



AWA2EL  
LEARN 2 BE



# الرياضيات

الصف الحادي عشر - المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

11

إجابات الطالب

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

☎ 06-5376262 / 237 📠 06-5376266 ✉ P.O.Box: 2088 Amman 11941

📌 @nccdjor 📧 feedback@nccd.gov.jo 🌐 www.nccd.gov.jo



إجابات كتاب الطالب الصف الحادي عشر- المسار الأكاديمي- خطة جديدة الفصل الدراسي الأول

الوحدة الأولى: الاقترانات والمتتاليات والمتسلسلات

الدرس الأول: الاقترانات المتشعبة

مسألة اليوم صفحة 8

$$18 \times 0.361 + 18 \times 0.45 + 6 \times 0.55 = 17.898 \text{ JD}$$

أتحقق من فهمي صفحة 10

a

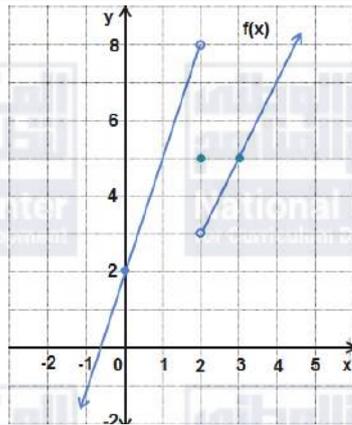
مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها.

b

$$f(5) = 2(5) - 1 = 9$$

$$f(2) = 5$$

c



مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها.

أتحقق من فهمي صفحة 11

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < 1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

أتحقق من فهمي صفحة 12

$$f(x) = \begin{cases} 1.15x, & x < 400 \\ 20 + 1.1x, & 400 \leq x < 600 \\ x + 80, & x \geq 600 \end{cases}$$

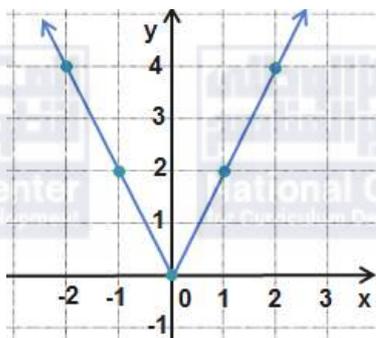


أتحقق من فهمي صفحة 13

$$f(x) = \begin{cases} 9 - 3x, & x < 3 \\ 3x - 9, & x \geq 3 \end{cases}$$

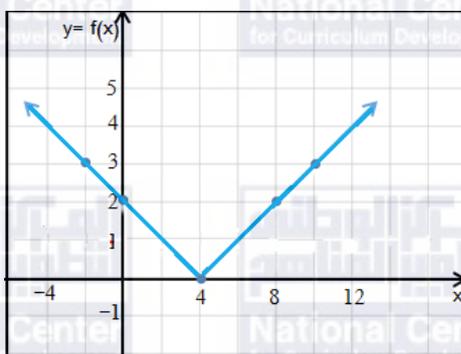
أتحقق من فهمي صفحة 15

المجال مجموعة الأعداد الحقيقية كلها،  
المدى هو  $[0, \infty)$ .



a

المجال مجموعة الأعداد الحقيقية كلها،  
المدى هو  $[0, \infty)$ .



b

أتحقق من فهمي صفحة 17

$$f(x) = \left| \frac{4}{3}x + 4 \right|$$

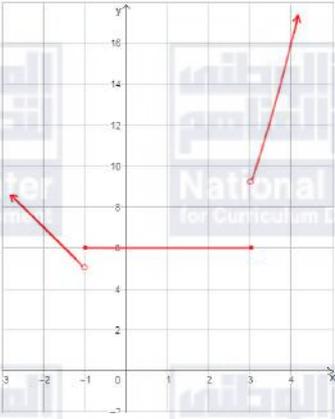
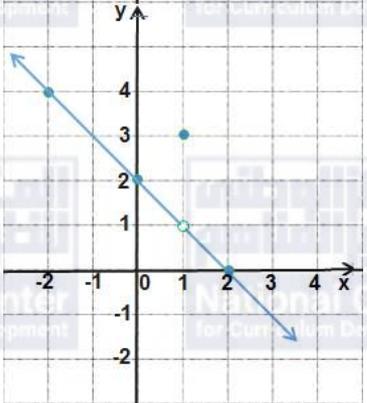
أتدرب وأحل المسائل صفحة 18

1 12

2 -7

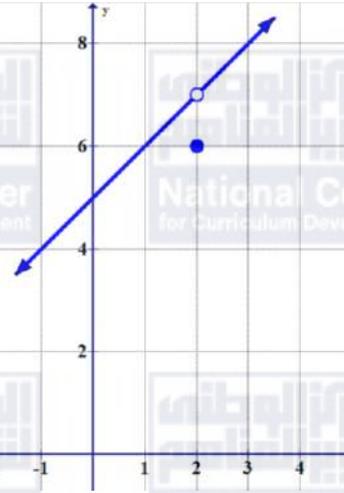
3 -3



4	13
5	2
6	2
7	$f(x) = \begin{cases} 6 - 3x, & x < 2 \\ 3x - 6, & x \geq 2 \end{cases}$
8	$f(x) = \begin{cases} 8 - 7x, & x < \frac{5}{7} \\ 7x - 2, & x \geq \frac{5}{7} \end{cases}$
9	<p>المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى <math>(5, \infty)</math>.</p> 
10	<p>المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء 1 أو <math>(-\infty, 1) \cup (1, \infty)</math>.</p> 



11



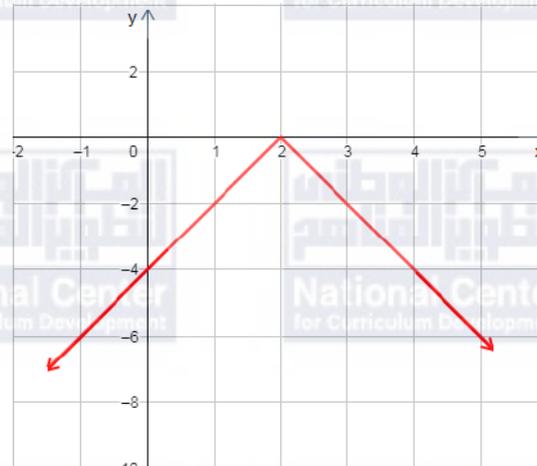
المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى  $(-\infty, 7) \cup (7, \infty)$ .

12



المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى  $\{-2, 2\}$

13



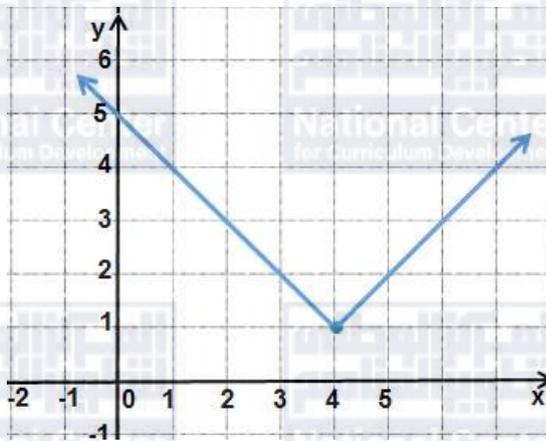
المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى  $(-\infty, 0]$ .



المجال مجموعة الأعداد الحقيقية، المدى  $[1, \infty)$ .



14



15

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq -2 \\ x, & -2 < x < 2 \\ 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

16

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -4 \leq x \leq -1 \\ -x + 1, & -1 < x \leq 2 \\ -2, & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

17

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

18

$$f(x) = |x| - 2$$

19

$$f(x) = -|3x|$$

20

$$f(x) = -\frac{1}{3}|x - 2| + 6$$



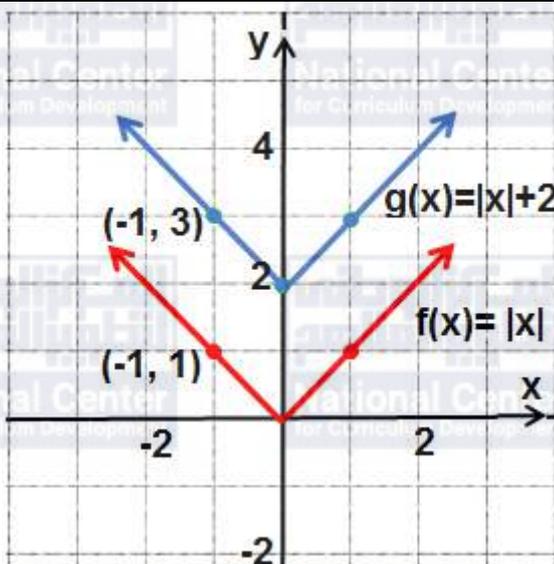
21	
22	مجال هذا الاقتران هو $[0, 5]$ ، ومداه $[0, 3.5]$
23	
24	استمر الهطل ساعتان لأنه توقف بعد ساعتين، يقطع المنحنى المحور الأفقي عند 0، و 2
25	كان أعلى معدل هطل بعد ساعة من بدئه، يبين الرسم أن القيمة العظمى عند (1, 0.5)
26	$f(x) = \begin{cases} 0.361x, & 0 \leq x \leq 18 \\ 0.450x - 1.602, & 18 < x \leq 36 \\ 0.550x - 5.202, & 36 < x \leq 54 \\ x - 29.502, & 54 < x \leq 72 \\ 1.2x - 43.902, & x > 72 \end{cases}$
27	a، لأن الرأس عند (2.5, 0)، ومفتوح للأعلى
28	$p = -5, q = -6$
29	إحداثيا نقطتي تقاطع منحنى $f(x)$ مع المحور x هما (2, 0)، (3, 0)



