المرجع في الرياضيات

الثاني ثانوي العلمي

كتاب الطالب + كتاب التمارين

الفصل الأول / الوحدة الأولى

الدرس الثالث

قاعـــدة السلسلة

الأستاذ: معتصم ابراهيم

0790264376

أعزائي الطلاب: لأي ملاحظات على الدوسيه الرجاء ارسالها على رقم الواتس اب أعلاه

طبعة السنة 2024

ولا تنسونا من دعائكم

مخطط الدرس الثالث

قاعدة السلسلة

- قاعدة السلسلة
- قاعدة سلسلة القوة
- الاستعمال المتكرر لقاعدة السلسلة
- قواعد الاشتقاق الاساسية وقاعدة السلسلة
- مشتقة $a^{(g(x))}$
- مشتقة $\log_a g(x)$
- مشتقة المعادلات الوسيطية

تأسيس الدرس الثالث: (مهم جداً)

جدول قياسات الزوايا الخاصة: (مهم حفظ)

القياس الدائري	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
القياس الستيني	0	30	45	60	90	180	270	360
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

قوانين النسب المثلثية: (مهمة جداً حفظ)

1) قوانين نصف الزاوية:

1) $\boxed{\sin 2x = 2\sin x \cos x}$

$\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$

$\sin 6x = 2\sin 3x \cos 3x$

2) $\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$

$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

$\cos 6x = \cos^2 3x - \sin^2 3x$

3) $\boxed{\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x}$

$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$

$\cos 6x = 1 - 2\sin^2 3x$

4) $\boxed{\cos 2x = 2\cos^2 x - 1}$

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$

$\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$

2) قوانين ضعف الزاوية:

1) $\boxed{\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x}$

$$\sin^2 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x$$

$$\sin^2 3x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 6x$$

1) $\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x}$

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x$$

$$\cos^2 3x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x$$

الدرس الثالث: قاعدة السلسلة

قاعدة السلسلة

هي قاعدة الاشتقاق التي تطبق على الاقترانات المركبة أي يحتوي على اقترانين (داخلي و خارجي).

يتم اشتقاق الاقتران المركب :

$$(fog)(x) = f(g(x)) \quad \Rightarrow \quad (fog)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

بمعنى مشتقة الاقتران الخارجي وقيمته عند الاقتران الداخلي، ثم ضربه في مشتقة الاقتران الداخلي.

ملاحظة مهمة: امثلة على الاقترانات التي تطبق قاعدة السلسلة:

1) الاقترانات المثلثية:

قاعدة الاشتقاق : نشتق الاقتران المثلثي وتنزل الزاوية كما هي × مشتقة الزاوية .

2) اقتران القوس المرفوع لأسّ:

الاقتران : القوس المرفوع إلى أسّ $f(x) = (g(x))^n$

المشتقة: $f(x) = (g(x))^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$

قاعدة الاشتقاق: ينزل الاسّ، وينزل القوس مع طرح من الاسّ واحد، ونشتق ما في داخل القوس.

3) الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي:

قاعدة الاشتقاق : إذا كان : $f(x) = \ln(\text{مقدار متغير})$ **، حيث :** $x > 0$ **،**

فإن المشتقة : $f'(x) = \frac{\text{مشتقة المقدار}}{\text{نفس المقدار}}$

4) الاقتران الأسي الطبيعي:

قاعدة الاشتقاق: نشتق اقتران الأس، وينزل الاقتران الأسي الطبيعي نفسه (الاساس مع الأسّ):

$$f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x)e^{g(x)}$$

مسالة اليوم : يمكن نمذجة انتشار الانفلونزا في إحدى المدارس باستعمال الاقتران : $P(t)=\frac{100}{1+e^{3-t}}$ ، حيث $P(t)$ العدد التقريبي الكلي للطلبة المصابين بعد t يوماً من ملاحظة الانفلونزا أول مرة في المدرسة ، أجد سرعة انتشار الانفلونزا في المدرسة بعد 3 أيام ، مبررا ً إجابتي .

$$P(t)=\frac{100}{1+e^{3-t}}$$

$$\acute{P}(t)=\frac{100e^{3-t}}{(1+e^{3-t})^2}$$

$$\acute{P}(3)=\frac{100e^{3-3}}{(1+e^{3-3})^2}$$

$$\acute{P}(3)=\frac{100(1)}{(1+1)^2}$$

$$\acute{P}(3)=\frac{100}{4}$$

$$\acute{P}(3)=25$$

أي أن الانفلونزا تنتشر في المدرسة بعد 5 أيام بمعدل 5 طالبا ً / يوم .

مثال 1: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي: (صفحة 40)

1) $f(x)=\cos 2x$

$$\acute{f}(x)=\frac{d}{dx}(\cos 2x)=-\sin 2x\times 2=-2\sin 2x$$

2) $f(x)=e^{(x+x^2)}$

$$\acute{f}(x)=\frac{d}{dx}(e^{(x+x^2)})=e^{(x+x^2)}(1+2x)$$

3) $f(x)=\ln(\sin x)$

$$\acute{f}(x)=\frac{d}{dx}(\ln(\sin x))=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 41)

1) $f(x) = \tan 3x^2$

$\acute{f}(x) = 6x \sec^2 3x^2$

2) $f(x) = e^{\ln x}$

$f(x) = x \longleftarrow \boxed{e^{\log_e x} = e^{\ln x} = x}$

$\acute{f}(x) = 1$

3) $f(x) = \ln(\cot x)$

$\acute{f}(x) = \dfrac{-\csc^2 x}{\cot x}$

قاعدة سلسلة القوة:

ويتم تطبيق قاعدة اشتقاق القوس المرفوع لأسّ:

مشتقة القوس المرفوع إلى أسّ $f(x) = \left(g(x)\right)^n$ ،

المشتقة $\acute{f}(x) = n\left(g(x)\right)^{n-1} \times \acute{g}(x)$

المشتقة = ينزل الاسّ ، وينزل القوس مع طرح من الاسّ واحد ، ونشتق ما في داخل القوس .

ملاحظة 1): يجب تحويل الجذر إلى (أسّ) عند الاشتقاق وذلك بقسمة $\frac{\text{الداخل}}{\text{الخارج}}$.

ملاحظة 2): إذا كان الأسّ فوق الاقتران مثلثي فيعتبر هذا الأسّ للقوس كله ويشتق حسب قاعدة القوس المرفوع لأسّ.

مثال للتوضيح:

$f(x) = \sin^2 5x \quad \Rightarrow \quad f(x) = (\sin 5x)^2$

$\acute{f}(x) = 2\sin(5x).\cos(5x).5$

$\acute{f}(x) = 10\sin(5x)\cos(5x)$

تم الاشتقاق حسب قاعدة القوس المرفوع لأسّ.

مثال 2: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي: (صفحة 42)

1) $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

$$f(x)=(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{-1}{3}}\times\frac{d}{dx}(x^2-1)$$

$$=\frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{-1}{3}}\times 2x$$

$$=\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$

2) $f(x)=\tan^4 x$

$$f(x)=\tan^4 x=(\tan x)^4$$

$$f'(x)=4(\tan x)^3\times\frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$=4(\tan x)^3\times\frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$=4\tan^3 x\times\sec^2 x$$

3) $f(x)=\sqrt{\ln x}$

$$f(x)=(\ln x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^{\frac{-1}{2}}\times\frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$=\frac{1}{2}(\ln x)^{\frac{-1}{2}}\times\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 42)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2}$

$f(x) = (x^2-1)^{\frac{2}{5}}$

$\acute{f}(x) = \frac{2}{5}(x^2-1)^{\frac{-3}{5}}(2x)$

$\acute{f}(x) = \frac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2-1)^3}}$

2) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

$\acute{f}(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

3) $f(x) = (\ln x)^5$

$\acute{f}(x) = 5(\ln x)^4\left(\frac{1}{x}\right)$

$\acute{f}(x) = \frac{5(\ln x)^4}{x}$

الاستعمال المتكرر لقاعدة السلسلة:

وهي ان نستعمل قاعدة السلسلة أكثر من مرة لإيجاد المشتقة. (بمعنى ان الاقتران مركب أكثر من مرة).

مثال: ان يكون الاقتران مثلثي مرفوع لأسّ وزاوية الاقتران المثلثي عبارة عن اقتران آخر.

المشتقة = مشتقة القوس المرفوع لقوة × مشتقة ما بداخل القوس × مشتقة الزاوية

امثلة توضيحية: (غير موجودة في الكتاب)

1) $f(x) = \cos^3(2x)$

$f(x) = (\cos(2x))^3$

$f'(x) = 3(\cos 2x)^2(-\sin 2x)(2)$

$f'(x) = -6(\cos^2 2x)(\sin 2x)$

2) $f(x) = \sin^2(\cos 3x^2)$

$f(x) = (\sin(\cos 3x^2))^2$

$f'(x) = (2\sin(\cos 3x^2)) \times (\cos(\cos 3x^2) \times (-\sin 3x^2 \times 6x)$

$f'(x) = -12x\cos(\cos 3x^2)\sin(3x^2)\sin(\cos 3x^2)$

مثال 3: (صفحة 43)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = e^{\csc 4x}$

$f'(x) = e^{\csc 4x} \times \frac{d}{dx}(\csc 4x)$

$= e^{\csc 4x} \times -\csc 4x \times \cot 4x \times \frac{d}{dx}(4x)$

$= -4e^{\csc 4x}\csc 4x \cot 4x$

2) $f(x) = \sin(\tan\sqrt{3x^2+4})$

$f'(x) = \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \frac{d}{dx}(\tan\sqrt{3x^2+4})$

$= \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{d}{dx}(\sqrt{3x^2+4})$

$= \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times (3x^2+4)^{\frac{1}{2}}$

$= \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{1}{2}(3x^2+4)^{\frac{-1}{2}} \times \frac{d}{dx}6x\,(3x^2+4)$

$= \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{1}{2}(3x^2+4)^{\frac{-1}{2}} \times 6x$

$= \frac{3x\cos(\tan\sqrt{3x^2+4})\times\sec^2\sqrt{3x^2+4}}{\sqrt{3x^2+4}}$

أتحقق من فهمي: صفحة 44

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \cos^2(7x^3 + 6x - 1)$

$f'(x) = 2\cos(7x^3 + 6x - 1)(-\sin 7x^3 + 6x - 1)(21x^2 + 6)$

$f'(x) = -2(21x^2 + 6)\cos(7x^3 + 6x - 1)\sin(7x^3 + 6x - 1)$

$f'(x) = -(21x^2 + 6)\sin 2(7x^3 + 6x - 1)$ قانون نصف الزاوية

2) $f(x) = (2 + (x^2 + 1)^4)^3$

$f'(x) = 3(2 + (x^2 + 1)^4)^2(4(x^2 + 1)^3(2x))$

$f'(x) = 24x(2 + (x^2 + 1)^4)^2(x^2 + 1)^3$

قواعد الاشتقاق الاساسية وقاعدة السلسلة

أي تطبيق قواعد الاشتقاق الأساسية التي تعلمناها سابقاً بالإضافة لقاعدة السلسلة معاً، مثل: مشتقة الجمع ومشتقة الضرب ومشتقة القسمة وغيرها .

