البوصلة في الرياضيات

الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

الفرع الأدبي

ا.محمد العلي

2007

البوصلة طريقك نحو التميز

الدرس الأول : المماس والعمودي على المماس

معادلة مماس منحنى الاقتران

(مفهوم أساسي)

إذا كان $f(x)$ قابلًا للاشتقاق عندما $x = a$

فإن معادلة مماس منحنى الاقتران $f(x)$ عند

نقطة التماس $(a, f(a))$ هي:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

مثال 1

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 3x + 2$

عند النقطة $(2, 12)$.

مثال 2

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

عند النقطة $(3, 5)$.

مثال 3

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$

عندما $x = -2$.

مثال 4

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \frac{2x-1}{x}$

عندما $x = 1$.

مثال 5

جد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة:

① $f(x) = 2x^3 + 6x + 10, (-1, 2)$

② $f(x) = x^2 - \frac{8}{\sqrt{x}}, (4, 12)$

③ $f(x) = \frac{e^x}{x+4}, \left(0, \frac{1}{4}\right)$

④ $f(x) = 4\sqrt{x}, (9, 12)$

⑤ $f(x) = x^2 - \frac{7}{x^2}, (1, -6)$

⑥ $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, (3, 4)$

مثال 6

جد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران بمّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}, x = 8$

2) $f(x) = \frac{4+x}{x-2}, x = 8$

3) $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+11}}, x = 5$

مثال 7

جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى كل اقتران

ممّا يأتي عند قيمة x، أو عند النقطة المعطاة:

1) $f(x) = 5x^3 + x^2 - 2, (-1, -6)$

2) $f(x) = 2x^2(6-x), x = 5$

إيجاد نقطة التماس إذا عُلِم ميل المماس

مثال 8

1) جد إحداثيــي النقطة الواقعة على منحنــى الاقتران:

$f(x) = \sqrt{x}$، التــي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$.

② جد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = -x^3 + 6x^2$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

مثال 9

① جـد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتـران: $f(x) = 1 - \sqrt{x}$، التي يكون عندها ميل المماس $-\frac{1}{4}$

② جـد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنـى الاقتران: $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

مثال 10

① جد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 2x^6 - x^4 - 2$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

2. جد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 20x^3 - 3x^5$، التي يكون عندها المماس أفقيًا.

3. جد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 10x$، التي يكون عندها ميل المماس 6.

معادلة العمودي على المماس

(مفهوم أساسي)

إذا كان $f(x)$ قابلًا للاشتقاق عندما $x = a$، وكان: $f'(a) \neq 0$، فإنّ معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة التماس $(a, f(a))$ هي:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

مثال 11

جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^{3x}$ عند النقطة $(0, 1)$.

مثال 12

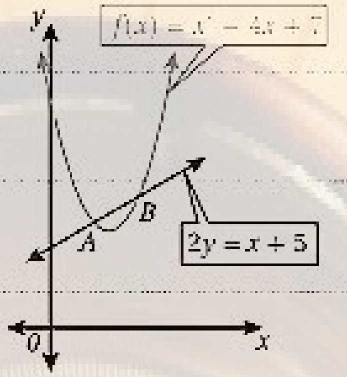
جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \ln x^3$ عند النقطة $(1, 0)$.

مثال 13

إذا كان: $f(x) = kx^3 + h$، حيث k و h ثابتان، جد قيمة k التي تجعل المستقيم: $y = 2x + 5$ مماسًا لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 1$.

مثال 14

يُبيِّن الشكل منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 4x + 7$ والمستقيم: $2y = x + 5$:



1) جد إحداثيي كلٍّ من النقطة A والنقطة B.

2) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند كلٍّ من النقطة A والنقطة B.

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان: $f(x) = 6 - x^2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

23 معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند كلٍّ من النقطة $(-1, 5)$ والنقطة $(1, 5)$، مُبرِّرًا إجابتي.

24 نقطة تقاطع المماسين من الفرع السابق، مُبرِّرًا إجابتي.

تحدٍّ: إذا كان: $f(x) = \sqrt{x}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

25 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(1, 1)$.

26 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(1, 1)$.

27 **تبرير:** أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x} - 1$، التي يكون عندها مماس منحنى الاقتران موازيًا للمستقيم: $y = 2x - 1$.