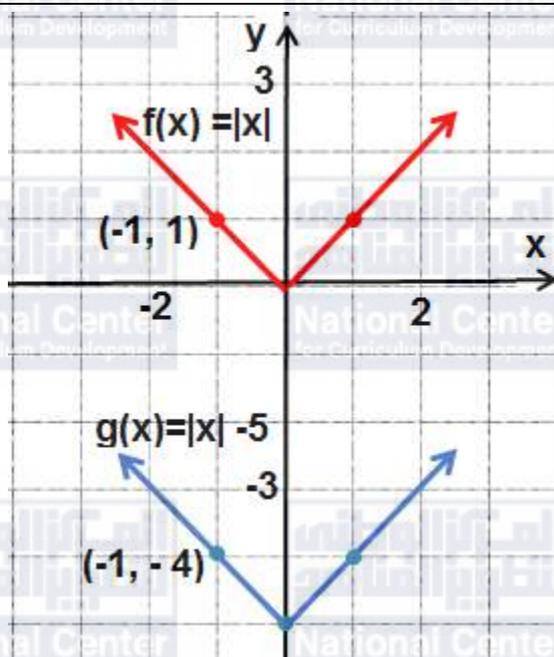
الدرس الثاني: التحويلات الهندسية للاقتران

أتحقق من فهمي صفحة 22

a



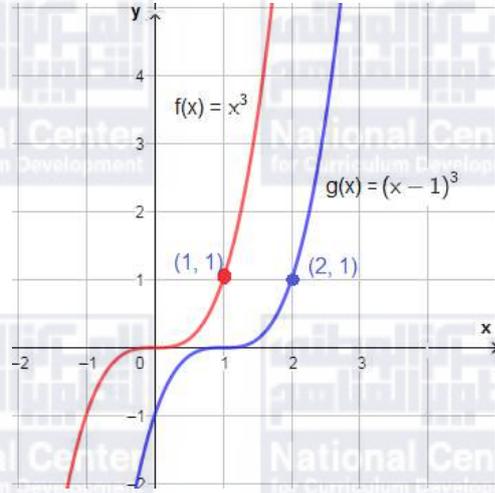
b



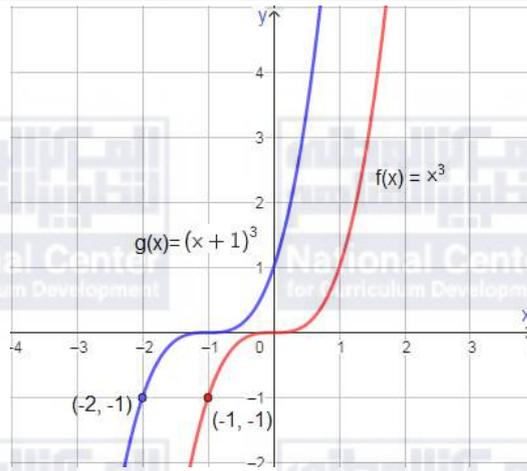


أتحقق من فهمي صفحة 23

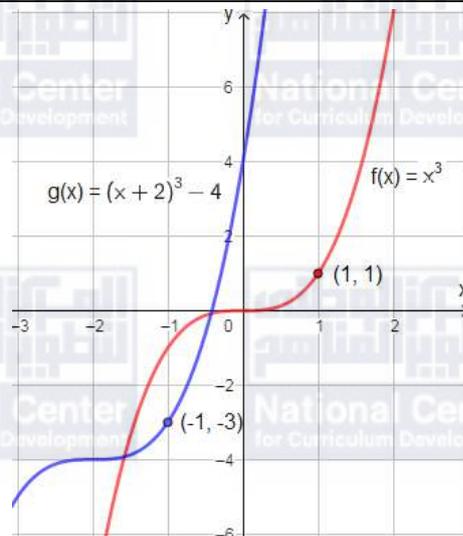
a



b



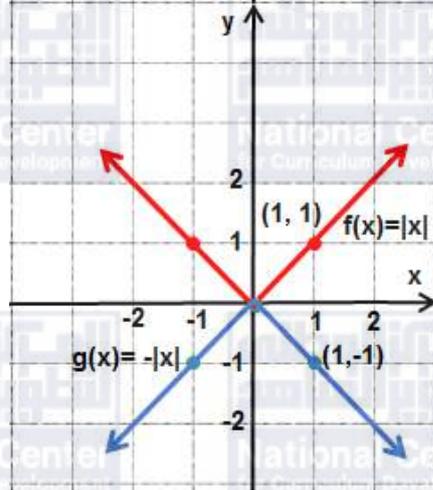
c



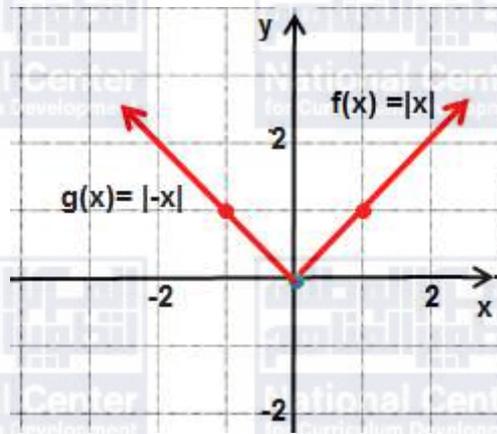


أتحقق من فهمي صفحة 25

a



b



يتطابق منحنى  $f(x) = |x|$  مع منحنى  $g(x) = -|x|$  لأنه متماثل حول المحور  $y$ ، فبالانعكاس حول المحور  $y$  يبقى المنحنى على وضعه دون تغيير.

