx$ d) $-\int_{-2}^{1} f(x)dx$

10) يبين الشكل الآتي منحنى الاقتران $f(x)$. إذا كان $\int_0^2 f(x)dx = 5$ ، وكانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)$ ومحور x تساوي 12 وحدة مساحة ، فإن قيمة $\int_2^4 f(x)dx$ تساوي:

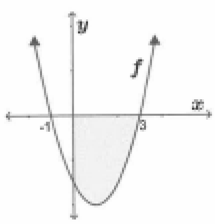


a) 7 b) -17 c) 17 d) -7

c) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 2x - x^2$ ، والمحور x والمستقيمين $x = 1$ و $x = 3$. (11 علامة)

وزارة فندقي 2023

25- التكامل الذي يعبّر عن مساحة المنطقة المظللة في الشكل الآتي هو:



a) $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ c) $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$

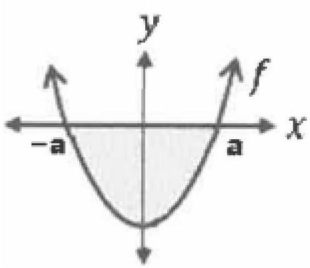
b) $-\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ d) $-\int_{0}^{3} f(x)\,dx$

b) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 6x - 3x^2$ والمحور x . (9 علامات)

وزارة فندقي تكميلي 2023

25- إذا علمت أن مساحة المنطقة المظللة في الشكل أدناه تساوي (6) وحدات مربعة،

فإنّ قيمة $\int_{-a}^{a} 3f(x)dx$ هي:



a) -9 c) 18

b) 9 d) -18

مُكثف

الدرس 5 تكامل اقترانات خاصة
Integration of Special Functions

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

1) $\int e^x \, dx = e^x + C$

2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \neq 0$

3) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

4) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

أتحقق من فهمي 43

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (5x^2 + 7e^x)\, dx$ b) $\int \left(9\cos x + \frac{4}{x^3}\right) dx$ c) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \sin x\right) dx$

أتحقق من فهمي صفحة 43

a $\int (5x^2 + 7e^x) dx = \frac{5}{3}x^3 + 7e^x + C$

b $\int \left(9\cos x + \frac{4}{x^3}\right) dx = \int (9\cos x + 4x^{-3}) dt = 9\sin x - 2x^{-2} + C = 9\sin x - \frac{2}{x^2} + C$

c $\int (\sqrt[3]{x} - \sin x) dx = \int \left(x^{\frac{1}{3}} - \sin x\right) dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \cos x + C$

أتحقق من فهمي 45

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \left(\frac{1}{x} + 8e^x\right) dx$ b) $\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right) dx$ c) $\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2} dx$

أتحقق من فهمي صفحة 45

a $\int \left(\frac{1}{x} + 8e^x\right) dx = \ln|x| + 8e^x + C$

b $\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right) dx = -\cos x - 5\ln|x| + C$

c $\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right) dx = \int \left(1 - \frac{7}{x} + 2x^{-2}\right) dx$

$= x - 7\ln|x| - x^{-1} + C = x - 7\ln|x| - \frac{1}{x} + C$

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \left(\frac{1}{2}e^x + 3x\right) dx$ 2 $\int \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2}\right) dx$ 3 $\int (e^x + 1)^2 dx$

1 $\int \left(\frac{1}{2}e^x + 3x\right) dx = \frac{1}{2}e^x + \frac{3}{2}x^2 + C$

2 $\int \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int \left(1 + \frac{2}{x} + x^{-2}\right) dx = x + 2\ln|x| - x^{-1} + C$

3 $\int (e^x + 1)^2 dx = \int (e^{2x} + 2e^x + 1) dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C$

2) تكامل اقترانات في صورة: f(ax+b)

تكامل اقترانات في صورة: $f(ax+b)$

إذا كان a, b عددين حقيقيين، و $a \neq 0$، و e هو العدد النيبيري، فإنَّ:

1) $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C,\ n \neq -1$

2) $\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$

3) $\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

4) $\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

5) $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C,\ x \neq -\frac{b}{a}$

Hasanat

أتحقَّق من فهمي 47 أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (7x-5)^6\,dx$ b) $\int \sqrt{2x+1}\,dx$

c) $\int 4\cos(3x-7)\,dx$ d) $\int (\sin 5x + e^{2x})\,dx$

e) $\int (6x^2 - 3e^{7x+1})\,dx$ f) $\int \frac{5}{3x+2}\,dx$

أتحقق من فهمي صفحة 47

a	$\int (7x-5)^6 dx = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7}(7x-5)^7 + C = \frac{1}{49}(7x-5)^7 + C$
b	$\int \sqrt{2x+1}dx = \int (2x+1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$
c	$\int 4\cos(3x-7)\,dx = \frac{1}{3} \times 4\sin(3x-7) + C = \frac{4}{3}\sin(3x-7) + C$
d	$\int (\sin 5x + e^{2x})dx = \frac{1}{5} \times -\cos 5x + \frac{1}{2}e^{2x} + C = -\frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$
e	$\int (6x^2 - 3e^{7x+1})dx = 2x^3 - \frac{3}{7}e^{7x+1} + C$
f	$\int \frac{5}{3x+2}dx = \frac{5}{3}\ln\lvert 3x+2\rvert + C$

أتدرّب وأحُلّ المسائل أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

9) $\int (\sin(2x-3) + e^{6x-4})\,dx$ 10) $\int 4\cos(6x+1)\,dx$ 20) $\int \frac{3}{(1-4x)^2}\,dx$

9	$\int (\sin(2x-3) + e^{6x-4})dx = -\frac{1}{2}\cos(2x-3) + \frac{1}{6}e^{6x-4} + C$
10	$\int 4\cos(6x+1)\,dx = \frac{2}{3}\sin(6x+1) + C$
20	$\int \frac{3}{(1-4x)^2}dx = \int 3(1-4x)^{-2}dx = \frac{3}{4}(1-4x)^{-1} + C = \frac{3}{4(1-4x)} + C$

تحدٍّ: أجد كل تكامل ممّا يأتي:

37) $\int (x^2+2x+1)^5\,dx$ 35) $\int \sqrt{e^x}\,dx$

35	$\int \sqrt{e^x}dx = \int (e^x)^{\frac{1}{2}}dx = \int e^{\frac{1}{2}x}dx = 2e^{\frac{1}{2}x} + C$
37	$\int (x^2+2x+1)^5dx = \int ((x+1)^2)^5dx = \int (x+1)^{10}dx = \frac{1}{11}(x+1)^{11} + C$

$$\int f'(x)\,dx = f(x)$$

3) قاعدة: التكامل يُلغي المشتقة الأولى

عندما يكون المُعطى هو المشتقة الأولى فإنا نكامل الطرفين لإلغاء المشتقة والحصول على قاعدة الاقتران ثم نجد قيمة الثابت c عن طريق الاستفادة من الشرط الأولي ، ويُمكِن بها أيضًا تحديد الاقتران الأصلي الوحيد الذي يُحقِّق شرط المسألة، علمًا بأنَّ الشرط الأوّلي يُستعمَل كثيرًا لتحديد اقترانات تُنمذِج مواقف علمية وحياتية.

أتحقَّق من فهمي 49

الأستاذ:عبدالقادر الحسنات
078 531 88 77

سكّان: أشارت دراسة إلى أنَّ عدد السكّان في إحدى القرى يتغيَّر سنويًّا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = 105e^{0.03t}$، حيث t عدد السنوات منذ عام 2010م، و $P(t)$ عدد السكّان.

أجد عدد سكّان القرية عام 2020م، علمًا بأنَّ عدد سكّانها عام 2010م هو 3500 شخص.

أتحقق من فهمي صفحة 49

أولًا نجد تكامل الاقتران $P'(t)$

$$P(t)=\int 105e^{0.03t}dt = \frac{105}{0.03}e^{0.03t}+C$$

ثانيا، نجد ثابت التكامل C:

$$= 3500e^{0.03t} + C$$

بما أن عدد سكان المدينة عام 2010 هو 3500 شخص، إذن $P(0) = 3500$

$$P(t) = 3500e^{0.03t} + C \Rightarrow P(0)=3500e^{0}+C \Rightarrow 3500 =3500 +C \Rightarrow C=0$$

$$P(t) = 3500e^{0.03t}$$

ثالثًا نجد سكان المدينة عام 2020 (أي بعد 10 سنوات):

$$P(10) = 3500e^{0.03(10)} \approx 4725$$

طـب: يلتئم جرح جلدي بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $A'(t) = -0.9e^{-0.1t}$،

حيث t عدد الأيام بعد الإصابة بالجرح، و $A(t)$ مساحة سطح الجرح بالسنتيمتر المربع:

32 أجد قاعدة الاقتران $A(t)$ عند أيِّ زمن t، علمًا بأنَّ مساحة سطح الجرح عند الإصابة هي $9\ \text{cm}^2$.

33 أجد مساحة سطح الجرح بعد 5 أيام من الإصابة.

32	$A(t) = \int -0.9e^{-0.1t}dt = \frac{0.9}{0.1}e^{-0.1t} + C = 9e^{-0.1t} + C$ بما أن مساحة سطح الجرح عند الإصابة هي $9\ cm^2$ إذن، $A(0) = 9$، ومنه: $A(0) = 9e^{-0.1(0)} + C \Rightarrow 9 = 9 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow A(t) = 9e^{-0.1t}$
33	$A(5) = 9e^{-0.1(5)} \approx 5.5\ cm^2$

25 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = e^{-2t}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم 2 m، فأجد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

25	$s(t) = \int e^{-2t}dt = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C \qquad s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$ بما أن الموقع الابتدائي للجسيم $2m$ إذن $s(0) = 2$: $s(0) = -\frac{1}{2}e^{0} + C$ $2 = -\frac{1}{2}e^{0} + C \Rightarrow 2 = -\frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{5}{2} \Rightarrow s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{5}{2}$

تكامل اقترانات في صورة: $k\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$$\int \frac{\text{مشتقة المقام}}{\text{المقام}}dx = \ln\left|\text{المقام}\right| + c$$

إذا كان المُكامَل كسرًا بسطه هو مشتقة مقامه، فإنَّ التكامل هو لوغاريتم القيمة المُطلَقة للمقام.

أتحقّق من فهمي 50 أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{9x^2}{x^3+8}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{4x^2+8x}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,dx$

أتحقق من فهمي صفحة 50

a	$\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x}dx = \ln\lvert x^2+3x\rvert + C$
b	$\displaystyle\int \frac{9x^2}{x^3+8}dx = \int \frac{3(3x^2)}{x^3+8}dx = 3\int \frac{3x^2}{x^3+8}dx = 3\ln\lvert x^3+8\rvert + C$
c	$\displaystyle\int \frac{x+1}{4x^2+8x}dx = \int \frac{\frac{1}{8}(8x+8)}{4x^2+8x}dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x+8}{4x^2+8x}dx = \frac{1}{8}\ln\lvert 4x^2+8x\rvert + C$
d	$\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}dx = \int \frac{\frac{1}{3}(3e^{3x})}{e^{3x}+5}dx = \frac{1}{3}\ln\lvert e^{3x}+5\rvert + C$

13 $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$ 14 $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3-3}\,dx$ 15 $\displaystyle\int \frac{x^2-x}{2x^3-3x^2+12}\,dx$

13	$\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x)}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\lvert x^2+1\rvert + C$
14	$\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3-3}dx = \int \frac{\frac{1}{3}(3x^2)}{x^3-3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-3}dx = \frac{1}{3}\ln\lvert x^3-3\rvert + C$
15	$\displaystyle\int \frac{x^2-x}{2x^3-3x^2+12}dx = \int \frac{\frac{1}{6}(6x^2-6x)}{2x^3-3x^2+12}dx$ $\displaystyle = \frac{1}{6}\int \frac{6x^2-6x}{2x^3-3x^2+12}dx = \frac{1}{6}\ln\lvert 2x^3-3x^2+12\rvert + C$

29 إذا كان ميــل المماس لمنحنــى العلاقة y هو: $\dfrac{dy}{dx} = 2x + \dfrac{3}{x+e}$ ، فأجد قاعدة العلاقــة y،

علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة (e, e^2).

29	$\displaystyle y = \int\left(2x + \frac{3}{x+e}\right)dx = x^2 + 3\ln\lvert x+e\rvert + C$ لإيجاد ثابت التكامل، نعوض (e, e^2): $f(x) = x^2 + 3\ln\lvert x+e\rvert + C \Rightarrow f(e) = e^2 + 3\ln\lvert e+e\rvert + C = e^2$ $\Rightarrow C = -3\ln 2e \Rightarrow f(x) = x^2 + 3\ln\lvert x+e\rvert - 3\ln 2e$

أتذكَّر $e^0 = 1$

التكاملات المحدودة للاقترانات الخاصة

أتذكَّر $\ln 1 = 0$

أتحقَّق من فهمي 51 أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

a) $\int_0^2 (4e^{2x} + 7)\, dx$ b) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6x+1}}\, dx$ c) $\int_0^4 \frac{8x}{x^2+1}\, dx$

أتحقق من فهمي صفحة 51

a $\int_0^2 (4e^{2x}+7)dx = (2e^{2x}+7x)\Big|_0^2 = \left(2e^{2(2)}+7(2)\right)-\left(2e^{2(0)}+7(0)\right) = 2e^4+12$

b $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6x+1}}dx = \int_0^4 (6x+1)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{6}\times 2\,(6x+1)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^4 = \frac{1}{3}\sqrt{6x+1}\Big|_0^4 = \frac{4}{3}$

c $\int_0^4 \frac{8x}{x^2+1}dx = \int_0^4 \frac{4(2x)}{x^2+1}dx = 4\int_0^4 \frac{(2x)}{x^2+1}dx = 4\ln|x^2+1|\Big|_0^4 = 4\ln 17$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

22 $\int_1^2 \left(2x + 3e^x - \frac{4}{x}\right) dx$ 23 $\int_0^5 \frac{x}{x^2+10}\, dx$ 24 $\int_3^4 (2x-6)^4\, dx$

22 $\int_1^2 \left(2x+3e^x-\frac{4}{x}\right)dx = (x^2+3e^x-4\ln|x|)\Big|_1^2$

$= ((2)^2+3e^2-4\ln|2|)-((1)^2+3e^1-4\ln|1|) = 3+3e^2-4\ln 2-3e$

23 $\int_0^5 \frac{x}{x^2+10}dx = \int_0^5 \frac{\frac{1}{2}(2x)}{x^2+10}dx = \frac{1}{2}\int_0^5 \frac{2x}{x^2+10}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+10|\Big|_1^2$

$= \frac{1}{2}\ln|(2)^2+10| - \frac{1}{2}\ln|(1)^2+10| = \frac{1}{2}\ln 14 - \frac{1}{2}\ln 11$

24 $\int_3^4 (2x-6)^4 dx = \frac{1}{10}(2x-6)^5\Big|_3^4 = \frac{1}{10}(2(4)-6)^5 - \frac{1}{10}(2(3)-6)^5 = \frac{32}{10}$

23 تلوُّث: يُعالَج التلوُّث في بحيرة باستعمال مضاد للبكتيريا. إذا كان عدد الخلايا البكتيرية الضارَّة لكل ملّيلتر من الماء في البحيرة يتغيَّر بمُعدَّل: $N'(t) = -\frac{2000t}{1+t^2}$، حيث $N(t)$ عدد الخلايا البكتيرية لكل ملّيلتر من الماء بعد t يومًا من استعمال المضاد، فأجد $N(t)$، علمًا بأنَّ العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خلية لكل ملّيلتر.

23 $N(t) = \int -\frac{2000t}{1+t^2}dt = \int -\frac{1000(2t)}{1+t^2}dt = -1000\ln|1+t^2| + C$

$N(0) = 5000 \Rightarrow -1000\ln|1+0| + C = 5000 \Rightarrow C = 5000$

$\Rightarrow N(t) = -1000\ln|1+t^2| + 5000$

وزارة أدبي 2023

10) $\int 24\sin(2x+6)dx$ هو:

a) $-24\cos(2x+6)+C$ c) $-12\cos(2x+6)+C$

b) $24\cos(2x+6)+C$ d) $12\cos(2x+6)+C$

11) $\int e^{-x}(4+2e^{x})dx$ هو:

a) $-4e^{-x}+C$ c) $4e^{-x}+2x+C$

b) $4e^{-x}+C$ d) $-4e^{-x}+2x+C$

12) $\int \frac{8x}{4-x^2}dx$ هو:

a) $4\ln|4-x^2|+C$ c) $8\ln|4-x^2|+C$

b) $-4\ln|4-x^2|+C$ d) $-8\ln|4-x^2|+C$

13) قيمة $\int_0^1 12(x-1)^5dx$ هي:

a) 2 b) -2 c) 4 d) -4

a) جد كلًا من التكاملات الآتية: 1) $\int\left(8\cos x+\frac{3}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ (10 علامات)

وزارة فندقي 2023

20- قيمة: $\int_0^1(1-x)^4\,dx$ هي:

a) $\frac{1}{5}$ b) $-\frac{1}{5}$ c) 0 d) -1

21- قيمة: $\int_e^1\frac{3}{x}\,dx$ هي:

a) 3 b) -3 c) 1 d) $3e$

a) جد كلًا من التكاملات الآتية: 1) $\int\frac{6x^3-x^2+2}{x}\,dx$ (7 علامات)

وزارة أدبي تكميلي 2023

11) $\int 3\sin(2-3x)dx$ هو:

a) $3\cos(2-3x)+C$
b) $-3\cos(2-3x)+C$
c) $\cos(2-3x)+C$
d) $-\cos(2-3x)+C$

12) $\int(9e^{-3x}+4e^2)dx$ هو:

a) $-3e^{-3x}+2e^2+C$
b) $-3e^{-3x}+4e^2x+C$
c) $-18e^{-3x}+8e^2+C$
d) $-18e^{-3x}+4e^2x+C$

13) $\int \frac{4}{(3-2x)^3}dx$ هو:

a) $\frac{-12}{(3-2x)^4}+C$ b) $\frac{24}{(3-2x)^4}+C$ c) $\frac{-2}{(3-2x)^2}+C$ d) $\frac{1}{(3-2x)^2}+C$

14) قيمة $\int_3^4 \frac{1}{9-2x}dx$ هي:

a) $-\frac{1}{2}\ln 3$ b) $\frac{1}{2}\ln 3$ c) $-2\ln 3$ d) $2\ln 3$

a) جد كل من التكاملات الآتية:

1) $\int\left(5\cos(x+1)+\frac{2x+3}{x^2+3x}\right)dx$

وزارة فندق تكميلي 2023

20- قيمة: $\int_0^1(2x-2)^3dx$ هي:

a) 2 b) -2 c) 4 d) -4

21- ناتج: $\int \frac{2x^2}{x^3-4}dx$ هو:

a) $2\ln|x^3-4|+c$
b) $\frac{2}{3}\ln|x^3-4|+c$
c) $\frac{1}{2}\ln|x^3-4|+c$
d) $\frac{3}{2}\ln|x^3-4|+c$

24- ناتج $\int\left(3e^{3x}+\frac{x^2-1}{x}\right)dx$ هو:

a) $\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{1}{2}x^2-\ln|x|+c$
b) $e^{3x}+x^2-\ln|x|+c$
c) $e^{3x}+\frac{1}{2}x^2-\ln|x|+c$
d) $\frac{1}{3}e^{3x}+x^2-\ln|x|+c$

مُكثف

الدرس 6 التكامل بالتعويض

Integration by Substitution

هناك عدة طرق للتكامل، منها: 1) الطريقة المباشرة من خلال البحث عن اقتران مشتقته تعطي الاقتران المُكامَل.