الدرس الثاني : المشتقة الثانية والسرعة والتسارع

المشتقة الثانية

مثال 1

جد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \sin x$

2. $f(x) = \ln x + e^x$

3. $f(x) = x^4 - 3x^2 + \cos x$

4. $f(x) = \frac{2}{x^3}$

5. $f(x) = 7\ln x$

6. $f(x) = 5x^3 + 4x$

7. $f(x) = 5e^{4x}$

8. $f(x) = (x-1)(2x+3)$

9. $f(x) = e^x \sin x$

10. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

مثال 2

جد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{3x-2}}, x = 2$

2) $f(x) = 1 - 7x^2, x = -3$

مثال 3

إذا كان: $f(x) = ax^4 - 3x^2$، وكانت: $f''(2) = 42$،

جد قيمة a.

السرعة والتسارع، الحركة على خط مستقيم

مثال 4

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$

موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s

الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

1) ما سرعة الجسم عندما $t = 2$؟

2) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 2$؟

3) ما تسارع الجسم عندما $t = 2$؟

4) جد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي

مثال 5

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 3t^2 - t^3 , t \geq 0$

موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s

الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

1. ما سرعة الجسم عندما $t = 3$؟

2. في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 3$؟

3. ما تسارع الجسم عندما $t = 3$؟

4. جد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

مثال 6

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 7, t \geq 0$

موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s

الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

1. ما سرعة الجسم عندما $t = 1$؟

2. في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 1$؟

3. ما تسارع الجسم عندما $t = 1$؟

4. جد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

مثال 7

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = (t-3)^3 , t \geq 0$

موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s

الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

1. ما سرعة الجسم عندما $t = 5$؟
2. في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 5$؟
3. ما تسارع الجسم عندما $t = 5$؟
4. جد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

مثال 8

يُمكِن نمذجة موقع أسد جبال يطارد فريسته على أرض مستوية

مُتحرِّكًا في خط مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = t^3 - 15t^2 + 63t$،

حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

1. ما سرعة أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته؟
2. ما تسارع أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدْء حركته؟
3. جد قِيَم t التي يكون عندها أسد الجبال في حالة سكون لحظي.

مهارات التفكير العليا

26 تبرير: إذا كان: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(5-3x^2)^6}$ ، فأُثبِت أنَّ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{5+33x^2}{(5-3x^2)^7}$.

27 تحــدٍّ: إذا مثَّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 12t - 9, t \geq 0$ موقع جســم يتحرَّك في مســار مســتقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني، فما سرعة الجسم عندما يكون تسارعه صفرًا؟

28 تحدٍّ: إذا مثَّل الاقتران: $s(t) = 2t^3 - 24t - 10, t \geq 0$ موقع جســم يتحرَّك في مســار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني، فما تسارع الجسم عندما تكون سرعته صفرًا؟

الدرس الثالث : تطبيقات القيم القصوى

تصنيف القيم الحرجة باستعمال اختبار المشتقة الثانية

نظرية

بافتراض وجود f' و f'' لأيِّ نقطة في فترة مفتوحة تحوي c، وأنَّ $f'(c) = 0$، فإنَّه يُمكِن استنتاج ما يأتي:

- إذا كان: $f''(c) < 0$، فإنَّ $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية للاقتران f.
- إذا كان: $f''(c) > 0$، فإنَّ $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية للاقتران f.
- إذا كان: $f''(c) = 0$، فإنَّ اختبار المشتقة الثانية يفشل. وفي هذه الحالة، يجب استعمال المشتقة الأولى لتصنيف القِيَم القصوى المحلية.

مثال 1

إذا كان: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$، استعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f.

مثال 2

إذا كان: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$، استعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية للاقتران f

مثال 3

استعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$

2) $f(x) = x^3 (x-2)$

3) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$

تطبيقات القيَم القصوى

(مفهوم أساسي)

استراتيجية حلّ مسائل القِيَم القصوى

1) أفهم المسألة: أقرأ المسألة جيدًا، ثم أُحدِّد المعلومات اللازمة لحَلِّها.

2) أرسم مُخطّطًا: أرسم مُخطّطًا يُمثّل المسألة، ثم أدوّن عليه المعلومات المُهِمّة لحَلِّ المسألة، وأختار مُتغيِّرًا يُمثِّل الكمّية التي أُريد أنْ أجد لها أكبر قيمة أو أقل قيمة، وأختار رموزًا للمُتغيِّرات الأُخرى في المسألة، ثم أستعمل المُتغيِّرات لكتابة اقتران قيمته القصوى هي القيمة المطلوبة.

