المرجع في الرياضيات

الثانـي ثانـوي العلمي

كتاب الطالب + كتاب التمارين

الفصل الأول / الوحدة الأولى

الدرس الأول

مشتقة اقترانات خاصة

الأستاذ: معتصم ابـراهيم

0790264376

أعزائي الطلاب: أية ملاحظات على طريقة عمل الدوسيه الرجاء ارسالها على رقم الواتس اب أعلاه

ولا تنسونا من دعائكم

الدرس الأول: مشتقة اقترانات خاصة

مواضيع الدرس الأول

مشتقة الاقترانات خاصة

- الاتصال و الاشتقاق
- مشتقة الاقتران الاسي الطبيعي
- مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي
- مشتقة اقتران الجيب ومشتقة اقتران جيب التمام
- تطبيقات معادلة المماس والعمودي عند نقطة ما
- تطبيقات الحركة في مسار مستقيم
- تطبيقات الحركة التوافقية البسيطة

رموز الاشتقاق:

1) اذا كان الاقتران يتضمن $f(x)$ ، فإنه يرمز للمشتقة $\acute{f}(x)$.

2) اذا كان الاقتران يتضمن y ، فإنه يرمز للمشتقة $\acute{y}$ أو $\frac{dy}{dx}$.

قواعد الاشتقاق:

1)القاعدة الأولى: مشتقة الثابت = صفر

ملاحظة : الثابت معناه أن لا يكون هناك متغير في الاقتران مثل x بجانب الرقم الثابت a .

1) $f(x) = 3 \rightarrow \acute{f}(x) = 0$

2) $f(x) = \sqrt{5} \rightarrow \acute{f}(x) = 0$

3) $f(x) = a^2 \rightarrow \acute{f}(x) = 0 \rightarrow a \in R$

2) القاعدة الثانية: مشتقة ax تساوي a .

1) $f(x) = 2x \rightarrow \acute{f}(x) = 2$

2) $f(x) = -9x \rightarrow \acute{f}(x) = -9$

3) $f(x) = \frac{1}{2}x \rightarrow \acute{f}(x) = \frac{1}{2}$

3) القاعدة الثالثة: مشتقة x^n تساوي nx^{n-1}

وتقسم إلى ثلاث حالات:

1) إذا كانت n (الاسّ)عدد موجب : ينزل الاس بجانب المتغير (ضرب) ويطرح من الاس واحد.

1) $f(x) = x^5 \rightarrow \acute{f}(x) = 5x^4$

2) $f(x) = x^2 \rightarrow \acute{f}(x) = 2x$

2) إذا كانت n (الاسّ) عدد سالب: ينزل الاس مع الاشارة بجانب المتغير (ضرب) ويطرح من الاسّ واحد (الاس سيزداد كرقم بمقدار واحد)

1) $f(x) = x^{-5} \rightarrow \acute{f}(x) = -5x^{-6}$

2) $f(x) = -2x^{-4} \rightarrow \acute{f}(x) = 8x^{-5}$

3) إذا كان (الاسّ) كسر $\left(n = \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)$: ينزل الاسّ بجانب المتغير (ضرب) ويطرح من الاس واحد وتطبق القاعدة $\left(\frac{\text{البسط}-\text{المقام}}{\text{المقام}}\right)$

1) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

2) $f(x) = x^{\frac{5}{3}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$

3) $f(x) = x^{\frac{-5}{3}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{-5}{3}x^{\frac{-8}{3}}$

ملاحظات مهمة :

ملاحظة 1): يجب تحويل الجذر إلى (أسّ) عند الاشتقاق وذلك بقسمة $\frac{\text{الداخل}}{\text{الخارج}}$.

$$1)\ f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

ملاحظة 2): مشتقة الجذر التربيعي $\frac{\text{مشتقة داخل الجذر}}{2\times(\text{الجذر نفسه})}$.

$$1)\ f(x) = \sqrt{3x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

$$2)\ f(x) = \sqrt{5x^2 - x} \Rightarrow f'(x) = \frac{10x-1}{2\sqrt{5x^2-x}}$$

4) القاعدة الرابعة: مشتقة حاصل جمع أو طرح مجموعة اقترانات $f(x) = g(x) \pm h(x)$

المشتقة $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

$$1)\ f(x) = x^2 + 3x^3 \rightarrow f'(x) = 2x + 9x^2$$

$$2)\ f(x) = x^5 - 4x^{-2} + 7 \rightarrow f'(x) = 5x^4 + 8x^{-3}$$

5) القاعدة الخامسة: مشتقة حاصل ضرب اقترانين $f(x) = g(x) \times h(x)$

المشتقة $f'(x) = \left(g(x) \times h'(x)\right) + \left(h(x) \pm g'(x)\right)$

المشتقة = الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

$$1)\ f(x) = (x^2+5)\,(x^3+2)$$

$$f'(x) = (x^2+5)\,(3x^2) + (x^3+2)\,(2x)$$

$$f'(x) = (3x^4 + 15x^2) + (2x^4 + 4x)$$

$$f'(x) = 3x^4 + 15x^2 + 2x^4 + 4x$$

$$f'(x) = 5x^4 + 15x^2 + 4x$$

6) القاعدة السادسة: مشتقة حاصل قسمة اقترانين $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$

المشتقة $\acute{f}(x)=\frac{(h(x)\pm\acute{g}(x))-(g(x)\times\acute{h}(x))}{(h(x))^2}$ ، أي المشتقة $=\frac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسطة})-(\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{(\text{المقام})^2}$

$$1)\ f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+5}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{(x^2+5)(3x^2)-(x^3+1)(2x)}{(x^2+5)^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{(3x^4+15x^2)-(2x^4+2x)}{(x^2+5)^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{(3x^4+15x^2-2x^4-2x)}{(x^2+5)^2}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{x^4+15x^2-2x}{(x^2+5)^2}$$

ملاحظات مهمة:

1) إذا كان الاقتران على شكل $f(x)=\frac{\text{اقتران}}{\text{متغير لوحده}}$ يتم توزيع المقام على جميع الحدود في البسط بصورة كسر .

$$1)\ f(x)=\frac{6x^2+3x}{x}\quad\Rightarrow f(x)=\frac{6x^2}{x}+\frac{2x}{x}\Rightarrow f(x)=6x+2\quad\Rightarrow\ \acute{f}(x)=6$$

2) إذا كان الاقتران على شكل $f(x)=\frac{\text{اقتران}}{\text{ثابت}}$ نسحب المقام ثم نشتق فيما داخل القوس ومن ثم إدخاله على القوس عند اكتمال الاشتقاق.

$$1)\ f(x)=\frac{x^3+2}{5}\quad\Rightarrow f(x)=\frac{1}{5}(x^3+2)\Rightarrow\acute{f}(x)=\frac{1}{5}(3x^2)\quad\Rightarrow\ \acute{f}(x)=\frac{3x^2}{5}$$

أويمكن تطبيق القاعدة :

$$f(x)=\frac{\text{اقتران}}{\text{ثابت}}\Rightarrow\quad\acute{f}(x)=\frac{\text{مشتقة الاقتران}}{\text{الثابت نفسه}}$$

$$1)\ f(x)=\frac{x^3+2}{5}\quad\Rightarrow\ \acute{f}(x)=\frac{3x^2}{5}$$

3) إذا كان الاقتران على شكل $f(x) = \frac{\text{ثابت}}{\text{متغير لوحده}}$ نرفع المتغير للمقام ونغير إشارة الأسّ .

1) $f(x) = \frac{1}{x^4} \quad \Rightarrow f(x) = x^{-4}$

$\acute{f}(x) = -4x^{-5} \quad \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{-4}{x^5}$

2) $f(x) = \frac{-5}{x^3} \quad \Rightarrow f(x) = -5x^{-3}$

$\acute{f}(x) = 15x^{-4} \quad \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{15}{x^4}$

4) إذا كان الاقتران على شكل $f(x) = \frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران اكثر من متغير}}$ يمكن استخدام قاعدة مشتقة المقلوب :

$$f(x) = \frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{-(\text{الثابت}) \times (\text{مشتقة الاقتران})}{\text{الثابت نفسه}}$$

1) $f(x) = \frac{5}{x^2 + x - 2}$

$$\acute{f}(x) = \frac{-5(2x+1)}{(x^2 + x - 2)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-10x - 1}{(x^2 + x - 2)^2}$$

7) القاعدة السابعة: مشتقة القوس المرفوع إلى أسّ $f(x) = \left(g(x)\right)^n$ ،

المشتقة $\acute{f}(x) = n\left(g(x)\right)^{n-1} \times \acute{g}(x)$

المشتقة $=$ ينزل الاسّ ، وينزل القوس مع طرح من الاسّ واحد ، ونشتق ما في داخل القوس .