2) من خلال التحليل إلى العوامل والاختصار

3) طريقة التكامل بالتعويض

Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

تقوم طريقة التكامل بالتعويض على أساس تتضمَّن استعمال مُتغيِّر جديد بدلًا من مُتغيِّر التكامل (غالبا ما نختار u) عندها يجب أنْ يكون التكامل الجديد كله بدلالة المُتغيِّر الجديد (حتى dx) .

وهناك خطوات أساسية لهذه العملية وهي:

1) نحدد (u) : وهي غالباً ما تكون المقدار داخل الجذر ، أو الزاوية في الاقتران المثلثي أو القوة في الأسي
2) نشتق (u) ، ثم نجد (dx) بدلالة (u) و (du)
3) نكتب المُكامَل الجديد في أبسط صورة بعد حذف المقادير المحتوية على (x)
4) نجد التكامل الجديد بدلالة (u)
5) نعيد قيمة (u) التي فرضناها ليصبح المقدار بدلالة (x)

Hasanat

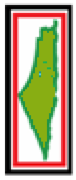
والسؤال الأهم : متى نستخدم طريقة التعويض ؟ وكيف نختارها دون غيرها ؟

الجواب: هناك قواعد (شبه) ثابتة ، يمكن اعتمادها ، مثلاً

عند وجود مقدار ومشتقته في المسألة نستخدم التعويض ($\int e^{\sin x} \cos x \, dx$)

عند وجود اقتران مثلثي زاويته غير خطية ، نبدأ بالتعويض بفرض الزاوية (u)

على الأغلب : عند وجود مقدار ومشتقته ، نفرض المقدار الذي قوته أكبر (u)



التكامل بالتعويض للتكاملات غير المحدودة

إذا كان: $u = g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، ومداه الفترة I، وكان f اقترانًا متصلًا على I،

فإنَّ: $\int f(g(x))\, g'(x) dx = \int f(u)\, du$

$$1)\int 6x(x^2+5)^7 dx \;:::\; u = x^2+5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\Rightarrow \int 6x(u)^7 \frac{du}{2x} = 3\int u^7 du = 3\frac{u^8}{8} + c = \frac{3}{8}(x^2+5)^8 + C$$

$$2)\int \sin x \; \cos x \, dx \;:::\; u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \int u \; \cos x \; \frac{du}{\cos x} = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

$$3)\int \cos 3x \; e^{\sin 3x} dx \;:::\; u = \sin 3x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3\cos 3x \Rightarrow dx = \frac{du}{3\cos 3x}$$

$$\Rightarrow \int \cos 3x \; e^{u} \frac{du}{3\cos 3x} = \frac{1}{3}\int e^{u} du = \frac{1}{3}e^{u} + C = \frac{1}{3}e^{\sin 3x} + C$$

أتحقّق من فهمي 58 أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int 6x^2(2x^3-3)^4\,dx$ b) $\int x e^{x^2+1}\,dx$ c) $\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}}\,dx$

d) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$ e) $\int x^3\cos(x^4-5)\,dx$ f) $\int \cos^4 x\sin x\,dx$

أتحقق من فهمي صفحة 58

a	$\int 6x^2(2x^3-3)^4dx : u=2x^3-3 \Rightarrow \frac{du}{dx}=6x^2 \Rightarrow dx=\frac{du}{6x^2}$ $\int 6x^2(2x^3-3)^4dx=\int 6x^2u^4\times\frac{du}{6x^2}=\int u^4du=\frac{1}{5}u^5+C=\frac{1}{5}(2x^3-3)^5+C$
b	$\int xe^{x^2+1}dx : u=x^2+1 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$ $\int xe^{x^2+1}dx=\int xe^u\times\frac{du}{2x}=\int\frac{1}{2}e^udu=\frac{1}{2}e^u+C=\frac{1}{2}e^{x^2+1}+C$
c	$\int\frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}}dx : u=2x^2+8x \Rightarrow \frac{du}{dx}=4x+8 \Rightarrow dx=\frac{du}{4x+8}$ $=\int\frac{4x+8}{\sqrt{u}}\times\frac{du}{4x+8}=\int\frac{1}{\sqrt{u}}du=\int u^{-\frac{1}{2}}du=2u^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{2x^2+8x}+C$

d	$\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx \quad u=\ln x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx=xdu$ $\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx=\int\frac{u^2}{x}\times xdu=\int u^2du=\frac{1}{3}u^3+C=\frac{1}{3}(\ln x)^3+C$
e	$\int x^3\cos(x^4-5)\,dx : u=x^4-5 \Rightarrow \frac{du}{dx}=4x^3 \Rightarrow dx=\frac{du}{4x^3}$ $=\int x^3\cos u\times\frac{du}{4x^3}=\int\frac{1}{4}\cos u\,du=\frac{1}{4}\sin u+C=\frac{1}{4}\sin(x^4-5)+C$
f	$\int\cos^4 x\sin x\,dx : u=\cos x \Rightarrow \frac{du}{dx}=-\sin x \Rightarrow dx=\frac{du}{-\sin x}$ $=\int u^4\sin x\times\frac{du}{-\sin x}=\int -u^4du=-\frac{1}{5}u^5+C=-\frac{1}{5}\cos^5x+C$

أتدرّب وأحُلّ المسائل أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$
2. $\int x^2(2x^3+5)^4\,dx$
3. $\int 3x\sqrt{x^2+7}\,dx$

1	$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx \quad u=x^2+4 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$ $=\int\frac{x}{\sqrt{u}}\times\frac{du}{2x}=\int\frac{1}{2\sqrt{u}}du=\int\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du=u^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{x^2+4}+C$
2	$\int x^2(2x^3+5)^4dx \quad u=2x^3+5 \Rightarrow \frac{du}{dx}=6x^2 \Rightarrow dx=\frac{du}{6x^2}$ $=\int x^2u^4\times\frac{du}{6x^2}=\int\frac{1}{6}u^4du=\frac{1}{30}u^5+C=\frac{1}{30}(2x^3+5)^5$
3	$\int 3x\sqrt{x^2+7}dx \quad u=x^2+7 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$ $=\int 3x\sqrt{u}\times\frac{du}{2x}=\int\frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}du=u^{\frac{3}{2}}+C=\sqrt{(x^2+7)^3}+C$

التكامل بالتعويض للتكاملات المحدودة : هناك طريقتان لإيجاد قيمة تكامل محدود بالتعويض، هما:

1) إيجاد التكامل أوَّلًا بدلالة المُتغيِّر الأصلي، ثم تعويض حدود التكامل

2) تغيير حدود التكامل عند تغيير مُتغيِّر التكامل .

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

$$1)\int_1^2 2x\ e^{x^2-1}dx :::u = x^2 - 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$:::x = 1 \Rightarrow u = 0 \quad , \quad x = 2 \Rightarrow u = 3$$

$$\int_0^3 2x\ e^u\ \frac{du}{2x} = \int_0^3 e^u\ du = e^u\Big]_0^3 = e^3 - e^0 = e^3 - 1$$

أو

$$1^+)\int_1^2 2x\ e^{x^2-1}dx :::u = x^2 - 1$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int 2x\ e^u\ \frac{du}{2x} = \int e^u du = e^u + C$$

$$\Rightarrow e^{x^2-1}\Big]_1^2 = e^3 - e^0 = e^3 - 1$$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
رياضيات

أتحقّق من فهمي 62 أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

a) $\int_0^1 x^2 (x^3 - 1)^4\ dx$ b) $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{(2 - x^4)^7}\ dx$ c) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\ dx$

أتحقق من فهمي صفحة 62

a

$$\int_0^1 x^2(x^3-1)^4 dx \qquad u = x^3 - 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

$x = 0 \Rightarrow u = (0)^3 - 1 = -1$ | $x = 1 \Rightarrow u = (1)^3 - 1 = 0$

$$= \int_{-1}^0 x^2 u^4 \frac{du}{3x^2} = \int_{-1}^0 \frac{1}{3} u^4 du = \frac{1}{15} u^5 \Big|_{-1}^0 = \left(\frac{1}{15}(0)^5\right) - \left(\frac{1}{15}(-1)^5\right) = \frac{1}{15}$$

b

$$\int_{-1}^0 \frac{x^3}{(2-x^4)^7} dx \qquad u = 2 - x^4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -4x^3 \Rightarrow dx = \frac{du}{-4x^3}$$

$x = 0 \Rightarrow u = 2 - (0)^4 = 2$

$x = -1 \Rightarrow u = 2 - (-1)^4 = 1$

$$= \int_1^2 \frac{x^3}{u^7} \times \frac{du}{-4x^3} = \int_1^2 -\frac{1}{4} u^{-7} du = \frac{1}{24} u^{-6}\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{24u^6}\Big|_1^2 = \left(\frac{1}{24(2)^6}\right) - \left(\frac{1}{24(1)^6}\right) = -\frac{21}{512}$$

c

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \qquad u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x du$$

$x = e \Rightarrow u = \ln e = 1$

$x = 1 \Rightarrow u = \ln 1 = 0$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 \frac{u}{x} x du = \int_0^1 u\ du = \frac{1}{2} u^2\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2}(1)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(0)^2\right) = \frac{1}{2}$$

كتاب التمارين

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int x\sqrt{x^2+3}\,dx$
2. $\int x^4 e^{x^5+2}\,dx$
3. $\int (x+1)(x^2+2x+5)^4\,dx$
4. $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$
5. $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\,dx$
6. $\int \sin x\sqrt{1+3\cos x}\,dx$

1	$\int x\sqrt{x^2+3}\,dx \qquad u = x^2+3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$ $\int x\sqrt{x^2+3}\,dx = \int x u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+3)^3} + C$
2	$\int x^4 e^{x^5+2}\,dx \qquad u = x^5+2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 5x^4 \Rightarrow dx = \frac{du}{5x^4}$ $\int x^4 e^{x^5+2}\,dx = \int x^4 e^u \frac{du}{5x^4} = \int \frac{1}{5}e^u\,du = \frac{1}{5}e^u + C = \frac{1}{5}e^{x^5+2} + C$

3	$\int (x+1)(x^2+2x+5)^4\,dx$ $u = x^2+2x+5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x+2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x+2}$ $= \int (x+1)u^4 \frac{du}{2x+2} = \int \frac{1}{2}u^4\,du = \frac{1}{10}u^5 + C = \frac{1}{10}(x^2+2x+5)^5 + C$
4	$\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx \qquad u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du$ $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx = \int \frac{u^3}{x}\,x\,du = \int u^3\,du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}(\ln x)^4 + C$

5	$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\,dx \qquad u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$ $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{u^4}\frac{du}{\cos x} = \int u^{-4}\,du = -\frac{1}{3}u^{-3} + C = -\frac{1}{3}(\sin x)^{-3} + C$
6	$\int \sin x\sqrt{1+3\cos x}\,dx \qquad u = 1+3\cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -3\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-3\sin x}$ $\int \sin x\sqrt{1+3\cos x}\,dx = \int \sin x\, u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{-3\sin x} = \int -\frac{1}{3}u^{\frac{1}{2}}\,du$ $= -\frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos x)^3} + C$

وزارة أدبي 2023

12) $\int \frac{8x}{4-x^2}dx$ هو:

a) $4\ln|4-x^2|+C$ c) $8\ln|4-x^2|+C$

b) $-4\ln|4-x^2|+C$ d) $-8\ln|4-x^2|+C$

a) جد كلًا من التكاملات الآتية: 2) $\int_0^1 (x^3+1)\sqrt{x^4+4x+4}\,dx$ (10 علامات)

وزارة أدبي 2023 تكميلي

15) $\int \cos^5 x \sin x\,dx$ هو:

a) $-\frac{1}{6}\sin^6 x+C$ c) $-\frac{1}{6}\cos^6 x+C$

b) $\frac{1}{6}\sin^6 x+C$ d) $\frac{1}{6}\cos^6 x+C$

a) جد كل من التكاملات الآتية: 2) $\int_1^2 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+8}}dx$ (7 علامات)

وزارة فندقي 2023

a) جد كلًا من التكاملات الآتية: 2) $\int_0^1 8x(x^2-1)^7\,dx$ (7 علامات)

وزارة فندقي 2023 تكميلي

21– ناتج: $\int \frac{2x^2}{x^3-4}dx$ هو:

a) $2\ln|x^3-4|+c$ c) $\frac{1}{2}\ln|x^3-4|+c$

b) $\frac{2}{3}\ln|x^3-4|+c$ d) $\frac{3}{2}\ln|x^3-4|+c$

a) جد كلًا من التكاملات الآتية: 2) $\int x^2(4x^3-1)^9\,dx$ (7 علامات)

أسئلة متوقعة للأدبي (مراجعة مكثفة) ف2/ وحدة التكامل

السؤال الأول : حدد الإجابة الصحيحة فيما يأتي ، ثم ضع دائرة على رمزها :

1) إذا كان $f(x) = -6x^{-4}$ ، فإن أي اقتران أصلي للاقتران f ، يُكتب على الصورة:

$a)\ G(x) = 2x^{-3} + c$ $\quad b)\ G(x) = -2x^{-3} + c$

$c)\ G(x) = 6x^{-3} + c$ $\quad d)\ G(x) = \frac{6}{5}x^{-5} + c$

---

2) $7\int \sqrt[3]{x^4}\, dx$ هو :

$a)\ 3\sqrt[4]{x^3} + c$ $\quad b)\ 3\sqrt[3]{x^7} + c$

$c)\ 3\sqrt[7]{x^3} + c$ $\quad d)\ \frac{49}{3}\sqrt[3]{x^7} + c$

---

3) $\int \frac{4}{3x^2}\, dx$ هو :

$a)\ \frac{-4}{3x} + c$ $\quad b)\ \frac{4}{3x^3} + c$

$c)\ \frac{4}{3x} + c$ $\quad d)\ \frac{-4x}{3} + c$

---

4) $\int \frac{x^3 - x}{x^2 + x}\, dx$ هو :

$a)\ \frac{1}{2}x^2 - x + c$ $\quad b)\ \frac{1}{2}x^2 + c$

$c)\ \frac{1}{2}x^2 + x + c$ $\quad d)\ 2x + c$

---

5) $\int 4x(x^2 - x)\, dx$ هو :

$a)\ x^4 - \frac{1}{2}x^2 + c$ $\quad b)\ x^4 - \frac{4}{3}x^3 + c$

$c)\ 2x^2(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2) + c$ $\quad d)\ \frac{3}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + c$

---

6) إذا كان $f'(x) = -6x^2 - 6x$ فإن قاعدة الاقتران f الذي يمر منحناه بالنقطة (1 – , 5) هي :

$a)\ f(x) = 6x^3 - 4x^2 + 15$ $\quad b)\ f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 9$

$c)\ f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5$ $\quad d)\ f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3$

---

7) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران f(x) هو $f'(x) = \frac{x+1}{x^3}$ وكان $f(1) = 0$ فإن منحنى الاقتران يمر بواحدة من النقاط الآتية وهي:

$a)\ (-1,-2)$ $\quad b)\ (-1,6)$ $\quad c)\ (2,-2)$ $\quad d)\ (-2,3)$

---

8) يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران : $v(t) = 3t^2 - 2$
حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا تحرك الجسيم من نقطة الأصل فإن موقعه يُعطى بالعلاقة :

$a)\ s(t) = 6t$ $\quad b)\ s(t) = t^3 - 2t + 6$

$c)\ s(t) = t^3 - 2t$ $\quad d)\ s(t) = 3t^3 - 2t$

9) قيمة $\int_{1}^{3}(2-x)^2\,dx$ هي :

$a)\ \frac{-2}{3}$ $b)\ \frac{2}{3}$ $c)\ 0$ $d)\ -2$

---

10) قيمة $\int_{0}^{4}|2x-6|\,dx$ هي :

$a)\ 10$ $b)\ 8$ $c)\ -30$ $d)\ -8$

---

11) قيمة $\int_{-1}^{0}|2x|\,dx$ هي :

$a)\ 2$ $b)\ 1$ $c)\ -1$ $d)\ -2$

---

12) إذا كان $\int_{1}^{k}4x\,dx=6$ فإن قيمة (قيم) الثابت (k) تساوي :