3) أجد القِيَم الحرجة للاقتران: أجد القِيَم التي تكون عندها مشتقة الاقتران صفرًا.

4) أجد القيمة القصوى المطلوبة: أجد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى المطلوبة.

إيجاد أكبر مساحة مُمكنة

مثال 4

اشترى مُزارعٌ سياجًا طوله 800 m لتسييج حقل مستطيل الشكل من مزرعته، وكان هذا الحقل مُقابِلًا لطريق زراعي محاط به سياج من قبلُ. جد أكبر مساحة مُمكِنة للحقل يُمكِن للمُزارع أنْ يحيط السياج بها.

مثال 5

بنى نجّار سقفًا خشبيًّا لحظيرة حيوانات، وكان السقف على شكل مستطيل محيطه $54\ \mathrm{m}$. جد أكبر مساحة مُمكِنة لسطح الحظيرة.

إيجاد أقل كمِّية مُمكِنة

مثال 6

أراد مصنع إنتاج عُلَبٍ من الكرتون على شكل متوازي مستطيلات مغلق، بحيث يكون حجم كلٍّ منها $1000\ cm^3$ وقاعدتها مربعة الشكل. جد أبعاد العُلْبة الواحدة التي تجعل كمِّية الكرتون المُستعمَلة لصنعها أقل ما يُمكِن.

مثال 7

أرادت إحدى الشركات أنْ تصنع خزّانات معدنية على شكل متوازي مستطيلات مغلق، بحيث يكون حجم كلٍّ منها $2\ m^3$، وقاعدته مربعة الشكل. جد أبعاد الخزّان الواحد التي تجعل كمِّية المعدن المُستعمَلة لصنعه أقل ما يُمكِن.

إيجاد أكبر حجم مُمكِن

مثال 8

لدى حدّادٍ صفيحةٌ معدنية مساحتها $36\ m^2$. أراد الحدّاد أنْ يصنع منها خزّان ماء على شكل متوازي مستطيلات مغلق، وأنْ تكون قاعدة الخزّان مربعة الشكل. جد أبعاد الخزّان التي تجعل حجمه أكبر ما يُمكِن.

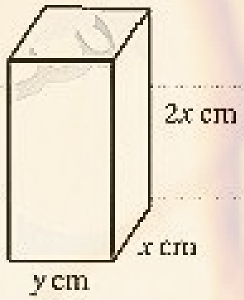
مثال 9

لدى حدّادٍ صفيحةٌ معدنية مساحتها $54\ m^2$. أراد الحدّاد أنْ يصنع منها خزّان ماء على شكل متوازي مستطيلات، وأنْ يكون الخزّان مفتوحًا من الأعلى، وقاعدته مربعة الشكل. جد أبعاد الخزّان التي تجعل حجمه أكبر ما يُمكِن.

مثال 10

يُبيِّن الشكل قالَبًا يُستعمَل لصنع لَبِنات البناء،

وتبلغ مساحة سطحه الكلية $600\ \text{cm}^2$:



1. جد الاقتران الذي يُمثِّل حجم القالَب بدلالة x.
2. جد قيمة x التي تجعل حجم القالَب أكبر ما يُمكِن.

تطبيقات اقتصادية

مثال 11

وجد خبير تسويق أنه لبيع x حاسوبًا من نوع جديد، فإنَّ سعر الحاسوب الواحد (بالدينار) يجب أنْ يكون: $s(x) = 1000 - x$، حيث x عدد الأجهزة المَبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الأجهزة تعطى بالاقتران:

$$C(x) = 3000 + 20x$$

جد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن.

مثال 12

وجدت خبيرة تسويق أنّه لبيع x ثلاجة من نوع جديد، فإنّ سعر الثلاجة الواحدة (بالدينار) يجب أن يكون: $s(x) = 1750 - 2x$، حيث x عدد الأجهزة المَبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الأجهزة تعطى بالاقتران: $C(x) = 2250 + 18x$

جد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن.

مثال 13

أرادت إحدى الشركات أنْ تصنع خزّانات من الفولاذ الرقيق المُقاوِم للصدأ على شكل متوازي مستطيلات، بحيث يكون كلٌّ منها مفتوحًا من الأعلى، وحجمه $500\ m^3$، وقاعدته مربعة الشكل. جد الأبعاد التي تجعل مساحة سطح الخزّان أقل ما يُمكِن.