مثال4 :(صفحة44) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$ عندما $x = \frac{\pi}{8}$

لإيجاد ميل المماس : (نجد المشتقة الأولى ثم نعوض قيمة x المعطاة بالسؤال)

(تم استخدام قاعدة الضرب وقاعدة السلسلة في الحل)

$f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$

$f'(x) = e^{-0.2x}\frac{d}{dx}(\sin 4x) + \sin 4x\frac{d}{dx}(e^{-0.2x})$

$= e^{-0.2x} \times 4\cos 4x + \sin 4x \times -0.2\,e^{-0.2x}$

$= 4e^{-0.2x}\cos 4x - 0.2e^{-0.2x}\sin 4x$

$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4e^{-0.2(\frac{\pi}{8})}\cos 4(\frac{\pi}{8}) - 0.2e^{-0.2(\frac{\pi}{8})}\sin 4(\frac{\pi}{8})$

$= -0.2e^{-0.025\pi}$

2) أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = (\frac{3x-1}{x^2+3})^2$ عندما $x = 0$

لإيجاد ميل العمودي على المماس : (نجد المشتقة الأولى ثم نعوض قيمة x المعطاة بالسؤال ثم نجد سالب مقلوب ميل المماس)

(تم استخدام قاعدة القسمة وقاعدة السلسلة في الحل)

$$f(x) = (\frac{3x-1}{x^2+3})^2$$

$$\acute{f}(x) = 2(\frac{3x-1}{x^2+3}) \times \frac{d}{dx}(\frac{3x-1}{x^2+3})$$

$$\acute{f}(x) = 2(\frac{3x-1}{x^2+3}) \times (\frac{(x^2+3)(3) - (3x-1)(2x)}{(x^2+3)^2})$$

$$\boxed{\acute{f}(x) = \frac{2(3x-1)(-3x^2+2x+9)}{(x^2+3)^3}}$$ المشتقة

$$\acute{f}(0) = \frac{2(3(0)-1)(-3(0)^2+2(0)+9)}{((0)^2+3)^3}$$

$$\acute{f}(0) = \frac{-18}{27} = \boxed{\frac{-2}{3}}$$ ميل المماس

إذن ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$ هو : $\frac{-2}{3}$. ومنه،فإن ميل العمودي على المماس عندما $x = 0$ هو $\frac{2}{3}$

أتحقق من فهمي: (صفحة 45)

1) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = (2x+1)^5(x^3-x+1)^4$ عندما $x = 1$

لإيجاد ميل المماس : (نجد المشتقة الأولى ثم نعوض قيمة x المعطاة بالسؤال)

(تم استخدام قاعدة الضرب وقاعدة السلسلة في الحل)

$$f(x) = (2x+1)^5(x^3-x+1)^4$$

$$\acute{f}(x) = (2x+1)^5 4(x^3-x+1)^3(3x^2-1) + (x^3-x+1)^4 5(2x+1)^4(2)$$

$$\acute{f}(x) = (2x+1)^5 4(x^3-x+1)^3(3x^2-1) + (x^3-x+1)^4 5(2x+1)^4(2)$$

$$\acute{f}(1) = (2(1)+1)^5 4((1)^3-(1)+1)^3(3(1)^2-1) + ((1)^3-(1)+1)^4 5(2(1)+1)^4(2)$$

$$\acute{f}(1) = (3)^5(4)(1)^3(2) + (1)^4 5(3)^4(2)$$

$$\acute{f}(1) = (3)^5(4)(1)^3(2) + (1)^4(5)(3)^4(2)$$

$$\acute{f}(1) = 1944 + 810$$

$$\acute{f}(1) = 2754$$

2) أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = \frac{\cos^2 x}{e^{2x}}$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$

(تم استخدام قاعدة القسمة وقاعدة السلسلة في الحل)

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{e^{2x}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{(e^{2x}) \times 2(\cos x)(-\sin x) - (\cos^2 x)(2e^{2x})}{(e^{2x})^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{(e^{2x}) \times 2(\cos x)(-\sin x) - (\cos^2 x)(2e^{2x})}{e^{4x}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-2(\cos x)(\sin x) - 2(\cos^2 x)}{e^{2x}}$$

قانون نصف الزاوية

$$\boxed{\acute{f}(x) = \frac{-(\sin 2x) - 2(\cos^2 x)}{e^{2x}}}$$

المشتقة

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\left(\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - 2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{e^{2\left(\frac{\pi}{2}\right)}}$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\left(\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - 2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{e^{2\left(\frac{\pi}{2}\right)}}$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-(\sin(\pi)) - 2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{e^{(\pi)}}$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(0) - 2(0)}{e^{(\pi)}}$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ميل العامودي على المماس: هو سالب مقلوب ميل المماس. $m_1 = -\frac{1}{m}$

$$\boxed{m_1 = -\frac{1}{0} = \text{غير معرف}}$$

ميل المماس يساوي صفراً ، أي أن المماس أفقي، ومنه يكون العمودي على المماس رأسياً وميله غير معرف.

مثال 5: من الحياة: (صفحة 45)

أعمال: طرحت إحدى الشركات منتجاً جديداً في الأسواق، ثم رصدت عدد القطع المبيعة منذ طرحه.

إذا مثل الاقتران : $t > 0$ ، $N(t) = \frac{250000t^2}{(2t+1)^2}$ عدد القطع المبيعة منذ طرحه ، حيث t الزمن بالأسابيع ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

1) أجد معدل تغير عدد القطع المبيعة بالنسبة إلى الزمن:

1) أجد $\acute{N}(t)$

$$N(t) = \frac{250000t^2}{(2t+1)^2}$$

$$\acute{N}(t) = \frac{(2t+1)^2 \frac{d}{dt}(250000t^2) - (250000t^2)\frac{d}{dt}(2t+1)^2}{((2t+1)^2)^2}$$

$$= \frac{(2t+1)^2(500000t) - (250000t^2)2(2t+1) \times 2}{(2t+1)^4}$$

$$= \frac{(2t+1)^2(500000t) - (100000t^2)(2t+1)}{(2t+1)^4}$$

$$= \frac{(2t+1)(500000t)((2t+1) - 2t)}{(2t+1)^4}$$

$$= \frac{500000t}{(2t+1)^3}$$

2) أجد $\acute{N}(52)$ مفسراً معنى الناتج .

$$\acute{N}(t) = \frac{250000t^2}{(2t+1)^2}$$

$$\acute{N}(52) = \frac{250000(52)^2}{(2(52)+1)^2}$$

$$\approx 22$$

إذن $\acute{N}(52) = 22$ وهذا يعني أن إجمالي عدد القطع المبيعة من المنتج يزداد بمعدل 22 قطعة لكل أسبوعاً بعد مرور 52 أسبوعاً على طرح المنتج في الأسواق .

أتحقق من فهمي: (صفحة 46)

تحسب قيمة بدل الخدمة لأحد المنتجات تحسب بالدينار ، باستعمال الاقتران : $U(x) = 80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$

حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج .

1) أجد معدل تغير قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المبيعة من المنتج.

$$U(x) = 80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$$

$$\acute{U}(x) = 80\frac{\frac{(3x+4)(2)-(2x+1)(3)}{(3x+4)^2}}{2\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}}$$

$$\acute{U}(x) = 40\frac{\frac{6x+8-6x-3}{(3x+4)^2}}{\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}}$$

$$\acute{U}(x) = \frac{\frac{200}{(3x+4)^2}}{\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}}$$

$$\acute{U}(x) = \frac{200}{(3x+4)^2}\sqrt{\frac{3x+4}{2x+1}}$$

2- أجد $\acute{U}(20)$ مفسراً معنى الناتج .

$$\acute{U}(20) = \frac{200}{(3(20)+4)^2}\sqrt{\frac{3(20)+4}{2(20)+1}}$$

$$\acute{U}(20) = \frac{200}{4096}\sqrt{\frac{64}{41}}$$

$$\acute{U}(20) \approx 0.061$$

وهذا يعني أنه عند بيع 20 قطعة فإن قيمة بدل الخدمة تتزايد بمقدار 0.061 دينار / قطعة تقريباً .

مشتقة $a^{(g(x))}$

قاعدة اشتقاق اقتران الثابت مرفوع لأس اقتران:

ينزل الاقتران كما هو × ln الأساس × مشتقة الاسّ

$$f(x) = a^x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = a^x \ln a \left(g'(x)\right)$$

ملاحظة : يشترط أن تكون $a > 1$ دائماً ، لأن $\ln 1 = 0$ بالتالي ناتج الاشتقاق يكون صفر .

