البوصلة في الرياضيات

الوحدة الثانية

التفاضل

الفرع الأدبي

ا.محمد العلي

2007

البوصلة طريقك نحو التميز

الدرس الأول : قاعدة السلسلة

قاعدة السلسلة

نظرية

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق، فإنه يمكن إيجاد مشتقة الاقتران المركب $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ باستعمال القاعدة الآتية:

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

وبصيغة أخرى، إذا كان: $y = f(u)$، وكان: $u = g(x)$، فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

مثال 1

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $y = (x^2 + 1)^3$

2. $y = \sqrt{4 - 3x}$

3. $y = (x^2 - 2)^4$

4. $y = \sqrt{x^3 + 4x}$

5. $f(x) = \sqrt{4x - 1}$

6. $f(x) = (8 - x)^{100}$

7. $f(x) = \sqrt[3]{x^5 + 6x}$

8. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3 - x^2}}$

قاعدة سلسلة القوّة

(مفهوم أساسي)

إذا كان n أيّ عدد حقيقي، وكان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$$

مثال 2

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1. $f(x) = (2x^4 - x)^3 , x = 1$

2. $f(x) = \sqrt{1 + x^3} , x = 2$

3. $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} , x = -2$

4. $f(x) = (x^4 + 1)^5 , x = 1$

9. $f(x) = x^2 + (200 - x)^2$

10. $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 3)^3}$

11. $f(x) = (3 + 4x)^{\frac{5}{2}}$

12. $f(x) = (x + 5)^7 + (2x + 3)^6$

13. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{16 - x^2}$

مثال 3

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

① $f(x) = 5(1-x^2)^3 + 4x + 7$

② $f(x) = (2x+1)^3 - \sqrt{3x^2 - 2x}$

③ $f(x) = (1+x^3)^4 + x^8 + 2$

④ $f(x) = \sqrt[3]{2x-1} - (x-3)^3$

⑤ $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}\ , x = 2$

⑥ $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x}\ , x = 8$

⑦ $f(x) = 4x^3 + (x-2)^4\ , x = 2$

⑧ $y = \sqrt[4]{(2x^2 - 7)^5}\ , x = 4$

قواعد الاشتقاق الأساسية، وقاعدة السلسلة

مراجعة المفهوم

إذا كان الاقتران f والاقتران g قابلين للاشتقاق، وكان a عدداً حقيقياً، فإنّ مشتقة كلٍّ من $f+g$ و $f-g$ و af هي:

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$ — مشتقة المجموع أو مشتقة الفرق
- $(af)'(x) = af'(x)$ — مشتقة مضاعفات الاقتران

مُعدّل التغيُّر

مثال 4

توصّلت دراسة بيئية إلى نمذجة مُتوسّط المستوى اليومي لغاز أوّل أكسيد الكربون في الهواء بإحدى القرى عن طريق الاقتران: $C(p) = 0.6\sqrt{0.5p^2 + 17}$، حيث p عدد السكّان بالألف نسمة، علمًا بأنّ C يقاس بأجزاء من المليون ($C = 5$ تعني 5 أجزاء من المليون مثلًا):

1) جد مُعدّل تغيُّر مُتوسّط المستوى اليومي لغاز أوّل أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكّان.

2) جد مُعدّل تغيُّر مُتوسّط المستوى اليومي لغاز أوّل أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكّان عندما يكون عدد السكّان 4 آلاف نسمة، مُفسّرًا معنى الناتج.

مثال 5

يُمثّل الاقتران: $P(t) = \sqrt{10t^2 + t + 229}$ إجمالي الأرباح السنوية لإحدى الشركات الصناعية (بآلاف الدنانير)، حيث t عدد السنوات بعد عام 2015م:

1) جد مُعدّل تغيُّر إجمالي الأرباح السنوي للشركة بالنسبة إلى الزمن t.

2) جد مُعدّل تغيُّر إجمالي الأرباح السنوي للشركة عام 2020م، مُفسّرًا معنى الناتج.

قاعدة السلسلة، والمُتغيِّر الوسيط

إذا كان: $y = u^3 - 2u + 1$، حيث: $u = 2\sqrt{x}$، جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 4$.