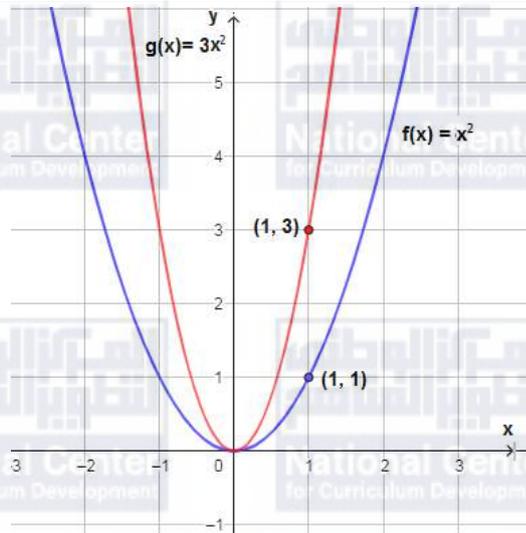


أتحقق من فهمي صفحة 26

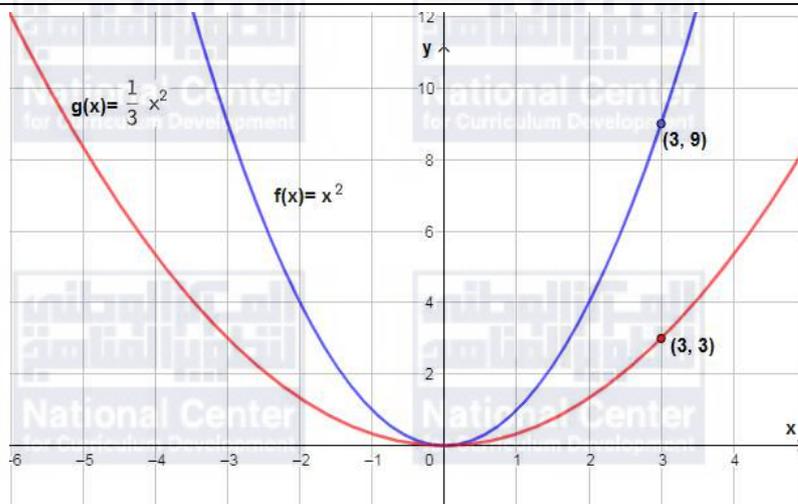


AWAZEL

a



b



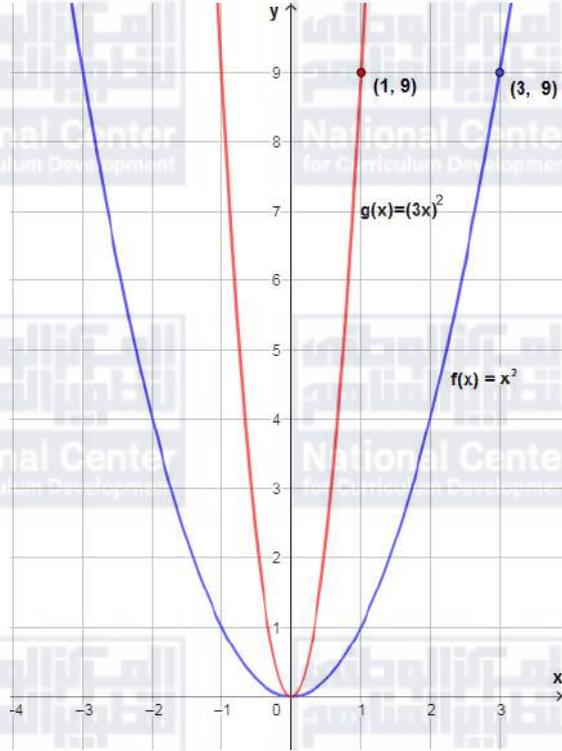


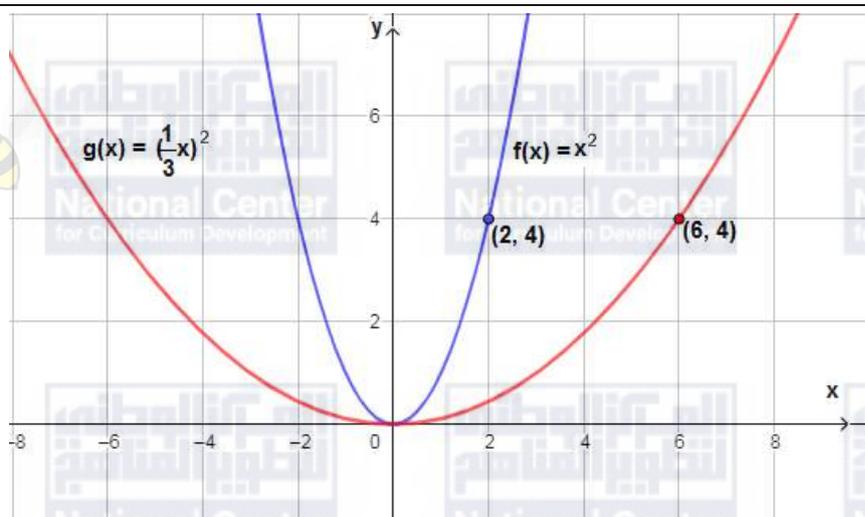
أتحقق من فهمي صفحة 27



AWAZEL  
LEARN 2 BE

a



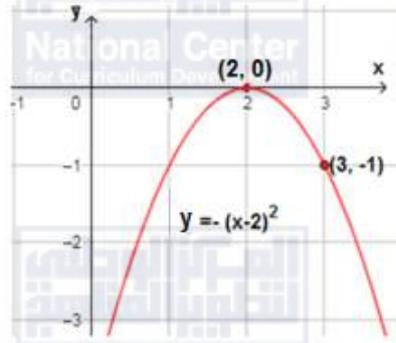


b

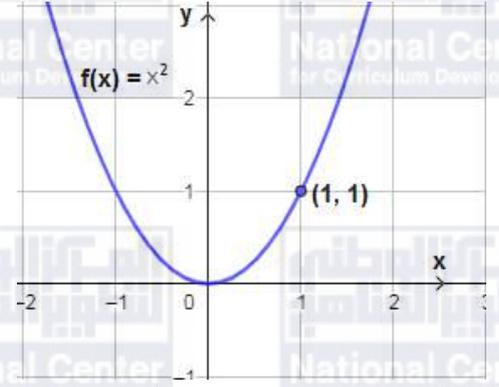


أتحقق من فهمي صفحة 28

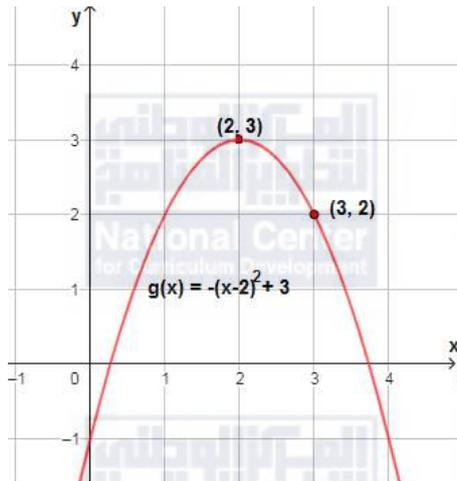
ثالثاً: انسحاب وحدتين إلى اليمين



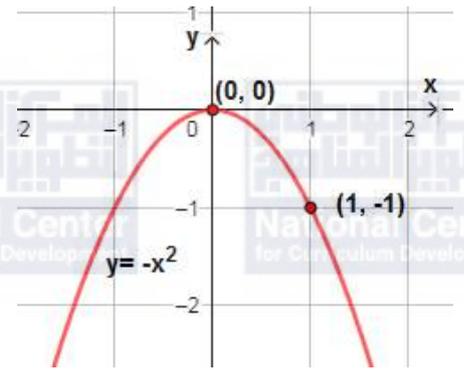
أولاً: رسم  $f(x) = x^2$



رابعاً: انسحاب 3 وحدات إلى الأعلى

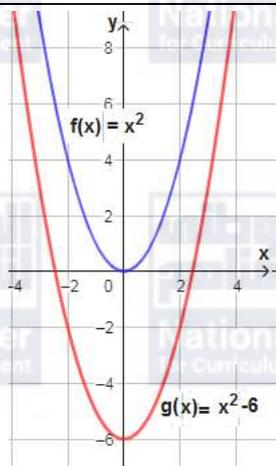


ثانياً: رسم انعكاس  $f(x)$  حول المحور x



أندرب وأحل المسائل صفحة 29

1

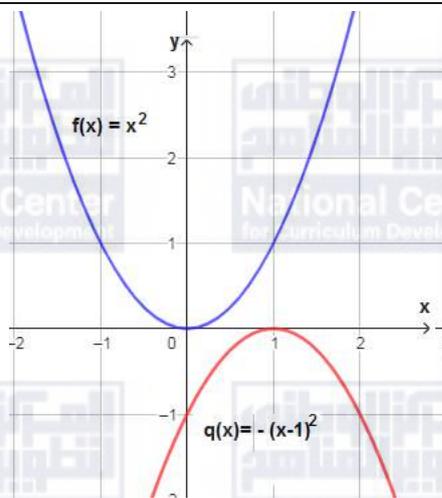




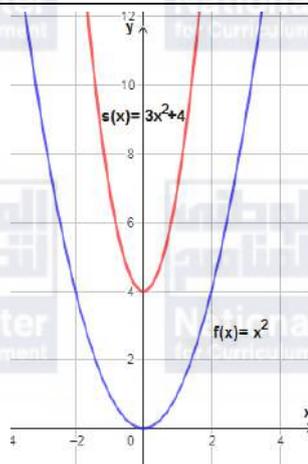
AWAZEL  
LEARN 2 BE



2



3

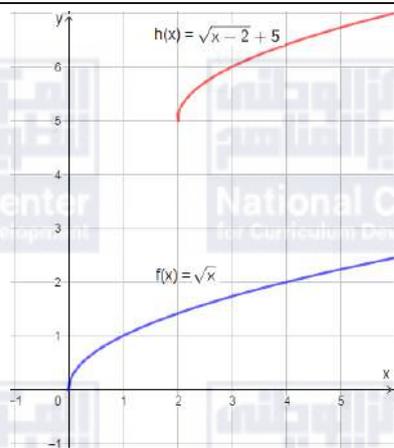


4

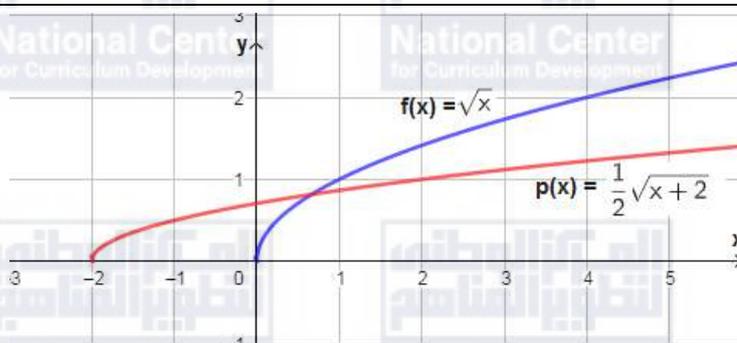




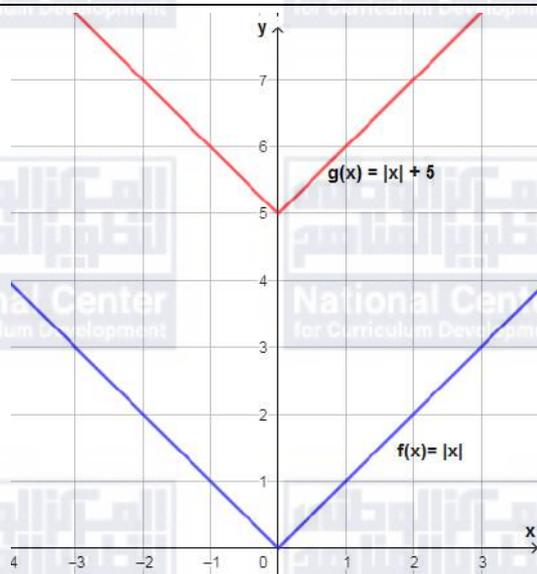
5



6

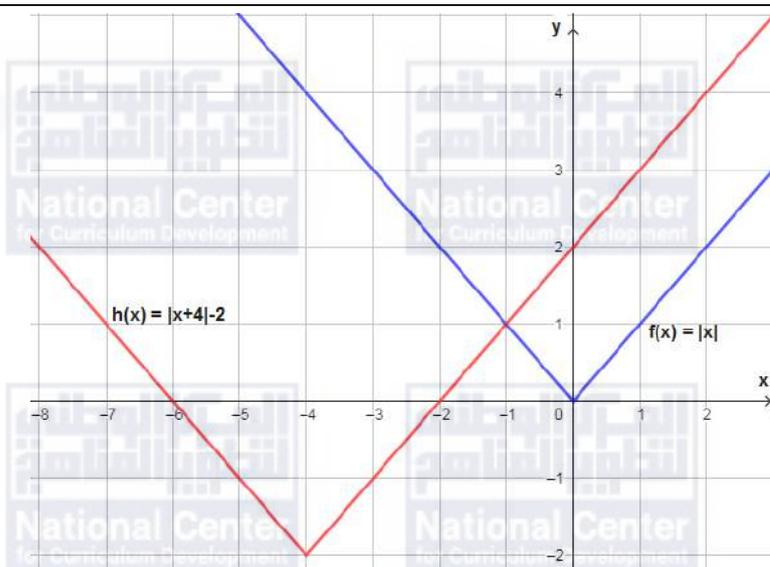


7

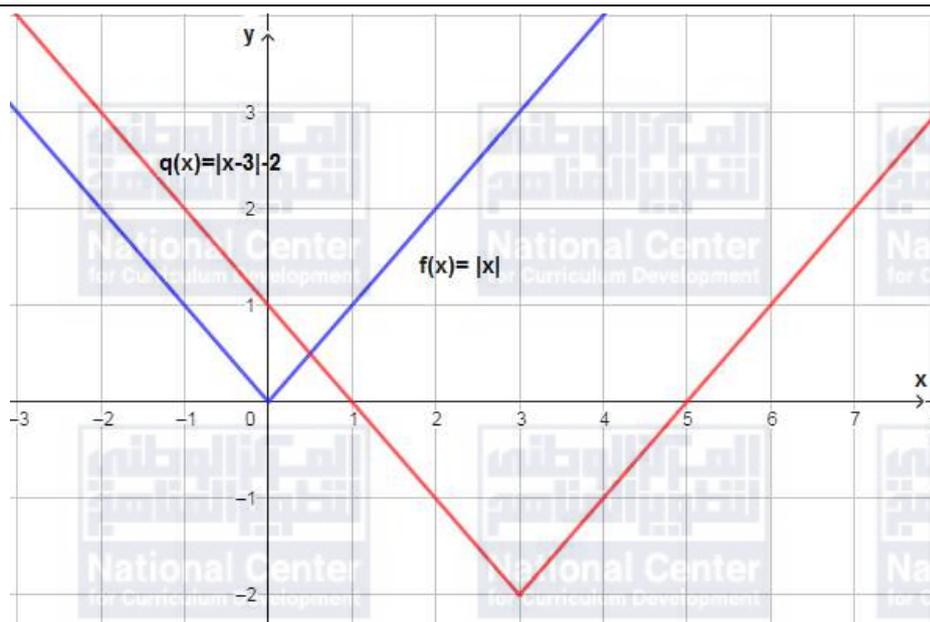




8



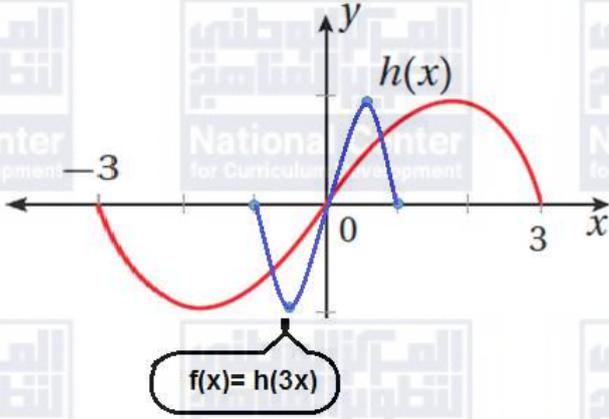
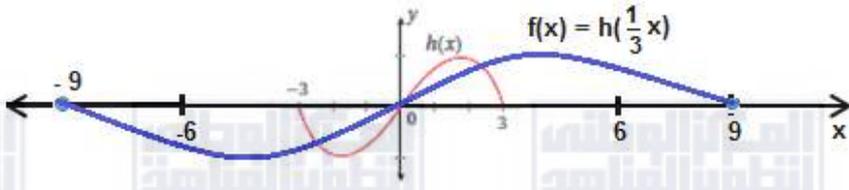
9





10	
11	
12	
13	$g(x) = x^3 + 3$
14	$g(x) =  x+1  + 2$



15	$g(x) = -\sqrt{x+2}$
16	$g(x) \rightarrow 3$ , b) $h(x) \rightarrow 1$ , c) $g(x) \rightarrow 2$ , d) $h(x) \rightarrow 4$
17	تمدد (توسيع) رأسي معاملته 2.9، وانسحاب إلى الأعلى بمقدار 20.1 وحدة.
18	متوسط الطول للأطفال بعمر 5 سنوات هو $h(5 \times 12) = h(60)$ $h(60) = 2.9\sqrt{60} + 20.1 \approx 42.6$ in
19	يمثل متوسط أطوال الأطفال الذكور عند الولادة الثابت 20.1
20	منحنى $C(x)$ ناتج عن تضيق رأسي معاملته $\frac{1}{2}$ لمنحنى $T(x)$ متبوعاً بانسحاب بمقدار وحدة واحدة إلى الأعلى.
21	ضرب الإحداثي $x$ لكل نقطة في $\frac{1}{3}$ 
22	ضرب الإحداثي $x$ لكل نقطة في 3 
23	$(-a, b)$ لأن منحنى $f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)$ حول المحور $y$ .
24	$(a, 2b)$ لأن منحنى $f(x)$ هو توسيع لمنحنى $f(x)$ معاملته 2، لذلك يُضرب الإحداثي $y$ في 2



25	<p><math>(-a+3, b)</math> لأن منحنى <math>f(3-x)</math> هو انعكاس حول المحور <math>y</math> لمنحنى <math>f(x)</math> ثم انسحاب إلى اليمين بمقدار 3 وحدات.</p>
26	<p>منحنى <math>g(x)</math> ناتج عن انعكاس <math>f(x)</math> حول المحور <math>x</math> وتضييق رأسي وانسحاب بمقدار وحدة واحدة للأسفل. فتكون قاعدته <math>g(x) = -c \sqrt{16 - x^2} - 1</math>، وبتعويض إحداثيي النقطة <math>(0, -2)</math></p> $g(0) = -c \sqrt{16 - 0^2} - 1$ $-2 = -c(4) - 1 \rightarrow c = \frac{1}{4}$ $g(x) = -\frac{1}{4} \sqrt{16 - x^2} - 1$