$a)\ \pm 2$ $b)\ \pm 1$ $c)\ \pm 3$ $d)\ \frac{3}{2}$

---

13) إذا كان $\int_{-1}^{k}(2x+3)\,dx=12$ ، فإن قيم الثابت (k) هي :

$a)\ -2\ ,\ 5$ $b)\ 2\ ,-5$ $c)\ 2\ ,\ 5$ $d)\ -2\ ,\ -5$

---

14) إذا كان $\int_{1}^{5}\frac{1}{2}f(x)\,dx=6$, فإن $\int_{5}^{1}f(x)\,dx$ يساوي :

$a)-3$ $b)-12$ $c)\ 12$ $d)\ 3$

---

15) إذا كان $\int_{1}^{4}3f(x)\,dx=6$, فإن $\int_{4}^{1}2f(x)\,dx$ يساوي :

$a)\ 2$ $b)-4$ $c)\ -2$ $d)\ 4$

---

16) $\int_{-1}^{2}(3x^2-2)dx$ يساوي :

$a)\ 9$ $b)\ 3$ $c)\ 1$ $d)\ 4$

---

17) إذا كان $\int_{a-5}^{-1}f(x)\,dx=0$ فإن قيمة الثابت (a) تساوي:

$a)\ 0$ $b)-6$ $c)\ 6$ $d)\ 4$

---

18) إذا كان $\int_{1}^{4}2f(x)\,dx=10$, $\int_{1}^{3}f(x)\,dx=7$ فإن $\int_{3}^{4}f(x)\,dx$ يساوي :

$a)\ -2$ $b)-12$ $c)\ 3$ $d)\ 17$

*** إذا كان $\int_{-2}^{3} \frac{1}{2}\, g(x)\, dx = 6$, $\int_{3}^{-2} 4 f(x)\, dx = 12$, $\int_{1}^{3} (f(x)-5)\, dx = 4$

فأجب عن الفقرات (19 , 20 , 21 , 22) الآتية :

19) قيمة $\int_{-2}^{3} (g(x)+5)\, dx$ تساوي :

a) 13 b) 17 c) 37 d) 31

20) قيمة $(\int_{-2}^{3} f(x)\, dx + 5)$ تساوي :

a) 2 b) 17 c) 22 d) 28

21) قيمة $\int_{-2}^{3} (f(x)+2\, g(x))\, dx$ تساوي :

a) −15 b) 9 c) 27 d) 21

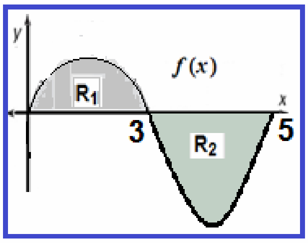
22) قيمة $\int_{1}^{-2} f(x)\, dx$ تساوي :

a) −17 b) 17 c) 27 d) 11

---

23) قيمة $\int_{5}^{5} \frac{4x+1}{x^2+7}\, dx$ تساوي :

a) −1 b) 5 c) 10 d) 0



*** معتمدا الشكل المجاور ، والذي يمثل منحنى الاقتران f(x) في الفترة [0,5]

إذا كانت مساحة R_1 تساوي (3) ومساحة R_2 تساوي(4) وحدات مربعة

فأجب عن الفقرات (24 , 25 , 26) الآتية

24) قيمة $\int_{3}^{0} f(x)\, dx$ تساوي :

a) 3 b) 4 c) 1 d) −3

25) قيمة $\int_{3}^{5} (f(x)+1)\, dx$ تساوي :

a) −2 b) 6 c) 5 d) −6

26) قيمة $\int_{0}^{5} f(x)\, dx$ تساوي :

a) −7 b) 7 c) −1 d) 1

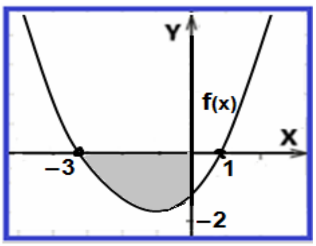
---

27) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)=3x^2-12$ والمحور (X) تساوي :

a) 16 b) 32 c) 24 d) 8

---

28) التكامل الذي يُعبر عن مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور هو :



a) $\int_{-3}^{1} f(x)\, dx$ b) $-\int_{-3}^{1} f(x)\, dx$

c) $\int_{0}^{-3} f(x)\, dx$ d) $\int_{-3}^{0} f(x)\, dx$

29) $\int (1-6\cos 2x)\, dx$ هو :

$a)\ x-3\sin 2x+c$ $\quad b)\ x+3\sin 2x+c$

$c)\ x-6\sin 2x+c$ $\quad d)\ x+6\sin 2x+c$

---

30) $\int \sqrt{e^{2x}}\, dx$ يساوي :

$a)\ e^{2x}+c$ $\quad b)\ e^{x}+c$

$c)\ e^{\frac{1}{2}x}+c$ $\quad d)\ e^{\frac{3}{2}x}+c$

---

31) $\int \frac{4-2x}{x^2-4x}\, dx$ يساوي :

$a)\ Ln\left|x^2-4x\right|+c$ $\quad b)\ -Ln\left|x^2-4x\right|+c$

$c)\ -2Ln\left|x^2-4x\right|+c$ $\quad d)\ \frac{1}{2}Ln\left|x^2-4x\right|+c$

---

32) $\int e^{-x}(e^{x}-1)\, dx$ يساوي:

$a)\ e^{2x}-x+c$ $\quad b)\ x-e^{-x}+c$

$c)\ e^{x}+x+c$ $\quad d)\ x+e^{-x}+c$

---

33) قيمة $\int_1^e \frac{5}{x}\, dx$ تساوي :

$a)\ 5$ $\quad b)\ 0$ $\quad c)\ 5e-1$ $\quad d)\ -5$

---

34) قيمة $\int_{-1}^{1} \frac{2}{4-2x}\, dx$ تساوي :

$a)\ -\frac{1}{2}Ln3$ $\quad b)\ Ln3$ $\quad c)\ -Ln3$ $\quad d)\ \frac{1}{2}Ln3$

---

35) $\int \cos^3 x\ \sin x\, dx$ يساوي:

$a)\ -\frac{1}{4}\cos^4 x+c$ $\quad b)\ \frac{1}{4}\cos^4 x+c$

$c)\ \frac{1}{8}\cos^4 x\ \sin^2 x+c$ $\quad d)\ \frac{1}{4}\sin^4 x+c$

---

36) $\int \frac{\sin(2Lnx)}{x}\, dx$ يساوي:

$a)\ -2\cos(2Lnx)+c$ $\quad b)\ \frac{1}{2}\cos(2Lnx)+c$

$c)\ -\frac{1}{2}\cos(2Lnx)+c$ $\quad d)\ -\frac{1}{2}\cos(Lnx)+c$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a	b	a	a	b	b	d	c	b	a	b	a

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
b	b	b	b	d	a	c	a	b	d	d	d

25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
a	c	b	c	a	b	b	a	a	b	a	c

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
مدرسة
البقعة
الثانوية للبنين

السؤال الثاني :

أ) يُمثِّل الاقتران: $C'(x) = 0.6x^2 + 4x$ التكلفة الحدِّية لكل قطعة ينتجها مصنع ما ، حيث x عدد القطع المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة. جد اقتران التكلفة $C(x)$ ، علمًا بأنَّ تكلفة إنتاج 10 قطع هي JD 2000.

الجواب: $C(x) = 0.2x^3 + 2x^2 + 1600$

ب) يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 12t$ ، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 6m ، وكانت سرعته هي 2 m/s بعد ثانية واحدة من بَدْء حركته، فجد موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

الجواب: $V(t) = 6t^2 - 4$ ، $S(t) = 2t^3 - 4t + 6$ ، $S(2) = 14$

ج) إذا كان $\int_3^5 (f(x) - 4)\, dx = 2$, $\int_1^5 3f(x)\, dx = 6$ فجد قيمة $\int_1^3 (f(x) + 3x^2)\, dx$

د) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 12 - 3x^2$ ، والمحور x في الفترة $[0, 3]$

الجواب: $A = 16 + 7 = 23$

هـ) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 4x$ ، والمحور x

و) جد قيمة التكاملات الآتية :

1) $\int_1^2 4x\, e^{x^2-1}\, dx$ ::: $2e^3 - 2$

2) $\int 6x\sqrt{x^2+1}\, dx$ ::: $2x\sqrt{(x^2+1)^3} + c$

3) $\int x^3\, e^{x^4-1}\, dx$ ::: $\frac{1}{4}e^{x^4-1} + c$

4) $\int (x-1)(x^2-2x+3)^5\, dx$ ::: $\frac{1}{12}(x^2-2x+3)^6 + c$

5) $\int \frac{(Lnx)^2}{x}\, dx$ ::: $\frac{1}{3}(Lnx)^3 + c$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

الأستاذ عبدالقادر الحسنات

مُكثّف الدرس 1 التوزيع الهندسي Geometric Distribution

التجربة الاحتمالية الهندسية: تكرار تجربة بيرنولي عددًا من المَرّات المستقلة حتى التوصُّل إلى أوَّل نجاح

التجربة الاحتمالية الهندسية

إذا توافرت الشــروط الأربعة الآتية في تجربة عشــوائية ما، فإنَّها تُعَـدُّ تجربة احتمالية هندسية:

1) اشتمال التجربة على محاولات مستقلة ومُتكرِّرة.
2) فرز النتائج المُمكِنة في كل محاولة إلى نجاح أو فشل.
3) ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.
4) التوقُّف عند أوَّل نجاح.

أتحقّق من فهمي 72

أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية هندسية في كلٍّ ممّا يأتي:

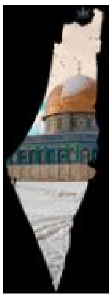
a) إلقاء ريّان حجر نرد منتظمًا 4 مَرّات، ثم كتابة الأعداد الظاهرة. لا تمثل تجربة احتمالية هندسية.

b) إلقاء حنان قطعة نقد منتظمة بشكل مُتكرِّر، ثم التوقُّف عند ظهور الصورة. تمثل تجربة احتمالية هندسية.

المُتغيِّر العشوائي الهندسي، وتوزيعه الاحتمالي

المُتغيِّر العشوائي هو مُتغيِّر تعتمد قِيَمه على نواتج تجربة عشوائية،
والتوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي هو اقتران يربط كل قيمة للمُتغيِّر العشوائي باحتمال وقوعها.

في التجربة الاحتمالية الهندسية، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد المحاولات وصولًا إلى أوَّل نجاح ،
فإنَّ X يُسمّى المُتغيِّر العشوائي الهندسي، وبالرموز : X ~ Geo(p) حيث p احتمال النجاح الثابت في كل محاولة



التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

إذا كان: $X \sim Geo(p)$، فــإنَّ: $x \in \{1, 2, 3, \ldots\}$، ويعطى التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية: $P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$

حيث: x: عدد المحاولات وصولًا إلى أوَّل نجاح. p: احتمال النجاح في كل محاولة.

إذا كان $X \sim Geo(p)$، فإنَّ: $P(X > x) = (1-p)^x$

أتحقق من فهمي صفحة 74

a) $P(X = 2) = (0.4)(1 - 0.4)^{2-1} = (0.4)(0.6) = 0.24$

b) $P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$
$= (0.4)(1 - 0.4)^{1-1} + (0.4)(1 - 0.4)^{2-1} + (0.4)(1 - 0.4)^{3-1}$
$= (0.4) + (0.4)(0.6)^1 + (0.4)(0.6)^2 = 0.784$

c) $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$
$= 1 - \big(P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)\big)$
$= 1 - \big((0.4) + (0.4)(0.6)^1 + (0.4)(0.6)^2 + (0.4)(0.6)^3\big) = 0.1296$

أتحقّق من فهمي 75

صناعة: في دراسة لقسم الجودة في مصنع للأواني الفخارية، تبيَّن أنَّ في 10% من الأواني الفخارية عيبًا مصنعيًّا.

إذا مثَّل X عدد الأواني الفخارية التي سيفحصها مُراقِب الجودة حتى إيجاد أوَّل إناء مَعيب،

فأجد كُلًّا ممّا يأتي: a) احتمال أنْ يكون الإناء العاشر هو أوَّل إناء مَعيب يجده مُراقِب الجودة.

b) احتمال أنْ يفحص مُراقِب الجودة أكثر من 3 أوانٍ حتى إيجاد أوَّل إناء مَعيب

أتحقق من فهمي صفحة 75

a $P(X=10)=(0.1)(1-0.1)^{10-1}=(0.1)(0.9)^9\approx 0.04$

b $P(X>3)=1-P(X\le 3)$

$$=1-\left(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\right)$$

$$=1-\left((0.1)+(0.1)(0.9)^1+(0.1)(0.9)^2+(0.1)(0.9)^3\right)=0.6561$$

التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

إذا كان: $X\sim Geo(p)$، فإنَّ التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي X يعطى بالقاعدة الآتية: $E(X)=\dfrac{1}{p}$

حيث p احتمال النجاح في كل محاولة. يُستعمَل كلٌّ من الرمز $E(X)$ والرمز μ للدلالة على توقُّع المُتغيِّر العشوائي X.

أتحقّق من فهمي 76

لعبة: قرَّر ريّان إلقاء حجر نرد منتظم بشكل مُتكرِّر، والتوقُّف عند ظهور العدد 4. كم مَرَّة يُتوقَّع أنْ يرمي ريّان حجر النرد؟

أتحقق من فهمي صفحة 76

إذن، يُتوقَّع أن يرمي ريّان حجر النرد 6 مرات حتى يظهر العدد 4 أول مرّة. $E(X)=\dfrac{1}{\frac{1}{6}}=6$

أجد التوقُّع لكلٍّ من المُتغيِّرات العشوائية الآتية:

15 $X\sim Geo(0.45)$ 14 $X\sim Geo\left(\frac{3}{7}\right)$ 13 $X\sim Geo(0.3)$

13	$E(X)=\dfrac{1}{0.3}=\dfrac{10}{3}\approx 3$
14	$E(X)=\dfrac{1}{\frac{3}{7}}=\dfrac{7}{3}\approx 2$
15	$E(X)=\dfrac{1}{0.45}=\dfrac{100}{45}\approx 2$

مهارات التفكير العليا

22 تبرير: إذا كان: $X\sim Geo(p)$، وكان: $P(X\le 3)=\dfrac{819}{1331}$، فأجد $P(X>3)$، مُبرِّرًا إجابتي.

23 تحدٍّ: إذا كان: $X\sim Geo(p)$، وكان: $P(X=1)=0.2$، فأجد التوقُّع $E(X)$.

22	$P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-\dfrac{819}{1331}=\dfrac{512}{1331}$
23	$P(X=1)=p(1-p)^{1-1}\Rightarrow 0.2=p(1-p)^0\Rightarrow p=0.2\Rightarrow E(X)=\dfrac{1}{0.2}=5$

أطلــق عماد رصاصة نحو هدف بصورة مُتكرِّرة، ثم توقَّف عنــد إصابته الهدف أوَّل مَرَّة.

إذا كان احتمال إصابته الهدف في كل مَرَّة هو 0.7، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

13 احتمال أنْ يصيب الهدف أوَّل مَرَّة في المحاولة العاشرة.

14 احتمال أنْ يُطلِق رصاصتين على الأقل حتى يصيب الهدف أوَّل مَرَّة.

15 العدد المُتوقَّع من الرصاصات التي سيُطلِقها عماد حتى يصيب الهدف أوَّل مَرَّة.

13	$P(X=10)=(0.7)(0.3)^9\approx 0.00001$
14	$P(X\geq 2)=1-P(X<1)=1-P(X=1)$ $=1-0.7(0.3)^0=1-0.7=0.3$
15	$E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0.7}=\frac{10}{7}\approx 1.4$

وزارة أدبي 2023

14) إذا كان $X\sim Geo(0.1)$ ، فإن $P(X=2)$ يساوي:

a) 0.081 b) 0.81 c) 0.09 d) 0.9

15) إذا كان $X\sim Geo\left(\frac{5}{11}\right)$ ، فإن $E(X)$ يساوي:

a) $\frac{11}{5}$ b) $\frac{5}{11}$ c) $\frac{6}{11}$ d) $\frac{11}{6}$

a) تبين في مصنع للمصابيح الكهربائية أن احتمال أن يكون أي مصباح من إنتاج المصنع تالفًا هو 0.15

إذا مثل X عدد المصابيح التي سيفحصها مراقب الجودة حتى إيجاد أول مصباح تالف، فجد احتمال أن يفحص مراقب الجودة أكثر من 3 مصابيح حتى إيجاد أول مصباح تالف. (10 علامات)

وزارة أدبي 2023 تكميلي

16) التجربة العشوائية التي تُمثّل تجربة احتمالية هندسية مما يأتي هي:

a) إلقاء قطعة نقد 3 مرات ، ثم تسجيل عدد مرات ظهور الصورة.

b) إلقاء حجر نرد منتظم 7 مرات ، ثم كتابة الأعداد الظاهرة.

c) إطلاق أسهم بشكل متكرر نحو هدف، ثم التوقف عند إصابته أول مرة.

d) سحب 5 كرات عشوائيًا على التوالي من دون إرجاع من صندوق فيه 9 كرات حمراء، و 6 كرات بيضاء ثم كتابة عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

17) إذا كان $X\sim Geo(p)$ ، وكان $P(X=1)=\frac{2}{7}$ ، فإن $E(X)$ يساوي:

a) $\frac{7}{5}$ b) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{7}{2}$ d) $\frac{2}{7}$

a) يتدرب لاعب كرة سلة على رمي الكرة في الهدف. وكان احتمال إصابته الهدف هو 0.4 . إذا مثّل X عدد محاولات اللاعب حتى يُصيب أول هدف، فما احتمال أن يصيب اللاعب الهدف بعد أكثر من 3 محاولات؟ (11 علامة)

مُكثف

الدرس 2 توزيع ذي الحدَّين
Binomial Distribution

التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين هي تكرار تجربة بيرنولي عددًا مُحدَّدًا من المَرّات المستقلة

إذا توافرت الشروط الأربعة الآتية في تجربة عشوائية ما، فإنَّها تُعَدُّ تجربة احتمالية ذات حدَّين:

1. اشتمال التجربة على محاولات مستقلة ومُتكرِّرة.
2. فرز النتائج المُمكِنة في كل محاولة إلى نجاح أو فشل.
3. ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.
4. وجود عدد محدد من المحاولات في التجربة.