مثال 6

إذا كان: $y = u^5 + u^3$، حيث: $u = 3 - 4x$

جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 2$.

مثال 7

استعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1) $y = u^3 - 7u^2 , u = x^2 + 3$

2) $y = \sqrt{7 - 3u} , u = x^2 - 9$

مثال 8

استعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $f(x) = u^3 - 5(u^3 - 7u)^2 \,,\, u = \sqrt{x} \,,\, x = 4$

2) $f(x) = 2u^3 + 3u^2 \,,\, u = x + \sqrt{x} \,,\, x = 1$

مثال 9

توصّلت دراسة بيئية إلى نمذجة مقدار التلوُّث في إحدى البحيرات باستعمال الاقتران: $P(t) = (t^{\frac{1}{4}} + 3)^3$، حيث t الزمن بالسنوات، علمًا بأنَّ P يقاس بأجزاء من المليون:

1) جد مُعدَّل تغيُّر مقدار التلوُّث في البحيرة بالنسبة إلى الزمن t.

2) جد مُعدَّل تغيُّر مقدار التلوُّث في البحيرة بعد 16 عامًا.

مثال 10

إذا كان: $g(-2) = 8, g'(-2) = 4, h(5) = -2, h'(5) = 6$

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عندما $x = 5$:

1. $f(x) = g(h(x))$ الاقتران المركب
2. $f(x) = 4(h(x))^2$

مهارات التفكير العليا

25 تبرير: إذا كان: $h(x) = f(g(x))$، حيث: $f(u) = u^2 - 1$، وكان: $g(2) = 3, g'(2) = -1$، فأجد $h'(2)$، مُبرِّرًا إجابتي.

26 تبرير: أجد مشتقة الاقتران: $y = (x^2 - 4)^5$ عندما $y = 0$، مُبرِّرًا إجابتي.

27 أكتشف المُختلِف: أيُّ الاقترانات الآتية مُختلِف، مُبرِّرًا إجابتي؟

$p(x) = x^2 + 1$	$g(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$	$h(x) = (x^2 + 1)^3$	$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

28 تحدٍّ: أجد مشتقة الاقتران: $f(x) = \sqrt[3]{2x + (x^2 + x)^4}$.

الدرس الثاني : مشتقتا الضرب والقسمة

مشتقة ضرب اقترانين

نظرية

بالكلمات:

مشتقة ضرب اقترانين قابلين للاشتقاق هي الاقتران الأوّل مضروبًا في مشتقة الاقتران الثاني، ثم يضاف إليه الاقتران الثاني مضروبًا في مشتقة الاقتران الأوّل.

بالرموز:

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق، فإنَّ مشتقة حاصل ضربهما

هي: $(fg)'(x) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$

مثال:

إذا كان: $f(x) = x^2$، وكان: $g(x) = x^5$، فإنَّ:

$$(fg)'(x) = x^2 \times 5x^4 + x^5 \times 2x$$
$$= 5x^6 + 2x^6$$
$$= 7x^6$$

مثال 1

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = (2x+3)(x^2-5)$

2. $f(x) = (\sqrt{x}-1)(x^2+4)$

3. $f(x) = (x^3+4)(7x^2-4x)$

4. $f(x) = (\sqrt{x}+1)(3x-2)$

مشتقة قسمة اقترانين

نظرية

بالكلمات:

مشتقة قسمة اقترانين قابلين للاشتقاق هي المقام في مشتقة البسط مطروحًا منه البسط في مشتقة المقام، ثم قسمة الجميع على مربع المقام.

بالرموز:

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان: $g(x) \neq 0$، فإنّ مشتقة حاصل قسمتهما هي:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$$

مثال:

إذا كان: $f(x) = x^5$، وكان: $g(x) = x^2$، فإنّ:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{x^2 \times 5x^4 - x^5 \times 2x}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{5x^6 - 2x^6}{x^4}$$

$$= 3x^2$$

مثال 2

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \dfrac{x}{2x+5}$

2) $f(x) = \dfrac{1+x^{-5}}{x^3}$

3) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$

4) $f(x) = \dfrac{x^{-3}}{x^2+1}$

مثال 3

يُمثِّل الاقتران: $C(t) = \frac{2t}{3t^2 + 16}$ تركيز مُسكِّن للألم في دم مريض بعد t ساعة من تناوله، حيث C مقيسة بوحدة $\mu g/mL$:

1. جد مُعدَّل تغيُّر تركيز المُسكِّن في دم المريض بالنسبة إلى الزمن t.
2. جد مُعدَّل تغيُّر تركيز المُسكِّن في دم المريض عندما $t = 1$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

مثال 4

يُمثِّل عدد سكّان بلدة صغيرة بالاقتران: $P(t) = \frac{5}{2t^2 + 9}$، حيث t الزمن بالسنوات منذ الآن، و P عدد السكّان بالآلاف:

1. جد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t.
2. جد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في البلدة عندما $t = 2$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

مشتقة المقلوب

نظرية

بالكلمات:

مشتقة مقلوب اقتران قابل للاشتقاق هي سالب مشتقة الاقتران مقسومًا

على مربع الاقتران.

بالرموز:

إذا كان الاقتران $f(x)$ قابلًا للاشتقاق، حيث: $f(x) \neq 0$، فإنَّ:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

مثال 5

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

① $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

② $f(x) = \dfrac{2}{3-4x}$

③ $f(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$

④ $f(x) = \dfrac{3}{2x+1}$

مثال 6

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = (3x-5)^4 (7-x)^{10}$

2. $f(x) = \dfrac{4x+3}{(2x-1)^3}$

3. $f(x) = 20x(4x^3-1)^6$

4. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x+2)^4}$

مثال 7

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = 2x(1+3x^2)^3$

2. $f(x) = (3x^5 - x^2)\left(x - \frac{5}{x}\right)$

3. $f(x) = (1-x^2)^4(2x+6)^3$

4. $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$

5. $f(x) = \frac{1}{x-4}$

6. $f(x) = \frac{5x^2-1}{2x^3+3}$

7. $f(x) = (5x^2+4x-3)(2x^2-3x+1)$

8. $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1} + 4x^3$

9. $f(x) = \frac{3x+5}{(x+1)^2}$

مثال 8

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

① $f(x)=x^3\sqrt{10x+6}\ ,\ x=1$

② $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}}\ ,\ x=12$

مثال 9

استعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\dfrac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

① $y=5u^2+3u-1,\ u=\dfrac{18}{x^2+5}\ ,\ x=2$

② $y=\dfrac{1}{u+1}\ ,\ u=x^3-2x+5,\ x=0$

مثال 10

يُمثّل عدد سكّان مدينة صغيرة بالاقتران: $P(t)=20-\dfrac{6}{t+1}$

t الزمن بالسنوات منذ الآن، و P عدد السكّان بالآلاف:

① جد مُعدّل نمو السكّان في المدينة بالنسبة إلى الزمن t.

② جد مُعدّل نمو السكّان في المدينة عندما $t=9$، مُفسّرًا معنى الناتج.

مثال 11

وجـد فريق من الباحثين الزراعيين أنّه يُمكِن التعبير عن ارتفاع نبتة مُهجّنة من نبات تَبّاع الشمس h (بالأمتار) باستعمال الاقتران: $h(t)=\frac{3t^2}{4+t^2}$ ، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. جد مُعدّل تغيُّر ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن t.

مثال 12

إذا كان: $f(0)=5, f'(0)=-3, g(0)=-1, g'(0)=2$

جد كُلًّا ممّا يأتي:

1. $(fg)'(0)$
2. $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$
3. $(7f+2fg)'(0)$

مهارات التفكير العليا

29 تحدٍّ: أجد مشتقة الاقتران: $f(x) = x(4x-3)^6(1-4x)^9$.

إرشاد: يُمكِن اعتبار أيٍّ عاملين هو الاقتران الأوَّل، واعتبار العامل الآخر هو الاقتران الثاني، وتطبيق قاعدة مشتقة ضرب اقترانين مرَّتين.

تبرير: إذا كان: $f(x) = \frac{2x}{x+5} + \frac{6x}{x^2+7x+10}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

30 أُثبِت أنَّ $f(x) = \frac{2x}{x+2}$، مُبرِّرًا إجابتي.

31 أجد $f'(3)$.