$1)\ f(x) = (x^2+1)^3$

$\acute{f}(x) = 3(x^2+1)^2(2x)$

$\acute{f}(x) = 6x(x^2+1)^2$

$2)\ f(x) = (x^2+4)^2$

$\acute{f}(x) = 2(x^2+4)(2x)$

$\acute{f}(x) = 4x(x^2+4)$

$\acute{f}(x) = 4x^3+16x$

8) القاعدة الثامنة: مشتقة الاقترانات المثلثية.

المشتقة $=$ مشتقة الاقتران المثلثي وتنزل الزاوية كما هي $\times$ مشتقة الزاوية .

$1)\ f(x) = \cos(3+x^2)$

$\acute{f}(x) = -\sin(3+x^2)\,(2x)$

$\acute{f}(x) = -2x\sin(3+x^2)$

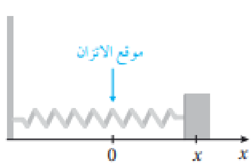
$2)\ f(x) = \sin x^2$

$\acute{f}(x) = \cos x^2\,(2x)$

$\acute{f}(x) = 2x\cos x^2$

مسألة اليوم (صفحة 8): يهتز جسم مثبت في زنبرك أفقياً على سطح أملس كما في الشكل المجاور ، ويمثل الاقتران $x(t) = 8\sin t$ موقع الجسم ، حيث t الزمن بالثواني ، و x الموقع بالسنتيمترات :

1) أجد موقع الجسم ، وسرعته وتسارعه عندما $t = \frac{2}{3}$.



أولاً : أيجاد موقع الجسم:

$x(t) = 8\sin t$

$x\left(\frac{2}{3}\right) = 8\sin\left(\frac{2}{3}\right)$

$$x\left(\frac{2}{3}\right) \approx 4.95\ cm$$

ثانياً: أيجاد سرعة الجسم:

$$x(t) = 8 \sin t$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 8 \cos t$$

$$v\left(\frac{2}{3}\right) = 8 \cos\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$v\left(\frac{2}{3}\right) \approx 6.29\ cm/s$$

ثالثاً: أيجاد تسارع الجسم:

$$v(t) = 8 \cos t$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -8 \sin t$$

$$a\left(\frac{2}{3}\right) = -8 \sin\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$a\left(\frac{2}{3}\right) \approx -4.95\ cm/s^2$$

2) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = \frac{2}{3}$.

بما أن السرعة موجبة ، فإن الجسم يتحرك لليمين عندما $t = \frac{2}{3}$.

الاتصال والاشتقاق (صفحة 8)

يكون الاقتران غير قابل للاشتقاق في الحالات التالية:

- ان يكون غير متصل (انقطاع أو فجوة). (غير متصل وغير قابل للاشتقاق)
- وجود رأس حاد. (متصل ولكنه غير قابل للاشتقاق)
- وجود مماس رأسي. (متصل ولكنه غير قابل للاشتقاق)

العلاقة بين الاتصال وقابلية الاشتقاق:

- قابلية الاشتقاق تضمن الاتصال. بمعنى إذا كان $f(x)$ قابلاً للاشتقاق فإنه يكون متصل .

نظرية :

إذا كان الاقتران $f(x)$ قابلاً للاشتقاق عندما $x = a$ ، فإنه يكون متصلاً عندما $x = a$

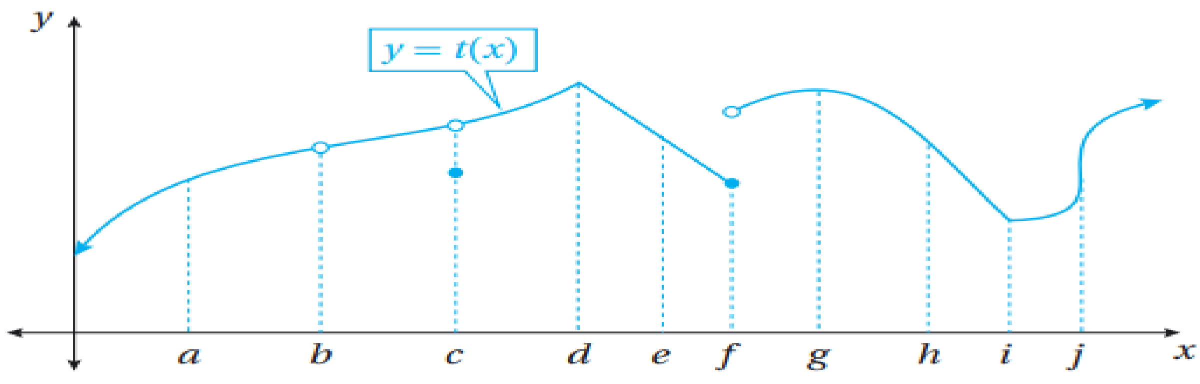
- الاتصال لا يضمن قابلية الاشتقاق. بمعنى إذا كان $f(x)$ متصل فإنه من الممكن أن يكون غير قابل للاشتقاق .

قد يكون الاقتران $f(x)$ متصلاً عندما $x = a$ ، وغير قابل للاشتقاق عندما $x = a$ ، لذا ،فإن الاتصال لا يضمن قابلية الاشتقاق .

ملاحظة: ينتج الرأس الحاد عندما يحدث تغير مفاجىء في اتجاه منحنى الاقتران، ما يعني أن مشتقة الاقتران من جهة اليسار لا تساوي مشتقته من جهة اليمين عند هذه النقطة .

مثال 1: (صفحة 10)

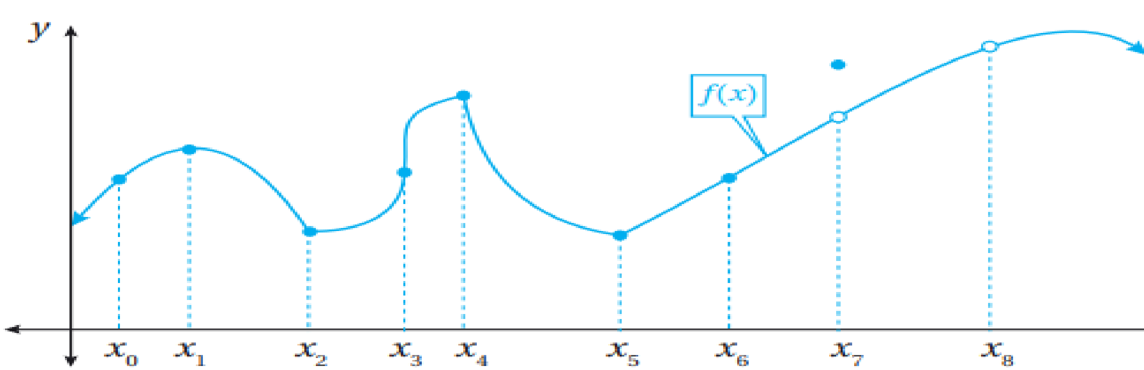
يبين الشكل الآتي منحنى الاقتران $t(x)$ ، أحدد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $t(x)$ ، غير قابل للاشتقاق ، مبررا ً إجابتي .



الاقتران $t(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما $x = b$ و $x = c$ و $x = f$ ، لأنه غير متصل عند هذه النقاط ، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = i$ و $x = d$ ، نظرا ً إلى وجود رأس حاد عند هاتين النقطتين ، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = j$ ، نظرا ً إلى وجود مماس رأسي عند هذه النقطة .

أتحقق من فهمي: (صفحة 10)

يبين الشكل الآتي منحنى الاقتران $f(x)$ ، أحدد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ ، غير قابل للاشتقاق ، مبررا ً إجابتي .



الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_5$ و $x = x_4$ و $x = x_2$ ، لأن لمنحناه رأس حاد عند هذه النقاط ، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_8$ و $x = x_7$ ، لأنه غير متصل عندهما ، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_3$ ، نظرا ً إلى وجود مماس رأسي عند هذه النقطة .

مشتقة الاقتران الاسي الطبيعي (صفحة 11)

شرح الأفكار الرئيسية:

الاقتران الأسي: هو الاقتران الذي يتضمن أساً متغيراً لأساس ثابت أكبر من الصفر

أمثلة : $f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\quad f(x) = (0.3)^x + 9$ $\quad f(x) = 5^x$

اقتران الأسي الطبيعي: هو الاقتران الذي يتضمن أساً متغيراً للأساس الطبيعي أو العدد النيبيري e .

أمثلة : $f(x) = 6(e)^x$ $\quad f(x) = e^x + 4$ $\quad f(x) = e^x$

ملاحظة : يسمى العدد e الاساس الطبيعي أو العدد النيبيري ويساوي تقريباً (2.72) ، وهو عدد غير نسبي (غير منته وغير متكرر بالصورة العشرية) .