أتحقَّق من فهمي 80 أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية ذات حدَّين في كلٍّ ممّا يأتي:

a) إلقـاء حجر نرد منتظم 20 مَرَّة، ثم كتابة عدد المَـرّات التي يظهر فيها العدد 1 على الوجه العلوي لحجر النرد.

b) اختيار 7 طلبة عشوائيًّا من صف روضة فيه 15 ولدًا و10 بنات، ثم كتابة عدد البنات اللاتي وقع عليهن الاختيار.

a تمثل تجربة احتمالية ذات حدين. B لا تمثل تجربة احتمالية ذات حدين.

المُتغيِّر العشوائي ذو الحدَّين، وتوزيعه الاحتمالي

في المُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين، قد تكون (x= 0)،وهذا يدلُّ على عدم إحراز أيِّ نجاح عند تكرار المحاولة n مَرَّة.

في التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مَرّات النجاح في جميع محاولات التجربة التي عددها n، وكان احتمال النجاح في كل محاولة هو p، فإنَّ X يُسمّى المُتغيِّر العشوائي ذا الحدَّين،
ويُمكِن التعبير عنه بالرموز على النحو الآتي: X ~ B(n, p) حيث n و p معاملا المُتغيِّر العشوائي.
ومن ثَمَّ، فإنَّ المُتغيِّر X يأخذ القِيَم الآتية: 0 , 1 , 2 , … , n ؛ أيْ إنَّ : x ∈ {0, 1, 2, …, n}

التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدّين

إذا كان: $X \sim B(n, p)$، فـإنَّ: $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$، ويعطـي التوزيـع الاحتمالـي للمُتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$P(X=r)=\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}$$

حيث: n: عدد المحاولات في التجربة. p: احتمال النجاح في كل محاولة.
r: عدد المحاولات الناجحة من بين n من المحاولات.

مراجعة التوافيق :

$$\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!(6-3)!}=\frac{6\times5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}\times3\times2}=20$$

$$\binom{10}{7}=\frac{10!}{7!(10-7)!}=120$$

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

n و r عددان صحيحان موجبان و $r \le n$.

$$X \sim B(3,0.4) \Rightarrow a) P(X=2)=\boxed{\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}}=\binom{3}{2}(0.4)^2(1-0.4)^{4-2}=0.1728$$

مثال 3 : إذا كان احتمال أن يصيب شخص ما هدفاً في طلقة يطلقها على الهدف يساوي (0.6) ،
فإذا أطلق (4) طلقات على الهدف ، فجد احتمال : 1) إصابة الهدف مرة واحدة على الأقل
2) إصابة الهدف مرة واحدة على الأكثر

$$1) P(X \ge 1) = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$$

$$= 1 - P(X=0) = 1 - \binom{4}{0}(0.6)^0(0.4)^4 = 1 - 0.0256 = 0.9744$$

مرة واحدة على الأقل تعني مرة واحدة أو أكثر (أقل شيئ مرة واحدة)

$$2) P(X \le 1) = P(X=1)+P(X=0)$$

$$= \binom{4}{1}(0.6)^1(0.4)^3 + \binom{4}{0}(0.6)^0(0.4)^4 = 0.1536 + 0.0256 = 0.1792$$

مرة واحدة على الأكثر تعني مرة واحدة أو أقل (أكثر شيئ مرة واحدة)

أتحقّق من فهمي 82

إذا كان: $X \sim B(5, 0.1)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $P(X=4)$ b) $P(X \le 2)$ c) $P(X > 2)$

أتحقق من فهمي صفحة 82

a $P(X=4) = \binom{5}{4}(0.1)^4(0.9)^1 = 0.00045$

b $P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$$= \binom{5}{0}(0.1)^0(0.9)^5 + \binom{5}{1}(0.1)^1(0.9)^4 + \binom{5}{2}(0.1)^2(0.9)^3 = 0.99144$$

c $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - 0.99144 = 0.00856$

أتحقّق من فهمي 83

طقس: في دراسة تناولت حالة الطقس مدّة طويلة في إحدى المدن، تبيّن أنّ احتمال أنْ يكون أيُّ يوم فيها ماطرًا هو $\frac{2}{7}$. إذا اخترت 5 أيام عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي: a) احتمال أنْ تكون 3 أيام فقط من هذه الأيام ماطرة.

b) احتمال أنْ يكون يوم واحد على الأقل من هذه الأيام ماطرًا.

أتحقق من فهمي صفحة 83

a $P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{2}{7}\right)^3\left(\frac{5}{7}\right)^2 = 0.12$

B $P(X \ge 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{2}{7}\right)^0\left(\frac{5}{7}\right)^5 \approx 0.8141$

إذا كان: $X \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

8 $P(X=1)$ 9 $P(X>1)$ 10 $P(0 \leq X < 2)$

8	$P(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$
9	$P(X>1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X=0) + P(X=1))$ $= 1 - \left(\binom{3}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{3}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) = \frac{20}{27}$
10	$P(0 \leq X < 2) = P(X=0) + P(X=1)$ $= \binom{3}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \binom{3}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{27}$

جد قيمة (p) : قاعدة (مجموع احتمالات المتغير العشوائي المنفصل = 1)

$$X \sim B(3,p)\ ,\ P(X \geq 1) = \frac{7}{8} \Rightarrow p = ? : \boxed{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1}$$

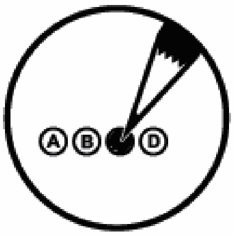
$$P(X \geq 1) = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) = \frac{7}{8}$$

$$\frac{7}{8} = 1 - P(X=0) \Rightarrow P(X=0) = \binom{3}{0}(p)^0(1-p)^3 = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8} \Rightarrow 1-p = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

مهارات التفكير العليا 87

19 تبرير: إذا كان: $X \sim B(3, p)$، وكان: $P(X \geq 1) = \frac{215}{216}$، فأجد $P(X=2)$، مُبرِّرًا إجابتي.

21 تحدٍّ: يتألَّف اختبار لمبحث الجغرافيا من 25 سـؤالًا، جميعها من نوع الاختيار من مُتعدِّد، ولكلٍّ منها 4 بدائل، واحد منها فقط صحيح، ولكل فقرة 4 علامات. إذا أجاب رامي عن هذه الأسئلة جميعها بصورة عشوائية، فما احتمال أنْ يحصل على علامة 76 من 100؟



19	$P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{3}{0}(p)^0(1-p)^3$ $\Rightarrow \frac{215}{216} = 1 - \binom{3}{0}(p)^0(1-p)^3 \Rightarrow \frac{215}{216} = 1-(1-p)^3 \Rightarrow (1-p)^3 = 1 - \frac{215}{216}$ $\Rightarrow (1-p)^3 = \frac{1}{216} \Rightarrow 1-p = \frac{1}{6} \Rightarrow p = 1 - \frac{1}{6} \Rightarrow p = \frac{5}{6}$ $P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{75}{216}$

21	بما أن لكل فقرة 4 علامات، وحصل رامي على العلامة 76، معناه أن رامي قد أجاب بشكل صحيح على 19 فقرة من أصل 25 فقرة في هذا الاختبار. بما أن كل فقرة لها 4 بدائل واحدة منها فقط صحيحة، إذن احتمال اختيار البديل الصحيح هو $\frac{1}{4}$ $P(X=19) = \binom{25}{19}\left(\frac{1}{4}\right)^{19}\left(\frac{3}{4}\right)^6 = 0.00000011467$

التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين

إذا كان: $X\sim B(n,p)$، فإنَّ: $x \in \{0,1,2,\dots,n\}$، ويعطى التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية: $E(X) = np$ حيث: n: عدد المحاولات في التجربة.
p: احتمال النجاح في كل محاولة.

أتحقَّق من فهمي 84

اتصـالات: بعد إجراء مسـح لمشـتركي إحدى شـركات الاتصالات، تبيَّـن أنَّ 30% من المشـتركين هم من الإناث. إذا اختير 400 مشترك عشوائيًّا لاستطلاع آرائهم حيال الخدمات التي تُقدِّمها الشركة، فأجد عدد الإناث المُتوقَّع في هذه العيِّنة.

أتحقق من فهمي صفحة 84

$E(X) = 400 \times 0.3 = 120$

إذن، يُتوقَّع وجود 120 من الإناث في هذه العينة.

التباين للمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين

إذا كان: $X\sim B(n,p)$، فإنَّ: $x \in \{0,1,2,\dots,n\}$، ويعطى التباين للمُتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية: $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = np(1-p)$ حيث: n: عدد المحاولات في التجربة.
p: احتمال النجاح في كل محاولة.

أتحقَّق من فهمي 85 إذا كان: $X\sim B\left(400, \frac{3}{8}\right)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) التوقُّع $E(X)$. b) التباين $\mathrm{Var}(X)$

أتحقق من فهمي صفحة 85

a	$E(X) = 400 \times \frac{3}{8} = 150$
b	$Var(X) = 400 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{375}{4}$

أجد التوقُّع والتباين لكل مُتغيِّر عشوائي ممّا يأتي:

14) $X\sim B\left(20, \frac{3}{8}\right)$

13) $X\sim B(5, 0.1)$

13	$E(X) = 5(0.1) = 0.5$	$Var(X) = 5(0.1)(0.9) = 0.45$
14	$E(X) = 20\left(\frac{3}{8}\right) = 7.5$	$Var(X) = 20\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right) = 4.6875$

20) تبرير: إذا كان: $X\sim B(100, p)$، وكان التباين للمُتغيِّر العشوائي X هو 24، فأجد قيمة p، مُبرِّرًا إجابتي.

20

$Var(X) = 100p(1-p) \Rightarrow 24 = 100p(1-p) \Rightarrow 24 = 100p - 100p^2$

$\Rightarrow 100p^2 - 100p + 24 = 0 \Rightarrow 25p^2 - 25p + 6 = 0 \Rightarrow (5p-3)(5p-2) = 0$

$\Rightarrow p = \frac{3}{5} \quad , \quad p = \frac{2}{5}$

أجد التوقُّع والتباين لكلٍّ من المُتغيِّرات العشوائية الآتية:

13) $X\sim B\left(48, \frac{1}{6}\right)$ 12) $X\sim B(280, 0.4)$ 11) $X\sim B(40, 0.2)$

11	$E(X) = np = 40(0.2) = 8$ $Var(X) = np(1-p) = 40(0.2)(0.8) = 6.4$
12	$E(X) = np = 280(0.4) = 112$ $Var(X) = np(1-p) = 280(0.4)(0.6) = 67.2$
13	$E(X) = np = 48\left(\frac{1}{6}\right) = 8 \Rightarrow Var(X) = np(1-p) = 48\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) \approx 6.67$

أسئلة الوزارة أدبي 2023

16) إذا كان $X \sim B(4, \frac{2}{3})$ ، فإن $P(X=0)$ يساوي: d) $\frac{4}{81}$ c) $\frac{1}{27}$ b) $\frac{1}{81}$ a) $\frac{16}{81}$

17) إذا كان $X \sim B(100, p)$ ، وكان $E(X) = 60$ ، فإن التباين يساوي: d) 12 c) 40 b) 60 a) 24

b) إذا كان احتمال إصابة شخص بأعراض جانبية بعد أخذه دواء معينًا هو 25% ، وأخذ هذا الدواء 8 أشخاص، ودل المتغير العشوائي X على عدد الأشخاص الذين ستظهر عليهم الأعراض الجانبية، فجد كلًا مما يأتي: (10 علامات)

1) احتمال ظهور الأعراض الجانبية على 6 أشخاص فقط ممن أخذوا الدواء.

2) العدد المتوقع للأشخاص الذين ستظهر عليهم الأعراض الجانبية للدواء.

أسئلة الوزارة أدبي 2023 تكميلي

18) إذا كان $X \sim B\left(10, \frac{1}{5}\right)$ ، فإن $P(X=2)$ يساوي:

a) $\binom{10}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^8$ c) $\binom{10}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^8\left(\frac{4}{5}\right)$

b) $\binom{10}{8}\left(\frac{4}{5}\right)^8\left(\frac{1}{5}\right)$ d) $\binom{10}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^8\left(\frac{4}{5}\right)^2$

19) إذا كان $X \sim B(420, p)$ ، وكان $E(X) = 40$ ، فإن قيمة p هي: d) $\frac{2}{12}$ c) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{21}{2}$ a) $\frac{2}{21}$

20) إذا كان $X \sim B(3, p)$ ، وكان $P(X \le 2) = \frac{37}{64}$ فإن $P(X=3)$ يساوي:

a) $\frac{37}{64}$ c) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{27}{64}$ d) $\frac{9}{10}$

21) إذا كان $X \sim B(6, p)$ ، وكان $E(X) = 2.4$ ، فإن قيمة $Var(X)$ تساوي:

a) 0.4 c) 1.44

b) 0.6 d) 2.4

b) بعد إجراء مسح للمصلين في أحد مساجد العاصمة عمان تبين أن 70% من هؤلاء المصلين تقل أعمارهم عن 50عامًا. إذا اختير (15) مصليًا من مُرتادي هذا المسجد عشوائيًا، فما احتمال أن يقل عمر اثنين منهم على الأكثر عن 50 عامًا؟ (10 علامات)

الفرق بين

التجربة الاحتمالية الهندسية و التجربة الاحتمالية ذات الحدين

التجربة الاحتمالية الهندسية

$$X \sim Geo(p)\ ,\ x \in \{1,2,3,...\}$$

المُتغيِّر العشوائي الهندسي X يدل على عدد المحاولات وصولًا إلى أوَّل نجاح ،

p : احتمال النجاح الثابت في كل محاولة

$$P(X=x)=\boxed{p(1-p)^{x-1}}$$

$$P(X>x)=\boxed{(1-p)^{x}}$$

التوقع : $E(x)=\dfrac{1}{p}$

مثال (1)

$X \sim Geo(0.8) \Rightarrow$

$a)P(X=2)=\boxed{p(1-p)^{x-1}}$

$=(0.8)(1-0.8)^1=0.16$

$b)P(X\le 2)=P(X=1)+P(X=2)$

$=(0.8)(1-0.7)^0+0.16=0.96$

$c)P(X>3)=\boxed{1-P(X\le 3)}$

$=1-(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3))$

$=1-(0.8+0.16+(0.8)(1-0.8)^2)=0.008$

$(or):P(X>3)=\boxed{(1-P)^3}$

$=(1-0.8)^3=(0.2)^3=0.008$

التجربة الاحتمالية ذات الحدين

$$X \sim B(n,p)\ ,\ x \in \{0,1,2,3,...,n\}$$

n : عدد المحاولات

p : احتمال النجاح في كل محاولة

r : عدد المحاولات الناجحة من بين n منها

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!} \Rightarrow \binom{5}{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{(3\times2\times1)(2\times1)}=10$$

$$P(X=r)=\boxed{\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}}$$

التوقع $E(x)=n\,p$

التباين $Var(x)=\sigma^2=n\,p(1-p)$

(مجموع احتمالات المتغير العشوائي المنفصل=1)

مثال(1)

$X \sim B(3,p) \Rightarrow$

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$$

مثال (2)

$X \sim B(3,0.6) \Rightarrow$

$a)P(X=2)=\boxed{\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}}$

$=\binom{3}{2}(0.6)^2(1-0.6)^{4-2}=0.1728$

$b)P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)$

$=0.1728+\binom{3}{3}(0.6)^3(0.4)^0$

$=0.1728+0.216=0.3888$

$c)P(X<2)=P(X=1)+P(X=0)$

$=\binom{3}{1}(0.6)^1(0.4)^2+\binom{3}{0}(0.6)^0(0.4)^3$

$=0.288+0.064=0.352$

مثال (2): إذا كان احتمال أن ينجح أحمد في التسجيل في لعبة كرة السلة هو ($\frac{3}{4}$)

وكان (X) يمثل عدد المحاولات حتى يتمكن من التسجيل

أ) جد احتمال أن يتمكن من التسجيل في المحاولة الثالثة

$$P(X=3)=\tfrac{3}{4}(1-\tfrac{3}{4})^{3-1}=\tfrac{3}{4}(\tfrac{1}{4})^2=\tfrac{3}{64}$$

ب) جد احتمال أن يسجل في المحاولة الخامسة

$$P(X=5)=\tfrac{3}{4}(1-\tfrac{3}{4})^{5-1}=\tfrac{3}{4}(\tfrac{1}{4})^4=\tfrac{3}{1024}$$

ج) جد احتمال أن يحاول التسجيل أكثر من ثلاث مرات

$$P(X>3)=P(X=4)+P(X=5)+\dots$$
$$=1-P(X\le 3)$$
$$=1-(P(X=1)+P(X=2)+P(X=3))$$
$$=1-(\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}(1-\tfrac{3}{4})^{2-1}+\tfrac{3}{4}(1-\tfrac{3}{4})^{3-1}$$
$$=1-(\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}(\tfrac{1}{4})+\tfrac{3}{4}(\tfrac{1}{16}))$$
$$=1-(\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{16}+\tfrac{3}{64})\ =1-(\tfrac{48}{64}+\tfrac{12}{64}+\tfrac{3}{64})$$
$$=1-(\tfrac{63}{64})$$
$$=\tfrac{1}{64}$$

$$(or):P(X>3)=(1-P)^3=(1-\tfrac{3}{4})^3=\tfrac{1}{64}$$

مثال (3): كيس يحتوي على عدد من الكرات المتماثلة إذا كان احتمال سحب (كرة حمراء) من الكيس هو (0.25) ، فكم كرة يُتوقع أن يتم سحبها حتى ظهور كرة حمراء؟؟؟