32 تبرير: إذا كان: $f(x) = \frac{2x+8}{\sqrt{x}}$، فأجد قيمة x عندما $f'(x) = 0$، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرس الثالث : مشتقتا الاقتران الأسي الطبيعي والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

مشتقة الاقتران الأُسّي الطبيعي

نظرية

إذا كان: $f(x) = e^x$، حيث e العدد النيبيري، فإنَّ:

$f'(x) = e^x$.

مثال 1

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 5e^x$

2) $f(x) = 4x^2 - e^x$

3) $y = \dfrac{e^x}{x+1}$

4) $f(x) = 2e^x + 3$

5) $f(x) = \sqrt[3]{x} + e^x$

6) $y = xe^x$

مشتقة الاقتران الأُسّي الطبيعي، وقاعدة السلسلة

نظرية

إذا كان: $f(x) = e^{g(x)}$، حيث $g(x)$ اقتران قابل للاشتقاق، فإنَّ:

$f'(x) = e^{g(x)} \times g'(x)$.

مثال 2

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = e^{4x}$

2. $f(x) = e^{(x^2+1)}$

3. $f(x) = 3e^{\frac{1}{x}}$

4. $f(x) = e^{7x+1}$

5. $f(x) = e^{x^3}$

6. $f(x) = 5e^{\sqrt{x}}$

مثال 3

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = x^{10}\, e^{x}$

2. $f(x) = (9x-1)\, e^{3x}$

③ $f(x) = e^{x^2+7}$

④ $f(x) = 3e^{2x-1}$

⑤ $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{x+1}}$

⑥ $f(x) = (2e^{3x} - 1)^2$

⑦ $f(x) = 3e^{x} - 2e^{4x}$

⑧ $f(x) = \dfrac{(e^{x}+2)^3}{x}$

⑨ $f(x) = \sqrt{e^{x}+1}$

مثال 4

تُمثِّل المعادلة: $T(t) = 18 + 12\,e^{0.002\,t}$ درجة حرارة الحسّاس في جهاز إلكتروني (بالسليسيوس °C) بعد t ساعة من بَدْء تشغيل الجهاز:

① جد مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة الحسّاس بالنسبة إلى الزمن t.

② جد مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة الحسّاس بعد 5 ساعات من بَدْء تشغيل الجهاز، مُفسِّرًا معنى الناتج.

مثال 5

تُستعمَل مادَّة مُشِعَّة لتزويد قمر صناعي بالطاقة. ويُمكِن نمذجة مقدار الطاقة المُتبقِّية في المادَّة المُشِعَّة (بالواط) باستعمال الاقتران: $P(t) = 50e^{-0.004t}$، حيث t الزمن بالأيام. جِد مُعدَّل تغيُّر الطاقة المُتبقِّية في القمر الصناعي بعد 500 يوم، مُفسِّرًا معنى الناتج.

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

نظرية

إذا كان: $f(x) = \ln x$، حيث: $x > 0$، فإنَّ:

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

مثال 6

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 7\ln x$

2) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + \ln x$

3) $y = x\ln x$

4) $f(x) = 4\ln x$

⑤ $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$

⑥ $y = \dfrac{\ln x}{x}$

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، وقاعدة السلسلة

نظرية

إذا كان: $f(x) = \ln g(x)$، حيث $g(x)$ اقتران قابل للاشتقاق و $g(x) > 0$، فإنَّ:

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

مراجعة المفهوم

إذا كانت b, x, y أعدادًا حقيقية موجبة، وكان p عددًا حقيقيًّا، حيث: $b \neq 1$، فإنَّ:

قانون الضرب: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$

قانون القسمة: $\log_b \dfrac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

قانون القوَّة: $\log_b x^p = p \log_b x$

مثال 7

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

① $f(x) = \ln(5x)$

② $f(x) = \ln(x^3)$

③ $f(x) = \ln(3x^2 - 2)$

④ $f(x) = \ln(8x)$

⑤ $f(x) = 2\ln(x^7)$

⑥ $f(x) = \ln(9x + 2)$

مثال 8 أسئلة منوعة

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+2}$

2. $f(x) = (3+x)\ln x$

3. $f(x) = \ln(x^2+1)$

4. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

5. $f(x) = e^x \ln x^2$

6. $f(x) = x^3 \ln(3x)$

مثال 9

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1. $f(x) = x^2 e^{-1}, x = -1$