الدرس الثالث: المتتاليات والمتسلسلات

مسألة اليوم صفحة 31

$$a_{10} = 271$$

أنحقق من فهمي صفحة 33

$$a \quad 7 + 10 + 13 + 16 + \dots + 25 = \sum_{k=1}^7 (3k + 4)$$

$$b \quad 1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} k(-1)^{k+1}$$

أنحقق من فهمي صفحة 33

$$a \quad \sum_{k=1}^7 \frac{5k - 2}{2} = 63$$

$$b \quad \sum_{k=1}^5 (k + 1)^2 = 90$$

أنحقق من فهمي صفحة 35

$$a \quad \sum_{k=1}^{10} 3k^2 = 1155$$

$$b \quad \sum_{k=1}^{20} (7k - 2) = 1430$$

$$c \quad \sum_{k=1}^5 -4k^3 = -900$$

أنحقق من فهمي صفحة 37

A

حسابية أساسها 3-

b

ليست حسابية



أتحقق من فهمي صفحة 39

A	$a_n = -3n + 4$ $a_{15} = -41$
B	$a_n = 2n - 31$ $a_{15} = -1$
C	$26 = a_1 + 15d$ , $71 = a_1 + 6d$ $a_1 = 101$ , $d = -5$ $a_n = -5n + 106$
أتحقق من فهمي صفحة 41	
a	$159 = 7 + 8(n - 1) \Rightarrow n = 20$ $S_{20} = \frac{20}{2}(7 + 159) = 1660$
b	$d = 5 - 8 = -3$ $S_{17} = \frac{17}{2}(2(8) + 16 \times -3) = -272$
أتحقق من فهمي صفحة 43	
A	بما أن الزيادة السنوية ثابتة وتساوي 400، فإن إنفاق الجمعية السنوي يشكل متتالية حسابية أساسها 400
B	$a_n = 400n - 100$
C	$a_{10} = 3900$
D	$S_{10} = \frac{10}{2}(300 + 3900) = 21000$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 43	
1	$\sum_{k=1}^{10} k^2$



2	$\sum_{k=1}^{10} 2k$	
3	$\sum_{k=1}^{13} \frac{k}{k+1}$	
4	$\sum_{k=1}^6 \left(\frac{-2}{3}\right)^k$	
5	$\sum_{n=1}^6 (-2)^n = 42$	
6	$\sum_{n=1}^4 \frac{n^2 + 1}{n + 1} = \frac{257}{30}$	
7	$\sum_{n=1}^2 \frac{1}{3^n + 1} = \frac{7}{20}$	
8	$\sum_{k=1}^6 \frac{k^2}{2} = \frac{91}{2}$	
9	$\sum_{k=1}^9 (12k - 24) = 324$	
10	$\sum_{k=1}^{20} (k^3 - 1) = 44080$	
11		ليست حسابية
12		حسابية أساسها 6-
13		ليست حسابية
14	$a_n = 33n - 8$ $a_{30} = 982$	



15	$a_n = \frac{2}{3}n - \frac{5}{3}$ $a_{30} = \frac{55}{3}$
16	$a_n = -\frac{1}{2}n + \frac{7}{2}$ $a_{30} = -\frac{23}{2}$
17	$a_n = 78 - 4n$ $a_{30} = -42$
18	$401 = 1 + 4(n - 1) \Rightarrow n = 101$ $S_{101} = \frac{101}{2}(1 + 401) = 20301$
19	$56.7 = 0.7 + 2(n - 1) \Rightarrow n = 29$ $S_{29} = \frac{29}{2}(0.7 + 56.7) = 832.3$
20	$a_1 = 0, a_{80} = 158$ $S_{80} = \frac{80}{2}(0 + 158) = 6320$
21	$a_1 = 25, d = 5$ $a_{16} = 25 + 5(15) = 100$
22	$792 = \frac{n}{2}(2(10) + (n - 1) \times 4) \Rightarrow 2n^2 + 8n - 792 = 0$ $\Rightarrow n^2 + 4n - 396 = 0$ $\Rightarrow (n - 18)(n + 22) = 0$ $\Rightarrow n = 18$