الحل:

$$E(x)=\frac{1}{p}\Rightarrow E(x)=\frac{1}{0.25}=\frac{100}{25}=4$$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

الأستاذ عبدالقادر الحسنات

مثال (3): قام سالم بزراعة خمس شجرات أمام بيته إذا كان احتمال نجاح الشجرة الواحدة 75 %

أ) جد احتمال نجاح أربع شجرات منها

$$P(X=4)=\binom{5}{4}(\frac{3}{4})^4(\frac{1}{4})^1$$
$$=\tfrac{5!}{4!\times 1!}(\tfrac{81}{256})(\tfrac{1}{4})=\tfrac{405}{1024}$$

ب) ما احتمال أن تنجح شجرتان منها على الأقل ؟

الحل: ثنتان على الأقل تعني : نجاح اثنتين ، ثلاث، أربع أو خمس شجرات

أو عدم نجاح (واحدة أو خمس منها)

$$P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)$$
$$+P(X=4)+P(X=5)$$
$$=1-P(X<2)$$
$$=1-(P(X=1)+P(X=0))$$
$$=1-(\binom{5}{1}(\frac{3}{4})^1(\frac{1}{4})^4+\binom{5}{0}(\frac{3}{4})^0(\frac{1}{4})^5)$$
$$=1-(\tfrac{5!}{1!\times 4!}(\tfrac{3}{4})(\tfrac{1}{256})+\tfrac{5!}{0!\times 5!}(1)(\tfrac{1}{1024}))$$
$$=1-(\tfrac{15}{1024}+\tfrac{1}{1024})$$
$$=1-\tfrac{16}{1024}=\tfrac{1008}{1024}$$

ج) ما احتمال أن تنجح شجرة واحدة منها على الأكثر ؟

الحل: شجرة واحدة على الأكثر تعني شجرة أو ولا شجرة

$$P(X\le 1)=P(X=1)+P(X=0)$$
$$=(\binom{5}{1}(\frac{3}{4})^1(\frac{1}{4})^4+\binom{5}{0}(\frac{3}{4})^0(\frac{1}{4})^5)$$
$$=(\tfrac{5!}{1!\times 4!}(\tfrac{3}{4})(\tfrac{1}{256})+\tfrac{5!}{0!\times 5!}(1)(\tfrac{1}{1024}))$$
$$=(\tfrac{15}{1024})+(\tfrac{1}{1024})$$
$$=\tfrac{16}{1024}$$

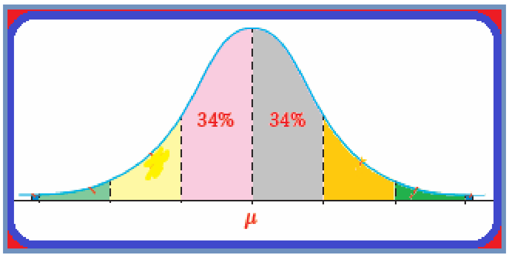
الدرس 3 التوزيع الطبيعي Normal Distribution

مُكثف

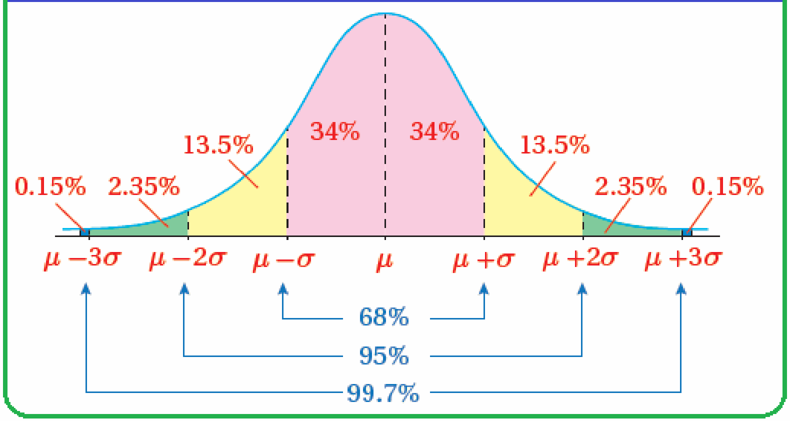
يُستعمَل المنحنى الطبيعي لنمذجة البيانات العددية المتصلة التي تُختار عشوائيًا في كثير من المواقف الحياتية.
وللمنحنى الطبيعي خصائص تُميِّزه عن غيره من المنحنيات الأُخرى؛ ما يُفسِّر سبب كثرة استعماله في التطبيقات الحياتية والعلمية المختلفة. ومن مميزات المنحنى الطبيعي :

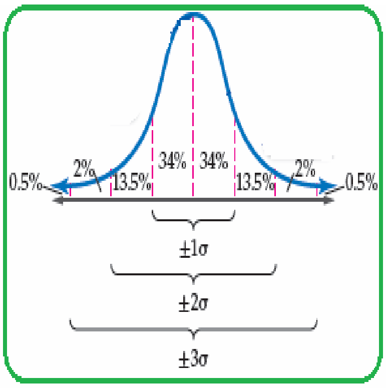
- منحنى متصل له شكل الجرس.
- تطابق الوسط الحسابي والوسيط والمنوال، وتوسُّط البيانات في كلٍّ منها.
- تماثل البيانات حول الوسط الحسابي.
- اقتراب المنحنى عند طرفيه من المحور x من دون أنْ يمسَّه.
- المساحة الكلية أسفل المنحنى هي 1.

(من التماثل : المساحة يمين (2) تساوي المساحة يسار (-2))



القاعدة التجريبية :الوسط الحسابي μ ، الانحراف المعياري σ





Abdulkadir Hasanat
078 531 88 77

أتحقّق من فهمي 92

إذا اتخذ التمثيل البياني لأطوال مجموعة من طلبة الصف الثاني عشر شكل المنحنى الطبيعي، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي.

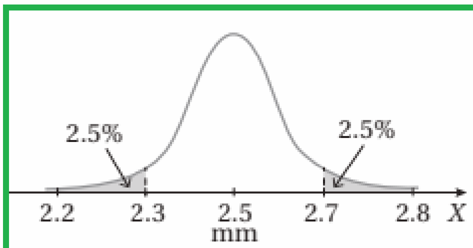
b) النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البُعْد بين أطوالهم والوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.

c) النسبة المئوية للطلبة الذين تقلُّ أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

d) النسبة المئوية للطلبة الذين تقلُّ أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

	أتحقق من فهمي صفحة 92
a	النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي هي 50%
b	النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البعد بين أطوالهم و الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد هي 68%
c	النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين هي 47.5%
d	النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين هي 97.35%

صناعة: يُمكِن نمذجة أطوال أقطار مسامير يُنتِجها مصنع بمنحنى التوزيع الطبيعي المُبيَّن في الشكل المجاور:



11 أجد كُلًّا من الوسط الحسـابي، والانحراف المعياري لأطوال أقطار المسامير.

12 أجد النسبة المئوية للمسامير التي يزيد طول قُطْر كلٍّ منها على الوسط الحسابي بما لا يزيد على انحرافين معياريين.

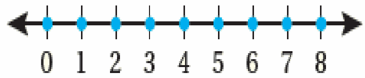
11	$\mu = 2.5 \Rightarrow \mu + 2\sigma = 2.7 \Rightarrow 2.5 + 2\sigma = 2.7 \Rightarrow \sigma = 0.1$
12	$P(2.5 < X < 2.7) = \frac{1}{2}(95\%) = 47.5\%$

المُتغيِّر العشوائي الطبيعي، والتوزيع الطبيعي

يوجد نوعان من المُتغيِّرات العشوائية، هما: المُتغيِّر العشوائي المنفصل ، والمُتغيِّر العشوائي المتصل

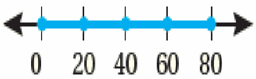
المُتغيِّر العشوائي المنفصل هو مُتغيِّر عشوائي يأخذ قِيَمًا معدودةً.

مثال: عدد السيّارات التي ستمرُّ خلال الساعة القادمة.



المُتغيِّر العشوائي المتصل هو مُتغيِّر عشوائي يأخذ قِيَمًا متصلةً ضمن فترة مُعيَّنة

مثال: سرعة أوَّل سيّارة ستمرُّ أمام إحدى المدارس خلال الساعة القادمة.



ملاحظة : يُعَدُّ كلٌّ من المُتغيِّر العشوائي الهندسي والمُتغيِّر العشوائي ذي الحدَّين مُتغيِّرًا عشوائيًّا منفصلاً؛ لأنَّ كُلّاً منهما يأخذ قِيَمًا معدودةً، مثل: عدد مَرّات إصابة الهدف، وعدد السيّارات.

إذا ارتبط المُتغيِّر العشوائي المتصل X بتجربة عشوائية اتخذ تمثيل بياناتها البياني شكل المنحنى الطبيعي، فإنَّه يُسمّى مُتغيِّرًا عشوائيًّا طبيعيًّا، ويُسمّى توزيعه الاحتمالي التوزيع الطبيعي

ويُمكِن التعبير عنه بالرموز على النحو الآتي: $\boxed{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$ **حيث (N) من كلمة (Normal)**

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، μ: الوسط الحسابي. / σ: الانحراف المعياري.

مثال:

$\boxed{X \sim N(15,9)} \Rightarrow 1)P(X > 15) = ? ...2)P(12 < X < 18) = ? ...3)P(X > 21) = ?$

$1)P(X > 15) = P(X > \mu) = 0.5$

$2)P(12 < X < 18) = P(15-3 < X < 15+3) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.68$

$3)P(X > 21) = P(X > 15 + 2\times 3) = P(X > \mu + 2\sigma) = 2.5\%$

مثال:

$\boxed{X \sim N(20,16)} \Rightarrow 1)P(X < 20) = ? ...2)P(16 < X < 24) = ? ...3)P(12 < X < 32) = ?$

$1)P(X < 20) = P(X < \mu) = 0.5$

$2)P(16 < X < 24) = P(20-4 < X < 20+4) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.68$

$3)P(12 < X < 32) = P(20-8 < X < 20+12) = P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 3\sigma)$

$= \frac{1}{2}(0.95) + \frac{1}{2}(0.99) = 0.9735$

أتحقّق من فهمي 94 إذا كان: $X\sim N(55, 121)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $P(X<55)$ b) $P(55<X<66)$ c) $P(X>77)$

أتحقق من فهمي صفحة 94

a	قيمة الوسط الحسابي هي $\mu = 55$ ، وقيمة الانحراف المعياري هي $\sigma = \sqrt{121} = 11$ $P(X<55) = P(X<\mu) = 0.5$
b	$P(55<X<66) = P(55<X<55+11) = P(\mu<X<\mu+\sigma) = 0.34$
c	$P(X>77) = P(X>55+2(11)) = P(X>\mu+2\sigma)$ $= 2.35\% + 0.15\% = 3.5\% = 0.035$

أتحقّق من فهمي 95

أطوال: توصّلت دراسة إلى أنّ أطوال الرجال في إحدى المدن تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 178 cm، وانحرافه المعياري 7 cm. إذا اختير رجل عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) احتمال أنْ يكون طول الرجل أكثر من 178 cm b) احتمال أنْ يتراوح طول الرجل بين 171 cm و 192 cm

أتحقق من فهمي صفحة 95

	قيمة الوسط الحسابي هي $\mu = 178$ ، وقيمة الانحراف المعياري هي $\sigma = 7$
a	$P(X>178) = P(X>\mu) = 50\% = 0.5$
b	$P(171<X<192) = P(178-7<X<178+2(7))$ $= P(\mu-\sigma<X<\mu+2\sigma) = 34\% + 34\% + 13.5\% = 81.5\% = 0.815$

إذا كان: $X\sim N(79, 144)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

10) $P(X<79)$ 11) $P(67<X<91)$ 12) $P(X>91)$

13) $P(X>103)$ 14) $P(43<X<115)$ 15) $P(X<43)$

10	$\mu = 79$, $\sigma = \sqrt{144} = 12$ $P(X<79) = P(X<\mu) = 0.5$
11	$P(67<X<91) = P(79-12<X<79+12) = P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)$ $= 0.34 + 0.34 = 0.68$
12	$P(X>91) = P(X>79+12) = P(X>\mu+\sigma)$ $= 13.5\% + 2.35\% + 0.15\% = 16\% = 0.16$
13	$P(X>103) = P(X>79+2(12)) = P(X>\mu+2\sigma)$ $= 2.35\% + 0.15\% = 2.5\% = 0.025$
14	$P(43<X<115) = P(79-3(12)<X<79+3(12))$ $= P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma) = 99.7\% = 0.997$
15	$P(X<43) = P(X<79-3(12)) = P(X<\mu-3\sigma) = 0.15\% = 0.0015$

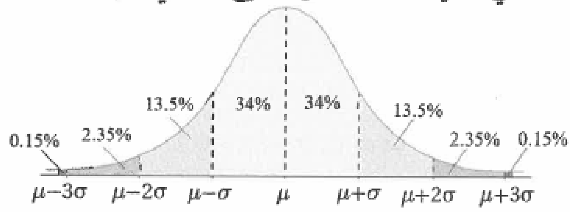
أسئلة الوزارة أدبي 2023

18) إذا كان $X \sim N(25\,,1.1^2)$ ، فإن الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع الطبيعي هما على الترتيب:

a) $\mu = 25\,, \sigma = 1.21$ c) $\mu = 5\,, \sigma = 1.21$

b) $\mu = 25\,, \sigma = 1.1$ d) $\mu = 5\,, \sigma = 1.1$

* إذا دل المتغير العشوائي X على أطوال مجموعة من طلبة الصف الرابع (بالسنتيمتر) ، حيث $X \sim N\,(120\,,16)$ ، فاستعمل القاعدة التجريبية والشكل الآتي الذي يُمثل منحنى توزيع طبيعي للإجابة عن الفقرات 19 و 20 و 21 و 22 الآتية:



19) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي هي:

a) 95% c) 50%

b) 68% d) 34%

20) النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد:

a) 34% b) 50% c) 68% d) 47.5%

21) قيمة $P(112 < X < 128)$ تساوي:

a) 0.5 b) 0.68 c) 0.95 d) 0.997

22) قيمة $P(X > 132)$ تساوي:

a) 0.135 b) 0.0015 c) 0.0235 d) 0.485

أسئلة الوزارة أدبي 2023 تكميلي

22) من خصائص المنحنى الطّبيعي:

a) يُستعمل لنمذجة البيانات العددية المنفصلة المُختارة عشوائيًا في مواقف حياتية.

b) منحنى متصل له شكل الجرس.

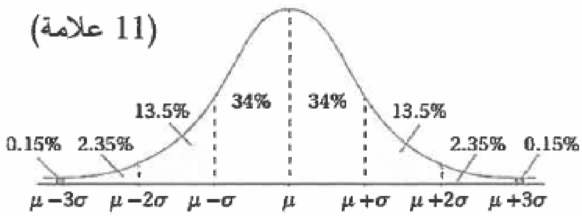
c) الوسط الحسابي للبيانات أكبر من الوسيط.

d) يقطع المنحنى المحور x عند طرفيه.

23) إذا كان $X \sim N(20, 9)$ ، فإن النسبة المئوية للبيانات التي تقل عن 20 هي:

a) 34% b) 47.5% c) 50% d) 68%

a) إذا دلّ المتغير العشوائي X على علامات مجموعة من طلبة الصف العاشر في أحد الاختبارات، حيث $X \sim N(72, 16)$ ، فاستعمل القاعدة التجريبية والشكل الآتي الذي يُمثل منحنى توزيعًا طبيعيًا للإجابة عن كلّ مما يأتي: (11 علامة)



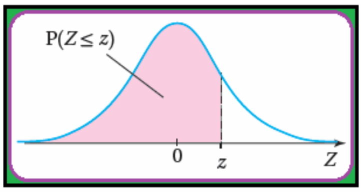
1) ما قيمة $P(X > 76)$ ؟

2) ما قيمة $P(68 < X < 80)$ ؟

3) إذا علمت أن 16% من الطلبة لم ينجحوا في الاختبار ، فما علامة النجاح؟

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
رياضيات

مُكثف
الدرس 4 التوزيع الطبيعي المعياري
Standard Normal Distribution



التوزيع الطبيعي المعياري هو توزيع طبيعي وسطه الحسابي 0 ، وانحرافه المعياري 1
ويُمكِن التعبير عن مُتغيِّره العشوائي بالرموز : $Z \sim N(0, 1)$

نلاحظ من الشكل المجاور أن منحنى التوزيع الطبيعي المعياري
مُتماثِل حول الوسط الحسابي (0)

كذلك فإن جدول التوزيع الطبيعي المعياري يعطي المساحة إلى يسار القيمة المعيارية z ، والتي تُمثِّل احتمال قِيَم المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري Z التي تقل عن (أو تساوي) القيمة المعيارية z ، أو $P(Z \leq z)$

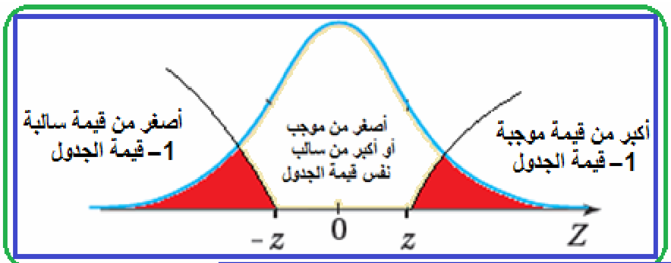
ملاحظات مهمة : عند إيجاد قيمة احتمال ما من الجدول :

1) جميع القيم في الجدول معيارية ، و إذا لم تكن كذلك نحولها باستعمال القاعدة $\boxed{z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}}$

6) إذا كانت (z) محصورة بين قيمتين فإن الاحتمال = الأصغر من الكبرى – الأصغر من الصغرى

مثلاً: $P(1 \leq z \leq 1.2) = P(z \leq 1.2) - P(z \leq 1) = 0.8849 - 0.8413 = 0.0436$