2. $f(x) = \ln(x^2+1), x = 3$

مثال 10

يُمثِّل الاقتران: $N(t) = 1000\left(30 + e^{-\frac{t}{30}}\right)$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:

1. جد العدد الأوّلي للخلايا البكتيرية في المجتمع.
2. جد مُعدَّل تغيُّر عدد الخلايا البكتيرية بالنسبة إلى الزمن.
3. جد مُعدَّل تغيُّر عدد الخلايا البكتيرية بعد 20 ساعة.

مثال 11

يُمكِن نمذجة درجة استجابة المستهلكين لمُنتَج ما عن طريق الإعلانات باستعمال الاقتران:

$$N(a) = 2000 + 500 \ln a, a \geq 1$$

الذي يُمثِّل عدد الوحدات المَبيعة من المُنتَج، حيث a المبلغ الذي أُنفِق على الإعلانات بآلاف الدنانير:

1. جد مُعدَّل تغيُّر عدد الوحدات المَبيعة بالنسبة إلى المبلغ a الذي أُنفِق على الإعلانات بآلاف الدنانير.
2. جد مُعدَّل تغيُّر عدد الوحدات المَبيعة عندما $a = 10$.

مهارات التفكير العليا

28 أكتشف الخطأ: أكتشف الخطأ في الحَلِّ الآتي، ثم أُصحِّحه:

$$y = \ln kx$$

$$\frac{dy}{dx} = k \ln kx$$

29 تبرير: إذا كان: $y = \frac{7\ln x - x^3}{e^{3x}}$، فأُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx} = \frac{7}{e^3}$ عندما $x = 1$.

الدرس الرابع : مشتقتا اقتران الجيب واقتران جيب التمام

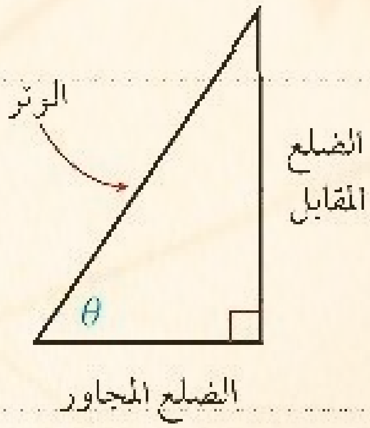
مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام

(مفهوم أساسي)

إذا مثَّلت θ قياس زاوية حـادَّة في مثلث قائم الزاوية،

فإنَّ اقتراني الجيب وجيب التمام يُعرَّفان بدلالة الوتر،

والضلع المقابل، والضلع المجاور كما يأتي:



- الجيب (**sin**): $\sin\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$
- جيب التمام (**cosine**): $\cos\theta = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

نظرية

- إذا كان: $f(x) = \sin x$، فإنَّ: $f'(x) = \cos x$.
- إذا كان: $f(x) = \cos x$، فإنَّ: $f'(x) = -\sin x$.

مثال 1

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 2\sin x$

2) $f(x) = x^2 + \cos x$

3) $f(x) = \dfrac{\sin x}{2} + 3\cos x$

4) $f(x) = 7 + \sin x$

5) $f(x) = 3\sin x + 2\cos x$

6) $f(x) = 3x - \cos x$

مثال 2

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = x^2 \sin x$

2. $f(x) = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$

3. $f(x) = e^x \cos x$

4. $f(x) = \dfrac{x + \cos x}{\sin x}$

نظرية

إذا كان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنّ:

$$\frac{d}{dx}\left(\sin\left(g(x)\right)\right) = \cos\left(g(x)\right) \times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos g(x)\right) = -\sin g(x) \times g'(x)$$