مثال 14

يُمثِّل الاقتران: $s(x) = 150 - 0.5x$ سعر البدلة الرجالية

الذي حدَّدته شركةٌ لإنتاج الملابس، حيث x عدد البدلات المَبيعة

ويُمثِّل الاقتران: $C(x) = 4000 + 0.25x^2$ تكلفة إنتاج x بدلة:

1 جد اقتران الإيراد.

2 جد عدد البدلات x التي يكون عندها الإيراد الحدِّي مثلَي التكلفة الحدِّية.

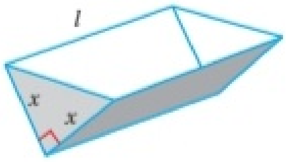
3 جد اقتران الربح.

4 جد عدد البدلات اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، ثم جد أكبر ربح مُمكِن.

5 جد سعر البدلة الواحدة الذي يُحقِّق أكبر ربح مُمكِن.

مهارات التفكير العليا

14 تحدٍّ: قالَب لصنع الكعك على شــكل منشــور ثلاثي مفتوح من الأعلى، قاعدته على شــكل مثلث قائم الزاوية كما في الشــكل المجــاور. إذا كان حجم القالَب $1000\ cm^3$، فأجد أبعــاده التي تجعل المواد المُســتعمَلة لصنعه أقل ما يُمكِن، مُبرِّرًا إجابتي.



الدرس الرابع : الاشتقاق الضمني والمعدلات المرتبطة

العلاقة الضمنية ومشتقتها

(مفهوم أساسي)

الاشتقاق الضمني

بافتراض أنَّ معادلةً تُعرِّف المُتغيِّرَ y ضمنيًا بوصفه اقترانًا قابلًا للاشتقاق بالنسبة إلى x، فإنَّه يُمكِن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ باتِّباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى x، مراعيًا استعمال قاعدة السلسلة عند اشتقاق حدود تتضمَّن المُتغيِّرَ y.

الخطوة 2: أُعيد ترتيب حدود المعادلة، بحيث تصبح جميع الحدود التي تحوي $\frac{dy}{dx}$ في طرف المعادلة الأيسر، والحدود الأُخرى في طرف المعادلة الأيمن.

الخطوة 3: أُخرِج $\frac{dy}{dx}$ عاملًا مشتركًا من حدود طرف المعادلة الأيسر.

الخطوة 4: أَحُلُّ المعادلة بالنسبة إلى $\frac{dy}{dx}$.

مثال 1

جد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1) $2x+3y^2=1$

2) $y^3-\sin x=4y^2$

3) $xy-2y=3e^x$

4) $x^2+y^2=2$

5) $5y^2-2e^x=4y$

6) $xy+y^2=4\cos x$

⑦ $x^2 + 5y^2 = 14$

⑧ $y + y^3 = \sin x - x^2$

⑨ $xe^y - 3x = 15$

⑩ $y \ln x = 1 + x$

⑪ $x^2 + 2xy = 3y^2$

⑫ $x^3 + xy^2 = 5x$

مثال 2

جد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

① $x^2 y - 2x^3 - y^3 + 1 = 0, (2, -3)$

② $y^3 - x^2 = 4, (2, 2)$

معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية

مثال 3

جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $y^3 + xy = 2$

عند النقطة $(1, 1)$.

مثال 4

جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^3 + 2y^3 = 6$

عند النقطة $(2, -1)$.

مثال 5

إذا كان: $y^2 - x^2 = 16$ ، جد كُلًّا ممّا يأتي:

1. ميل المماس عند النقطة $(3, 5)$.
2. معادلة المماس عند النقطة $(3, 5)$.

مثال 6

إذا كان: $x^2 + 4xy + y^2 = 25$ ، جد كُلًّا ممّا يأتي:

1. ميل المماس عند النقطة $(0, 5)$.
2. معادلة المماس عند النقطة $(0, 5)$.

مثال 7

إذا كان: $x^2 y = 8 - 4y$ ، جد كُلًّا ممّا يأتي:

1. ميل المماس عند النقطة $(2, 1)$.
2. معادلة المماس عند النقطة $(2, 1)$.