مثال 6: (صفحة 47)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 8^{5x}$

$f'(x) = 8^{5x}(\ln 8)(5)$

$f'(x) = (5\ln 8)8^{5x}$

2) $f(x) = 6^{x^2}$

$f'(x) = 6^{x^2}(\ln 6)(2x)$

$f'(x) = (2x\ln 6)6^{x^2}$

3) $f(x) = e^{3x} + 2^{3x}$

$f'(x) = 3e^{3x} + 2^{3x}(\ln 2)(3)$

$f'(x) = 3e^{3x} + (3\ln 2)2^{3x}$

أتحقق من فهمي: (صفحة 48)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \pi^{\pi x}$

$f'(x) = \pi^{\pi x}(\ln \pi)(\pi)$

$f'(x) = \pi^{1+\pi x}\ln \pi$

2) $f(x) = 6^{1-x^3}$

$\acute{f}(x) = 6^{1-x^3}(\ln 6)(-3x^2)$

$\acute{f}(x) = (-3x^2 \ln 6)6^{1-x^3}$

3) $f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$

$\acute{f}(x) = 4e^{4x} + 4^{2x}(\ln 4)(2)$

$\acute{f}(x) = 4e^{4x} + (2\ln 4)4^{2x}$

مشتقة $\log_a g(x)$

(تذكر1) اللوغاريتم الاعتيادي: هو اللوغاريتم للأساس 10 أو $\log_{10}$ ، ويكتب عادة من دون أساس $\log$.

(تذكر2) اللوغاريتم الطبيعي: هو اللوغاريتم للأساس e أو $\log_e$ ، ويرمز له بـ $\ln$.

(تذكر3) نظرية اشتقاق اقتران اللوغاريتم الطبيعي: $f(x) = \ln(\text{مقدار متغير})$، حيث: $x > 0$ ، فإن المشتقة : $\acute{f}(x) = \frac{\text{مشتقة المقدار}}{\text{نفس المقدار}}$

قاعدة اشتقاق اقتران log للأساس a ما داخله اقتران:

نشتق ما داخل log ÷ (ln الأساس × ما داخل log)

$$f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{(\acute{g}(x))}{(\ln a)(g(x))} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{(\text{مشتقة المقدار})}{(\ln a)(\text{نفس المقدار})}$$

نلاحظ أن الفرق بين القاعدتين (قاعدة اشتقاق اللوغاريتم الطبيعي وقاعدة اشتقاق اللوغاريتم للأساس a) هو ضرب $(\ln a)$ في المقام .

مثال 7: (صفحة 49)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \log \cos x$

$$\acute{f}(x) = \frac{-\sin x}{(\ln 10)\cos x}$$

2) $f(x) = \log_2\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$

$$f(x) = \log_2(x^2) - \log_2(x-1)$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2}{(\ln 2)x} - \frac{1}{(\ln 2)(x-1)}$$

(تذكر) قانون القسمة: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

أتحقق من فهمي: (صفحة 49)

1) $f(x) = \log \sec x$

$$\acute{f}(x) = \frac{\sec x \tan x}{(\ln 10)\sec x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{\tan x}{\ln 10}$$

2) $f(x) = \log_8(x^2 + 3x)$

$$\acute{f}(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x)\ln 8}$$

مشتقة المعادلات الوسطية

ويتم استخدامها عندما يكون لدينا اقترانين مختلفين بدلالة نفس المتغير.

1) الاقتران الثاني : (y) بدلالة المتغير (t) بحيث يكون : $y = g\,(t)$

2) الاقتران الأول : (x) بدلالة المتغير (t) بحيث يكون : $x = h\,(t)$

ونريد إيجاد مشتقة (y) بدلالة المتغير (x) أي $\frac{dy}{dx}$

الخطوات:

1) نشتق الاقتران الأول $y = g(t)$ لنحصل على المشتقة $\frac{dy}{dt}$.

2) نشتق الاقتران الثاني $x = h(t)$ لنحصل على المشتقة $\frac{dx}{dt}$.

3) نقسم الاقتران الأول على الاقتران الثاني $\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ لنحصل على المشتقة $\frac{dy}{dx}$.

4) نعوض قيمة (t) المعطاة في السؤال في المشتقة الوسيطية $\frac{dy}{dx}$.

مثال 8: (صفحة 51)

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$x = 2\sin t \qquad y = 3\cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$

الخطوة الأولى: إيجاد النقطة.

$$x = 2\sin t$$

$$x = 2\sin\frac{\pi}{4}$$

$$x = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$y = 3\cos\frac{\pi}{4}$$

$$y = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

النقطة هي $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

الخطوة الثانية : ايجاد ميل المماس عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$$y = 3\cos t$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = -3\sin t}$$

$$x = 2\sin t$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = 2\cos t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3\sin t}{2\cos t}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2}\tan t}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{2}\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{2}(1)$$

$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{2}}$$

الخطوة الثالثة: أجد معادلة المماس.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{2}x + \frac{6}{2\sqrt{2}}$$

$$y + \frac{3}{2}x = \frac{6}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$y + \frac{3}{2}x = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\left[y + \frac{3}{2}x = \frac{6}{\sqrt{2}}\right] \quad \times 2$$

$$\boxed{2y + 3x = 6\sqrt{2}}$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 52)

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = \frac{\pi}{4}$:

$$x = \sec t \qquad y = \tan t \qquad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

الخطوة الأولى: إيجاد النقطة.

$$x = \sec t$$

$$x = \sec \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{x = \sqrt{2}}$$

$$y = \tan t$$

$$y = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{y = 1}$$

النقطة هي $\left(\sqrt{2}, 1\right)$

الخطوة الثانية : ايجاد ميل المماس عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$$y = \tan t$$

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t$$

$$x = \sec t$$

$$\frac{dx}{dt} = \sec t \tan t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec t\, t}{\tan t}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sec \frac{\pi}{4}}{\tan \frac{\pi}{4}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

الخطوة الثالثة: أجد معادلة المماس.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \sqrt{2}(x - \sqrt{2})$$

$$y - 1 = \sqrt{2}x - 2$$

$$y = \sqrt{2}x - 2 + 1$$

$$y = \sqrt{2}x - 1$$

اتدرب وأحل المسائل: (صفحة 53)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = e^{4x+2}$

$f'(x) = 4e^{4x+2}$

2) $f(x) = 50e^{2x-10}$

$f'(x) = 100e^{2x-10}$

3) $f(x) = \cos(x^2 - 3x - 4)$

$f'(x) = -\sin(x^2 - 3x - 4)\,(2x - 3)$

$f'(x) = (-2x + 3)\sin(x^2 - 3x - 4)$

4) $f(x) = 10x^2 e^{-x^2}$

$f'(x) = (10x^2)\left(-2xe^{-x^2}\right) + \left(e^{-x^2}\right)(20)$

$f'(x) = -20x^2 x e^{-x^2} + 20xe^{-x^2}$

$f'(x) = 20xe^{-x^2}(1 - x^2)$

5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

$f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x}}$

$f(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$

$f'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{2\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}}$

$f'(x) = \dfrac{-1}{2x^2\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}}$

6) $f(x) = x^2 \tan\frac{1}{x}$

$\acute{f}(x) = (x^2)\left(-\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}\right) + \left(\tan\frac{1}{x}\right)(2x)$

$\acute{f}(x) = (x^2)\left(-\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}\right) + \left(\tan\frac{1}{x}\right)(2x)$

7) $f(x) = 3x - 5\cos(\pi x)^2$

$\acute{f}(x) = 3 - (5)(2) - \sin(\pi x)^2\,(\pi x)(\pi)$

$\acute{f}(x) = 3 + 10\pi^2 x\sin(\pi x)^2$

8) $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

$f(x) = \ln(1+e^x) - \ln(1-e^x)$

$\acute{f}(x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^x}{1-e^x}$

$\acute{f}(x) = \frac{e^x(1+e^x) + e^x(1-e^x)}{(1+e^x)(1-e^x)}$

$\acute{f}(x) = \frac{(e^x+e^{2x}) + (e^x-e^{2x})}{(1-e^x+e^x-e^{2x})}$

$\acute{f}(x) = \frac{e^x+e^{2x}+e^x-e^{2x}}{1-e^{2x}}$

$\acute{f}(x) = \frac{2e^x}{1-e^{2x}}$

9) $f(x) = (\ln x)^4$

$\acute{f}(x) = \frac{4}{x}(\ln x)^3$

10) $f(x) = \sin\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x}$

$$f(x) = \sin x^{\frac{1}{3}} + (\sin x)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cos x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}(\sin x)^{-\frac{2}{3}}(\cos x)(1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cos\sqrt[3]{x} + \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

11) $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 8x}$

$$f(x) = (x^2 + 8x)^{\frac{1}{5}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}(x^2 + 8x)^{-\frac{4}{5}}(2x + 8)$$

$$f'(x) = \frac{2x + 8}{5\sqrt[5]{(x^2 + 8x)^4}}$$

12) $f(x) = \frac{3^{2x}}{x}$

$$f'(x) = \frac{(x)(2\ln 3)3^{2x} - 3^{2x}(1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x\ln 3)3^{2x} - 3^{2x}}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{3^{2x}(2x\ln 3 - 1)}{x^2}$$

13) $f(x) = 2^{-x}\cos\pi x$

$$f'(x) = (2^{-x})(\cos\pi x) + (\cos\pi x)(-\ln 2)(2^{-x})$$

$$f'(x) = (2^{-x}) - (\sin\pi x)(\pi) + (\cos\pi x)(-\ln 2)(2^{-x})$$

$$f'(x) = -\pi 2^{-x}\sin\pi x - 2^{-x}(\cos\pi x)\ln 2$$

14) $f(x) = \dfrac{10\log_4 x}{x}$

$$\acute{f}(x) = \frac{(x)\dfrac{10}{x\ln 4} - (10\log_4 x)(1)}{x^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{\dfrac{10x}{x\ln 4} - 10\log_4 x}{x^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{\dfrac{10}{\ln 4} - 10\log_4 x}{x^2}$$