23	$S_n = n^2 + 4n$ $S_1 = 5 \Rightarrow a_1 = 5$ $S_2 = 12 \Rightarrow a_2 = 12 - 5 = 7$ $d = 7 - 5 = 2$ $a_n = 2n + 3$ $a_{100} = 203$
24	1, 5, 9 ألاحظ أن الفرق بين كل حدين متتابعين ثابت، وأنه يساوي 4؛ أي إن المتتالية حسابية أساسها 4
25	$a_n = 4n - 3$
26	$397 = 4n - 3 \Rightarrow n = 100$ بما أن $n$ عدد صحيح موجب، إذن يوجد نموذج يحوي 397 نقطة.
27	$S_{30} = 2S_{20} \Rightarrow \frac{30}{2}(2a + 29d) = 2 \times \frac{20}{2}(2a + 19d)$ $\Rightarrow 20a + 435d = 40a + 380d$ $\Rightarrow 10a = 55d$ $\Rightarrow a = \frac{11}{2}d$
28	$400 = \frac{30}{2} \left( 2a + 29 \times \frac{2}{11}a \right) \Rightarrow a = \frac{11}{3}, d = \frac{2}{3}$
29	$a_1 = 1$ $a_2 = 1 + 6$ $a_3 = 1 + 6 + 12$ $a_4 = 1 + 6 + 12 + 18$ ... $S_{10} = 1 + \frac{9}{2}(6 + 54) = 271$



لهما المجموع نفسه لأن الجمع عملية تبديلية.



أما عند كتابتهما بصيغة المجموع فيكتبان بطريقتين مختلفتين لأنه يجب مراعاة ترتيب الحدود.

$$30 \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=1}^5 (2k - 1)$$

$$9 + 7 + 5 + 3 + 1 = \sum_{k=1}^5 (11 - 2k)$$

$$31 \quad \sum_{k=1}^5 (2k + 7) = 2 \left( \sum_{k=1}^5 k \right) + 7 \times 5 = 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 35 = 65$$

$$32 \quad 3, a - b, 3a - 4b, 2a + 2b$$

$$(a - b) - 3 = 3a - 4b - (a - b) \Rightarrow a - 2b = -3$$

$$(2a + 2b) - (3a - 4b) = (3a - 4b) - (a - b) \Rightarrow 3a - 9b = 0 \Rightarrow a = 3b$$

$$b = -3, a = -9$$

$$3, -6, -15, -24$$

$$a_1 = 3, d = -9$$

$$S_{25} = \frac{25}{2} (2(3) - (24) \times -9) = -2625$$

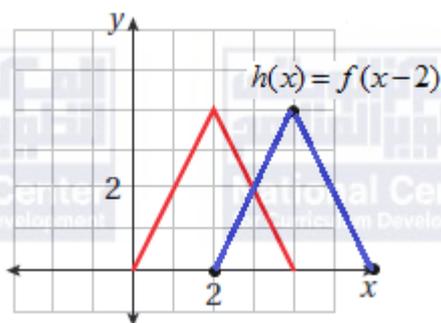


اختبار نهاية الوحدة الأولى

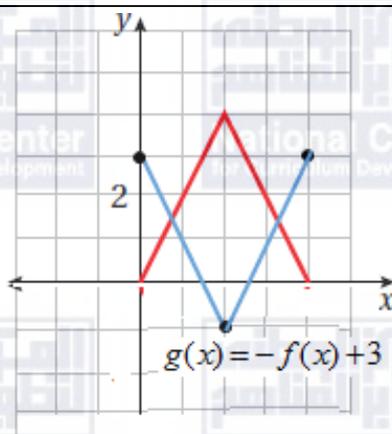
1	g
2	b
3	c
4	d
5	c
6	c
7	c
8	c
9	
10	



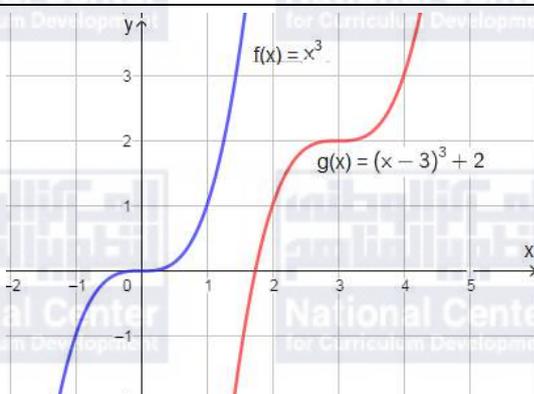
11



12



13





14	
15	$\sum_{k=1}^6 (k^2 + 1) = 97$
16	$\sum_{k=1}^4 \left(\frac{3}{2}\right)^k = \frac{195}{16}$
17	$\sum_{k=1}^4 \frac{1}{k^2 + 1} = \frac{73}{85}$
18	$\sum_{k=1}^{100} (3k + 4) = 5550$
19	$a_n = -9n + 209, \quad a_{20} = 29$
20	$a_n = -23n + 238, \quad a_{20} = -222$
21	$a_n = 11n - 14, \quad a_{20} = 206$
22	$a_n = -2n + 27, \quad a_{20} = -13$



23	$-299 = 7 - 6(n - 1) \rightarrow n = 52$ $S_{52} = \frac{52}{2}(7 - 299) = -7592$
24	$-0.1 = -10 + 0.1(n - 1) \Rightarrow n = 100$ $S_{100} = \frac{100}{2}(-10 - 0.1) = -505$
25	$\sum_{k=1}^{20} (88 - 3k) = 1130$
26	$S_{12} = \frac{12}{2}(2(120) + 11(-9)) = 846$
27	$a_1 = 20, a_2 = 24 \Rightarrow d = 24 - 20 = 4$ $504 = \frac{k}{2}(2(20) + 4(k - 1)) \Rightarrow k = 12$
28	$a_1 = 50, d = 5$ $S_{24} = \frac{24}{2}(2(50) + 5(23)) = 2580$



الوحدة الثانية: النهايات والمشتقات

الدرس الأول: النهايات والاتصال

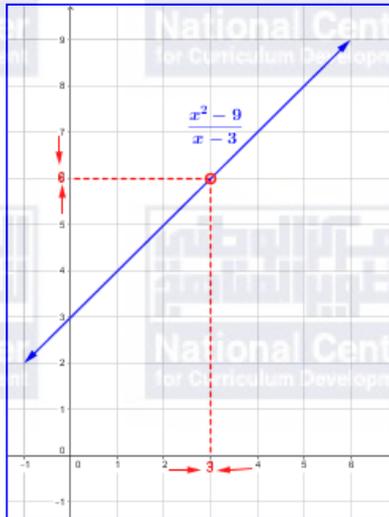
مسألة اليوم صفحة 50

تقترب المساحة المحصورة بين الدائرة والمضلع من الصفر

أتحقق من فهمي صفحة 54

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

الحل بيانيا



a

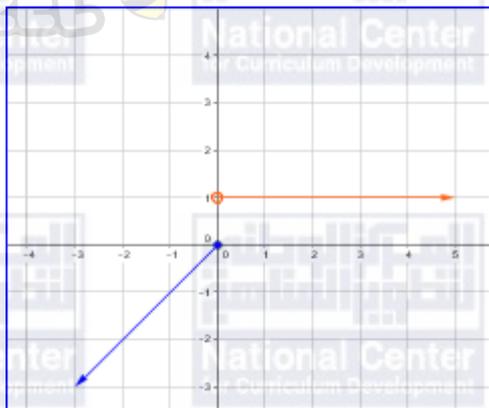
الحل عدديا

	اليسار ←			3	اليمين →			
$x$	2.9	2.99	2.999			3.001	3.01	3.1
$f(x)$	5.9	5.99	5.999			6.001	6.01	6.1
	اليسار ←			6	اليمين →			

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$



غير موجودة  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$



الحل بيانيا

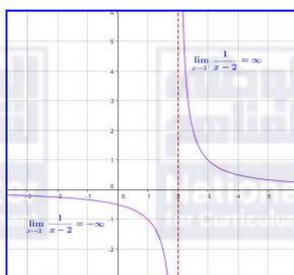
الحل عدديا:

	اليسار 0			اليمين			
$x$	-0.1	-0.01	-0.001		0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.1	-0.01	-0.001		1	1	1
	0 اليسار			اليمين 1			

غير موجودة  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

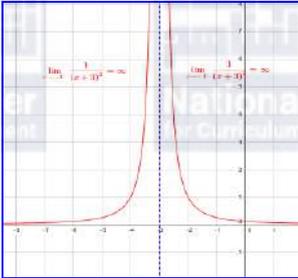
أتحقق من فهمي صفحة 56

غير موجودة  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$



a



b	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x+3)^2} = \infty$ 
<b>أتحقق من فهمي صفحة 58</b>	
a	$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 + 3x^2 - 4) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 + \lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 4) \\ &= 2(\lim_{x \rightarrow 1} x)^3 + 3(\lim_{x \rightarrow 1} x)^2 - 4 \\ &= 2(1)^3 + 3(1)^2 - 4 = 1 \end{aligned}$
b	$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+3x^2}}{3x-2} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{1+3(x)^2}}{\lim_{x \rightarrow 4} 3(x) - 2} \\ &= \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} 1 + 3(\lim_{x \rightarrow 4} x)^2}}{3\lim_{x \rightarrow 4} x - \lim_{x \rightarrow 4} 2} = \frac{\sqrt{1+3(4)^2}}{3(4) - 2} \\ &= \frac{\sqrt{49}}{10} = \frac{7}{10} \end{aligned}$
<b>أتحقق من فهمي صفحة 59</b>	
a	$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 4) \\ &= 3(2)^2 - 5(2) + 4 = 6 \end{aligned}$
b	$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-4x^2}$ <p>العدد 1- لا يقع ضمن مجال الاقتران فلذلك لا يمكن إيجاد النهاية بالتعويض المباشر</p>



c	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x - 6}{x^2 - 2} = \frac{3^3 - 5(3) - 6}{3^2 - 2} = \frac{6}{7}$
d	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = 8$