مثال 3

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = \sin 4x$

2. $f(x) = \cos^3 x$

3. $f(x) = e^{\sin 2x}$

④ $f(x) = \cos 5x$

⑤ $f(x) = \sqrt{\sin x}$

⑥ $f(x) = \ln(\cos 3x)$

مثال 4 أسئلة منوعة

جد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

① $f(x) = \sin^3(5x - 1)$

② $f(x) = 3\sin(3x + 7)$

③ $f(x) = \cos(\ln x)$

④ $f(x) = \sin\left(\frac{e^x}{1 + e^x}\right)$

⑤ $f(x) = \frac{x \sin x}{1 + x}$

⑥ $f(x) = 4\sqrt{\cos x + \sin x}$

⑦ $f(x) = \sin(x^3 - 2x + 4)$

⑧ $f(x) = 2x^3 \sin x - 3x \cos x$

⑨ $f(x) = e^{x}(\cos x + \sin x)$

⑩ $f(x) = \dfrac{\cos x^{2}}{e^{x}}$

⑪ $f(x) = \dfrac{x}{2 - \cos x}$

⑫ $f(x) = (1 + \cos 2x)^{3}$

⑬ $f(x) = 2\cos(-4x)$

⑭ $f(x) = \sin^{2} x + \cos^{2} x$

⑮ $f(x) = \cos(1-2x)^{2}$

⑯ $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

⑰ $f(x) = \ln(\cos x - \sin x)$

⑱ $f(x) = \sin^{3} x \cos 4x$

مثال 5

يُمثِّل الاقتـــران: $h(t) = 85 \sin \frac{\pi}{20}(t-10) + 90$

الارتفاع (بالأقدام) لشـــخص يركب في عجلة دوّارة، حيث t الزمن

بالثواني. جد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الشخص بالنسبة إلى الزمن t.

مثال 6

يُمثِّل الاقتـــران: $h(t) = 10 + 4 \sin \frac{\pi}{6} t$

ارتفاع المـــاء (بالأقدام) عند رصيف أحد

الموانئ بعد t ســـاعة تلي الســـاعة 6 a.m.

جد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع الماء عند الرصيف بالنسبة

إلى الزمن t.

مثال 7

يُمثِّل الاقتران: $D(t) = 500 + 200 \sin\left(0.4(t-2)\right)$ عدد الحيوانات المُفترِسة في إحدى الغابات بعد t سنة من بَدْء دراسة لأحد الباحثين عليها. جد مُعدَّل تغيُّر عدد الحيوانات المُفترِسة في الغابة بالنسبة إلى الزمن t.

مثال 8

يُمثِّل الاقتران: $C(t) = 30 + 21.6 \sin\left(\frac{2\pi t}{365} + 10.9\right)$ الاستهلاك اليومي من الوقود (باللترات) لإحدى السيارات، حيث t الزمن بالأيام. جد مُعدَّل تغيُّر استهلاك السيارة للوقود بالنسبة إلى الزمن t.

مثال 9

اكتشف الخطأ في الحَلِّ الآتي، ثم صحِّحه:

$$f(x) = \cos x \sin x$$

$$f'(x) = \cos x \cos x + \sin x\,(-\sin x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 1$$

مهارات التفكير العليا

24 تبرير: إذا كان: $y = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$، فأُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx} = \sin^2 x$، مُبرِّرًا إجابتي.

إرشاد: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

25 تحدٍّ: أجد مشتقة الاقتران: $f(x) = e^x \sin^2 x \cos x$.

26 أكتشف الخطأ: أكتشف الخطأ في الحَلِّ الآتي، ثم أُصحِّحه:

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان: $f(x) = (x^2-1)(x^2+1)$، فإنَّ $f'(-1)$ هي:

a) 3 b) -3 c) 4 d) -4

2 إذا كان: $y = uv$، وكان:

$u(1) = 2, u'(1) = 3, v(1) = -1, v'(1) = 1$،

فإنَّ $y'(1)$ تساوي:

a) -4 b) -1 c) 1 d) 4

3 إذا كان: $f(x) = x - \frac{1}{x}$، فإنَّ $f'(x)$ هي:

a) $1+\frac{1}{x^2}$ b) $1-\frac{1}{x^2}$

c) $1+\frac{1}{x}$ d) $1-\frac{1}{x}$

4 إذا كان: $y = \sin 4t$، فإنَّ $\frac{dy}{dt}$ هي:

a) $\cos 4t$ b) $-\cos 4t$

c) $4\cos 4t$ d) $-4\cos 4t$

5 إذا كان: $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$، فإنَّ $f'(x)$ هي:

a) $\frac{2}{(x-1)^2}$ b) $\frac{1}{(x-1)^2}$

c) $-\frac{2}{(x-1)^2}$ d) $-\frac{1}{(x-1)^2}$

6 إذا كان: $f(x) = x\cos x$، فإنَّ $f'(x)$ هي:

a) $\cos x - x\sin x$ b) $\cos x + x\sin x$

c) $\sin x - x\cos x$ d) $\sin x$

7 إذا كان: $f(x) = \sin^4 3x$، فإنَّ $f'(x)$ هي:

a) $4\sin^3 3x\cos 3x$ b) $12\sin^3 3x\cos 3x$

c) $12\sin 3x\cos 3x$ d) $2\cos^3 3x$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 2$،
وكان: $f(2) = 3, f'(2) = -4, g(2) = 1, g'(2) = 2$،
فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

8 $(fg)'(2)$

9 $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

10 $(3f - 4fg)'(2)$

أنهار: يُمثِّل الاقتران: $h(t) = 0.12e^{0.1t}$ ارتفاع نهر (بالسنتيمتر) فوق مستواه الطبيعي، حيث t الزمن بالساعات بعد بداية هَطْل المطر:

11 أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع النهر بالنسبة إلى الزمن t.

12 أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع النهر بعد 3 ساعات من بَدْء هَطْل المطر.

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

13 $f(x) = \frac{x}{3x+1}, x = 1$

14 $f(x) = (x^2+2)(x+\sqrt{x}), x = 4$

15 $f(x) = e^{3x} + e^{-3x}, x = 1$

16 $f(x) = e^{0.5} - x^2, x = 20$

17 $f(x) = x^2(3x-1)^3, x = 1$

18 $f(x) = (x+3)^2 e^{3x}, x = 2$

19 $f(x) = 3\ln x + \frac{1}{x}, x = e$

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

20 $f(x)=\sqrt{2x^4+7}$

21 $f(x)=\frac{1}{(x^2+16)^5}$

22 $f(x)=\sqrt[4]{x^2-5x+2}$

23 $f(x)=(8x^2-6)^{-40}$

24 $f(x)=\frac{1}{3+2x}$

25 $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$

26 $f(x)=(2x-8)^2(3x^2-4)$

27 $f(x)=x^5(3x^2+4x-7)$

28 $f(x)=x^3(2x+6)^4$

29 $f(x)=(e^{-x}+e^x)^3$

30 $f(x)=2x^3e^{-x}$

31 $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$

32 $f(x)=5\ln(5x-4)$

33 $f(x)=\ln e^x$

34 $f(x)=\ln(3x^2+2x-1)$

35 $f(x)=x^5\sin 3x$

36 $f(x)=\cos^2 x+\sin x$

37 $f(x)=\frac{\sqrt{\cos x}}{x}$

38 $f(x)=\sin(5x)\ln(\cos x)$

39 $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x^2+9}\right)$

40 $f(x)=e^{2x}\sin 2x$

بكتيريا: يُمثّل الاقتران: $N(t)=1000\left(1-\frac{3}{t^2+50}\right)$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t يومًا في مجتمع بكتيري:

41 أجد مُعدَّل تغيُّر N بالنسبة إلى الزمن t.

42 أجد مُعدَّل تغيُّر N بالنسبة إلى الزمن t عندما $t=1$.

غزلان: يُمثّل عدد الغزلان في غابة بالاقتران: $P(t)=\frac{2000}{4t+80}$، حيث t الزمن بالأشهر منذ الآن:

43 أجد مُعدَّل تغيُّر عدد الغزلان في الغابة بالنسبة إلى الزمن t.

44 أجد مُعدَّل تغيُّر عدد الغزلان في الغابة عندما $t=10$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

سكّان: يُمثّل عدد سكّان بلدة صغيرة بالاقتران: $P(t)=\frac{700}{t^2+1}$، حيث t الزمن بالسنوات، وP عدد السكّان بالآلاف:

45 أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t.

46 أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في البلدة عندما $t=3$، مُفسِّرًا معنى الناتج.