15) $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$

$$\acute{f}(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\frac{(1+\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}\right)$$

$$\acute{f}(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\right)$$

$$\acute{f}(x) = \left(\frac{2\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2}\right)$$

$$\acute{f}(x) = \left(\frac{2\sin x}{1+\cos x}\right)\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

16) $f(x) = \log_3(1 + x\ln x)$

$$\acute{f}(x) = \frac{(x)\left(\dfrac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)}{(\ln 3)(1 + x\ln x)}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1 + \ln x}{(\ln 3)(1 + x\ln x)}$$

17) $f(x) = e^{\sin 2x} + \sin(e^{2x})$

$\acute{f}(x) = e^{\sin 2x}(\cos 2x)(2) + \cos(e^{2x})(\, e^{2x})(2)$

$\acute{f}(x) = 2e^{\sin 2x}\cos 2x + 2e^{2x}\cos(e^{2x})$

18) $f(x) = tan^4(\sec\ (\cos x))$

$\acute{f}(x) = 4(tan(\sec\ (\cos x))^3(\sec^2(\sec\ (\cos x)) \times (\sec\cos x)(\tan\cos x)(-\sin x)$

$\acute{f}(x) = -4tan^3(\sec\ (\cos x))(\sec^2(\sec\ (\cos x)) \times \sec(\cos x)\tan(\cos x)\sin x$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

19) $f(x) = 4e^{-0.5x^2}$ $\ ,x = -2$

$f(-2) = 4e^{-0.5x^2}$

$f(-2) = 4e^{-0.5(-2)^2}$

$f(-2) = 4e^{-2}$

$f(-2) = \dfrac{4}{e^2}$

النقطة هي : $\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$

$\acute{f}(x) = 4e^{-0.5x^2}(-x)$

$\acute{f}(x) = -4xe^{-0.5x^2}$

$\acute{f}(-2) = -4(-2)e^{-0.5(-2)^2}$

$\acute{f}(-2) = 8e^{-2}$

$\acute{f}(-2) = \dfrac{8}{e^2}$ ميل المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - \dfrac{4}{e^2} = \dfrac{8}{e^2}(x - (-2))$

$y - \dfrac{4}{e^2} = \dfrac{8}{e^2}(x + 2)$

$y - \dfrac{4}{e^2} = \dfrac{8}{e^2}x + 2\dfrac{8}{e^2}$

$y = \dfrac{8}{e^2}x + \dfrac{16}{e^2} + \dfrac{4}{e^2}$

$y = \dfrac{8}{e^2}x + \dfrac{20}{e^2}$ معادلة المماس

$20)\ f(x) = x + \cos 2x \quad , x = 0$

$f(0) = 0 + \cos 2(0)$

$f(0) = \cos 0$

$f(0) = 1$

النقطة هي : $(0, 1)$

$\acute{f}(x) = 1 + (-\sin 2x)(2)$

$\acute{f}(x) = 1 - 2\sin 2x$

$\acute{f}(0) = 1 - 2\sin 2(0)$

$\acute{f}(0) = 1 - 2\sin 0$

$\acute{f}(0) = 1 - 2(0)$

$\acute{f}(0) = 1$ ميل المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = 1(x - 0)$

$y - 1 = 1(x)$

$y = x + 1$ معادلة المماس

$21)\ f(x) = 2^x \quad , x = 0$

$f(0) = 2^0$

$f(0) = 1$

النقطة هي : $(0, 1)$

$\acute{f}(x) = (\ln 2)2^x$

$\acute{f}(0) = (\ln 2)2^0$

$\acute{f}(0) = \ln 2$ ميل المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = \ln 2\,(x - 0)$

$y = (\ln 2)x + 1$ معادلة المماس

$22)\ f(x) = \sqrt{x+1}\sin\frac{\pi x}{2} \quad , x = 3$

$$f(3) = \sqrt{3+1}\,\sin\frac{\pi 3}{2}$$

$$f(3) = 2\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$f(3) = 2(-1)$$

$$f(3) = -2$$

النقطة هي : $(3, -2)$

$$f'(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$$

$$f'(3) = \left(\sqrt{3+1}\right)\left(\cos\frac{\pi 3}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(\sin\frac{\pi 3}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{3+1}}\right)$$

$$f'(3) = (2)(0)\left(\frac{\pi}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$f'(3) = 0 + \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$f'(3) = -\frac{1}{4}$$ ميل المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-2) = -\frac{1}{4}(x - 3)$$

$$y + 2 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$$ معادلة المماس

23) إذا كان : $A(x) = f(g(x))$ ، وكان : $f(-2) = 8, f'(-2) = 4 , f'(5) = 3 , g(5) = -2 , g'(5) = 6$، فأجد $A'(5)$.

$$A(x) = f(g(x))$$

$$A'(x) = f'\big(g(x)\big) \times g'(x)$$

$$A'(5) = f'(g(5)) \times g'(5)$$

$$A'(5) = f'(-2) \times g'(5)$$

$$A'(5) = 4 \times 6$$

$$A'(5) = 24$$

24) إذا كان : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، فأثبت أن $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)(1) - (x)\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right) - \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\left(\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

بكتيريا :يمثل الاقتران : $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري :

25) أجد معدل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N .

$$A(t) = Ne^{0.1t}$$

$$A'(t) = 0.1Ne^{0.1t}$$

$$A'(3) = 0.1Ne^{0.1(3)}$$

$$A'(3) = 0.1Ne^{0.3}$$

26) إذا كان معدل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة ، فما قيمة k بدلالة الثابت N ؟

$$A'(k) = 0.1Ne^{0.1(k)}$$

$$0.2 = 0.1Ne^{0.1(k)}$$

$$\frac{0.2}{0.1N} = \frac{0.1N}{0.1N}e^{0.1(k)}$$

$$e^{0.1(k)} = \frac{2}{N}$$

$$\ln e^{0.1(k)} = \ln\frac{2}{N}$$

$$0.1(k) = \ln\frac{2}{N}$$

$$\frac{0.1(k)}{0.1} = \frac{\ln\frac{2}{N}}{0.1}$$

$$k = 10\ln\frac{2}{N}$$

أجد المشتقة العليا المطلوبة في كل مما يأتي:

27) $f(x) = \sin \pi x \quad , f'''(x)$

$$f'(x) = \pi\cos \pi x$$

$$f''(x) = -\pi\, \pi\sin \pi x$$

$$f''(x) = -\pi^2 \sin \pi x$$

$$f'''(x) = -\pi^2\pi \cos \pi x$$

$$f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x$$

28) $f(x) = \cos(2x + 1) \quad , f^{(5)}(x)$

$$f'(x) = -2\sin(2x + 1)$$

$$f''(x) = -2(2)\cos(2x + 1)$$

$$f''(x) = -4\cos(2x + 1)$$

$$f'''(x) = -(2) -4\sin(2x + 1)$$

$$f'''(x) = 8\sin(2x + 1)$$

$$f^{(4)}(x) = (2)8\cos(2x + 1)$$

$$f^{(4)}(x) = 16\cos(2x + 1)$$

$$f^{(5)}(x) = -(2)16\sin(2x + 1)$$

$$f^{(5)}(x) = -32\sin(2x + 1)$$

29) $f(x) = \cos x^2 \quad , f''(x)$

$f'(x) = -\sin x^2 (2x)$

$f'(x) = -2x \sin x^2$

$f''(x) = (-2x)\cos x^2\,(2x) + (\sin x^2)(-2)$

$f''(x) = -4x^4 \cos x^2 - 2\sin x^2$

30) إذا كان الاقتران : $y = e^{\sin x}$ ، فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0 , 1)$.

$y = e^{\sin x}$

$\frac{dy}{dx} = e^{\sin x} \cos x$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = e^{\sin 0} \cos 0$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = e^{0}(1)$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = (1)(1)$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 1$ ميل المماس

31) مواد مشعة : يمكن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها الابتدائية $20\ g$ من عنصر البلوتونيوم بعد t يوماً
باستعمال الاقتران $A(t) = 20(\frac{1}{2})^{\frac{t}{140}}$ ، أجد معدل تحلل عنصر البلوتونيوم عندما $t = 2$.

$A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$

$A'(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{140}\right)$

$A'(t) = \frac{20}{140}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}\left(\ln\frac{1}{2}\right)$

$A'(2) = \frac{20}{140}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{140}}\left(\ln\frac{1}{2}\right)$

$A'(2) = \frac{20}{140}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{140}}\left(\ln\frac{1}{2}\right)$

$A'(2) = \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{70}}\left(\ln\frac{1}{2}\right)$

$A'(2) = 0.142 \times 0.99 \times (-0.693)$

$A'(2) \approx -0.098$

إذن يتحلل البلوتونيوم بمعدل $0.098\ g$ كل يوم عندما $t = 2$.

زنبرك : تتحرك كرة معلقة بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ، ويحدد الاقتران : $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ موقع الكرة عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ، و s الموقع بالسنتميترات .

32) أجد السرعة المتجهة للكرة عندما $t = 1$.

$s(t) = 0.1 \sin 2.4t$

$v(t) = 0.1 \cos 2.4t(2.4)$

$v(t) = 0.24 \cos 2.4t$

$v(1) = 0.24 \cos 2.4(1)$

$v(1) = 0.24 \cos 2.4$

$v(1) = 0.24 \times -0.737$

$v(1) \approx -0.177\ cm/s$

33) أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفراً .

$v(t) = 0 \ \rightarrow 0.24 \cos 2.4t = 0$

$0.24 \cos 2.4t = 0$

$\cos 2.4t = 0$

عندما يكون $\cos\theta = 0$ فهذا يعني ان $\sin\theta$ يساوي إما 1 أو -1 .

وبتعويض قيمة $\sin 2.4t = \pm 1$ في اقتران الموقع نجد ان :

$s(t) = 0.1 \sin 2.4t$

$s(1) = (0.1)(1)(1)$

$s(1) = 0.1$

$s(1) = (0.1)(-1)(1)$

$s(1) = -0.1$

إذن ، عندما يكون تسارع الكرة صفراً يكون موقعها عند $0.1\ cm$ أو $-0.1\ cm$

34) أجد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفراً .

$a(t) = 0.24 - \sin 2.4t\,(2.4)$

$a(t) = -5.76 \sin 2.4t$

$a(t) = -5.76 \sin 2.4t = 0$

$\sin 2.4t = 0$

بتعويض قيمة $\sin 2.4t = 0$ في اقتران الموقع نجد :

$s(t) = 0.1 \sin 2.4t$

$s(t) = 0.1(0)$

$s(t) = 0$

إذن عندما يكون تسارع الكرة صفراً يكون موقعها عند $s = 0$ ، أي عند مرور بموقع الاتزان.

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية مما يأتي عند النقطة المحددة بقيمة t المعطاة :

35) $x = t + 2 \quad , y = t^2 - 1 , t = 1$

$x = t + 2$

$x = 1 + 2$

$\boxed{x = 3}$

$y = (1)^2 - 1$

$\boxed{y = 0}$

النقطة هي : $(3, 0)$

$$\frac{dy}{dt} = 2t$$

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2t}{1}$$

$$\frac{dy}{dx}=2t$$

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=2(1)$$

$\boxed{m=2}$ ميل المماس

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=2(x-3)$$

$$y-0=2x-6$$

$\boxed{y=2x-6}$ معادلة المماس

36) $x=\frac{t}{2}\quad ,y=t^2-4\,,t=-1$

$$x=\frac{t}{2}$$

$$\boxed{x=-\frac{1}{2}}$$

$$y=t^2-4$$

$$y=(1)^2-4$$

$$y=1-4$$

$$\boxed{y=-3}$$

نقطة التماس هي : $\boxed{\left(-\frac{1}{2},-3\right)}$

$$\frac{dy}{dt}=2t$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{\frac{1}{2}}=4t$$

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-1}=4(-1)$$

$$\boxed{m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-1}=-4 \quad \text{ميل المماس}}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-(-3)=-4\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$y+3=-4(x+\frac{1}{2})$$

$$y=-4x-2-3$$

$$\boxed{y=-4x-5 \quad \text{معادلة المماس}}$$

37) $x=t-\sin t \quad ,y=1-\cos t \ ,t=\frac{\pi}{3}$

$$x=t-\sin t$$

$$x=\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}$$

$$x=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{x=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$y=1-\cos t$$

$$y=1-\cos\frac{\pi}{3}$$

$$y=1-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{y=\frac{1}{2}}$$

نقطة التماس هي : $\boxed{(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})}$

$$\frac{dy}{dt} = -(-\sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{1 - \cos \frac{\pi}{3}}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1}$$

$$\boxed{m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} \qquad \text{ميل المماس}}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}x - \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2}$$

$$y = \sqrt{3}x - \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$y = \sqrt{3}x - \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{4}{2}$$

$$\boxed{y = \sqrt{3}x - \frac{\pi}{\sqrt{3}} + 2 \qquad \text{معادلة المماس}}$$

38) $x = \sec^2 t - 1 \quad , y = \tan t \ , t = -\frac{\pi}{4}$

$$x = \sec^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 1$$

$$x = \left(-\sqrt{2}\right)^2 - 1$$

$$x = 2 - 1$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$y = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{y = -1}$$

نقطة التماس هي : $\boxed{(1, -1)}$

$$y = \tan t$$

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t$$

$$x = \sec^2 t$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\sec t \sec t \tan t$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\sec^2 t \tan t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{2\sec^2 t \tan t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\tan t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cot t$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2(-1)}$$

$$\boxed{m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} \quad \text{ميل المماس}}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y + 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - 1$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad \text{معادلة المماس}}$$

39) يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية : $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$ ،
حيث : $0 \leq t \leq 2\pi$ ، أثبت أن ميل المماس وميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما $t = \frac{\pi}{4}$ هما : $1 + \sqrt{2}$ ، و $1 - \sqrt{2}$ على الترتيب .

$$y = 2(1 - \cos t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2(-(-\sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2\sin t$$

$$x = 2(t - \sin t)$$

$$\frac{dx}{dt} = 2(1 - \cos t)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\sin t}{2(1-\cos t)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}$$

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$$

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}+1$$ ميل المماس

$$m_1=-\frac{1}{m}$$ ميل العمودي المماس

$$m_1=-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

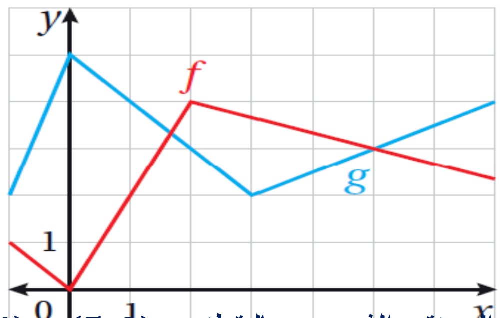
$$m_1=\frac{-1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$m_1=-\sqrt{2}+1$$

$$m_1=1-\sqrt{2}$$ ميل العمودي المماس

يبين الشكل المجاور منحنى الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان : $h(x) = f(g(x))$ وكان $p(x) = g(f(x))$ ، فأجد كلا مما يأتي :

40) $\acute{h}(1)$



$h(x) = f\big(g(x)\big)$

$\acute{h}(x) = \acute{f}\big(g(x)\big) \times \acute{g}(x)$

$\acute{h}(1) = \acute{f}(g(1)) \times \acute{g}(1)$

$\acute{h}(1) = \acute{f}(4) \times \acute{g}(1)$

$\acute{f}(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(5,3)$ و $(2,4)$ ويساوي $-\frac{1}{3}$

$m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

$m = \dfrac{3 - 4}{5 - 2}$

$m = \dfrac{-1}{3}$

$\acute{g}(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,2)$ و $(0,5)$ ويساوي -1

$m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

$m = \dfrac{2 - 5}{3 - 0}$

$m = \dfrac{-3}{3}$

$m = -1$

$\acute{h}(1) = \acute{f}(4) \times \acute{g}(1)$

$\acute{h}(1) = \dfrac{-1}{3} \times -1$

$\acute{h}(1) = \dfrac{1}{3}$

41) $\acute{p}(1)$

$\acute{p}(x) = \acute{g}(f(x)) \times \acute{f}(x)$

$\acute{p}(1) = \acute{g}(f(1)) \times \acute{f}(1)$

$\acute{p}(1) = \acute{g}(2) \times \acute{f}(1)$

$\acute{g}(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,2)$ و $(0,5)$ ويساوي -1

$m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

$m = \dfrac{2 - 5}{3 - 0}$

$m = \dfrac{-3}{3}$

$m = -1$

$\acute{f}(4)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(0,0)$ و $(2,4)$ ويساوي 2

$m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

$m = \dfrac{0 - 4}{0 - 2}$

$m = \dfrac{-4}{-2}$

$m = 2$

$\acute{h}(1) = \acute{f}(4) \times \acute{g}(1)$

$\acute{h}(1) = 2 \times -1$

$\acute{h}(1) = -2$

مهارات التفكير العليا: (صفحة57)

تبرير : إذا كان الاقتران : $y = \ln(ax + b)$ ، حيث a و b ثابتان موجبان ، وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P هو 1 ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

42) أثبت أن الإحداثي x للنقطة p أقل من 1 .

$y = \ln(ax + b)$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a}{ax + b}$

ليكن إحداثيا P هما (x_1, y_1)فيكون ميل المماس عند P هو :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1} = \frac{a}{ax_1 + b}$$

$$\frac{a}{ax_1 + b} = 1$$

$$ax_1 + b = a$$

$$ax_1 = a - b$$

$$\frac{ax_1}{a} = \frac{a - b}{a}$$

$$x_1 = \frac{a - b}{a}$$

$$x_1 = 1 - \frac{b}{a}$$

المقدار $\left(1 - \frac{b}{a}\right)$ أقل من 1 لأن $\frac{b}{a}$ مقدار موجب كون a, b موجبين .

إذن الإحداثي x للنقطة P أقل من 1

43) أجد قيمة كل من a و b ، علماً بأن P هي النقطة $(0, 2)$ ، ثم أبرر إجابتي .

$$y = f(x) = \ln(ax + b)$$

$$\acute{y} = \acute{f}(x) = \frac{a}{ax + b}$$

$$\acute{f}(0) = \frac{a}{a(0) + b}$$

$$\acute{f}(0) = \frac{a}{b}$$

ميل المماس عند النقطة $P(0, 2)$ يساوي 1 أي أن : $\acute{f}(0) = 1$

$$\frac{a}{b} = 1$$

$$a = b$$

$$f(x) = \ln(ax + b)$$

$$f(0) = \ln(a(0) + b)$$

$$f(0) = \ln b$$

$$\ln b = 2$$

$$b = e^2$$

$$\boxed{a = b = e^2}$$

44) أجد إحداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$

افترض ان النقطة التي ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{2}$ هي (x_1, y_1)

بتعويض قيمة كل من a و b نجد أن :

$f(x) = \ln(ax + b)$

$f(x) = \ln(e^2x + e^2)$

$f(x) = \ln\left(e^2(x + 1)\right)$

$f(x) = 2 + \ln(x + 1)$

$\acute{f}(x) = \frac{1}{x + 1}$

$\acute{f}(x_1) = \frac{1}{x_1 + 1}$

$\frac{1}{x_1 + 1} = \frac{1}{2}$

$x_1 + 1 = 2$

$x_1 = 2 - 1$

$\boxed{x_1 = 1}$

$y_1 = f(x_1)$

$f(1) = \ln(e^2(1) + e^2)$

$f(1) = \ln(e^2 + e^2)$

$f(1) = \ln(2e^2)$

$f(1) = \ln 2 + \ln e^2$

$f(1) = \ln 2 + 2$

إذن النقطة التي ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{2}$ هي $(1, \ln 2 + 2)$

تبرير : يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية : $y = 2t$ ، $x = t^2$.

45) أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t .