ملاحظات مهمة :

- مشتقة الاقتران $f(x)$ عند نقطة واقعة على منحناه هي ميل المنحنى عن هذه النقطة (ميل المماس عند نقطة التماس) ، ويرمز إليها بالرمز $f'(x)$.
- ميل المماس عند نقطة ما يساوي مشتقة الاقتران عند هذه النقطة.

قاعدة مهمة:

ميل المماس عند أي نقطة تقع على منحنى الاقتران الأسي الطبيعي هو الإحداثي y لهذه النقطة ومنها نخرج بقاعدة الاشتقاق الاقتران الاسي الطبيعي:

إذا كان : $f(x) = e^x$ ، حيث e العدد النيبيري ، فإن : $f'(x) = e^x$.

$$f(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = e^x$$

مثال 2: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي: (صفحة12)

1) $f(x) = 3\,e^x$

$f'(x) = 3\,e^x$

2) $f(x) = x^2 + e^x$

$f'(x) = 2x + e^x$

$$3)\ y = \frac{\sqrt[3]{x} - 2xe^x}{x}$$

$$y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} - \frac{2xe^x}{x}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} - \frac{2xe^x}{x}$$

$$= x^{\frac{-2}{3}} - 2e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{3}x^{\frac{-5}{3}} - 2e^x$$

$$= -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} - 2e^x$$

أتحقق من فهمي: (صفحة12)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

$$1)\ f(x) = 5\,e^x + 3$$

$$f'(x) = 5\,e^x$$

$$2)\ f(x) = \sqrt{x} - 4\,e^x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4\,e^x$$

$$3)\ f(x) = 8\,e^x + \frac{4}{\sqrt[5]{x}}$$

$$f(x) = 8\,e^x + 4x^{\frac{-1}{5}}$$

$$f'(x) = 8\,e^x - \frac{4}{5}x^{\frac{-6}{5}}$$

$$f'(x) = 8\,e^x - \frac{4}{5\sqrt[5]{x^6}}$$

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي (صفحة 13)

الاقتران اللوغاريتمي: هو الاقتران العكسي للاقتران الأسي .

بحيث اذا كانت الصورة الاسية $b^y = x$ ، إذن الصورة اللوغاريتمية $\log_b x = y$

مثال 1 : $3^2 = 9 \Rightarrow \log_3 9 = 2$

مثال 2 : $2^4 = 16 \Rightarrow \log_2 16 = 4$

قوانين اللوغاريتمات:

قانون الضرب: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$

قانون القسمة: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

قانون القوة: $\log_b x^p = p \log_b x$

خصائص اللوغاريتمات :

1) $\log_b 1 = 0$

2) $\log_b b = 1$

3) $\log_b b^x = x$

4) $b^{\log_b x} = x$

5) $\ln e = \log_e e = 1$

6) $\ln e^x = \log_e e^x = x$

7) $\log_b 0 =$ غير معرف

قوانين الأسس:

قانون ضرب القوى : $b^x \times b^y = b^{x+y}$

قانون قسمة القوى : $\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$ ، $b \neq 0$

قانون قوة القوة: $(b^x)^y = b^{xy}$

اللوغاريتم الاعتيادي: هو اللوغاريتم للأساس 10 أو $\log_{10}$ ، ويكتب عادة من دون أساس $\log$.

الاقتران اللوغاريتمي الاعتيادي: هو الاقتران العكسي للاقتران الأسي الذي أساسه 10 .

مثال 1 : $10^2 = 100 \quad \Rightarrow \log 100 = 2$

مثال 2 : $10^3 = 1000 \quad \Rightarrow \log 1000 = 3$

اللوغاريتم الطبيعي: هو اللوغاريتم للأساس e أو $\log_e$ ، ويرمز له بـ $\ln$.

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي: هو الاقتران العكسي للاقتران الأسي الطبيعي،

بحيث اذا كانت الصورة الاسية $e^y = x$

إذن الصورة اللوغاريتمية : $\ln x = y$ أو $\log_e x = y$

نظرية اشتقاق اقتران اللوغاريتم الطبيعي:

1) إذا كان : $f(x) = \ln(\text{مقدار متغير})$ ، حيث : $x > 0$ ، فإن المشتقة : $f'(x) = \frac{\text{مشتقة المقدار}}{\text{نفس المقدار}}$

2) إذا كان : $f(x) = \ln(\text{ثابت})$، فإن المشتقة : $f'(x) = 0$

مثال 3: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي: صفحة 14

1) $f(x) = \ln(x^4)$

$f(x) = 4\ln x$

$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{4}{x}$

2) $f(x) = \ln(xe^x) + \ln 7x$

$f(x) = \ln x + \ln e^x + \ln 7 + \ln x$

$f(x) = 2\ln x + x + \ln 7$

$\acute{f}(x) = 2\frac{1}{x} + 1 + 0$

$\acute{f}(x) = \frac{2}{x} + 1$

أتحقق من فهمي (صفحة14)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \sqrt{x} + \ln(4x)$

$f(x) = \sqrt{x} + \ln 4 + \ln x$

$\acute{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 + \frac{1}{x}$

$\acute{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$

2) $f(x) = \ln(2x^3)$

$\acute{f}(x) = \frac{6x^2}{2x^3}$

$\acute{f}(x) = \frac{3}{x}$

مشتقة اقتران الجيب ومشتقة اقتران جيب التمام (صفحة 15)

مشتقات الاقترانات المثلثية:

المشتقة = مشتقة الاقتران المثلثي وتنزل الزاوية كما هي × مشتقة الزاوية .

1) $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

2) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

3) $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$

4) $f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$

5) $f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$

6) $f(x) = \csc x \Rightarrow f'(x) = -\csc x \cot x$

مثال 4: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي: (صفحة16)

1) $f(x) = 3\sin x + 4$

$f'(x) = 3\cos x$

2) $y = \frac{1}{2}e^x - 7\cos x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}e^x + 7\sin x$

اتحقق من فهمي: (صفحة16)

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $y = \frac{\sin x}{2} + 3\cos x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cos x - 3\sin x$

2) $y = x^2 + \cos x + \sin\frac{\pi}{2}$

$\frac{dy}{dx} = 2x - \sin x + \cos\frac{\pi}{2}$

تطبيقات معادلة المماس والعمودي عند نقطة ما (صفحة 16)

المماس: هو مستقيم يمس منحنى الاقتران عند نقطة.

ميل المماس: هو المشتقة الأولى عند نقطة التماس ، $m = \acute{f}(x_1)$.

معادلة المماس: هي العلاقة التي تربط بين الإحداثي السيني والإحداثي الصادي لأي نقطة تقع على المماس (المستقيم). وهي:

$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1} \Longrightarrow \quad y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

ميل العامودي على المماس: هو سالب مقلوب ميل المماس. $m_1 = -\frac{1}{m}$

ملاحظة : إذا تعامد مستقيمان كل منهما ليس رأسياً، فإن حاصل ضرب ميلهما هو 1 – ، أي أن ميل أحدهما يساوي سالب مقلوب ميل الآخر . ومنها ميل العمودي على المماس يساوي سالب مقلوب ميل المماس لأنهما متعامدان.

معادلة ميل العامودي على المماس: $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$

مثال 5: إذا كان الاقتران : $f(x) = \ln(\frac{x}{e})$ ، فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي : (صفحة16)

1) معادلة المماس عند النقطة $(1, -1)$

الخطوة الأولى : أجد ميل المماس عند النقطة $(1, -1)$

$$f(x) = \ln(\frac{x}{e})$$

$$f(x) = \ln x - \ln e$$

$$f(x) = \ln x - 1$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x}$$ ميل المماس

$$\acute{f}(1) = \frac{1}{1}$$

$$\boxed{\acute{f}(1) = 1}$$ ميل المماس عند $x = 1$

الخطوة الثانية: أيجاد معادلة المماس.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = 1(x - 1)$$

$$y + 1 = x - 1$$

$$y = x - 1 - 1$$

$\boxed{y = x - 2}$ معادلة المماس

2) ايجاد معادلة العمودي على المماس:

الخطوة الاولى: ايجاد ميل العمودي على المماس:

$$m_1 = -\frac{1}{m}$$

$$m_1 = -\frac{1}{1}$$

$$m_1 = -1$$

الخطوة الثانية: ايجاد معادلة العمودي على المماس:

$$y - y_1 = m_1(x - x_1)$$

$$y - (-1) = -1(x - 1)$$

$$y + 1 = -x + 1$$

$$y = -x + 1 - 1$$

$\boxed{y = -x}$ معادلة العمودي على المماس

أتحقق من فهمي: (صفحة 17)

إذا كان الاقتران : $f(x) = \ln \sqrt{x}$ ، فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي :

1) معادلة المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$

الخطوة الأولى : أجد ميل المماس عند النقطة $(e, \frac{1}{2})$

$$f(x) = \ln\sqrt{x}$$

$$f(x) = \ln x^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln x$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{2x}$$ ميل المماس

$$\boxed{\acute{f}(e) = \frac{1}{2e}}$$ ميل المماس عند $x = e$

الخطوة الثانية: أيجاد معادلة المماس.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}(x - e)$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}x - \frac{1}{2e}e$$

$$y = \frac{1}{2e}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2e}x}$$ معادلة المماس

2) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(e,\frac{1}{2})$

الخطوة الاولى: ايجاد ميل العمودي على المماس:

$$m_1 = -\frac{1}{m}$$

$$\mathrm{m}_1 = -\frac{1}{\frac{1}{2e}}$$

ميل العمودي على المماس $\boxed{m_1 = -2e}$

الخطوة الثانية: ايجاد معادلة العمودي على المماس:

$$y - y_1 = m_1(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2} = -2e(x - e)$$

معادلة العمودي على المماس $\boxed{y = -2ex + 2e^2 + \frac{1}{2}}$

تطبيقات الحركة في خط مستقيم (صفحة17)

مفاهيم الدرس:

نقطة الأصل: هي النقطة التي يكون الجسم فيها في حالة سكون وتساوي 0 .