المُعدَّلات المرتبطة

مثال 8

عند رمي حجر في مُسطح مائي، تتكون موجات دائرية مُتحِدة المركز. إذا كان نصف قُطْر دائرة يزداد بمُعدَّل 8 cm/s ، جد مُعدَّل تغيُّر مساحة هذه الدائرة عندما يكون نصف قُطْرها 10 cm، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين مساحة الدائرة (A) ونصف قُطْرها (r) هي: $A = \pi r^2$.

مثال 9

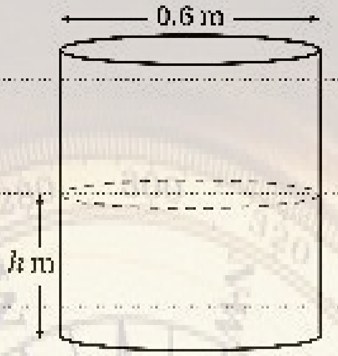
نفخت هديل بالونًا على شكل كرة، فازداد نصف قُطْره بمُعدَّل 3 cm/s . جد مُعدَّل تغيُّر حجم البالون عندما يكون نصف قُطْره 4 cm، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم البالون (V) ونصف قُطْره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

مثال 10

يخرج الهواء من منطاد كروي الشكل بمُعدَّل ثابت مقداره $0.6\ \text{cm}^3/\text{s}$. جد مُعدَّل تناقص نصف قُطْر المنطاد عند اللحظة التي يكون فيها نصف القُطْر $2.5\ \text{m}$، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم المنطاد (V) ونصف قُطْره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

مثال 11

يُبيِّن الشكل خزّان ماء أسطواني الشكل. إذا كانت كمّيّة الماء في الخزّان تزداد بمُعدَّل $0.4\ \text{m}^3/\text{s}$، جد مُعدَّل تغيُّر عمق الماء فيه (h)، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم الخزان (V) وارتفاعه (h) هي: $V = \pi r^2 h$.



مهارات التفكير العليا

24 تبرير: أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^2 + 6y^2 = 10$ عندما $x = 2$، مُبرِّرًا إجابتي.

25 تحدٍّ: إذا كان: $\ln (xy) = x^2 + y^2$، فأُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 y - y}{x - 2xy^2}$.

26 تبريـر: إذا كان المُتغيِّران u و w مرتبطين بالعلاقـة: $u = 150\sqrt[3]{w^2}$، وكانت قيمة المُتغيِّر w تزداد بمرور الزمن t، وَفقًا للعلاقة: $w = 0.05t + 8$، فأجد مُعدَّل تغيُّر u بالنسبة إلى الزمن عندما $w = 64$، مُبرِّرًا إجابتي.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 ميل المماس لمنحنى الاقتران: $y = x^2 + 5x$ عندما $x = 3$ هو:

a) 24 b) $-\frac{5}{2}$

c) 11 d) 8

2 إذا كان: $f(x) = x - \frac{1}{x}$، فإنَّ $f''(x)$ هي:

a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$

c) $\frac{2}{x^3}$ d) $-\frac{2}{x^3}$

3 إذا كان: $y^2 - x^2 = 1$، فإنَّ ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ هو:

a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

4 ميل العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $3x - 2y + 12 = 0$ هو:

a) 6 b) 3

c) $\frac{3}{2}$ d) $-\frac{2}{3}$

5 قيمة x التي عندها قيمة صغرى محلية للاقتران: $f(x) = x^4 - 32x$ هي:

a) 2 b) -2

c) 1 d) -1

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 2 + 7t - t^2, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

6 اللحظة التي تكون فيها حركة الجسم في الاتجاه السالب هي:

a) $t = 1$ b) $t = 2$

c) $t = 3.5$ d) $t = 4$

7 اللحظة التي يكون فيها الجسم في حالة سكون لحظي هي:

a) $t = 1$ b) $t = 2$

c) $t = 3.5$ d) $t = 4$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

8 $f(x) = x^2 - 7x + 10, (2, 0)$

9 $f(x) = x^2 - \frac{8}{\sqrt{x}}, (4, 12)$

10 $f(x) = \frac{2x - 1}{x}, (1, 1)$

11 $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x + 1}}, (4, 1)$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

12 $f(x) = (x - 7)(x + 4), x = 1$

13 $f(x) = \frac{x}{x + 4}, x = -5$

14 $f(x) = 2x^4 + 9x^3 + x, x = -2$

اختبار نهاية الوحدة

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

15 $f(x) = 7x^3 + 6x - 5, x = 2$

16 $f(x) = \frac{6x^2 - x^3}{4x^4}, x = -2$

17 أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^4 - 3x^3 + 1$، التي يكون عندها المماس أفقيًّا.