$y = 2t$

$\frac{dy}{dt} = 2$

$x = t^2$

$\frac{dx}{dt} = 2t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2t}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$

46) أجد معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(t^2, 2t)$.

$\boxed{m = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}}$ ميل المماس

$m_1 = -\frac{1}{m}$ ميل العمودي على المماس

$m_1 = -\frac{1}{\frac{1}{t}}$

$m_1 = -\frac{1}{1} \times \frac{t}{1}$

$\boxed{m_1 = -t}$ ميل العمودي على المماس

$y - y_1 = m_1(x - x_1)$ معادلة العمودي على المماس

$y - 2t = -t(x - t^2)$

$y - 2t = -tx + t^3$

$\boxed{y = -tx + t^3 + 2t}$ معادلة العمودي على المماس

47) أثبت أن مساحة المثلث المكون من العمودي على المماس، والمحورين الإحداثيين،

هي $\frac{1}{2}|t|\ \ (2+t^2)^2$.

لإيجاد المقطع x للعمودي على المماس نضع $y=0$ في معادلته .

$$0=-tx+t^3+2t$$

$$tx=t^3+2t$$

$$x=\frac{t^3+2t}{t}$$

$$x=t^2+2$$

لإيجاد المقطع y للعمودي على المماس نضع $x=0$ في معادلته .

$$y=-t(0)+t^3+2t$$

$$y=t^3+2t$$

مساحة المثلث:

$$A=\frac{1}{2}\times x\times y$$

$$A=\frac{1}{2}\times|t^2+2|\times|t^3+2t|$$

$$A=\frac{1}{2}\times|(t^2+2)|\times|t(t^2+2)|$$

$$A=\frac{1}{2}\times|t||(t^2+2)^2|$$

تحد : أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

48) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\cos\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$$

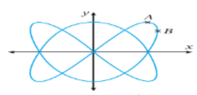
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$$

49) $y = e^x \sin^2 x \cos x$

$y = (e^x \sin^2 x)(-\sin x) + (\cos x)\left((e^x)(2 \sin x \cos x) + (\sin^2 x)(e^x)\right)$

$y = -e^x \sin^3 x + 2e^x \cos^2 x \sin x + e^x \cos x \sin^2 x$

تحد: يبين الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:



$x = \sin 2t \qquad y = \sin 3t \qquad 0 \le t \le 2\pi$

50) إذا كان مماس منحنى المعادلة أفقياً عند النقطة A الواقعة في الربع الأول ، فأجد إحداثيي A .

$y = \sin 3t$

$\frac{dy}{dt} = \cos 3t\,(3)$

$\frac{dy}{dt} = 3\cos 3t$

$x = \sin 2t$

$\frac{dx}{dt} = \cos 2t\,(2)$

$\frac{dx}{dt} = 2\cos 2t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t} = 0$

$3\cos 3t = 0$

$\cos 3t = 0 \rightarrow 3t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

$x = \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$x = \sin\frac{\pi}{3}$

$\boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$y = \sin 3\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$y = \sin\frac{\pi}{2}$

$\boxed{y = 1}$

إذن إحداثيا A هما $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$.

51) إذا كان مماس المنحنى موازياً للمحور y عند النقطة B ، فأجد إحداثيي B .

عند النقطة B يكون المماس موازياً لمحور y ، أي أن ميله غير معرف ، ومنه يكون :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t} = \text{غير معرف}$$

$$2\cos 2t = 0$$

$$\cos 2t = 0 \rightarrow 2t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$y = \sin 3\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = \sin\frac{3\pi}{4}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

إذن إحداثيا B هما $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

52) إذا مر فرعان من المنحنى بنقطة الأصل كما هو موضح في الشكل ، فأجد ميل المماس لكل منهما عند هذه النقطة .

أي أن : $\sin 2t = 3\cos 3t = 0$

تتحقق هاتان المعادلتان معاً عندما $t = 0$ ، وعندها يكون ميل المماس :

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{3\cos 3(0)}{2\cos 2(0)}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{3\cos 0}{2\cos 0}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{3(1)}{2(1)}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{3}{2}$$

كما تتحققان أيضاً عندما $t = \pi$ ، وعندها يكون ميل المماس :

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi} = \frac{3\cos 3\pi}{2\cos 2\pi}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi} = \frac{3\cos \pi}{2\cos 0}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi} = \frac{3(-1)}{2(1)}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi} = \frac{-3}{2}$$

تبرير : يمثل الاقتران : $s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9)\ , t \geq 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

53) أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية .

$$s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9)$$

$$v(t) = \frac{2t - 2}{t^2 - 2t + 1.9}$$

$$a(t) = \frac{(t^2 - 2t + 1.9)(2) - (2t - 2)(2t - 2)}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$$

$$a(t) = \frac{2t^2 - 4t + 3.8 - 4t^2 + 4t + 4t - 4}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$$

$$a(t) = \frac{-2t^2 + 4t - 0.2}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$$

54) أجد موقع الجسيم وتسارعه عندما تكون سرعته صفراً.

$$v(t)=\frac{2t-2}{t^2-2t+1.9}=0$$

$$2t-2=0$$

$$2t=2$$

$$t=1$$

$$s(1)=\ln\left((1)^2-2(1)+1.9\right)$$

$$s(1)=\ln(1-2+1.9)$$

$$s(1)=\ln 0.9\ m$$

$$a(1)=\frac{-2(1)^2+4(1)-0.2}{((1)^2-2(1)+1.9)^2}$$

$$a(1)=\frac{-2+4-0.2}{(1-2+1.9)^2}$$

$$a(1)=\frac{1.8}{(0.9)^2}$$

$$a(1)=\frac{1.8}{0.81}$$

$$a(1)\approx 2.2\ m/s^2$$

55) متى يعود الجسيم إلى موقعه الابتدائي؟

$$s(0)=\ln\left((0)^2-2(0)+1.9\right)$$

$s(0)=\ln(1.9)$ الموقع الابتدائي

$$s(t)=\ln(1.9)\ =\ln\left(t^2-2t+1.9\right)$$

$$1.9=t^2-2t+1.9$$

$$t^2-2t+1.9-1.9=0$$

$$t^2-2t=0$$

$$t(t-2)=0$$

$$t-2=0$$

إما $\boxed{t=2}$

أو $\boxed{t=0}$

يعود الجسيم إلى موقعه الابتدائي بعد ثانيتين من بدء حركته.

كتاب التمارين

الدرس الثالث

قاعدة السلسلة

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 100e^{-0.1x}$

$\acute{f}(x) = (100)e^{-0.1x}(-0.1)$

$\acute{f}(x) = -10e^{-0.1x}$

2) $f(x) = \sin(x^2 + 2)$

$\acute{f}(x) = \cos(x^2 + 2).(2x)$

$\acute{f}(x) = 2x\cos(x^2 + 2)$

3) $f(x) = \cos^2 x$

$\acute{f}(x) = (2\cos x)(-\sin x)(1)$

$\acute{f}(x) = -2\cos x \sin x$ قانون نصف الزاوية $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\acute{f}(x) = -\sin 2x$

4) $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$

$\acute{f}(x) = (-\sin 2x).(2) - 2(-\sin x)(1)$

$\acute{f}(x) = -2\sin 2x + 2\sin x$

5) $f(x) = \log_3 \frac{x\sqrt{x-1}}{2}$

$$f(x) = \log_3 \frac{x(x-1)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$f(x) = \log_3 x + \frac{1}{2}\log_3(x-1) - \log_3 2$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x\ln 3} + \frac{1}{2\,(x-1)\ln 3} - 0$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x\ln 3} + \frac{1}{2\,x\ln 3 - 2\ln 3}$$

6) $f(x) = 2\cot^2(\pi x + 2)$

$$\acute{f}(x) = (2)2\cot(\pi x + 2) - \csc^2(\pi x + 2)\,(\pi)$$

$$\acute{f}(x) = -4\pi\cot(\pi x + 2)\csc^2(\pi x + 2)$$

7) $f(x) = \log 2x$

$$\acute{f}(x) = \frac{2}{2x\ln 10}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x\ln 10}$$

8) $f(x) = \ln(x^3 + 2)$

$$\acute{f}(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 2}$$

9) $f(x) = \left(\frac{x^2}{x^3+2}\right)^2$

$$\acute{f}(x) = (2)\left(\frac{x^2}{x^3+2}\right) \times \left(\frac{(x^3+2).(2x) - (x^2).(3x^2)}{(x^3+2)^2}\right)$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2x^2}{x^3+2} \times \frac{2x^4+4x-3x^4}{(x^3+2)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{2x^2}{x^3+2} \times \frac{4x-x^4}{(x^3+2)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{8x^3-2x^6}{(x^3+2)^3}$$

10) $f(x) = x^2\sqrt{20-x}$

$$\acute{f}(x) = (x^2).\frac{-1}{2\sqrt{20-x}} + \sqrt{20-x}.(2x)$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-x^2}{2\sqrt{20-x}} + 2x\sqrt{20-x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-x^2}{2\sqrt{20-x}} + \frac{2x\sqrt{20-x}.(2\sqrt{20-x})}{1.(2\sqrt{20-x})}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-x^2}{2\sqrt{20-x}} + \frac{4x(20-x)}{2\sqrt{20-x}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-x^2}{2\sqrt{20-x}} + \frac{80x-4x^2}{2\sqrt{20-x}}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{80x-5x^2}{2\sqrt{20-x}}$$

$$11)\quad f(x) = \frac{\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{e^{x^2}\cos(2x+1)(2) - \sin(2x+1)2xe^{x^2}}{\left(e^{x^2}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{x^2}\cos(2x+1) - 2xe^{x^2}\sin(2x+1)}{e^{2x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2\cos(2x+1) - 2x\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$$

$$12)\quad f(x) = 3^{\cot x}$$

$$f'(x) = 3^{\cot x}(-\csc^2 x)\ln 3$$

$$f'(x) = -3^{\cot x}\ln 3\csc^2 x$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة :

$$13)\quad f(x) = 2\sin 5x - 4\cos 3x \quad , x = \frac{\pi}{2}$$

1- الخطوة الاولى: ايجاد النقطة

$$f(x) = 2\sin 5\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4\cos 3\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = 2(1) - 4(0)$$

$$f(x) = 2$$

النقطة هي : $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$

2- الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

$$f(x) = 2\sin 5x - 4\cos 3x$$

$$\acute{f}(x) = 2\cos 5x(5) - 4\,(-\sin 3x)(3)$$

$$\acute{f}(x) = 10\cos 5x + 12\sin 3x$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10\cos 5\left(\frac{\pi}{2}\right) + 12\sin 3\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + 12\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + 12\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10\cos(\pi) + 12\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10\,(0) + 12\,(-1)$$