أنحقق من فهمي صفحة 61

a	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(7 - x)}{x}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} (7 - x) = 7$
b	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x + 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x + 4}}{x} \times \frac{2 + \sqrt{x + 4}}{2 + \sqrt{x + 4}}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - (x + 4)}{x(2 + \sqrt{x + 4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(2 + \sqrt{x + 4})}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2 + \sqrt{x + 4}} = \frac{-1}{4}$
c	$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x - 5}{x - 5} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{5 - x}{x - 5} = -1$ <p><math>\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} \frac{ x - 5 }{x - 5}</math> غير موجودة</p>

أنحقق من فهمي صفحة 64

a	الاقتران متصل عند $x = 1$ لأن: $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$
b	الاقتران غير متصل عند $x = 5$ لأن الاقتران غير معرف عند $x = 5$



$$h(3) = 5 - 3 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = 2$$

c

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 2$$

$$\Rightarrow h(3) = \lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 2$$

إذن الاقتران متصل عند  $x = 3$

$$p(5) = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} p(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} (x + 5) = 10$$

$$\Rightarrow p(5) = \lim_{x \rightarrow 5} p(x) = 10$$

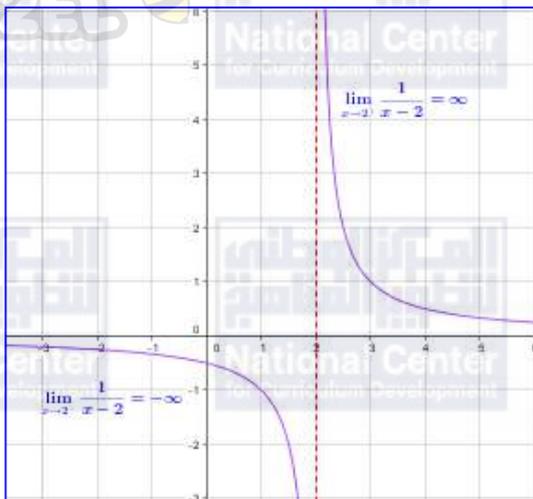
إذن الاقتران متصل عند  $x = 5$

d



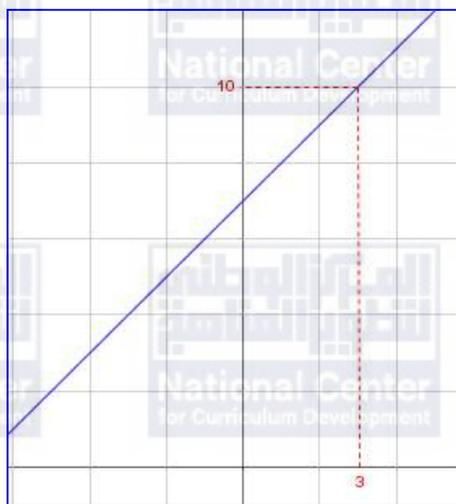
أُتدرب وأحل المسائل صفحة 64

غير موجودة  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$



1

$\lim_{x \rightarrow 3} (x + 7) = 10$



بيانيا

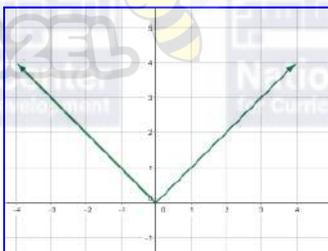
2

عدديا:

	اليسار ←			<b>3</b>	اليمن ←		
$x$	2.9	2.99	2.999		3.001	3.01	3.1
$f(x)$	9.7	9.99	9.999		10.001	10.01	10.1
	اليسار ←			<b>10</b>	اليمن ←		



$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$



بيانيا

3

	اليسار $\rightarrow$ 0			اليمين $\leftarrow$		
$x$	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
	$\rightarrow$ اليسار			اليمين $\leftarrow$		

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 5) = -4$$



بيانيا:

4

عدديا:

	اليسار $\rightarrow$ -1			اليمين $\leftarrow$		
$x$	-1.1	-1.01	-1.001	0.999	0.99	0.9
$f(x)$	3.79	3.97	-3.99	4.002	4.02	4.2
	$\rightarrow$ اليسار			اليمين $\leftarrow$		



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = 3$$

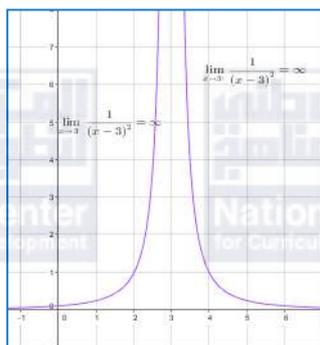


بيانياً:

5

	اليسار →			2	اليمين ←			
$x$	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1	
$f(x)$	3.22	3.02	3.002		2.99	2.98	2.81	
	→ اليسار			3	اليمين ←			

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$$



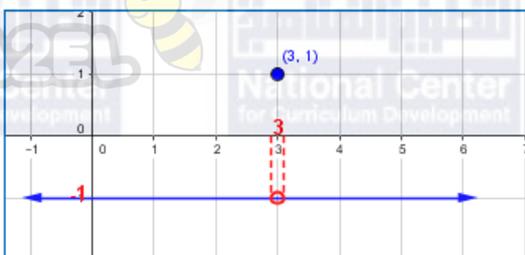
بيانياً:

6

	اليسار →			3	مين ←			
$x$	2.9	2.99	2.999		3.001	3.01	3.1	
$f(x)$	100	10000	1000000		1000000	10000	100	
	→ اليسار			∞	اليمين ←			



$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1$$

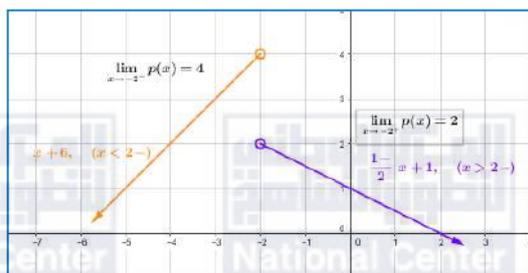


بيانياً:

عددياً:

	اليسار →			3	← اليمين		
$x$	2.9	2.99	2.999		3.001	3.01	3.1
$f(x)$	-1	-1	-1		-1	-1	-1
	اليسار →			-1	← اليمين		

$$\lim_{x \rightarrow -2} p(x) \text{ غير موجودة}$$



بيانياً:

	اليسار →			-2	← اليمين		
$x$	-	-	-		-	-1.99	-1.9
$f(x)$	3.9	3.99	3.999		1.999	1.995	1.95
	اليسار →			4	← اليمين		

$$9 \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 4x + 7) = 9 - 12 + 7 = 4$$



10	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{9 - 16}{3 - 4} = \frac{-7}{-1} = 7$
11	$\lim_{x \rightarrow 9} \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 = \left( 3 + \frac{1}{3} \right)^2 = \left( \frac{10}{3} \right)^2 = \frac{100}{9}$
12	$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2\pi} (x^3 + \pi x - 5\pi^3) \\ = 8\pi^3 + 2\pi^2 - 5\pi^3 \\ = 3\pi^3 + 2\pi^2 \end{aligned}$
13	$\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{\frac{x - 3}{2x + 4}} = \sqrt{\frac{-6}{-2}} = \sqrt{3}$
14	$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{x^2 + 11} \\ = \sqrt[3]{16 + 11} = 3 \end{aligned}$
15	$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x + 9) = 27 \end{aligned}$
16	$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{x + 1} \\ = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x + 3)(x + 1)}{x + 1} \\ = \lim_{x \rightarrow -1} (2x + 3) = 1 \end{aligned}$



17	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{ x - 2 } = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 1)(x - 2)}{ x - 2 }$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x + 1)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 1) = 3$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x + 1)(x - 2)}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-1)(x + 1) = -3$ <p><math>\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{ x - 2 }</math> غير موجودة</p>
18	$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ $= \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x - 7) = 2$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x - 1) = 2$ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$
19	$\lim_{t \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2}}{t - 4} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2}}{t - 4} \times \frac{\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}}$ $= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2}}{(t - 4)\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\right)} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{4 - t}{4t} \times \frac{1}{(t - 4)\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\right)} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{-1}{4t\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{-1}{16}$
20	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$ $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3} \times \frac{\sqrt{x + 1} + 2}{\sqrt{x + 1} + 2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1 - 4}{(x - 3)(\sqrt{x + 1} + 2)} = \frac{1}{4}$
21	$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$
22	$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ غير موجودة