الموقع $s(t)$: هو المسافة الفاصلة بين الجسم و نقطة الأصل ، ويمثل اقتران بالنسبة إلى الزمن، ويرمز له بالرمز $s(t)$ ، وممكن أن قيمته موجبة أو سالبة أو صفر .

السرعة القياسية: هي المسافة التي يقطعها الجسم في وحدة الزمن، وتقاس (بالمتر/ ثانية) أو (كم/ ساعة)، وهي القيمة المطلقة للسرعة المتجهة. $|v(t)|$ حيث لها مقدار وليس لها اتجاه.

السرعة المتجهة $v(t)$: هو مقدار تغير اقتران موقع الجسم $s(t)$ بالنسبة إلى نقطة محددة في زمن محدد مع تحديد اتجاه السرعة، حيث أن لها مقدار ولها اتجاه.

ملاحظة مهمة: كلمة (سرعة) تعني السرعة المتجهة أينما وردت في الكتاب.

إذا كانت $v(t) = 0$ فإن الجسم يكون في حالة سكون .

إذا كانت $v(t) > 0$ فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب .

إذا كانت $v(t) < 0$ فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب .

التسارع $a(t)$: هو مقدار تغير السرعة المتجهة $v(t)$ بالنسبة إلى الزمن .

الرموز المستخدمة في الدرس:

1) الزمن ويرمز له t ووحدة قياسه (ثانية ، دقيقة ، ساعة، الخ ..) .

2) موقع الجسم ويرمز له $s(t)$ ووحدة قياسها (سم ، م ، كم ، الخ .....).

3) سرعة الجسم ويرمز له $v(t)$ ووحدة قياسها (سم/ثانية ، م/ دقيقة ، كم/ساعة ، الخ ..)

4) تسارع الجسم ويرمز له $a(t)$ ووحدة قياسها (سم/ثانية^2، م/ دقيقة^2 ، كم/ ساعة^2،الخ ..)

العلاقة بين الموقع والسرعة والتسارع:

$$s(t) \ \text{نشتق} \Longrightarrow \acute{s}(t) = v(t) \ \text{نشتق} \Longrightarrow \acute{v}(t) = a(t)$$

ملاحظات مهمة:

1) يجب توفير الاقتران المطلوب حسب طلب السؤال، بحيث إذا كان المطلوب إيجاد سرعة الجسم والاقتران الموجود بالسؤال هو اقتران الموقع يتم الاشتقاق لإيجاد اقتران السرعة، وإذا كان المطلوب ايجاد التسارع نقوم باشتقاق اقتران السرعة .

2) يجب توفر الزمن بالسؤال، وإذا لم يكن متوفر نقوم بإيجاده أو استنتاجه من خلال معطيات السؤال.

3) يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كان سرعته تساوي صفر $t = 0$.

4) يكون الجسم في موقعه الابتدائي عندما $t = 0$.

مثال 6: يمثل الاقتران : $s(t) = 6t^2 - t^3 \ , t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

1) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 2$

سرعة الجسم:

أجد مشتقة اقتران الموقع ، ثم أعوض $t = 2$ في المشتقة :

$$s(t) = 6t^2 - t^3$$

$$v(t) = \acute{s}(t) = 12t - 3t^2$$

$$v(2) = 12(2) - 3(2)^2$$

$$v(2) = 24 - 12$$

$$\boxed{v(2) = 12 \ \ m/s}$$

تسارع الجسم

أجد مشتقة اقتران السرعة المتجهة ، ثم أعوض $t = 2$ في المشتقة :

$$a(t) = \acute{v}(t) = 12 - 6t$$

$$a(2) = 12 - 6(2)$$

$$a(2) = 12 - 12$$

$$a(2) = 0 \quad m/s^2$$

2) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كان سرعته 0 ، أي عندما $v(t) = 0$:

$$v(t) = 12t - 3t^2$$

$$12t - 3t^2 = 0$$

$$3t(4 - t) = 0$$

إما $3t = 0$

$$\boxed{t = 0}$$

أو $4 - t = 0$

$$\boxed{t = 4}$$

إذن يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما $t = 0$ ، أي عندما $t = 4$

3) في اي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 5$

$$v(t) = 12t - 3t^2$$

$$v(5) = 12(5) - 3(5)^2$$

$$v(5) = 60 - 75$$

$$v(5) = -15$$

بما أن إشارة السرعة المتجهة سالبة ، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب عندما $t = 5$.

4) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي.

يكون الجسم في موقعه الابتدائي أول مرة عندما $t = 0$ ، ومنه فإن $s(0) = 0$

$s(t) = 6t^2 - t^3 = 0$

$6t^2 - t^3 = 0$

$t^2(6 - t) = 0$

إما $t^2 = 0$

$\boxed{t = 0}$

أو $6 - t = 0$

$\boxed{t = 6}$

إذن يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي بعد $6\ s$

أتحقق من فهمي: (صفحة20)

يمثل الاقتران : $s(t) = t^2 - 7t + 8\ \ ,t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

1) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 4$.

سرعة الجسم المتجهة

أجد مشتقة اقتران الموقع ، ثم أعوض $t = 2$ في المشتقة :

$s(t) = t^2 - 7t + 8$

$v(t) = \acute{s}(t) = 2t - 7$

$v(4) = 2(4) - 7$

$v(2) = 8 - 7$

$\boxed{v(2) = 1\ \ m/s}$

تسارع الجسم

أجد مشتقة اقتران السرعة المتجهة ، ثم أعوض $t = 2$ في المشتقة :

$a(t) = \acute{v}(t) = 2$

$a(4) = 0\ \ m/s^2$

2) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كان سرعته 0 ، أي عندما $v(t) = 0$:

$v(t) = 2t - 7$

$2t - 7 = 0$

$2t = 7$

$t = \frac{7}{2}\ s$

3) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 2$ ؟

$v(t) = 2t - 7$

$v(2) = 2(2) - 7$

$v(2) = 4 - 7$

$v(2) = -3$

بما أن إشارة السرعة المتجهة سالبة ، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب عندما $t = 2$.

4) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

يكون الجسم في موقعه الابتدائي أول مرة عندما $t = 0$

$s(t) = t^2 - 7t + 8$

$s(0) = (0)^2 - 7(0) + 8$

$s(0) = 8$

$t^2 - 7t + 8 = 8$

$t^2 - 7t = 8 - 8$

$t^2 - 7t = 0$

$t(t - 7) = 0$

$\boxed{t = 0}$ إما

$\boxed{t = 7}$ أو

إذن يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي بعد $7\ s$

تطبيقات الحركة التوافقية البسيطة (صفحة 20)

ملاحظات لغايات فهم الدرس:

الحركة التوافقية البسيطة: هي حركة (التذبذبية) الاهتزازية التي تكرر نفسها ذهاباً وإياباً على المسار نفسه في فترات زمنية متساوية حول موقع الاتزان، ويتناسب فيها مقدار قوة الارجاع (القوة المعيدة) تناسباً طردياً مع مقدار الإزاحة ويكون بعكس اتجاه الإزاحة.

أمثلة عليها: تذبذب البندول البسيط، حركة الأرجوحة، اهتزاز وتر آلة موسيقية.

موقع الإتزان: هي نقطة تنعدم فيها محصلة القوى المؤثرة في الجسيم وتمثل نقطة سكونه عندما يتوقف عن الاهتزاز، حيث تكون إزاحة الجسم تساوي صفر، واستطالة النابض أو انضغاطه تساوي صفر.