$\boxed{\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -12}$ ميل المماس

3- الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 2 = -12\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y - 2 = -12x + 6\pi$$

$$\boxed{y = -12x + 6\pi + 2}$$

$14)\quad f(x) = (x^2+2)^3 \quad , x = -1$

1- الخطوة الاولى: ايجاد النقطة

$f(-1) = ((-1)^2+2)^3$

$f(-1) = (1+2)^3$

$f(-1) = (3)^3$

$f(-1) = 27$

النقطة هي : $(-1, 27)$

2- الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

$f(x) = (x^2+2)^3$

$\acute{f}(x) = 3(x^2+2)^2(2x)$

$\acute{f}(x) = 6x(x^2+2)^2$

$\acute{f}(-1) = 6(-1)((-1)^2+2)^2$

$\acute{f}(-1) = -6(3)^2$

$\acute{f}(-1) = -6(9)$

$\acute{f}(-1) = -54$

3- الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 27 = -54(x-(-1))$

$y - 27 = -54(x+1)$

$y - 27 = -54x - 54$

$y = -54x - 54 + 27$

$y = -54x - 27$

$15)\ f(x) = \tan 3x \quad , x = \frac{\pi}{4}$

1- الخطوة الاولى: ايجاد النقطة

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan 3\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

النقطة هي $\left(\frac{\pi}{4}, -1\right)$

2- الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

$$f'(x) = \sec^2 3x . (3)$$

$$f'(x) = 3\sec^2 3x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sec^2 3\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\left(-\sec\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3(-\sqrt{2})^2$$

ملاحظة $\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}}$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3(2) = 6$$

3-الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - (-1) = 6\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y + 1 = 6x - \frac{3\pi}{2}$$

$$y = 6x - \frac{3\pi}{2} - 1$$

$$y = 6x - \frac{3\pi + 2}{2}$$

إذا كان الاقتران : $f(x) = 3\sin x - \sin^3 x$ ، فأجب عن السؤاليين الآتيين تباعاً :

16) أثبت أن $\acute{f}(x) = 3\cos^3 x$.

$$f(x) = 3\sin x - \sin^3 x$$

$$\acute{f}(x) = 3(\cos x).(1) - (3\sin^2 x).(\cos x).(1)$$

$$\acute{f}(x) = 3\cos x - 3\sin^2 x \cos x$$

$$\acute{f}(x) = 3\cos x(1 - \sin^2 x)$$

$$\acute{f}(x) = 3\cos x(\cos^2 x)$$

$$\acute{f}(x) = 3\cos^3 x$$

17) أجد و $\acute{\acute{f}}(x)$.

$$\acute{f}(x) = 3\cos^3 x$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = 3(3)\cos^2 x\,.-\sin x\,(1)$$

$$\acute{\acute{f}}(x) = -9\cos^2 x\,.\sin x$$

18) يعطي منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = a\cos t\ , y = b\sin t$ ، حيث :

$0 \le t \le 2\pi$. أجد المقطع y لمماس المنحنى عندما $t = \frac{\pi}{4}$ بدلالة a و b .

1- الخطوة الاولى: ايجاد النقطة

$$x = a\cos(\frac{\pi}{4})$$

$$x = a\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$y = b\sin(\frac{\pi}{4}) = b\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \quad y = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

النقطة هي : $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$

2- الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

$$y = b\sin t$$
$$\frac{dy}{dt} = b\cos t$$
$$x = a\cos t$$
$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b\cos t}{-a\sin t}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\cot t$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}\cot(\frac{\pi}{4})$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}(1)$$
$$\boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}}$$ ميل المماس

3- الخطوة الثالثة: ايجاد معادلة المماس:

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}(x - \frac{a}{\sqrt{2}})$$
$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}x + \frac{b}{\sqrt{2}}$$
$$y = -\frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$
$$y = -\frac{b}{a}x + \frac{\sqrt{2}\,b}{2} + \frac{\sqrt{2}\,b}{2}$$
$$y = -\frac{b}{a}x + \frac{2\sqrt{2}\,b}{2}$$
$$y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}\,b$$

إذا كان الاقتران : $y = \mathrm{e}^{ax}$ ، حيث a ثابت، و$a > 0$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

19) أجد إحداثيي النقطة P التي تقع على منحنى الاقتران ، ويكون ميل المماس عندها 1 .

1- الخطوة الأولى : نشتق الاقتران $y = \mathrm{e}^{ax}$ ثم نساوي المشتقة بالميل وهو 1 لإيجاد قيمة x

$$y = \mathrm{e}^{ax}$$

$$\frac{dy}{dx} = a\mathrm{e}^{ax}$$

$$a\mathrm{e}^{ax} = 1$$

$$\frac{a\mathrm{e}^{ax}}{a} = \frac{1}{a}$$

$$\mathrm{e}^{ax} = \frac{1}{a}$$

$$\ln\mathrm{e}^{ax} = \ln\frac{1}{a}$$

$$ax.(1) = \ln\frac{1}{a}$$

$$ax = \ln 1 - \ln a$$

$$ax = 0 - \ln a$$

$$ax = -\ln a$$

$$\frac{ax}{a} = \frac{-\ln a}{a}$$

$$\boxed{x = \frac{-\ln a}{a}}$$

2- الخطوة الثانية: نعوض قيمة $x = \frac{-\ln a}{a}$ في الاقتران لإيجاد قيمة y

$$y = \mathrm{e}^{a(\frac{-\ln a}{a})}$$

$$y = \mathrm{e}^{-\ln a}$$

$$y = (\mathrm{e}^{\ln a})^{-1}$$

$$y = a^{-1}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{a}}$$

إذن النقطة هي : $P\left(\frac{-\ln a}{a}, \frac{1}{a}\right)$

20) أثبت أنه يمكن كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة P في صورة : $x + y = k$ ، ثم أجد قيمة الثابت k .

1- الخطوة الأولى: إيجاد ميل العمودي على المماس:

بما أن ميل المماس هو 1 فإن ميل العمودي على المماس هو (- مقلوب ميل المماس) $m_1 = -1$

2- الخطوة الثانية: إيجاد معادلة العمودي على المماس:

معادلة المماس: $y - y_1 = m_1(x - x_1)$

$$y - \frac{1}{a} = -1\left(x - \frac{-\ln a}{a}\right)$$

$$y - \frac{1}{a} = -x - \frac{\ln a}{a}$$

$$\boxed{y = -x - \frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a}}$$

3- الخطوة الثالثة : كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة P في صورة : $x + y = k$:

$$x + y = k$$

$$y = -x - \frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a}$$

$$\boxed{y + x = -\frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a}}$$

4- الخطوة الرابعة : إيجاد قيمة الثابت k :

$$k = -\frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a}$$

$$\boxed{k = \frac{1 - \ln a}{a}}$$

21) إذا كان الاقتران : $h(x)=\sqrt{4+3f(x)}$ ، وكان : $f'(1)=4$ ، وكان : $f(1)=7$ فأجد $h'(1)$.

$$h(x)=\sqrt{4+3f(x)}$$

$$h'(x)=\frac{(3f'(x))}{2\sqrt{4+3f(x)}}$$

$$h'(1)=\frac{(3f'(1))}{2\sqrt{4+3f(1)}}$$

$$h'(1)=\frac{3(4)}{2\sqrt{4+3(7)}}$$

$$h'(1)=\frac{12}{2\sqrt{25}}$$

$$h'(1)=\frac{6}{5}$$

22) إذا كان الاقتران : $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}$ فأثبت أن $f''(x)=4f(x)$.

$$f(x)=e^{2x}+e^{-2x}$$

$$f'(x)=(2)e^{2x}+(-2)e^{-2x}$$

$$f'(x)=2e^{2x}-2e^{-2x}$$

$$f''(x)=(2)2e^{2x}-(-2)2e^{-2x}$$

$$f''(x)=4e^{2x}+4e^{-2x}$$

$$f''(x)=4(e^{2x}+e^{-2x})$$

$$f''(x)=4f(x)$$

23) إذا كان : $f(x) = \sin 4x + \cos 4x$ ، فأثبت أن $\acute{\acute{f}}(x) + 16f(x) = 0$.

$f(x) = \sin 4x + \cos 4x$

$\acute{f}(x) = \cos 4x(4) + -\sin 4x\,(4)$

$\acute{f}(x) = 4\cos 4x - 4\sin 4x$

$\acute{\acute{f}}(x) = 4 -\sin 4x(4) - 4\cos 4x(4)$

$\acute{\acute{f}}(x) = -16\sin 4x - 16\cos 4x$

$\acute{\acute{f}}(x) = -16(\sin 4x + \cos 4x)$

$\acute{\acute{f}}(x) = -16f(x)$

اثبات $\acute{\acute{f}}(x) + 16f(x) = 0$

$\acute{\acute{f}}(x) + 16f(x) = 0$

$\boxed{-16f(x) + 16f(x) = 0}$

يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $y = 2\cos\theta$, $x = \sin^2\theta$ ، حيث : $0 \le \theta \le 2\pi$:

24) أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة θ .

$y = 2\cos\theta$

$\frac{dy}{d\theta} = -2\sin\theta$

$x = \sin^2\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\cos\theta}$

$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\sec\theta}$

25) أجد معادلة المماس عندما يكون الميل $\sqrt{2}$.