18 أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 + 3$، التي يكون عندها ميل المماس هو 12.

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي:

19 $f(x) = 4x^2 - 5x + 7$

20 $f(x) = \ln x - 9e^x$

21 $f(x) = 10x - 2x\sqrt{x}$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

22 $f(x) = \sqrt{x}(x + 2), x = 2$

23 $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2, x = 1$

24 نفط: تسرَّب نفط من ناقلة بحرية، مُكوِّنًا بُقعة دائرية الشكل على سطح الماء، تزداد مساحتها بمُعدَّل $50 \text{ m}^2/\text{min}$. أجد سرعة تزايد نصف قُطْر البُقعة عندما يكون طول نصف قُطْرها 20 m، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين مساحة الدائرة (A) ونصف قُطْرها (r) هي: $A = \pi r^2$.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 12t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

25 ما سرعة الجسم عندما $t = 2$؟

26 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 2$؟

27 ما تسارع الجسم عندما $t = 2$؟

28 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

درّاجات: يُمكِن نمذجة موقع شخص يقود درّاجة في مسار مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

29 ما سرعة الشخص بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

30 ما تسارع الشخص بعد 3 ثوانٍ من بَدْء حركته؟

31 أجد قِيَم t التي يكون عندها الشخص في حالة سكون لحظي (إنْ وُجِدت).

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القِيَم القصوى المحلية (إنْ وُجِدت) لكل اقتران ممّا يأتي:

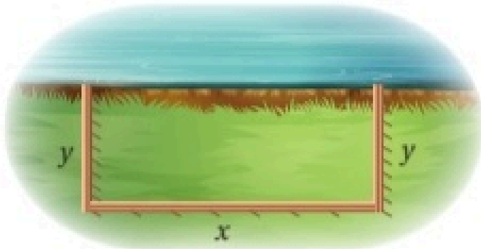
32 $f(x) = 9 + 24x - 2x^3$

33 $f(x) = (3x - 2)^3 - 9x$

34 $f(x) = 4x^5 - 10x^2$

35 **بالونات**: نفخت ماجدة بالونًا على شكل كرة، فازداد حجمه بمُعدَّل $800\ \text{cm}^3/\text{s}$. أجد مُعدَّل زيادة نصف قُطر البالون عندما يكون طول نصف قُطْره $60\ \text{cm}$، علمًا بأنَّ العلاقة التي تربط بين حجم البالون (V) ونصف قُطْره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

36 خطَّط مُزارِع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل التالي، وحدَّد مساحة الحظيرة بـ $245000\ \text{m}^2$؛ لتوفير كمِّية عشب كافية لأغنامه. أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يُمكِن، علمًا بأنَّ الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.



أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

37 $x^2 + y^2 = y$

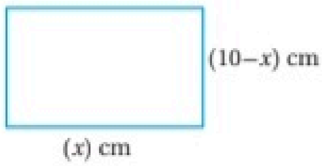
38 $x^2 + 6x - 8y + 5y^2 = 13$

إذا كان: $y^2 + xy + x^2 = 13$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

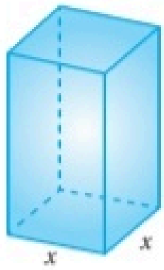
39 ميل المماس عند النقطة $(-4, 3)$.

40 معادلة المماس عند النقطة $(-4, 3)$.

41 سلك طوله $20\ \text{cm}$. إذا أُريد ثني السلك ليحيط بالمستطيل التالي، فأجد أكبر مساحة مغلقة يُمكِن إحاطة السلك بها.



يُبيِّن الشكل الآتي صندوقًا على شكل متوازي مستطيلات. إذا كانت قاعدة الصندوق مربعة الشكل، وطول ضلع القاعدة x cm، ومجموع أطوال أحرفه 144 cm، فأجد كُلًّا ممّا يلي:



42 الاقتران الذي يُمثِّل حجم الصندوق بدلالة x.

43 قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يُمكِن.

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

44 $2x^3 + 4y^2 = -12, (-2, -1)$

45 $x^3 - x^2y^2 = -9, (3, -2)$