$P(-0.2 \leq z \leq 0.3) = P(z \leq 0.3) - P(z \leq -0.2) = 0.6179 - (1 - 0.5793) = 0.1972$



أتحقّق من فهمي 100 أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(Z < 0.69)$ b) $P(Z < 3.05)$ c) $P(Z > -1.67)$ d) $P(Z > -2.88)$

	أتحقق صفحة 100
a	$P(Z < 0.69) = 0.7549$
b	$P(Z < 3.05) = 0.9989$
c	$P(Z > -1.67) = P(Z < 1.67) = 0.9525$
d	$P(Z > -2.88) = P(Z < 2.88) = 0.9980$

أتحقّق من فهمي 101 أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(Z > 2.56)$ b) $P(Z > 1.01)$ c) $P(Z < -0.09)$ d) $P(Z < -1.52)$

	أتحقق من فهمي صفحة 101
a	$P(Z > 2.56) = 1 - P(Z < 2.56) = 1 - 0.9948 = 0.0052$
b	$P(Z > 1.01) = 1 - P(Z < 1.01) = 1 - 0.8438 = 0.1562$
c	$P(Z < -0.09) = 1 - P(Z < 0.09) = 1 - 0.5359 = 0.4641$
d	$P(Z < -1.52) = 1 - P(Z < 1.52) = 1 - 0.9357 = 0.0643$

أتحقّق من فهمي 102 أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(0 < Z < 0.33)$ b) $P(-1 < Z < 1.25)$

	أتحقق صفحة 102
a	$P(0<Z<0.33)=P(Z<0.33)-P(Z<0)=0.6293-0.5=0.1293$
b	$P(-1 < Z < 1.25) = P(Z < 1.25) - P(Z < -1) = 0.8944 - (1 - 0.8413) = 0.8944 - 0.1587 = 0.7357$

أتدرّب وأحُلّ المسائل 107 أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

1. $P(Z < 0.68)$
2. $P(Z < 1.54)$
3. $P(Z > 0.27)$
4. $P(0.49 < Z < 2.9)$
5. $P(-0.08 < Z < 0.8)$
6. $P(0 < Z < 1.07)$
7. $P(Z < -1.25)$
8. $P(Z > -1.99)$
9. $P(-0.5 < Z < 0)$
10. $P(Z < 0.43)$
11. $P(Z > 3.08)$
12. $P(Z < -2.03)$
13. $P(Z > 2.2)$
14. $P(-0.72 < Z < 3.26)$
15. $P(1.5 < Z < 2.5)$

1	$P(Z < 0.68) = 0.7517$
2	$P(Z < 1.54) = 0.9382$
3	$P(Z > 0.27) = 1 - P(Z < 0.27) = 1 - 0.6064 = 0.3936$
4	$P(0.49 < Z < 2.9) = P(Z < 2.9) - P(Z < 0.49) = 0.9981 - 0.6879 = 0.3102$
5	$P(-0.08 < Z < 0.8) = P(Z < 0.8) - P(Z < -0.08)$ $= P(Z < 0.8) - (1 - P(Z < 0.08)) = 0.7881 - (1 - 0.5319)$ $= 0.9981 - 0.4681 = 0.5300$
6	$P(0 < Z < 1.07) = P(Z < 1.07) - P(Z < 0) = 0.8577 - 0.5 = 0.3577$
7	$P(Z < -0.08) = 1 - P(Z < 0.08) = 1 - 0.5319 = 0.4681$
8	$P(Z > -1.99) = P(Z < 1.99) = 0.9767$
9	$P(-0.5 < Z < 0) = P(Z < 0) - P(Z < -0.5)$ $= P(Z < 0) - (1 - P(Z < 0.5)) = 0.5 - (1 - 0.6915)$ $= 0.5 - 0.3085 = 0.1915$
10	$P(Z < 0.43) = 0.6664$
11	$P(Z > 3.08) = 1 - P(Z < 3.08) = 1 - 0.9990 = 0.0010$
12	$P(Z < -2.03) = 1 - P(Z < 2.03) = 1 - 0.9788 = 0.0212$
13	$P(Z > 2.2) = 1 - P(Z < 2.2) = 1 - 0.9861 = 0.0139$
14	$P(-0.72 < Z < 3.26) = P(Z < 3.26) - P(Z < -0.72)$ $= P(Z < 3.26) - (1 - P(Z < 0.72)) = 0.9994 - (1 - 0.7642)$ $= 0.9994 - 0.2358 = 0.7636$
15	$P(1.5 < Z < 2.5) = P(Z < 2.5) - P(Z < 1.5) = 0.9938 - 0.9332 = 0.0606$

إيجاد قيمة المُتغيِّر العشوائي إذا عُلِم الاحتمال

قد يكون الاحتمال معلومًا في بعض الأحيان ، وتكون قِيَم المُتغيِّر العشوائي Z هي المجهولة.
وفي هذه الحالة، يُمكِن استعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري بطريقة عكسية، وذلك بإيجاد قيمة z التي تُحقِّقه.
وهناك أربعة احتمالات :

1) الاحتمال أصغر من قيمة موجبة (وقيمته أكثر من 0.5) : نبحث عنها (أو عن الأقل منها مباشرة) في الجدول
2) الاحتمال أصغر من قيمة موجبة (وقيمته أقل من 0.5) : هذا يعني أنَّ قيمة a سالبة ، لذلك نطرحها من (1) ثم نبحث عن القيمة الناتجة من الطرح في الجدول فتكون (z) هي (سالب) القيمة المقابلة لها
3) الاحتمال أكبر من قيمة موجبة (وقيمته أكثر من 0.5) : هذا يعني أنَّ قيمة a سالبة ،نبحث عنها في الجدول فتكون (z) هي (سالب) القيمة المقابلة لها
4) الاحتمال أكبر من قيمة موجبة (وقيمته أقل من 0.5) : هذا يعني أنَّ قيمة a موجبة ، لذلك نطرحها من (1) ثم نبحث عن القيمة الناتجة من الطرح (أو عن الأقل منها مباشرة) في الجدول

أتحقَّق من فهمي **106** أجد قيمة a التي تُحقِّق الاحتمال المعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $P(Z<a)=0.9788$ b) $P(Z<a)=0.25$ c) $P(Z>a)=0.9738$ d) $P(Z>a)=0.2$

أتحقق من فهمي صفحة 106

a	$P(Z<a)=0.9788$ $P(Z<a)=P(Z<z)\Rightarrow 0.9788=P(Z<z)\Rightarrow z=2.03\Rightarrow a=2.03$
b	$P(Z<a)=0.25$ $P(Z<a)=P(Z<-z)\Rightarrow 0.25=P(Z<-z)\Rightarrow 0.25=1-P(Z<z)$ $P(Z<z)=1-0.25$ $P(Z<z)=0.75\Rightarrow z=0.67\Rightarrow a=-0.67$
c	$P(Z>a)=0.9738$ $P(Z>a)=P(Z>-z)\Rightarrow 0.9738=P(Z>-z)\Rightarrow 0.9738=P(Z<z)$ $\Rightarrow P(Z<z)=0.9738\Rightarrow z=1.94\Rightarrow a=-1.94$
d	$P(Z>a)=0.2$ $P(Z>a)=P(Z>z)\Rightarrow 0.2=P(Z>z)\Rightarrow 0.2=1-P(Z<z)$ $\Rightarrow P(Z<z)=1-0.2\Rightarrow P(Z<z)=0.8\Rightarrow z=0.84\Rightarrow a=-0.84$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل **107** أجد قيمة a التي تُحقِّق الاحتمال المعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

18) $P(Z<a)=0.7642$ 19) $P(Z<a)=0.13$ 20) $P(Z>a)=0.8531$ 21) $P(Z>a)=0.372$

18	$P(Z<a)=P(Z<z)\Rightarrow 0.7642=P(Z<z)\Rightarrow z=0.72\Rightarrow a=0.72$
19	$P(Z<a)=P(Z<-z)\Rightarrow 0.13=P(Z<-z)\Rightarrow 0.13=1-P(Z<z)$ $P(Z<z)=1-0.13$ $P(Z<z)=0.87\Rightarrow z=1.12\Rightarrow a=-1.12$
20	$P(Z>a)=P(Z>-z)\Rightarrow 0.8531=P(Z>-z)\Rightarrow 0.8531=P(Z<z)$ $\Rightarrow P(Z<z)=0.8531\Rightarrow z=1.05\Rightarrow a=-1.05$
21	$P(Z>a)=P(Z>z)\Rightarrow 0.372=P(Z>z)\Rightarrow 0.372=1-P(Z<z)$ $\Rightarrow P(Z<z)=1-0.372\Rightarrow P(Z<z)=0.628\Rightarrow z=0.32\Rightarrow a=-0.32$

مهارات التفكير العليا أجد قيمة a التي تُحقِّق الاحتمال المعطى

25 $P(-a < Z < a) = 0.1272$ 24 $P(0 < Z < a) = 0.45$

24	$P(0 < Z < a) = 0.45$ $\Rightarrow P(Z < a) - P(Z < 0) = 0.45 \Rightarrow P(Z < a) - 0.5 = 0.45 \Rightarrow P(Z < a) = 0.95$ $P(Z < a) = P(Z < z) \Rightarrow 0.95 = P(Z < z) \Rightarrow z = 1.64 \Rightarrow a = 1.64$
25	$P(-a < Z < a) = 0.1272$ $\Rightarrow P(Z < a) - P(Z < -a) = 0.1272 \rightarrow P(Z < a) - 1 + P(Z < a) - 0.1272$ $\Rightarrow 2P(Z < a) - 1 = 0.1272 \Rightarrow 2P(Z < a) = 1.1272 \Rightarrow P(Z < a) = 0.5636$ $P(Z < a) = P(Z < z) \Rightarrow 0.5636 = P(Z < z) \Rightarrow z = 0.16 \Rightarrow a = 0.16$

26 إذا كان: $Z \sim N(0, 1)$، وكان: $P(1 < Z < c) = 0.1408$، فأجد قيمة الثابت c.

26	$P(1 < Z < c) = 0.1408$ $\quad P(Z < c) - P(Z < 1) = 0.1408$ $P(Z < c) - 0.8413 = 0.1408$ $\quad P(Z < c) = 0.9821$ $P(Z < c) = P(Z < z) \Rightarrow 0.9821 = P(Z < z) \Rightarrow z = 2.1 \Rightarrow a = 2.1$

وزارة أدبي 2023

23) إذا كان $Z \sim N(0\,,1)$ ، وكان $P(Z < a) = 0.1539$ ، فما قيمة $P(Z < -a)$ ؟

a) 0.8461 b) 0.1539 c) 0.3461 d) 0.6539

24) إذا كان $Z \sim N(0\,,1)$ ، وكان $P(Z > -a) = 0.9292$ ، فما قيمة $P(Z < a)$ ؟

a) 0.0708 b) 0.9292 c) 0.4292 d) 0.5000

ملاحظة: يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي الذي يتضمن قيمًا مأخوذة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري في حل الفرعين a و b.

z	0	0.5	1.5	2
$P(Z < z)$	0.5000	0.6915	0.9332	0.9772

a) إذا كان $Z \sim N(0\,,1)$ ، وكان $P(k < Z < 2) = 0.6687$ ، فما قيمة الثابت k؟ (8 علامات)

وزارة أدبي 2023 تكميلي

23) إذا كان $X \sim N(20, 9)$ ، فإن النسبة المئوية للبيانات التي تقل عن 20 هي:

a) 34% b) 47.5% c) 50% d) 68%

24) إذا كان Z متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا ، وكان $P(Z < a) = 0.6$ ، فإن قيمة $P(Z > -a)$ تساوي:

a) 0.04 b) 0.06 c) 0.4 d) 0.6

مُكثف

الدرس 5 احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي باستعمال الجدول
Probability of Normal Random Variable Using the Table

تحويل قِيَم التوزيع الطبيعي إلى قِيَم معيارية

لاحظنا طريقة إيجاد احتمالات مُتغيِّرات عشوائية طبيعية غير معيارية لقِيَم مُحدَّدة، مثل (P(X < μ -σ ، باستعمال القاعدة التجريبية، كما أوجدنا احتمالات المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري باستعمال الجدول.

ولكن الجدول لا يتعامل إلا مع قيم معيارية، فما العمل عند وجود مُتغيِّر عشوائي طبيعي غير معياري؟ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
ببساطة نحوّل القيم المعطاة إلى قيم معيارية عن طريق القاعدة الآتية :

العلامة (القيمة) المعيارية (z) = $\dfrac{\text{القيمة الخام – الوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}}$ وبالرموز $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

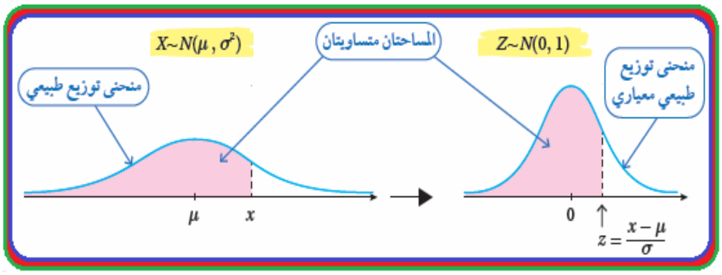
أتحقَّق من فهمي 109 إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 15، وانحرافه المعياري 4، فأجد القيمة المعيارية z التي تُقابِل قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $x = 24$ b) $x = 10$

a	$z = \dfrac{24-15}{4} = 2.25$	b	$z = \dfrac{10-15}{4} = -1.25$	أتحقق صفحة 109

ملاحظة : يؤدّي التغيُّر في الوسط الحسابي إلى انسحاب أفقي لمنحنى التوزيع الطبيعي.
أمّا التغيُّر في الانحراف المعياري فيُؤثِّر في انتشار المنحنى الطبيعي وتوسُّعه.

إيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي(غير المعياري)



إنَّ طرح الوسط الحسابي من جميع قِيَم المُتغيِّر العشوائي الطبيعي يجعل قيمة الوسط الحسابي 0 بدلًا من μ،
وإنَّ قسمتها جميعًا على الانحراف المعياري تجعل قيمة الانحراف المعياري 1 بدلًا من σ،
وبذلك يصبح منحنى التوزيع الطبيعي معياريًّا، ويتحوَّل المُتغيِّر العشوائي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ إلى $Z \sim N(0, 1)$،
عندئذٍ يُمكِن استعمال الجدول لإيجاد احتمال أيٍّ من قِيَمه.

أتحقَّق من فهمي 110 إذا كان: $X \sim N(7, 0.25)$، فأجد كل احتمال ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(X < 7.7)$ b) $P(X > 6.1)$ c) $P(6 < X < 7.1)$

أتحقق من فهمي صفحة 110

a	$X \sim N(7, 0.5^2)$ $P(X < 7.7) = P\left(Z < \dfrac{7.7-7}{0.5}\right) = P(Z < 1.4) = 0.9192$
b	$P(X > 6.1) = P\left(Z > \dfrac{6.1-7}{0.5}\right) = P(Z > -1.8) = P(Z < 1.8) = 0.9641$
c	$P(6 < X < 7.1) = P\left(\dfrac{6-7}{0.5} < Z < \dfrac{7.1-7}{0.5}\right) = P(-2 < Z < 0.2)$ $= P(Z < 0.2) - P(Z < -2) = P(Z < 0.2) - (1 - P(Z < 2))$ $= 0.5793 - (1 - 0.9772) = 0.5793 - 0.0228 = 0.5565$

أتحقَّق من فهمي 112 زراعة: تتبع كتـل ثمار البندورة في إحدى المَزارع توزيعًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 90 g، وانحرافه المعياري 5 g:

a) أجد نسبة ثمار البندورة التي تقلّ كتلة كلٍّ منها عن 80 g

b) إذا احتوى صندوق على 200 حبَّة بندورة من إنتاج هذه المزرعة، فأجد عدد ثمار البندورة التي تزيد كتلة كلٍّ منها على 100 g في هذا الصندوق.

أتحقق من فهمي صفحة 112

a	$X \sim N(90, 5^2)$
	$P(X < 80) = P\left(Z < \dfrac{80-90}{5}\right) = P(Z < -2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$
b	$P(X > 100) = P\left(Z > \dfrac{100-90}{5}\right) = P(Z > 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$
	عدد ثمار البندورة التي تزيد كتلة كل منها عن $100\ g$ $= n = 200 \times 0.0228 = 4.56 \approx 5$

مسألة اليوم يتبع ضغط الدم الانقباضي (mmHg) للبالغين توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 127، وانحرافه المعياري 16. إذا اختير شخص بالغ عشوائيًّا، فما احتمال أنْ يكون ضغط دمه الانقباضي أقل من 123 mmHg؟

مسألة اليوم صفحة 108

	$X \sim N(127, 16^2)$
	$P(X < 123) = P\left(Z < \dfrac{123-127}{16}\right) = P(Z < -0.25) = 1 - 0.5987 = 0.4013$

إذا كان: $X \sim N(154, 144)$، فأجد كل احتمال ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

10) $P(X < 154)$ 11) $P(X > 160)$ 12) $P(140 < X < 155)$

الأستاذ عبدالقادر الحسنات
مدرسة البقعة الثانوية للبنين

10	$X \sim N(154, 12^2) \Rightarrow P(X < 154) = P\left(Z < \dfrac{154-154}{12}\right) = P(Z < 0) = 0.5$
11	$P(X > 160) = P\left(Z > \dfrac{160-154}{12}\right) = P(Z > 0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$
12	$P(140 < X < 155) = P\left(\dfrac{140-154}{12} < Z < \dfrac{155-154}{12}\right)$ $= P(-1.17 < Z < 0.08) = P(Z < 0.08) - P(Z < -1.17)$ $= P(Z < 0.08) - (1 - P(Z < 1.17)) = 0.5319 - (1 - 0.8790) = 0.0147$

قياس: يتبع محيط خصر 1200 شخص توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي **78 cm**، وانحرافه المعياري **5 cm**:

13) أجد نسبة الأشخاص الذين يقلُّ محيط الخصر لكلٍّ منهم عن 70 cm

14) أجد عدد الأشخاص الذين يتراوح محيط الخصر لكلٍّ منهم بين 70 cm و 80 cm

13	$X \sim N(78, 5^2) \Rightarrow P(X < 70) = P\left(Z < \dfrac{70-78}{5}\right) = P(Z < -1.6)$ $= 1 - P(Z < 1.6) = 1 - 0.9452 = 0.0548$
14	$P(70 < X < 80) = P\left(\dfrac{70-78}{5} < Z < \dfrac{80-78}{5}\right) = P(-1.6 < Z < 0.4)$ $= P(Z < 0.4) - P(Z < -1.6) = P(Z < 0.4) - (1 - P(Z < 1.6))$ $= 0.6554 - (1 - 0.9452) = 0.6554 - 0.0548 = 0.6006$ $\Rightarrow n = 1200 \times 0.6006 = 720.72 \approx 721$

مهارات التفكير العليا

20 تبرير: إذا كان: $X\sim N(\mu\,,\sigma^2)$، وكانت القيمة المعيارية التي تُقابِل $x = 14$ هي $z = 3.2$، والقيمة المعيارية التي تُقابِل $x = -6$ هي $z = -1.8$، فأجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمُتغيِّر العشوائي X.