القوة المعيدة: هي القوة التي تؤثر في الجسم لإعادته إلى موقع الاتزان، ويكون اتجاهها دائماً باتجاه موقع الاتزان بعكس اتجاه الإزاحة.

معادلات الحركة التوافقية البسيطة (معادلات تغير الإزاحة مع الزمن):

1) المعادلة الأولى: وتنطبق على أي حركة توافقية بسيطة تبدأ من موقع الاتزان عند الزمن $t = 0$.

$$x(t) = a\sin\theta = a\sin(\omega t)$$

2) المعادلة الثانية: وتنطبق على أي حركة توافقية بسيطة تبدأ من أقصى إزاحة (A) عند الزمن $t = 0$

$$x(t) = a\cos\theta = a\cos(\omega t)$$

حيث:

التردد الزاوي (ω) :عدد الدورات في وحدة الزمن مضروباً في (2π) ، ويقاس بوحدة (rad/s) .

سعة الذبذبة (a) : هي أقصى إزاحة عن موقع الاتزان .

ملاحظات مهمة:

1) حركة الجسم باتجاه موقع الاتزان: فإن مقدار السرعة يزداد ليصل قيمة عظمى عند مروره بموقع الاتزان، في حين يقل مقدار الإزاحة والتسارع ليصبح كل مهما صفراً لحظة مروره بموقع الاتزان.

2) حركة الجسم مبتعداً عن موقع الاتزان: فإن مقدار السرعة تقل تدريجياً لتصبح صفراً عند أقصى إزاحة، في حين يزداد مقدار الإزاحة والتسارع تدريجياً ليصل قيمته العظمى عند مروره بموقع الاتزان

3) **عند أقصى إزاحة يتحركها الجسم:** يكون للتسارع قيمة عظمى، ومقدار السرعة يساوي صفر لأن الجسم يسكن لحظياً عند هذا الموقع.

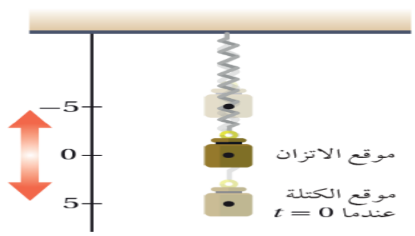
4) تستمر هذه الحركة التذبذبية في غياب قوى الاحتكاك.

5) تتلاشى هذه الحركة التذبذبية تدريجياً إلى أن يتوقف الجسم عن التذبذب بعد مدة زمنية في حال وجود قوى الاحتكاك.

مثال7: (صفحة20)

زنبرك : يبين الشكل المجاور جسما معلقا بزنبرك ، شد 5 وحدات أسفل الاتزان $(s = 0)$ ثم ترك عند الزمن $t = 0$ ليتحرك إلى الأعلى وإلى الأسفل . ويمثل الاقتران $s(t) = 5\cos t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ، و s الموقع بالسنتميترات:

1) أجد اقتراناً يمثل سرعة الجسم المتجهة، واقراناً أخر يمثل تسارعه عند أي لحظة.



اقتران السرعة المتجهة

$$v(t) = \acute{s}(t) = -5\sin t$$

اقتران التسارع

$$a(t) = \acute{v}(t) = -5\cos t$$

2) أصف حركة الجسم.

1- اعتماداً على الخصائص الجبرية لاقتران الموقع ، فإن الجسم يتحرك بمرور الزمن بين الموقع $s = 5$ والموقع $s = -5$ على المحور s والقيمة السالبة تعني أن الجسم فوق موقع الإتزان .

2- ألاحظ قيمة السرعة تكون أكبر ما يمكن في الاتجاه الموجب ، والاتجاه السالب عندما $|\sin t| = 1$ وفي هذه الحالة ، فإن $\cos t = 0$ (متطابقة فيثاغورس) ، وبالرجوع إلى اقتران الموقع ، ألاحظ أن قيمته تصبح صفراً (موقع الاتزان) عندما $\cos t = 0$ ،ما يعني أن سرعة الجسم تكون أكبر ما يمكن عندما يمر الجسم بموقع الاتزان .

3- اعتماداً على الخصائص الجبرية لاقتران التسارع، فإن قيمة تسارع الجسم تكون دائما معكوس قيمة موقع الجسم، ذلك أن محصلة القوى تسحب الجسم إلى الأسفل إذا كان أعلى موقع الاتزان، وأن محصلة القوى تسحب الجسم إلى الأعلى إذا كان أسفل موقع الاتزان.

4- تكون قيمة التسارع صفراً فقط عند موقع الاتزان، لأن قوة الجاذبية وقوة الزنبرك تلغي إحداهما الأخرى عند هذه النقطة. ولكن إذا كان الجسم عند أي موقع اخر، فإن هاتين القوتين لا تكونان متساويتين، والتسارع لا يساوي صفراً .

أتحقق من فهمي: (صفحة 22)

يتحرك جسم معلق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ، ويمثل الاقتران : $s(t) = 7\operatorname{Sin} t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ، و s الموقع بالامتار:

1) أجد اقتراناً يمثل سرعة الجسم المتجهة، واقتراناً أخر يمثل تسارعه عند أي لحظة.

اقتران موقع الجسم

$$s(t) = 7\operatorname{Sin} t$$

اقتران السرعة المتجهة

$v(t) = \acute{s}(t) = 7\cos t$ لموقع

اقتران التسارع

$$a(t) = \acute{v}(t) = -7\operatorname{Sin} t$$

2- أصف حركة الجسم.

بالنظر لاقتران الموقع $s(x)$ فإن قيم s تنحصر بين $\pm 7m$ وهذا يعني ان الجسم يتحرك بمرور الزمن صعوداً وهبوطاً بين الموقعين $s = -7m$ ، $t = n\pi$ ويمر بنقطة الاتزان $s = 0$ عند قيم t التي تحقق $s(t) = 0$ وهي $f(x)$ حيث n أي عدد صحيح غير سالب .

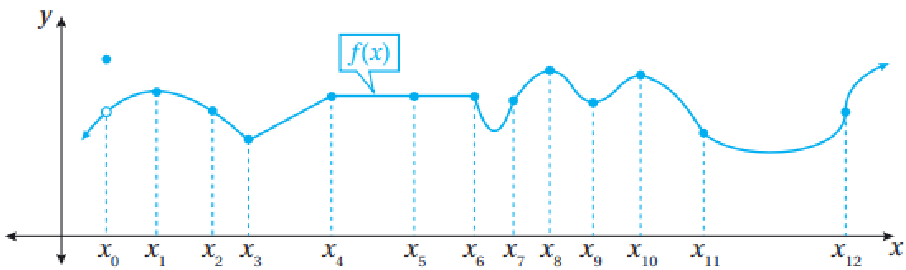
تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن وتتراوح بين القيمتين $\pm 7m$ ويكون مقدار سرعة الجسم القياسية أكبر ما يمكن $|7\cos t| = 7$ عندما $\cos t = \pm 1$ وذلك عندما $t = n\pi$ (نفسها لحظات مرور الجسم بنقطة الاتزان) ، بينما تكون سرعة الجسم صفراً (يسكن لحظياً) عندما يكون الجسم في أقصى بعد له عن نقطة الاتزان $|s(t)| = v(t) = 0$ (عندما $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n عدد فردي موجب) .

نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة هي معكوس قيمة موقعه وأن التسارع ينعدم لحظة مرور الجسم بنقطة الاتزان، وهي اللحظة التي تكون القوى المؤثرة على الجسم فيها صفراً .

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة22)

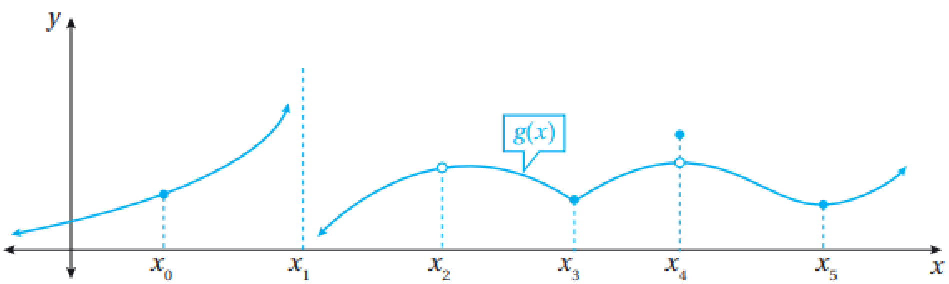
أحدد قيم x للنقاط التي لا يكون عندها كل اقتران مما يأتي قابلاً للاشتقاق ، مبرراً إجابتي :

1



الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_6$ و $x = x_4$ و $x = x_3$ ، لأن لمنحناه رأس حاد أو زاوية عند هذه النقاط ، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_0$ ، لأنه غير متصل عندها ، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_{12}$ ، نظراً إلى وجود مماس رأسي عند هذه النقطة .