1- الخطوة الأولى: مساواة المشتقة مع الميل

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2}$$

$$\boxed{-\sec\theta = \sqrt{2}}$$

2- الخطوة الثانية : ايجاد قيم : $x\ ,y$

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

قانون $\boxed{\cos x = \frac{1}{\sec x}}$

$$y = 2\cos\theta$$

$$y = 2(-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$y = \sqrt{2}.\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$y = \sqrt{2}(-1)$$

$$\boxed{y = -\sqrt{2}}$$

$$x = \sin^2\theta$$

قاعدة $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

قاعدة $\boxed{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x}$

$$\sin^2\theta = 1 - \ (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2$$

$$\sin^2\theta = 1 - \ \frac{1}{2}$$

$$\sin^2\theta = 1 - \ \frac{1}{2}$$

$$\sin^2\theta = \boxed{x = \ \frac{1}{2}}$$

3-الخطوة الثالثة: إيجاد معادلة العمودي على المماس:

معادلة المماس: $y - y_1 = m_1(x - x_1)$

$$y - (-\sqrt{2}) = \sqrt{2}(x - \frac{1}{2})$$

$$y + \sqrt{2} = \sqrt{2}x - (\sqrt{2}.\frac{1}{2})$$

$$y + \sqrt{2} = \sqrt{2}x - \left(\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}\right)$$

$$y + \sqrt{2} = \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{y = \sqrt{2}x - \frac{3}{\sqrt{2}}}$$

26) أجد النقطة التي يكون عندها المماس موازياً للمحور y .

يكون المماس موازياً للمحور y عندما يكون $\frac{dy}{dx}$ غير معرف ، أي عندما يكون $\cos\theta = 0$

عندها يتم إيجاد قيم y و x على ان $\cos\theta = 0$

قاعده $\boxed{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x}$

$$\sin^2\theta = 1 - (0)^2$$

$$\boxed{x = \sin^2\theta = 1}$$

$$y = 2\cos\theta$$

$$\boxed{y = 2 \times 0 = 0}$$

إذن النقطة هي : $(1, 0)$

27) سيارة : يمثل الاقتران : $v(t) = 15te^{-0.05t^2}$ السرعة المتجهة (بالمتر لكل ثانية) لسيارة تتحرك في مسار مستقيم ، حيث : $0 \le t \le 10$. أجد السرعة المتجهة للسيارة عندما يكون تسارعها صفراً .

$$v(t) = 15te^{-0.05t^2}$$

$$a(t) = 15\left(\left(t.\left(e^{-0.05t^2}\right).(-0.1t) + \left(e^{-0.05t^2}\right).(1)\right)\right)$$

$$a(t) = -1.5t^2e^{-0.05t^2} + 15e^{-0.05t^2}$$

$$a(t) = 15e^{-0.05t^2}(1 - 0.1t^2)$$

$$a(t) = 0 \ \rightarrow 15e^{-0.05t^2}(1 - 0.1t^2) = 0$$

$$\frac{15e^{-0.05t^2}}{15e^{-0.05t^2}}(1 - 0.1t^2) = \frac{0}{15e^{-0.05t^2}}$$

$$1 - 0.1t^2 = 0$$

$$0.1t^2 = 1$$

$$\frac{0.1t^2}{0.1} = \frac{1}{0.1}$$

$$t^2 = 10$$

$$\sqrt{t^2} = \sqrt{10}$$

$$t = \sqrt{10}$$

$$v(\sqrt{10}) = 15\sqrt{10}e^{-0.05(\sqrt{10})^2}$$

$$v(\sqrt{10}) = 15\sqrt{10}e^{-0.5}$$

$$v(\sqrt{10}) = \frac{15\sqrt{10}}{e^{0.5}}$$

$$v(\sqrt{10}) = \frac{15\sqrt{10}}{\sqrt{e}} \quad m/s$$

أجد $(fog)'(x)$ عند قيمة x المعطاة في كل مما يأتي :

28) $f(u) = u^5 + 1 \quad , u = g(x) = \sqrt{x} \ , \quad x = 1$

$f'(u) = 5u^4$

$f'(u) = 5\left(\sqrt{1}\right)^4$

$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(fog)(x) = f[g(x)] = f\left[\sqrt{1}\right]$

$(fog)(x) = \left(\sqrt{x}\right)^5 + 1$

$(fog)(x) = x^{\frac{5}{2}} + 1$

$(fog)' = \dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$

$(fog)'(x) = f'(u) \times g'(x)$

$(fog)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$

$(fog)'(x) = f'(g(1)) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$(fog)'(1) = f'(1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{1}}$

$(fog)'(1) = f'(1) \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$

29) $f(u) = u + \dfrac{1}{\cos^2 u} \quad , u = g(x) = \pi x \ , x = \dfrac{1}{4}$

$f(u) = u + \sec^2 u$

$f'(u) = 1 + 2\sec u \sec u \tan u$

$f'(u) = 1 + 2\sec^2 u \tan u$

$, u = g(x) = \pi x$

$g'(x) = \pi$

$(f o g)'(x) = f'(u) \times g'(x)$

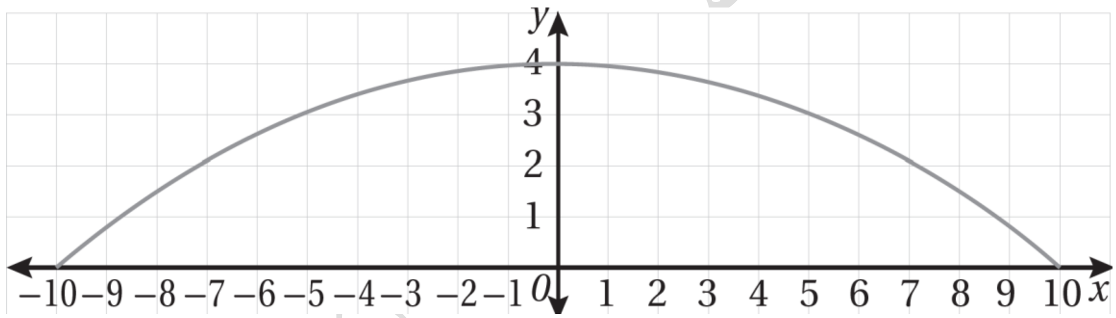
$(f o g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$

$(f o g)'(\frac{1}{4}) = f'(g\left(\frac{1}{4}\right)) \times g'\left(\frac{1}{4}\right)$

$(f o g)'(\frac{1}{4}) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \pi$

$(f o g)'(\frac{1}{4}) = 5\pi$

مرور: يبين التمثيل البياني المجاور شكل مطب سرعة صمم للتخفيف من سرعة السيارات على أحد الطرق. وفيه يمثل المحور x سطح الأرض ، وتقاس جميع الأطوال بالسنتيمترات .



إذا كانت المعادلة الوسيطية التي تمثل منحنى المطب هي:

$x = 10\ \sin t\ , y = 2 + 2\cos 2t$ ، حيث $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ ، فأجد كلا ما يأتي :

30) ميل المماس لمنحنى المطب بدلالة t .

$y = 2 + 2\cos 2t$

$\frac{dy}{dt} = 2(-\sin 2t)(2)$

$\frac{dy}{dt} = -4\sin 2t$

$x = 10\ \sin t$

$\frac{dx}{dt} = 10\cos t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4\sin 2t}{10\cos t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin 2t}{5\cos t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4\sin t\ \cos t}{5\cos t}$$

قاعده $\boxed{\sin 2x = 2\sin x\ \cos x}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4\sin t}{5}$$

31) قيمة t عند أعلى نقطة على منحنى المطب .

يكون المماس عند اعلى نقطة في المنحنى المعطى أفقيا، إذن ميله يساوي صفر.

$$\frac{dx}{dt} = 0 \ \rightarrow \sin t = 0 \ \rightarrow t = 0$$

أو أن قيمة x عند أعلى نقطة تساوي صفر ، إذن

$x = 10\ \sin t$

$10\ \sin t = 0$

$t = 0$

أو أن قيمة y عند أعلى نقطة تساوي 4 ، إذن

$y = 2 + 2\cos 2t$

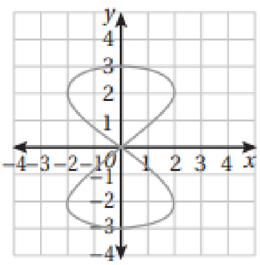
$2 + 2\cos 2t = 4$

$2\cos 2t = 2$

$\cos 2t = 1$

$t = 0$

32) تبرير: يبين الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:



$$x = 2\sin 2t \qquad , y = 3\cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

أجد ميل المماس لكل من فرعي المعادلة عند نقطة الأصل، مبررا ً إجابتي.

1- الخطوة الأولى: إيجاد النقطة، من السؤال نقطة الأصل وهي: (0,0)

2- الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

$$y = 3\cos t$$
$$\frac{dy}{dt} = -3\sin t$$
$$x = 2\sin 2t$$
$$\frac{dx}{dt} = 2\cos 2t\,(2)$$
$$\frac{dx}{dt} = 4\cos 2t$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3\sin t}{4\cos 2t}$$
$$(x, y) = (0, 0)$$
$$(x, y) = (2\sin 2t\,, 3\cos t)$$
$$2\sin 2t = 0$$
$$\sin 2t = 0$$
$$t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$
$$3\cos t = 0$$
$$\cos t = 0$$
$$t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

يتحقق الشرطان معاً عندما $t = \frac{\pi}{2}, t = \frac{3\pi}{2}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-3\sin\frac{\pi}{2}}{4\cos 2\frac{\pi}{2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-3(1)}{4(-1)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-3}{-4}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \frac{-3\sin\frac{3\pi}{2}}{4\cos 2\frac{3\pi}{2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \frac{-3(-1)}{4(-1)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \frac{3}{-4}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}} = -\frac{3}{4}$$

إذن أحد فرعي المعادلة ميله عند نقطة الاصل $\frac{3}{4}$, والاخر ميله $-\frac{3}{4}$