23	$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = -1$
24	$\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ غير موجودة
25	$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 2$
26	$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ بما أن الاقتران كثير حدود فإن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5 = f(1) \Rightarrow a(1)^2 + b(1) + 0 = 5$ $\Rightarrow a + b = 5$ $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 8 = f(-2)$ $\Rightarrow a(-2)^2 + b(-2) + 0 = 8$ $\Rightarrow 4a - 2b = 8$ بحل نظام المعادلات الخطية الناتج بالحذف أو التعويض نجد ان $a = 3, b = 2$
27	$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x))$ $= 2 + 0 = 2$
28	$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3 + f(x)}$ $= \sqrt{3 + 1} = 2$
29	$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \times g(x)) = 0 \times \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$
30	متصل لأنه كثير حدود
31	متصل لأن الاقتران نسبي معرف عند $x = -5$



$$38) h(0) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 3$$

$$32) \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} h(x) \text{ غير موجودة}$$

إذن الاقتران غير متصل عند  $x = 0$

الاقتران متصل عند  $x = 3$  إذن

33

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \Rightarrow 3 + 3 = 2 + \sqrt{k}$$

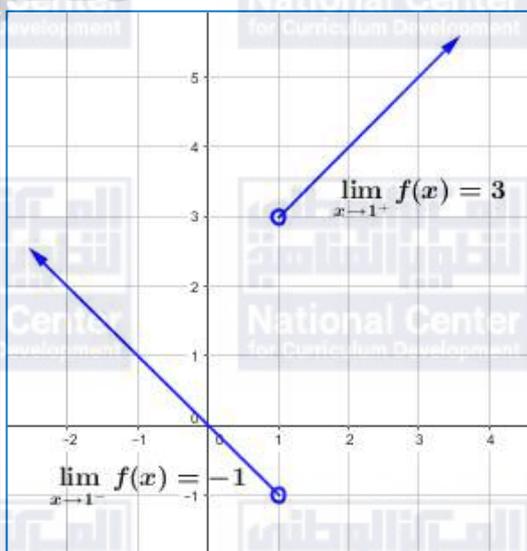
$$\Rightarrow 4 = \sqrt{k} \Rightarrow k = 16$$



$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + |x-1| - 1}{|x-1|}$  غير موجودة



بيانيا:



جبريا:

34

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + |x-1| - 1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 1 - 1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + |x-1| - 1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x + 1 - 1}{1-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x-1)}{1-x} = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + |x-1| - 1}{|x-1|} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + |x-1| - 1}{|x-1|}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + |x-1| - 1}{|x-1|} \text{ غير موجودة}$$



بما أن المقام صفر والنهاية موجودة إذن البسط صفر

$$\sqrt{m(0) + b} - 3 = 0$$

$$\sqrt{b} = 3 \Rightarrow b = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{mx + b} - 3}{x} \times \frac{\sqrt{mx + b} + 3}{\sqrt{mx + b} + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx + b - 9}{x(\sqrt{mx + b} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx + 9 - 9}{x(\sqrt{mx + 9} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{(\sqrt{mx + 9} + 3)}$$

$$= \frac{m}{3 + 3} = 1 \Rightarrow m = 6$$

35

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{a}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1-a(x-1)}{(x-1)(x^2-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 - ax + a}{(x-1)(x^2-1)}$$

36

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-a+1)}{(x-1)(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-a+1}{(x^2-1)}$$

بما أن المقام عند  $x = 1$  صفر والنهاية موجودة إذن البسط عند  $x = 1$  يجب أن يكون صفر

$$\Rightarrow 1 - a + 1 = 0 \Rightarrow a = 2$$

بتحليل البسط



الدرس الثاني: مشتقة اقتران القوة

مسألة اليوم صفحة 66

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(1) = -\frac{1}{1} = -1$$

ميل المنحنى عند النقطة (1,1) هو:

ميل منحنى الاقتران  $f(x)$  عند النقطة (1,1) هو نفسه ميل المستقيم L

أتحقق من فهمي صفحة 68

$$f(x) = 4x^2 + 1$$

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(-1+h)^2 + 1 - 5}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(1 - 2h + h^2) - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 8h + 4h^2 - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-8h + 4h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-8 + 4h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (-8 + 4h)$$

$$= -8$$



أتحقق من فهمي صفحة 68

$$f(x) = 8 - x^2$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 - (x+h)^2 - 8 + x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 - (x^2 + 2xh + h^2) - 8 + x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 - x^2 - 2xh - h^2 - 8 + x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2xh - h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-2x - h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (-2x - h)$$

$$= -2x$$

أتحقق من فهمي صفحة 69

a

$$y = x^{-11}$$

$$\frac{dy}{dx} = -11x^{-12}$$

b

$$y = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$$

$$\frac{dy}{dx} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$$

c

$$y = \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

أتحقق من فهمي صفحة 71



$$y = \sqrt{x} + \frac{4}{x^2}$$

$$= x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x^3}}$$

$$y = \frac{x^5 - 8x^6}{4x}$$

$$= \frac{x^5}{4x} - \frac{8x^6}{4x}$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - 2x^5$$

$$\frac{dy}{dx} = x^3 - 10x^4$$

b



أتحقق من فهمي صفحة 72

$$y = 8x - \frac{1}{x} = 8x - x^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 8 + x^{-2} = 8 + \frac{1}{x^2}$$

$$m_{\text{المماس}} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0.25} = 8 + \frac{1}{0.25^2} = 24$$

$$y - y_1 = m_{\text{المماس}}(x - x_1)$$

$$y - -2 = 24(x - 0.25)$$

$$y + 2 = 24x - 6$$

$$y = 24x - 8 \quad \text{معادلة المماس}$$

$$m_{\text{العمودي}} = \frac{-1}{m_{\text{المماس}}} = \frac{-1}{24}$$

$$y - y_1 = m_{\text{العمودي}}(x - x_1)$$

$$y - -2 = \frac{-1}{24}(x - 0.25)$$

$$y + 2 = \frac{-1}{24}x + \frac{1}{96}$$

$$y = \frac{-1}{24}x - \frac{191}{96} \quad \text{معادلة العمودي}$$



أتحقق من فهمي صفحة 74

a

$$f(x) = 1 - \sqrt{x}, f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$-\frac{1}{4} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2\sqrt{x} = 4$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

$$f(4) = 1 - \sqrt{4} = -1$$

نقطة التماس هي  $(4, -1)$

b

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2, f'(x) = 0$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$0 = -3x^2 + 6x$$

$$3x(-x + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ or } x = 2$$

$$f(0) = -2$$

$$f(2) = -8 + 12 - 2 = 2$$

نقطتا التماس هما  $(0, -2), (2, 2)$



أُتدرب وأحل المسائل صفحة 75

1

$$\begin{aligned}f(x) &= 4x^2, \quad x = 1 \\f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(1+h)^2 - (4)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(1 + 2h + h^2) - 4}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 8h + 4h^2 - 4}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8h + 4h^2}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(8 + 4h)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} (8 + 4h) = 8\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 - x^2, \quad x = -2 \\f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - (-2+h)^2 - (-3)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - (4 - 4h + h^2) + 3}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3 + 4h - h^2 + 3}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h - h^2}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4-h)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} (4 - h) = 4\end{aligned}$$



3

$$f(x) = x^2 + x, \quad x = 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 + (2+h) - 6}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4 + 4h + h^2) + (2 + h) - 6}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 + 5h + h^2 - 6}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(5+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (5 + h) = 5$$

4

$$f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad x = -1$$

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^2 - 2(-1+h) + 3 - 6}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - 2h + h^2) + (2 - 2h) - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 - 4h + h^2 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-4+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (-4 + h) = -4$$



5

$$f(x) = 4x + 1$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x+h) + 1 - (4x + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4x + 4h + 1 - 4x - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 4$$

$$= 4$$

$$y = 1 - x$$

6

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - (x+h) - (1 - x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - x - h - 1 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (-1)$$

$$= -1$$



$$f(x) = \frac{1}{2}x - 1$$



$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

7

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x+h) - 1 - (\frac{1}{2}x - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}h - 1 - \frac{1}{2}x + 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$



$$y = \frac{2x + 4}{6}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

8

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}(x+h) + \frac{2}{3} - (\frac{1}{3}x + \frac{2}{3})}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}h + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

9

$$y = 10x - \frac{6}{\sqrt{x}}$$

$$= 10x - 6x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 10 + 3x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 10 + \frac{3}{\sqrt{x^3}}$$



10	$y = x^8 - x^{-8}$ $\frac{dy}{dx} = 8x^7 + 8x^{-9}$ $= 8x^7 + \frac{8}{x^9}$
11	$y = 9x^{-2} + 3\sqrt{x}$ $= 9x^{-2} + 3x^{\frac{1}{2}}$ $\frac{dy}{dx} = -18x^{-3} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $= -\frac{18}{x^3} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$
12	$y = \frac{1 + \sqrt{x}}{x}$ $= \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$ $= x^{-1} + x^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{dy}{dx} = -x^{-2} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ $= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$
13	$y = \frac{6}{x^3} + \frac{2}{x^2} - 3$ $= 6x^{-3} + 2x^{-2} - 3$ $\frac{dy}{dx} = -18x^{-4} - 4x^{-3}$ $= -\frac{18}{x^4} - \frac{4}{x^3}$