2



الاقتران $g(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_3$ ، لأن لمنحناه رأس حاد عند هذه النقطة، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_4$ و $x = x_2$ و $x = x_1$ ، لأنه غير متصل عندها .

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

3) $f(x) = 2\sin x - e^x$

$\acute{f}(x) = 2\cos x - e^x$

4) $f(x) = \dfrac{\ln x}{4} - \pi \cos x$

$\acute{f}(x) = \dfrac{1}{4x} + \pi \sin x$

$5)\ f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) + x^4$

$f(x) = \ln 1 + \ln x^3 + x^4$

$f(x) = -3\ln x + x^4$

$\acute{f}(x) = \frac{-3}{x} + 4x^3$

$6)\ f(x) = e^{x+1} + 1$

$\acute{f}(x) = e^{x+1}.(1)$

$\acute{f}(x) = e^{x+1}$

$7)\ f(x) = e^x + x^e$

$\acute{f}(x) = e^x + x^{e-1}$

$8)\ f(x) = \ln\left(\frac{10}{x^n}\right)$

$f(x) = \ln 10 - \ln x^n$

$f(x) = \ln 10 - n\ln x$

$\acute{f}(x) = \ln 10 - n\ln x$

$\acute{f}(x) = -n\left(\frac{1}{x}\right)$

$\acute{f}(x) = \frac{-n}{x}$

إذا كان : $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^x$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

9) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^\pi\right)$.

الخطوة الأولى : أجد ميل المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^\pi\right)$

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^x$$

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{2}e^x$$

$$f'(\pi) = \cos \pi + \frac{1}{2}e^\pi$$

$$\boxed{f'(\pi) = -1 + \frac{1}{2}e^\pi}$$ ميل المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^\pi\right)$

الخطوة الثانية: أيجاد معادلة المماس.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2}e^\pi = -1 + \frac{1}{2}e^\pi(x - \pi)$$

$$y - \frac{1}{2}e^\pi = \left(-1 + \frac{1}{2}e^\pi\right)x - \left(-1 + \frac{1}{2}e^\pi\right)\pi$$

$$y - \frac{1}{2}e^\pi = \left(-1 + \frac{1}{2}e^\pi\right)x + \pi - \frac{\pi}{2}e^\pi$$

$$y = \left(-1 + \frac{1}{2}e^\pi\right)x + \pi - \frac{\pi}{2}e^\pi + \frac{1}{2}e^\pi$$ معادلة المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^\pi\right)$

10) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^\pi\right)$.

بما أن ميل المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^\pi\right)$ هو $-1 + \frac{1}{2}e^\pi$ ، فإن ميل العمودي على المماس هو :

$$m_1 = \frac{-1}{-1 + \frac{1}{2}e^\pi}$$

$$m_1 = \left[\frac{-1}{-1+\frac{1}{2}e^{\pi}}\right] \times \frac{2}{2}$$

$$m_1 = \frac{-2}{-2+e^{\pi}}$$

$$m_1 = \frac{2}{2-e^{\pi}}$$

معادلة العمودي على المماس هي:

$$y - y_1 = m_1(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \frac{2}{2-e^{\pi}}(x-\pi)$$

$$y - \frac{1}{2}e^{\pi} = \left(\frac{2}{2-e^{\pi}}\right)x - \left(\frac{2}{2-e^{\pi}}\right)\pi$$

$$y = \left(\frac{2}{2-e^{\pi}}\right)x - \left(\frac{2\pi}{2-e^{\pi}}\right) + \frac{1}{2}e^{\pi}$$

معادلة العمودي على المماس عند النقطة $\left(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi}\right)$

11) أجد قيمة x التي يكون عندها المماس أفقياً لمنحنى الاقتران : $f(x) = e^x - 2x$

$$f(x) = e^x - 2x$$

$$f'(x) = e^x - 2$$

$$e^x - 2 = 0$$

$$e^x = 2$$

$$\ln e^x = \ln 2$$

$$x \ln e = \ln 2$$

$$x = \ln 2$$

$$x \approx 0.69$$

12) اختيار من متعدد : أي الآتية تمثل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = \sin x + \cos x$ عندما $x = \pi$ ؟

$a)\ y = -x + \pi - 1$ $\boxed{b)\ y = x - \pi - 1}$ $c)\ y = x - \pi + 1$ $d)\ y = x + \pi + 1$

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

$$f'(\pi) = \cos \pi - \sin \pi$$

$$f'(\pi) = -1 - 0$$

$$f'(\pi) = -1$$

ميل المماس عند النقطة $(\pi, -1)$ هو : $f'(x) = \cos x - \sin x$

بما أن ميل المماس هو 1 - إذن ميل العمودي على المماس هو 1

معادلة العمودي على المماس:

$$y + 1 = 1(x - \pi)$$

$$\boxed{y = x - \pi - 1}$$

13) إذا كان : $f(x) = \ln(kx)$ ، حيث k عدد حقيقي موجب ، و $x > 0$ ، فأبين أن $f'(x) = \frac{1}{x}$.

$$f(x) = \ln(kx)$$

$$f(x) = \ln k + \ln x$$

$$f'(x) = 0 + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

إذا كان الاقتران : $f(x) = \ln x$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

14) أثبت أن مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ يمر بنقطة الأصل .

ميل المماس عند النقطة $(e, 1)$ هو : $\acute{f}(e) = \frac{1}{e}$

معادلة المماس هي:

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$$

$$y = \frac{1}{e}x$$

وهو مستقيم يمر بنقطة الأصل لأن النقطة $(0, 0)$ تحقق معادلته .

15) أثبت أن المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ هو $e + \frac{1}{e}$.

بما أن ميل المماس هو $\frac{1}{e}$ فإن ميل العمودي على المماس هو $-e$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - 1 = -e(x - e)$$

$$y = -ex + e^2 + 1$$

لإيجاد المقطع x لهذا المستقيم نضع $y = 0$ في معادلته

$$0 = -ex + e^2 + 1$$

$$ex = e^2 + 1$$

$$x = \frac{e^2 + 1}{e}$$

$$x = e + \frac{1}{e}$$

يمثل الاقتران $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t,\ t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني:

16) أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 5$.

$s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$

$v(t) = 3t^2 - 8t + 5$

$v(5) = 3(5)^2 - 8(5) + 5$

$v(5) = 75 - 40 + 5$

$v(5) = 40\ \ m/s$

$a(t) = 6t - 8$

$a(5) = 6(5) - 8$

$a(5) = 30 - 8$

$a(5) = 22\ \ m/s^2$

17) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

$v(t) = 3t^2 - 8t + 5 = 0$

$(3t - 5)(t - 1) = 0$

$3t - 5 = 0$

$3t = 5$

$t = \frac{5}{3}\ \ s$

$t - 1 = 0$

$t = 1\ \ s$

18) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 4$ ؟

$v(4) = 3(4)^2 - 8(4) + 5$

$v(4) = 48 - 32 + 5$

$v(4) = 21\ \ m/s$

بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة ، فإن الجسم يتحرك لليمين عندما $t = 4$

19) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

الموقع الابتدائي للجسم : $s(0) = 0 \ m$

$s(t) = 0$

$t^3 - 4t^2 + 5t = 0$

$t(t^2 - 4t + 5) = 0$

$t = 0$

$b^2 - 4ac$

$4^2 - 4(1)(5) = -4$ العبارة التربيعية مميزها سالب وبالتالي لا تساوي صفر

إذن لن يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي أبداً

يمثل الاقتران : $s(t) = e^t - 4t, \ t \geq 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني :

20) أحدد الموقع الابتدائي للجسيم.

$s(0) = e^0 - 4(0)$

$s(0) = 1 \ m$

21) أجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته المتجهة صفراً .

$s(t) = e^t - 4t$

$v(t) = \acute{s}(t) = e^t - 4$

$e^t - 4 = 0 \rightarrow \ e^t = 4$

$\ln e^t = \ln 4$

$t \ln e = \ln 4$

$t(1) = \ln 4$

$t = \ln 4$

$a(t) = \acute{v}(t) = e^t$

$a(\ln 4) = e^{\ln 4}$

$a(\ln 4) = 4 \ m/s^2$

زنبرك : يتحرك جسم معلق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ، ويحدد الاقتران $s(t) = 4\cos t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ، و s الموقع بالأمتار :

22) أجد اقتراناً يمثل سرعة الجسم المتجهة، واقتراناً آخر يمثل تسارعه عند أي لحظة.

$$s(t) = 4\cos t$$

$$v(t) = -4\sin t$$

$$a(t) = -4\cos t$$

23) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

$$s(t) = 4\cos t$$

$$v(t) = -4\sin t$$

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\frac{\pi}{4}$$

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}\ \ m/s^2$$

$$a(t) = -4\cos t$$

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\cos\frac{\pi}{4}$$

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}\, m/s^2$$

24) أصف حركة الجسم.