20

$3.2 = \dfrac{14-\mu}{\sigma} \Rightarrow 3.2\sigma = 14-\mu \quad ...(1)$

$-1.8 = \dfrac{-6-\mu}{\sigma} \Rightarrow -1.8\sigma = -6-\mu \quad ...(2) \Rightarrow 1.8\sigma = 6+\mu$

بجمع المعادلتين $5\sigma = 20 \Rightarrow \sigma = 4$

$1.8(4) = 6+\mu \quad \Rightarrow \mu = 1.2$

21 تحدٍّ: إذا كانت مُعدَّلات 600 طالب تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي هو 73، وانحرافه المعياري هو 8، وقرَّرت إدارة المدرسة تكريم الطلبة الخمسين الحاصلين على أعلى المُعدَّلات من بين هؤلاء الطلبة، فما أقل مُعدَّل للطلبة الخمسين؟

21

نفرض a هو المعدل المطلوب. نفرض p هو احتمال أن يكرم الطالب،

أي احتمال أن يحصل على معدل أعلى من a أو يساويه. $n = 600 \times p = 50 \Rightarrow p = \dfrac{50}{600} \approx 0.0833$

إذن، احتمال أن يتم تكريم الطالب هو 0.0833

$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \dfrac{a-73}{8}\right) = 1 - P\left(Z < \dfrac{a-73}{8}\right)$

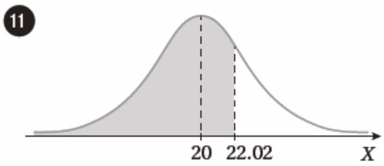
$\Rightarrow 0.0833 = 1 - P\left(Z < \dfrac{a-73}{8}\right) \Rightarrow P\left(Z < \dfrac{a-73}{8}\right) = 1 - 0.0833$

$\Rightarrow P\left(Z < \dfrac{a-73}{8}\right) = 0.9167 \Rightarrow \dfrac{a-73}{8} = 1.38 \Rightarrow a - 73 = 11.04$

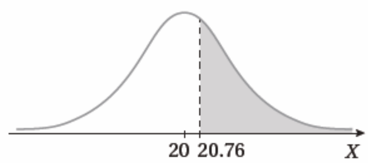
$\Rightarrow a = 84.04$

إذا كان: $X\sim N(20, 9)$، فأجد مساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي للمُتغيِّر العشوائي X في كلٍّ ممّا يأتي:

11



12



11 $P(X < 22.02) = P\left(Z < \dfrac{22.02-20}{3}\right) = P(Z < 0.67) = 0.7486$

12 $P(X > 20.76) = P\left(Z > \dfrac{20.76-20}{3}\right) = P(Z > 0.25)$

$= 1 - 0.5987 = 0.4013 = 1 - P(Z < 0.25)$

رياضة: تتبع أطوال لاعبي كرة السلَّة توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي **185 cm**، وانحرافه المعياري **5 cm**.

إذا اختير لاعب عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

13 احتمال أنْ يزيد طول اللاعب على 175 cm.

14 احتمال أنْ يتراوح طول اللاعب بين 180 cm و 190 cm.

15 العدد التقريبي للاعبين الذين تزيد أطوالهم على 195 cm من بين 2000 لاعب.

13 $P(X > 175) = P\left(Z > \dfrac{175-185}{5}\right) = P(Z > -2) = P(Z < 2) = 0.9772$

14 $P(180 < X < 190) = P\left(\dfrac{180-185}{5} < Z < \dfrac{190-185}{5}\right) = P(-1 < Z < 1)$

$= P(Z < 1) - P(Z < -1) = P(Z < 1) - (1 - P(Z < 1))$

$= 2P(Z < 1) - 1 = 2(0.8413) - 1 = 0.6826$

15 $P(X > 195) = P\left(Z > \dfrac{195-185}{5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$

$= 1 - 0.9772 = 0.0228 \Rightarrow N = 0.0228 \times 2000 = 45.6 \approx 46$

إذن، العدد التقريبي للاعبين الذين تزيد أطوالهم على $195\ cm$ من بين 2000 لاعب هو 46

وزارة أدبي 2023

25) إذا كان X متغيرًا عشوائيًا وسطه الحسابي 60 ، وانحرافه المعياري 4 ، فإن قيمة x التي تُقابل القيمة المعيارية $z = 1.25$ هي:

a) 70 b) 75 c) 65 d) 55

ملاحظة: يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي الذي يتضمن قيمًا مأخوذة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري في حل الفرعين a و b.

z	0	0.5	1.5	2
$P(Z < z)$	0.5000	0.6915	0.9332	0.9772

b) وجد عالم أن الزمن اللازم لحدوث تفاعل كيميائي في تجربة معينة يتبع توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابي 155 دقيقة وانحرافه المعياري 3 دقائق. ما احتمال أن يتراوح الزمن اللازم لحدوث التفاعل بين 155 دقيقة و 159.5 دقيقة؟ (10 علامات)

وزارة أدبي 2023 تكميلي

25) إذا كان $X \sim N(54, \sigma^2)$ ، وكانت القيمة المعيارية التي تقابل $x = 50$ هي $z = -1$ ، فإن قيمة الانحراف المعياري تساوي:

a) 4 b) 2 c) −4 d) −2

b) تبين لإدارة السير من دراسة أجرتها على أحد الطرق، أن سرعة السيارات على هذا الطريق تتبع توزيعًا طبيعيًا وسطه الحسابي 70km/h ، وانحرافه المعياري 5km/h . إذا بلغ العدد الكلي للسيارات التي تسير على هذا الطريق في أحد الأيام 1000 سيارة ، فما عدد السيارات التي تتراوح سرعتها بين 64km/h و 80.5km/h ؟

ملاحظة: يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي الذي يتضمن قيمًا مأخوذة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري. (16 علامة)

z	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
$P(Z < z)$	0.8849	0.9332	0.9641	0.9821	0.9918

أسئلة متوقعة للأدبي (مراجعة مكثفة) - ف2 / وحدة الإحصاء والاحتمالات

السؤال الأول :حدد الإجابة الصحيحة فيما يأتي ، ثم ضع دائرة حول رمزها

1) إذا كان $X \sim Geo(p)$ وكان $P(X<3)=0.8$ ، فإن قيمة $P(X>3)$ تساوي:

$a)\ 0.8-P(x=3)$ $b)\ 0.2+P(x=3)$

$c)\ 0.8+P(x=3)$ $d)\ 0.2-P(x=3)$

* إذا كان احتمال وجود قلم تالف من إنتاج أحد المصانع هو(20 %) ، وتم فحص عينة من إنتاج ذلك المصنع ، أجب عن الفقرتين (2 و 3)

2) ما احتمال أن يكون أول قلم تالف في العينة هو الرابع ؟ $a)\ 0.512$ $b)\ 0.1024$ $c)\ 0.8$ $d)\ 0.48$

3) عدد الأقلام المتوقع فحصها حتى ظهور أول قلم تالف هو : $a)\ 5$ $b)\ 10$ $c)\ 2$ $d)\ 20$

4) إذا كان $X \sim Geo(p)$ وكان $P(X=1)=\frac{3}{8}$ ، فإن E(X) يساوي :

$a)\ \frac{3}{8}$ $b)\ \frac{8}{3}$ $c)\ \frac{8}{5}$ $d)\ \frac{5}{8}$

5) إذا كان $X \sim Geo(p)$ وكان $P(X\le 3)=\frac{27}{40}$ ، فإن $P(X>3)$ يساوي :

$a)\ \frac{27}{40}$ $b)\ \frac{40}{27}$ $c)\ \frac{13}{40}$ $d)\ 1$

6) إذا كان $X \sim Geo(\frac{5}{7})$ ، فإن توقع المتغير العشوائي (X) هو :

$a)\ 0.71$ $b)\ 1.2$ $c)\ 7$ $d)\ 1.48$

7) إذا كان $X \sim Geo(\frac{3}{4})$ ، فإن $P(X<1)$ تساوي : $a)\ \frac{3}{4}$ $b)\ \frac{3}{16}$ $c)\ \frac{4}{3}$ $d)\ 0$

8) إذا كان $X \sim Geo(p)$ وكان E(x) = 2 فإن $P(X=2)$ تساوي :

$a)\ \frac{1}{2}$ $b)\ \frac{1}{4}$ $c)\ \frac{1}{8}$ $d)\ \frac{1}{16}$

9) إذا كان $X \sim Geo(p)$ وكان $E(X)=1.4$ فإن p تساوي : $a)\ \frac{7}{5}$ $b)\ \frac{4}{10}$ $c)\ \frac{5}{7}$ $d)\ \frac{7}{10}$

10) التجربة الاحتمالية الهندسية فيما يأتي هي:
a) إلقاء حجر نرد 5 مرات ثم كتابة الأعداد الظاهرة
b) إلقاء قطعة نقد منتظمة عدة مرات ثم كتابة النتائج
c) رمي لاعب كرة سلة نحو الهدف 4 مرات ثم تسجيل عدد مرات إحراز الهدف
d) إطلاق أسهم بشكل متكرر نحو هدف ثم التوقف عند إصابته أو مرة

الأستاذ عبدالقادر الحسنات 078 531 88 77

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	b	a	b	c	d	d	b	c	d

11) إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية عند أحد الأطباء يساوي (80 %) ، وأجرى هذا الطبيب 4 عمليات جراحية ما احتمال نجاح ثلاث منها ؟

$a)\ 0.013 \quad b)\ 0.75 \quad c)\ 0.5 \quad d)\ 0.41$

12) إذا كان $X \sim B(5,0.6)$ فإن $P(X=2)$ تساوي :

$a)\ 0.35 \quad b)\ 0.23 \quad c)\ 0.035 \quad d)\ 0.023$

13) إذا كان $X \sim B(40,\frac{1}{8})$ فإن E(x) تساوي :

$a)\ 8 \quad b)\ 4 \quad c)\ 80 \quad d)\ 5$

14) إذا كان $X \sim B(3,p)$ وكان $P(X \ge 1) = \frac{98}{125}$ فإن قيمة (p) تساوي:

$a)\ \frac{3}{5} \quad b)\ \frac{26}{125} \quad c)\ \frac{2}{5} \quad d)\ \frac{27}{125}$

15) إذا كان $X \sim B(10,p)$ وكان $P(X=6) = P(X=5)$ ، فإن قيمة (p) تساوي :

$a)\ \frac{6}{11} \quad b)\ \frac{5}{11} \quad c)\ \frac{5}{6} \quad d)\ \frac{10}{11}$

16) إذا كان $X \sim B(5,p)$ وكان E(X) = 3 فإن Var(X) يساوي :

$a)\ 0.18 \quad b)\ 0.6 \quad c)\ 1.2 \quad d)\ 0.54$

17) إذا كان $X \sim B(200,0.6)$ فإن التباين للمتغير العشوائي (X) يساوي :

$a)\ 48 \quad b)\ 24 \quad c)\ 1.6 \quad d)\ 120$

18) إذا كان $X \sim B(6,\frac{1}{4})$ فإن الانحراف المعياري لهذا التوزيع يساوي :

$a)\ 3 \quad b)\ 9 \quad c)\ \frac{1}{4} \quad d)\ \frac{3}{2}$

19) إذا كان $X \sim B(200,p)$ وكان Var(X) = 48 فإن قيمة (قيم) الثابت (p) الممكنة هي :

$a)\ \frac{3}{5},\frac{2}{5} \quad b)\ \frac{1}{5},\frac{4}{5} \quad c)\ \frac{7}{10},\frac{3}{10} \quad d)\ \frac{1}{3},\frac{2}{3}$

20) إذا كان $X \sim B(3,p)$ وكان $P(X \le 2) = \frac{7}{8}$ فإن $P(X=3)$ تساوي :

$a)\ \frac{1}{8} \quad b)\ \frac{5}{8} \quad c)\ \frac{3}{8} \quad d)\ \frac{7}{8}$

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d	b	d	c	a	c	a	a	a	a

*** معتمدا المعلومات في الجدول الآتي ، وهو جزء من جدول التوزيع الطبيعي المعياري ، أجب عن الأسئلة (21 – 33)

z	0.23	0.32	0.4	0.5	1	1.5	1.7	2	2.03	2.3	1.5	3
$P(Z<z)$	0.5910	0.6255	0.6554	0.6915	0.8413	0.9332	0.9554	0.9772	0.9788	0.9893	0.9332	0.9987

21) قيمة $P(Z<0.32)$ تساوي :

$a)$ 0.6255 $b)$ 0.5910 $c)$ 0.3745 $d)$ 0.4090

22) قيمة $P(Z>0.23)$ تساوي :

$a)$ 0.6255 $b)$ 0.5910 $c)$ 0.3745 $d)$ 0.4090

23) قيمة $P(Z<-1.7)$ تساوي :

$a)$ 0.9893 $b)$ 0.9554 $c)$ 0.0446 $d)$ 0.9772

24) قيمة $P(Z>-2.3)$ تساوي :

$a)$ 0.9893 $b)$ 0.0217 $c)$ 0.591 $d)$ 0.9788

25) قيمة $P(0.5<Z<2.03)$ تساوي :

$a)$ 0.6915 $b)$ 0.2873 $c)$ 0.3273 $d)$ 0.9788

26) قيمة $P(-0.4<Z<2)$ تساوي :

$a)$ 0.6326 $b)$ 0.3446 $c)$ 0.3218 $d)$ 0.9772

27) قيمة $P(-1.5<Z<-1)$ تساوي :

$a)$ 0.7745 $b)$ 0.0919 $c)$ 0.8413 $d)$ 0.7845

28) إذا كانت $P(Z<a)=0.6554$ فإن قيمة الثابت a هي :

$a)$ 0.4 $b)$ 0.3 $c)$ – 0.4 $d)$ – 0.3

29) إذا كانت $P(Z>a)=0.9332$ فإن قيمة الثابت a هي :

$a)$ 1.5 $b)$ 0.5 $c)$ – 1.5 $d)$ – 2

30) إذا كانت $P(Z>a)=0.3745$ فإن قيمة الثابت a هي :

$a)$ 2.3 $b)$ 0.23 $c)$ – 0.32 $d)$ 0.32

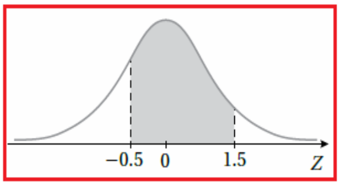
31) إذا كانت $P(Z<-a)=0.409$ فإن قيمة الثابت a هي :

$a)$ 2.3 $b)$ 0.23 $c)$ – 0.32 $d)$ – 0.23

32) إذا كانت $P(a<Z<2)=0.0218$ فإن قيمة الثابت a هي :

$a)$ 1.7 $b)$ 0.23 $c)$ – 1.7 $d)$ 0.32

33) مساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في الشكل الآتي هي :



$a)$ 0.7683 $b)$ 1.6247 $c)$ 0.6915 $d)$ 0.6247

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
a	d	c	a	b	a	b	a	c	d	b	a	d

34) إذا كان $X \sim N(36, 0.16)$ فإن الوسط الحسابي لهذا التوزيع الطبيعي هو :

$a)\ 6 \quad b)\ 36 \quad c)\ 0.16 \quad d)\ 0.4$

35) إذا كان $X \sim N(81, 0.25)$ فإن الانحراف المعياري لهذا التوزيع الطبيعي هو :

$a)\ 81 \quad b)\ 9 \quad c)\ 0.25 \quad d)\ 0.5$

36) إذا كان $X \sim N(\mu, 16)$ وكانت القيمة المعيارية التي تقابل $x = 52$ هي $z = -2$ فإن الوسط الحسابي =

$a)\ 60 \quad b)\ 84 \quad c)\ 44 \quad d)\ 108$

37) إذا كان Z متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً وكان $P(z \le a) = 0.7$ فإن $P(z \le -a)$ يساوي :

$a)\ 0.03 \quad b)\ 0.3 \quad c)\ 0.7 \quad d)\ -0.7$

38) إذا كان $Z \sim N(0,1)$, $a > 0$ ، وكان $P(Z > a) = 0.8643$ ، فإن $P(Z < -a)$ تساوي :

$a)\ 0.8643 \quad b)\ 0.1357 \quad c)\ 0.2357 \quad d)\ 0.7643$

39) إذا كانت $a > 0$ ، وكانت $P(-a < Z < a) = k$ فإن قيمة $P(Z < a)$ تساوي :

$a)\ \dfrac{k+1}{2} \quad b)\ \dfrac{k-1}{2} \quad c)\ k+1 \quad d)\ k-1$

40) إذا كان $Z \sim N(0,1)$ وكان $P(a < Z < 2.4) = 0.0146$ فإن قيمة الثابت (a) تساوي :