من خصائص اقتران $s(t) = 4\cos t$ نعرف أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعوداً وهبوطاً بين الموقعين

$s = 4m$, $s = -4m$ ، وأنه يمر بنقطة الاتزان $s = 0$ أثناء هذه الحركة عندما $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n أي عدد فردي موجب .

تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن ونعرف من خصائص الاقتران $v(t) = -4\sin t$ أن قيم السرعة تتراوح بين

$-4m/s$ و $4m/s$ ونلاحظ أن الجسم يصل إلى هذه السرعة عند اللحظات التي يمر فيها بنقطة الاتزان.

نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة تساوي معكوس قيمة اقتران الموقع عند تلك اللحظة، وان التسارع ينعدم عند مرور الجسم بنقطة الاتزان حيث تكون محصلة القوى المؤثرة في الجسم صفراً .

مهارات التفكير العليا (صفحة 27)

25) تبرير : إذا كان الاقتران : $y = e^x - ax$ حيث a عدد حقيقي ، فأجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y ، مبرراً إجابتي .

الخطوة الأولى: إيجاد النقطة

$$y = e^x - ax$$

$$x = 0 \to \ y = e^0 - a(0)$$

$$y = 1$$

النقطة هي $(0, 1)$

الخطوة الثانية: إيجاد المشتقة

$$y = e^x - ax$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x - a$$

الخطوة الثالثة: إيجاد ميل المماس

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = e^0 - a$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 1 - a$$

الخطوة الرابعة: إيجاد معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = (1 - a)(0 - x_1)$$
$$y = (1 - a)(0 - x_1) + 1$$

26) تحد : أثبت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران : $y = 2e^x + 3x + 5x^3$.

ميل مماس المنحنى عند أي نقطة عليه هو:

$$\acute{y} = 2e^x + 3 + 15x^2$$

لكل x فإن $2e^x > 0$

لكل x فإن $15x^2 \geq 0$

بالجمع نجد أنه لكل x فإن $2e^x + 15x^2 > 0$

بإضافة 3 للطرفين : لكل x فإن $2e^x + 15x^2 + 3 > 3$ أي أن $\acute{y} > 3$

إذن لا يمكن أن تكون قيمة $\acute{y}$ تساوي 2 لأي قيمة حقيقية للمتغير x .

تبرير : إذا كان الاقتران $y = ke^x$ ، حيث $k > 0$ ، وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة P ، فاجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

27) أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x .

الاحداثي x لنقطة تقاطع المنحنى $y = ke^x$ مع المحور y هو 0 وبالتعويض في معادلة الاقتران نجد $y = ke^0 = k$ ، أي أن إحداثيي P هما $(0, k)$

$$\frac{dy}{dx} = ke^x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = k$$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - k = k(x - 0)$

$y = kx + k$ معادلة المماس

ولإيجاد نقطة تقاطعه مع المحور x نعوض $y = 0$

إذن نقطة تقاطع المماس عند P مع المحور x هي : $(-1, 0)$

28) إذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة $(100, 0)$ ،فأجد قيمة k.

ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{k}$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - k = -\frac{1}{k}(x - 0)$$

$$y = -\frac{1}{k}x + k$$

وبتعويض إحداثيي نقطة التقاطع نجد أن:

$$0 = -\frac{1}{k}(100) + k$$

$$k^2 = 100$$

$$k = \pm 10$$

ولأن $k > 0$ ، فإن $k = 10$

تحد : إذا كان الاقتران : $y = \log x$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

29) أثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}$.

$$y = \log x$$

$$\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$\log_{10} x = \frac{1}{\ln 10} \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}$$

30) معتمداً على النتيجة من السؤال السابق ، أجد $\frac{dy}{dx}$ للإقتران : $y = \log ax^2$ ، حيث a عدد حقيقي موجب .

$$y = \log ax^2$$

$$y = \log a + 2\log x$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + 2 \times \frac{1}{x \ln 10}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x \ln 10}$$

تبرير : يمثل الاقتران : $s(t) = 4 - \sin t \ , t \geq 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

31) أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية .

$$s(t) = 4 - \sin t$$

$$v(t) = -\cos t$$

$$a(t) = \sin t$$

32) أجد موقع الجسيم عندما كان في حالة سكون لحظي أول مرة بعد انطلاقه.

$$v(t) = -\cos t \quad \rightarrow t = \frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2} , \frac{5\pi}{2}$$

يكون الجسم في حالة سكون لأول مرة بعد انطلاقه عندما $t = \frac{\pi}{2}$

ويكون موقعه عندها $s\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - \sin\frac{\pi}{2}$$

$$v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - 3$$

$$v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\ m$$

33) أجد موقع الجسيم عندما يكون تسارعه صفراً ، مبرراً إجابتي.

بما أن المطلوب تحديد موقع الجسيم عندما يصل إلى أقصى سرعة، فهذا يتطلب إيجاد القيم القصوى لاقتران السرعة:

$$|v(t)| = |-\cos t|$$

$$|v(t)| = |\cos t|$$

ويمكن تحديدها من خصائص الاقتران وهما قيمتان : 0 (وهي قيمة صغرى) و 0 (وهي قيمة عظمى) ومنه :

$|v(t)| = 0 \ \rightarrow \ \cos t = 0 \ \rightarrow \ \sin t = \mp 1$ متطابقة فيثاغورس

$|v(t)| = 1 \ \rightarrow \ \cos t = 1 \ \rightarrow \ \sin t = 0$ متطابقة فيثاغورس

إذن يمكن إيجاد موقع الجسيم عندما يصل إلى أقصى سرعة كالآتي:

$$\sin t = 1$$

$$s(t) = 4 - 1 = 3m$$

$$\sin t = -1$$

$$s(t) = 4 - (-1) = 5m$$

$$\sin t = 0$$

$$s(t) = 4 - 0 = 4m$$

كتاب التمارين

الوحدة الاولى: التفاضل

مشتقة اقتران القوة:

أجد مشتقة اقتران كل مما يأتي:

1) $f(x) = 7x^3$

$\acute{f}(x) = 21x^2$

2) $f(x) = 12x^{\frac{4}{3}}$

$\acute{f}(x) = \frac{4}{3}.12x^{\frac{1}{3}}$

$= 16x^{\frac{1}{3}}$

$= 16\sqrt[3]{x}$

3) $f(x) = 3x^2 - 5\sqrt{x}$

$f(x) = 3x^2 - 5x^{\frac{1}{2}}$

$\acute{f}(x) = 6x - \frac{1}{2}.5x^{\frac{-1}{2}}$

$= 6x - \frac{5}{2\sqrt{x}}$

4) $f(x) = \frac{3}{x^7}$

$f(x) = 3x^{-7}$

$\acute{f}(x) = -21x^{-8}$

$= \frac{-21}{x^8}$

5) $f(x) = x^2(x^3 - 2x)$

$$f(x) = x^5 - 2x^3$$

$$f'(x) = 5x^4 - 6x^2$$

6) $y = \frac{7}{x^3} + \frac{3}{x} - 2$

$$y = 7x^{-3} + 3x^{-1} - 2$$

$$y' = -21x^{-4} - 3x^{-2}$$

$$= -\frac{21}{x^4} - \frac{3}{x^2}$$

مثال: أجد مشتقة كل مما يأتي:

a) $f(x) = \frac{2x - 7}{x^2}$

$$f(x) = 2x^{-1} - 7x^{-2}$$

$$f'(x) = -2x^{-2} + 14x^{-3}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{14}{x^3}$$

b) $f(x) = \sqrt{x} + 6\sqrt{x^3} + 5$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{3}{2}} + 5$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} + \frac{3}{2}\,6x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} + 9x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 9\sqrt{x}$$

مشتقة الاقتران $y = (ax+b)^n$

أجد مشتقة كل مما يأتي:

7) $y = (2x-3)^6$

$$\acute{y} = 6(2x-3)^5(2)$$

$$= 12(2x-3)^5$$

8) $y = \sqrt{9-3x}$

$$y = (9-3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\acute{y} = \frac{1}{2}(9-3x)^{\frac{-1}{2}}(-3)$$

$$= -\frac{3}{2(9-3x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{3}{2\sqrt{(9-3x)}}$$

9) $y = \frac{1}{\sqrt{4x+1}}$

$$y = (4x+1)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\acute{y} = -\frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{-3}{2}}(4)$$

$$\acute{y} = -\frac{2}{(4x+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\acute{y} = -\frac{2}{\sqrt{(4x+1)^3}}$$

مثال: أجد مشتقة الاقتران $y = \frac{1}{\sqrt{8-x}}$

$$y = \frac{1}{\sqrt{8-x}}$$

$$y = (8-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\acute{y} = -\frac{1}{2}(8-x)^{-\frac{3}{2}}(-1)$$

$$\acute{y} = \frac{1}{2(8-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\acute{y} = \frac{1}{2\sqrt{(8-x)^3}}$$

ايجاد معادلة المماس عند نقطة ما:

إذا كان الاقتران: $f(x) = (3x+2)^2$ فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي :

10) معادلة المماس عند النقطة $(-1, 1)$

الخطوة الأولى : أجد ميل المماس عند النقطة $(-1, 1)$

$$f(x) = (3x+2)^2$$

$$\acute{f}(x) = 2(3x+2)(3)$$

$$\acute{f}(x) = 6(3x+2)$$

$$\acute{f}(x) = 18x+12$$

$$\acute{f}(-1) = 18(-1)+12$$

$$= -18+12$$

$$= -6$$

الخطوة الثانية: أجد معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -6(x-(-1))$$

$$y - 1 = -6(x+1)$$

$$y = -6x - 6 + 1$$

$$y = -6x - 5$$

11) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(-1\,,1)$

الخطوة الأولى: ميل العامودي على المماس

$$m_1 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-6} = \frac{1}{6}$$

الخطوة الثانية: معادلة العامودي على المماس

$$y - 1 = \frac{1}{6}(x+1)$$

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{6} + 1$$

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}$$

مثال : إذا كان الاقتران : $f(x) = x^7 - x$ فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي :

a) معادلة المماس عند النقطة $(1\,,0)$

الخطوة الاولى: أجد ميل المماس عند النقطة $(1\,,0)$

$$f(x) = x^7 - x$$

$$f'(x) = 7x^6 - 1$$

$$f'(1) = 7(1)^6 - 1$$

$$= 7 - 1$$

$$= 6$$

الخطوة الثانية: أجد معادلة المماس

معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

بالتبسيط $y = 6x - 6$ بتعويض $(x_1 = 1\,, y_1 = 0, m = 6)$ $y - 0 = 6(x-1)$

b) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1\,,0)$

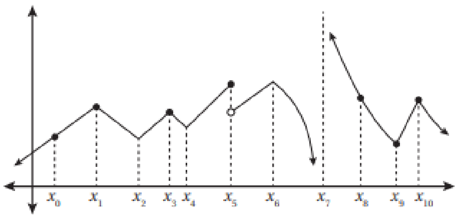
ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{m} = -\frac{1}{6}$ ، ومنه فإن معادلة العمودي على المماس عند النقطة (1,0) هي :

$$y - 0 = -\frac{1}{6}(x-1)$$

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$$

الدرس الأول: الاشتقاق

1) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$ ، أحدد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل للأشتقاق ، مبررا ً إجابتي .



f غير قابل للاشتقاق عند القيم $x_1, x_2, x_3, x_4 x_6, x_9, x_{10}$ بسبب وجود زاوية لمنحنى الاقتران عند كل منها رغم أنه متصل.

f غير قابل للاشتقاق عند القيم x_5, x_7 وذلك لأنه غير متصل عندها ، والاتصال شرط ضروري.

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

2) $f(x) = 9e^x + \frac{1}{3\sqrt{x}}$

$$f(x) = 9e^x + \frac{1}{3}x^{\frac{-1}{2}}$$

$$f'(x) = 9e^x - \frac{1}{2}.\frac{1}{3}x^{\frac{-3}{2}}$$

$$= 9e^x - \frac{1}{6}x^{\frac{-3}{2}}$$

$$= 9e^x - \frac{1}{6x^{\frac{3}{2}}}$$

3) $f(x) = 2e^x + \frac{1}{x^2}$

$$f(x) = 2e^x + x^{-2}$$

$$f'(x) = 2e^x - 2x^{-3}$$

$$= 2e^x - \frac{2}{x^3}$$

4) $f(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - \cos x$

$$f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos x + \sin x$$

5) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران : $f(x) = 2e^x + x$ عندما $x = 2$

الخطوة الأولى: ايجاد النقطة

$f(x) = 2e^x + x \qquad , x = 2$

$f(2) = 2e^2 + 2$

النقطة هي $(2\ ,\ 2e^2 + 2)$

الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

ميل المماس: $f(x) = 2e^x + x$

$f'(x) = 2e^x + 1$

$f'(2) = 2e^2 + 1$

الخطوة الثالثة: ايجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (2e^2 + 2) = (2e^2 + 1)(x - 2)$

$y = (2e^2 + 1)(x - 2) - (2e^2 + 2)$

$y = (2e^2 + 1)(x - 2 - 2e^2 + 2)$

$y = (2e^2 + 1)(x - 2e^2)$

6) اثبت عدم وجود مماس افقي لمنحنى الاقتران : $f(x) = 3x + \sin x + 2$

نشتق ثم نساوي بالصفر وذلك لأن عند المماس الأفقي يكون $f'(x) = 0$

$f'(x) = 3 + \cos x = 0$

$\cos x = -3$

قيمة $\cos x$ تقع بين $-1 \le \cos x \le 1$

اذن -3 لا تقع ضمن هذا المجال مما يعني عدم وجود مماس افقي لمنحنى f

يمثل الاقتران $s(t) = 3t^2 - t^3, t \ge 0$ موقع جسيم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني :

7) أجد سرعة الجسيم المتجهة وتسارعه بعد t ثانية

$s(t) = 3t^2 - t^3, t \ge 0$

السرعة: $s'(t) = v(t) = 6t - 3t^2$

$v(t) = 6t - 3t^2$

$\acute{v}(t) = a(t) = 6 - 6$ التسارع:

8) أجد موقع (المواقع) الذي يكون عنده الجسيم في حالة سكون.

يكون الجسيم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$

$v(t) = 6t - 3t^2$

$6t - 3t^2 = 0$

$3t(2 - t) = 0$

$3t = 0$

$t = 0$

$2 - t = 0$

$t = 2$

$s(t) = 3t^2 - t^3$

$s(0) = 6(0) - 3(0)^2$

$s(0) = 0$

$s(2) = 6(2) - 3(2)^2$

$s(2) = 12 - 12$

$s(2) = 0$

إذا كان: $f(x) = \ln x^2$ ، حيث $x > 0$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

9- أجد معادلة مماس منحنى الاقتران عندما $x = e^2$

الخطوة الأولى: ايجاد النقطة

$f(x) = \ln x^2$

$f(x) = 2\ln x$ $x = e^2$

$f(e^2) = 2\ln e^2 = 4$ $(e^2, 4)$

الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

$f(x) = \ln x^2$

$\acute{f}(x) = \frac{1}{x^2}(2x)$

$= \frac{2}{x}$

$\acute{f}(e^2) = \frac{2}{e^2}$

الخطوة الثالثة: ايجاد معادلة المماس

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 4 = \frac{2}{e^2}(x - e^2)$

$y - 4 = \frac{2}{e^2}x - \frac{2}{e^2}e^2$

$y - 4 = \frac{2}{e^2}x - 2$

$y = \frac{2}{e^2}x - 2 + 4$

$y = \frac{2}{e^2}x + 2$

10- أجد الإحداثي x للنقطة التي يكون المماس عندها موازياً للمستقيم $6x - 2y + 5 = 0$

الخطوة الأولى: ايجاد ميل المستقيم $y = mx + b$ حيث m الميل

$6x - 2y + 5 = 0$

$[-2y = -6x - 5] \quad \div -2$

$y = 3x + \frac{5}{2}$ ميل المستقيم $= 3$

الخطوة الثانية ايجاد الاحداثي x

$f(x) = \ln x^2$

$\acute{f}(x) = \frac{2}{x} = 3$

$x = \frac{2}{3}$

إذا كان الاقتران : $f(x) = 2\sin x - 4\cos x$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

11) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$

$f(x) = 2\sin x - 4\cos x$

$\acute{f}(x) = 2\cos x + 4\sin x$

$\acute{f}(0) = 2\cos 0 + 4\sin 0$

$= 2\,(1) + 4(0)$

$= 2$

12- أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$

1- الخطوة الأولى: ايجاد النقطة

$f(x) = 2\sin x - 4\cos x$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} - 4\cos\frac{\pi}{2}$

$= 2\,(1) - 4(0)$

$= 2$　　　النقطة هي $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$

2- الخطوة الثانية: ايجاد ميل المماس

$f(x) = 2\sin x - 4\cos x$

$\acute{f}(x) = 2\cos x + 4\sin x$

$\acute{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{\pi}{2}$

$= 2\,(0) + 4(1)$

$= 4$　　　ميل المماس

الخطوة الثالثة: ايجاد معادلة المماس

معادلة المماس:　$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = 4(x - \frac{\pi}{2})$

$y - 2 = 4x - 2\pi$

$y = 4x - 2\pi + 2$