$a)\ 0.2 \quad b)\ 2.2 \quad c)\ 2 \quad d)\ -2$

34	35	36	37	38	39	40
b	d	a	b	a	a	c

الأستاذ عبدالقادر الحسنات

السؤال الرابع : إذا كان احتمال أن يسجل أحد اللاعبين هدفا في كل ركلة جزاء ينفذها يساوي (0.8) ، فإذا نفذ هذا اللاعب (5) ركلات جزاء ،

فجد: 1) احتمال تسجيل هدف مرة واحدة على الأقل

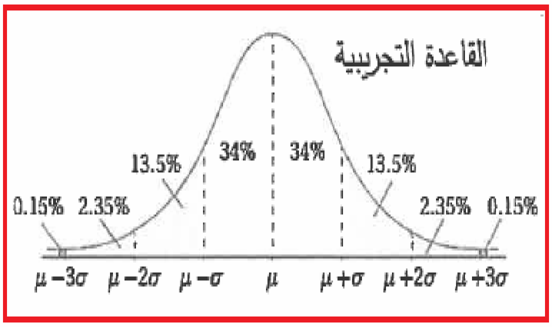
2) احتمال تسجيل هدف ثلاث مرات على الأكثر

3) عدد الأهداف المتوقع تسجيلها من الركلات الخمس

السؤال الخامس :

إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على أطوال مجموعة من الطلبة في مدرسة ما ، حيث $X \sim N(170,9)$
فاستعمل القاعدة التجريبية في الشكل المجاور والذي يمثل منحنى توزيع طبيعي للإجابة عن الفقرات الآتية :

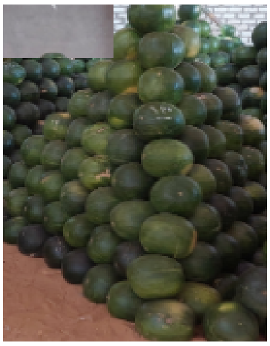
أ) جد النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد



ب) جد قيمة $P(164 < X < 173)$

ج) إذا اشترط معلم الرياضة طولا معيناً للانضمام إلى فريق كرة السلة في المدرسة وكانت نسبة الطلبة الذين لم يحققوا هذا الشرط (16 %) جد ذلك الطول

السؤال السادس : إذا كانت كتل كومة من البطيخ ، عند أحد التجار ، تتبع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي (7.8) كغم وانحرافه المعياري (0.4) كغم ،



أ) إذا تم اختيار بطيخة عشوائياً ، ما احتمال أن تكون كتلتها أكبر من (8) كغم ؟

ب) جد نسبة البطيخات التي تتراوح كتلة كل منها بين (7 كغم) و (9 كغم)

ج) إذا قرر أحدهم شراء جميع البطيخات التي تزيد كتلتها عن وزن معين ، فجد هذا الوزن إذا علمت أن (33 %) من البطيخات كتلتها أكبر منه

ملاحظة: يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي الذي يتضمن قيمًا مأخوذة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

z	0.33	0.44	0.5	1	1.5	2	3
$P(Z < z)$	0.6664	0.6700	0.6915	0.8413	0.9332	0.9772	0.9987

الإجابات

السؤال الرابع:

1) مرة واحدة على الأقل تعني مرة واحدة أو أكثر (أقل شيئ مرة واحدة)

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$= 1 - P(X=0) = 1 - \binom{5}{0}(0.8)^0(0.2)^4 = 1 - 0.0016 = 0.9984$$

2) مرة واحدة على الأكثر تعني مرة واحدة أو أقل (أكثر شيئ مرة واحدة)

$$P(X \leq 1) = P(X=1) + P(X=0)$$

$$= \binom{5}{1}(0.8)^1(0.2)^4 + \binom{5}{0}(0.8)^0(0.2)^5 = 0.064 + 0.00032 = 0.06432$$

3) التوقع = عدد المرات × الاحتمال

E(x) = np = (5)(0.8) = 4

السؤال الخامس :

أ) 34 %   ب) 81.5 %   ج) 167

السؤال السادس :

$$\boxed{\mu = 7.8 \quad , \quad \sigma = 0.4}$$

أ)

$$P(X > 8) = P(Z > \frac{8-7.8}{0.4}) = P(Z > \frac{0.2}{0.4})$$

$$= P(Z > 0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

ب)

$$P(7 < X < 9) = P(X < 9) - P(X < 7)$$

$$= P(Z < \frac{9-7.8}{0.4}) - P(Z < \frac{7-7.8}{0.4})$$

$$= P(Z < \frac{1.2}{0.4}) - P(Z < \frac{-0.8}{0.4})$$

$$= P(Z < 3) - P(Z < -2)$$

$$= 0.9987 - (1 - 0.9772) = 0.8759$$

ج) نفرض أن ذلك الوزن هو (a)

$$P(X > a) = P(X > \frac{a-7.8}{0.4}) = 0.33$$

$$\boxed{1 - 0.33 = 067 \Rightarrow Z = 0.44}$$

$$\Rightarrow \frac{a-7.8}{0.4} = 0.44 \Rightarrow a - 7.8 = 0176 \Rightarrow a = 7.976$$

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح
الأستاذ عبدالقادر الحسنات

وزارة التربية والتعليم
مديرية التربية والتعليم محافظة العقبة
الامتحان النهائي الموحد للفصل الدراسي الثاني لعام 2023/2024
المبحث :الرياضيات الادبي **مدة الامتحان : ساعتان ونصف**
اليوم :الاحد / التاريخ 12 / 05 / 2024

ملحوظة: أجب عن جميع الأسئلة وعددها (5) ،علما بأن عدد الصفحات (7).

الســـــــــــؤال الأول: (100علامة)

اختر رمز الاجابة الصحيحة في كل فقرة مما يأتي ،ثم ضلل بشكل غامق الدائرة التي تشير الى رمز الاجابة في نموذج الاجابة (ورقة القارئ الضوئي) فهو النموذج المعتمد (فقط) لاحتساب علامتك في هذا السؤال، علماً عدد الفقرات (25)

1) الاقتران الاصلي للاقتران $f(x) = -2x^{-3}$ هو :

a) $F(x) = -3x^{-2} + c$

b) $F(x) = x^{-3} + c$

c) $F(x) = x^{-2} + c$

d) $F(x) = 6x^{-4} + c$

2) ناتج $\int (\frac{10}{\sqrt{x}})\, dx$ يساوي :

a) $10\sqrt{x} + c$

b) $20\sqrt{x} + c$

c) $-10\sqrt{x} + c$

d) $-20\sqrt{x} + c$

3) ناتج $\int (2x-1)(2x+1)dx$ يساوي :

a) $\frac{4}{3}x^3 - x + c$

b) $\frac{3}{4}x^3 - x + c$

c) $\frac{3}{4}x^3 + x + c$

d) $\frac{4}{3}x^3 + x + c$

4) اذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+10}{x^2}$ ، و يمر منحناه بالنقطة (5,2) فان قاعدة العلاقة y هي :

a) $y = 10x^{-1} - x + 1$

b) $y = 10x^{-1} + x - 5$

c) $y = x - 10x^{-1} - 1$

d) $y = x - 10x^{-1} + 1$

يتبع الصفحة الثانية ....

5) ناتج $\int_1^4 (8x - \sqrt{x})dx$ يساوي :

a) -166

b) $\frac{166}{3}$

c) 166

d) $-\frac{166}{3}$

6) إذا كان $\int_1^k 6x^2 \ dx = 14$ ، فإن قيمة الثابت k تساوي :

a) 2

b) -2

c) 6

d) 8

** إذا كان $\int_1^0 f(x) = 4$ ، $\int_1^3 f(x)\ dx = 6$ ، $\int_3^1 g(x)\ dx = -2$ ، فأجب عن الفقرتين 7 ، 8 الآتيتين :

7) قيمة $\int_1^3 (2f(x) + g(x))\ dx$ تساوي :

a) 14

b) 10

c) 8

d) 4

8) قيمة $\int_0^3 (f(x) + 3)dx$ تساوي :

a) 13

b) 19

c) 11

d) 5

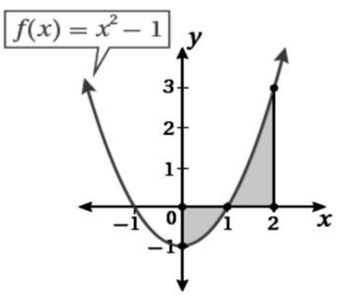
9) معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 1$ ، فإن المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور x ، خلال الفترة [0 , 2] تساوي :

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{2}$

c) 1

d) 2



يتبع الصفحة الثالثة ....

10) التكامل المحدود الذي قيمته تساوي مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - x - 2$ والمحور x هو :

a) $\int_1^2 (x^2 - x - 2)\ dx$

b) $\int_{-1}^2 (x^2 - x - 2)\ dx$

c) $\int_2^1 (x^2 - x - 2)\ dx$

d) $\int_2^{-1} (x^2 - x - 2)\ dx$

11) ناتج $\int \frac{2x^5 - 4}{x}\ dx$ يساوي :

a) $\frac{2}{5}x^5 - 4\ln|x| + c$

b) $2x^5 + 4\ln|x| + c$

c) $\frac{1}{3}x^6 - 4\ln|x| + c$

d) $\frac{2}{5}x^5 - 4x + c$

12) ناتج $\int 2e^{2x-3}\ dx$ يساوي **:**

a) $\frac{1}{2}e^{2x-3} + c$

b) $2\ e^{2x-3} + c$

c) $-\frac{1}{2}e^{2x-3} + c$

d) $e^{2x-3} + c$

13) قيمة $\int_0^3 \frac{2}{7-2x}\ dx$ تساوي :

a) $\ln(7)$

b) $\ln(7) + 1$

c) $\ln(7) - 1$

d) $-\ln(7)$

14) إذا كان $X \sim Ge(0.2)$ فان قيمة $p(X \le 2)$ تساوي :

a) 0.128

b) 0.288

c) 0.36

d) 0.64

يتبع الصفحة الرابعة ....

15) إذا كان $X \sim Geo(p)$ وكان $E(X) = \frac{4}{3}$ فان قيمة P تساوي :

a) $\frac{4}{3}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{3}{2}$

16) إذا كان $X \sim B(n, p)$ ، وكان $E(X) = 8$ ، و $Var(X) = \frac{20}{3}$ ، فإن قيمة المعامل (n) هي :

a) 32

b) 64

c) 56

d) 48

17) إذا كان $X \sim B(10, 0.3)$ ، فإن قيمة $p(x = 3)$ تساوي :

a) $\binom{10}{3} (0.3)^3 (0.7)^7$

b) $\binom{10}{3} (0.7)^3 (0.3)^7$

c) $\binom{10}{7} (0.3)^3 (0.7)^7$

d) $\binom{10}{7} (0.7)^3 (0.3)^7$

18) التوزيع الطبيعي المعياري فيه :

a) $\mu = 1, \ \sigma = 0$

b) $\mu = 0, \ \sigma = 1$

c) $\mu = 1, \ \sigma = 1$

d) $\mu = 0, \ \sigma = 0$

19) إذا كان $Z \sim N(0, 1)$ ، وكان $p(Z > -a) = 0.2358$ ، فما قيمة $p(Z > a)$ ؟

a) 0.2358

b) 0.4716

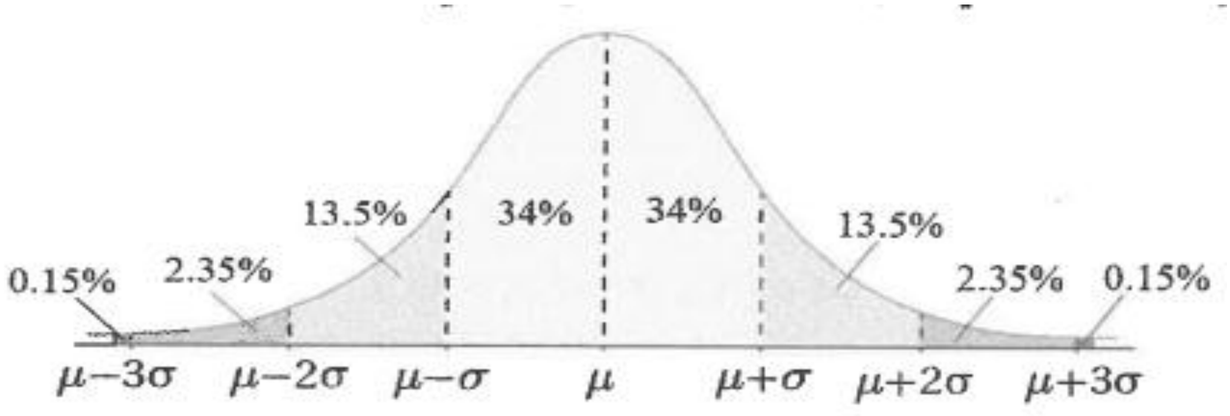
c) 0.7642

d) 0.7358

يتبع الصفحة الخامسة ....

الصفحة الخامسة

★★ إذا دل المتغير العشوائي X على طول قطر رأس مثقب (بالملليتر) تنتجه الة في مصنع ، حيث $X \sim N(30\,,0.4^2)$
فاستعمل القاعدة التجريبية والشكل الآتي الذي يمثل منحنى توزيع طبيعي للإجابة عن الفقرات 20 و 21 و 22 و 23



20) النسبة المئوية للمثاقب الذين تزيد اطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد ، أو تقل عنه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين .

a) 68 %

b) 47.5 %

c) 81.5 %

d) 95 %

21) قيمة $P(\,28.8 < X < 30.4\,)$ تساوي :

a) 0.68

b) 0.815

c) 0.95

d) 0.8385

22) قيمة $P(\,X < 30.8\,)$ تساوي :

a) 0.475

b) 0.975

c) 0.9985

d) 0.94

23) النسبة المئوية للمثاقب التي لا يزيد البعد بينها وبين الوسط الحسابي انحرافين معياريين .

a) 68 %

b) 47.5 %

c) 99.7 %

d) 95 %

يتبع الصفحة السادسة ....

24) إذا كان $Z \sim N(0\,,\,1)$ ، وكان $p(Z < a) = 0.8159$ ، فما قيمة $p(-a < Z < a)$ ؟

a) 0.8159

b) 0.1841

c) 0.3159

d) 0.6318

25) إذا كان $Z \sim N(\mu\,,\,25)$ ، وكانت القيمة المعيارية التي تقابل $x = 76$ هي $z = -2$ ، فإن قيمة الوسط الحسابي تساوي :

a) 26

b) 66

c) 86

d) 126

<u>السـؤال الثاني: (32 علامة)</u>

a) يتحرك جسيم في مسار مستقيم ، ويعطى تسارعه بالاقتران $a(t) = 6t - 4$ ، حيث t الزمن بالثواني ، و a التسارع بالمتر لكل ثانية تربيع ، اذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الاصل بسرعة متجهة مقدارها $7m\,/s$ ، جد موقعه بعد 3 ثواني من بدء الحركة . (12 علامة)

b) إذا كان $f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & , \; x \le 2 \\ 6x^2 + 1 & , \; x > 2 \end{cases}$ ، جد $\int_0^3 f(x)\,dx$ (9 علامات)

c) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2(2 - x)$ ، والمحور x . (11علامة)

<u>السـؤال الثالث: (27 علامة)</u>

a) جد كل من التكاملات الآتية : (17علامة)

1) $\int \left(\frac{\sin 2x}{6} + \frac{4x+10}{x^2+5x+1} \right) dx$

2) $\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$

b) أشارت دراسة الى أن عدد السكان في احدى القرى يتغير شهرياً بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران $p'(t) = 5 + 5t^{2/3}$ ، حيث t عدد الأشهر من الآن و $p(t)$ عدد السكان .

أجد مقدار الزيادة في عدد سكان القرية في الاشهر الثمانية القادمة . (10 علامات)

يتبع الصفحة السابعة ....

السـؤال الرابع: (20 علامة)

a) دورت دارين قرص بشكل متكرر، وكان القرص مقسماً إلى 4 قطاعات متطابقة وملونة باللون الأحمر والأزرق والأخضر والأصفر. أذا دل المتغير العشوائي X على عدد مرات تدوير مؤشر القرص حتى توقفه عند اللون الأحمر أول مرة ،

فجد كل مما يأتي : (10علامات)

1) احتمال أن تدور دارين مؤشر القرص أكثر من 3 مرات حتى يتوقف المؤشر عند اللون الأحمر أول مرة .

2) العدد المتوقع من عدد الدورات للقرص حتى تتوقف عند اللون الأحمر أول مرة .

b) في دراسة تناولت حالة الطقس مدة طويلة، تبين أن احتمال أن يكون اليوم فيها ماطرا $\frac{3}{7}$ ، إذا اختيرت 5 أيام عشوائياً،

فأجد احتمال أن يكون يوم واحد على الأقل من هذه الأيام ماطراً . (10علامات)

السـؤال الخامس: (21 علامة)

a) اذا كان $X \sim N(\mu, \delta^2)$ ، وكانت القيمة المعيارية التي تقابل $x = 80$ هي $z = 2.5$ ، والقيمة المعيارية التي تقابل $x = 65$ هي $z = -1.25$ جد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X. (10 علامات)

ملاحظة :يمكنك الاستفادة من الجدول الآتي الذي يمثل جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري للفرع b .

z	0	0.6	1	1.6	2
$p(Z < z)$	0.5000	0.7257	0.8413	0.9452	0.9772

b) تتبع كتل ثمار البندورة في إحدى المزارع توزيعياً طبيعياً ، وسطه الحسابي 80 **g** ، وانحرافه المعياري 5 **g** ،

إذا أحتوى صندوق على 200 حبة بندورة من إنتاج هذه المزرعة ، فأجد عدد ثمار البندورة التي تتراوح كتلها

بين 75 **g** و 88 **g** في هذا الصندوق . (11 علامات)

《 انتهت الاسئلة 》