14	$y = 20x^5 + 3\sqrt[3]{x} + 17$ $= 20x^5 + 3x^{\frac{1}{3}} + 17$ $\frac{dy}{dx} = 100x^4 + x^{-\frac{2}{3}}$ $= 100x^4 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
15	$y = x^2 - x$ $x = 4 \Rightarrow y = (4)^2 - 4 = 12 \Rightarrow (4,12) \text{ نقطة التماس}$ $\frac{dy}{dx} = 2x - 1$ $m_{\text{التماس}} = \left. \frac{dy}{dx} \right _{x=4} = 2(4) - 1 = 7$ $y - y_1 = m_{\text{التماس}}(x - x_1)$ $y - 12 = 7(x - 4)$ $y - 12 = 7x - 28$ $y = 7x - 16 \text{ معادلة التماس}$
16	$m_{\text{العمودي}} = \frac{-1}{m_{\text{التماس}}} = \frac{-1}{7}$ $y - y_1 = m_{\text{العمودي}}(x - x_1)$ $y - 12 = \frac{-1}{7}(x - 4)$ $y - 12 = \frac{-1}{7}x + \frac{4}{7}$ $y = \frac{-1}{7}x + \frac{88}{7} \text{ معادلة العمودي}$
17	$f(x) = \frac{24}{x} = 24x^{-1}$ $f'(x) = -24x^{-2} = -\frac{24}{x^2}$



18	<p>ميل المماس عند النقطة <math>(x, y)</math> التي تقع على منحنى الاقتران <math>f</math> هو <math>f'(x)</math> وبما أن المقدار <math>-\frac{24}{x^2}</math> سالب دائماً، إذن، ميل المماس سالب دائماً عند أي نقطة.</p> <p>نقطة التماس <math>(-4, -6) \Rightarrow x = -4 \Rightarrow -6 = \frac{24}{x} \Rightarrow y = -6</math></p> <p><math>m_{\text{المماس}} = f'(4) = -\frac{24}{(-4)^2} = -\frac{24}{16} = -\frac{3}{2}</math></p> <p><math>m_{\text{العمودي}} = \frac{-1}{m_{\text{المماس}}} = \frac{2}{3}</math></p>
19	<p><math>y - y_1 = m_{\text{العمودي}}(x - x_1)</math></p> <p><math>y + 6 = \frac{2}{3}(x + 4)</math></p> <p><math>y + 6 = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}</math></p> <p><math>y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}</math> معادلة العمودي</p>
20	<p><math>f(x) = x^2 - x - 12</math></p> <p><math>f'(x) = 2x - 1</math></p> <p><math>m_{\text{المماس}} = 3 \Rightarrow 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2</math></p> <p><math>y = f(2) = 2^2 - 2 - 12 = -10 \Rightarrow (2, -10)</math></p>



21	<p>مماس المنحنى أفقي أي <math>f'(x) = 0</math></p> $f'(x) = 3x^2 - 8x$ $3x^2 - 8x = 0$ $x(3x - 8) = 0$ <p><math>x = 0</math> أو <math>3x - 8 = 0 \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}</math></p> $f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 - 4 = -4$ $f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 4 = -\frac{364}{27}$ <p>النقاط هي <math>(0, -4), \left(\frac{8}{3}, -\frac{364}{27}\right)</math></p>
22	<p>ميل مماس المنحنى يساوي 1 أي <math>f'(x) = 1</math></p> $f'(x) = 10x - 49$ $1 = 10x - 49$ $10x = 50$ $x = 5$ $f(5) = 5(5)^2 - 49(5) + 12 = 125 - 245 + 12 = -108$ <p>النقطة هي <math>(5, -108)</math></p>
23	<p>معادلة المماس:</p> $f'(x) = 6 - 2x$ $f'(1) = 6 - 2 = 4$ $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 5 = 4(x - 1)$ $y - 5 = 4x - 4$ $y = 4x + 1$



24	$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$ $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 5 = -\frac{1}{4}(x - 1)$ $y - 5 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ $y = -\frac{1}{4}x + \frac{21}{4}$	معادلة العمودي على المماس:
25	$f'(x) = -2x$ $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 5 = 2(x + 1)$ $y - 5 = 2x + 2$ $y = 2x + 7$ $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - 5 = -2(x - 1)$ $y - 5 = -2x + 2$ $y = -2x + 7$	معادلة المماس عند النقطة $(-1, 5)$ :  معادلة المماس عند النقطة $(1, 5)$ :
26	$2x + 7 = -2x + 7$ $4x = 0$ $x = 0$ $y = -2(0) + 7 = 7$	نقطة تقاطع المماسين هي: $(0, 7)$



27	$y = x^2 + 4x$ $x = k \Rightarrow y = k^2 + 4k \Rightarrow (k, k^2 + 4k) \text{ نقطة التماس}$ $\frac{dy}{dx} = 2x + 4$ $m_{\text{التماس}} = \left. \frac{dy}{dx} \right _{x=k} = 2k + 4$ $y - y_1 = m_{\text{التماس}}(x - x_1)$ $y - k^2 - 4k = (2k + 4)(x - k)$ $y - k^2 - 4k = (2k + 4)x - 2k^2 - 4k$ $y = (2k + 4)x - k^2$ $y - (2k + 4)x + k^2 = 0 \quad \text{معادلة التماس}$
28	$m_{\text{العمودي}} = \frac{-1}{m_{\text{التماس}}} = \frac{-1}{2k + 4}$ $y - y_1 = m_{\text{العمودي}}(x - x_1)$ $y - k^2 - 4k = \frac{-1}{2k + 4}(x - k)$ $y - k^2 - 4k = \frac{-1}{2k + 4}x + \frac{k}{2k + 4}$ $y = \frac{-1}{2k + 4}x + \frac{k}{2k + 4} + k^2 + 4k$ $4y = \frac{-4}{2k + 4}x + \frac{4k}{2k + 4} + 4k^2 + 16k$ $4y + \frac{4}{2k + 4}x = \frac{4k}{2k + 4} + 4k^2 + 16k$ $\frac{4}{2k + 4} = 1 \Rightarrow k = 0$



29

$$f(x) = \frac{100}{x} = 100x^{-1}$$

$$f'(x) = -100x^{-2} = -\frac{100}{x^2}$$

$$m_{\text{المماس}} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = -\frac{100}{a^2}$$

$$y - \frac{100}{a} = -\frac{100}{a^2}(x - a)$$

$$y - \frac{100}{a} = -\frac{100}{a^2}x + \frac{100}{a}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{100}{a^2}x + \frac{200}{a} \quad \text{معادلة المماس}$$

يجب حساب المقطع  $x$  والمقطع  $y$  للمماس الذي معادلته

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{200}{a}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 2a$$

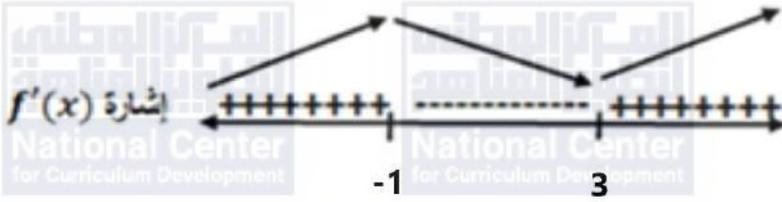
$$A = \frac{1}{2}(2a) \left( \frac{200}{a} \right) = 200$$



الدرس الثالث: القيم العظمى والصغرى

<b>مسألة اليوم صفحة 77</b>	
1	(0,20), (30,40)
2	(20,30), (50,80)
3	(40,50)
<b>أتحقق من فهمي صفحة 78</b>	
a	$f(x) = 6x^2 - 12x + 12$ $f'(x) = 12x - 12$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ النقطة الحرجة على منحنى الاقتران $f$ هي: $(1, f(1)) = (1, 6)$
b	$h(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x + 3$ $h'(x) = 2x^2 - 6x + 4$ $h'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0$ $\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ $\Rightarrow (x - 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 1$ النقطة الحرجة على منحنى الاقتران $f$ هي: $(1, f(1)) = (1, -\frac{10}{3}), (2, f(2)) = (2, \frac{13}{3})$
<b>أتحقق من فهمي صفحة 81</b>	
A	$f(x) = 6x^2 - 6x + 12$ $f'(x) = 12x - 6$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0.5$  إن، $f$ متناقص في الفترة $(-\infty, 0.5)$ ، ومنتزايد في الفترة $(0.5, \infty)$



b	$h(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 3$ $h'(x) = 3x^2 - 6x + 4$ $h'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 4 = 0$ <p>لكن مميز هذه العبارة التربيعية سالب، ومنه فإنه لا أصفار لهذه المشتقة، فيكون <math>h'(x) &gt; 0</math> لجميع قيم <math>x</math> الحقيقية. إذن، <math>h</math> متزايد على <math>\mathcal{R}</math></p>
<b>أنحقق من فهمي صفحة 82</b>	
a	$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$ $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$ $\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$ $\Rightarrow x = 3, x = -1$ $x = 3 \Rightarrow y = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) - 1 = -28$ $x = -1 \Rightarrow y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) - 1 = 4$ <p>النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: <math>(3, -28), (-1, 4)</math></p>
b	 <p>النقطة <math>(3, 15)</math> صغرى محلية، والنقطة <math>(-1, -5)</math> عظمى محلية.</p>



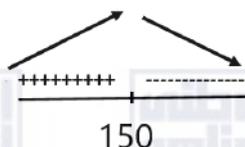
أتحقق من فهمي صفحة 84

$$P(t) = 120t - 0.4t^2 + 1000$$

$$P'(t) = 120 - 0.8t$$

$$120 - 0.8t = 0 \Rightarrow t = 150$$

$$P(150) = 120(150) - 0.4(150)^2 + 1000 = 10000$$



أكبر عدد يمكن أن تصل إليه الضفادع 10000 ضفدع

أتدرب وأحل المسائل صفحة 84

$$f(x) = x^2 - 6x + 10$$

$$f'(x) = 2x - 6$$

$$1 \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \\ \Rightarrow x = 3$$

النقطة الحرجة لهذا الاقتران هي: (3,1)

$$f(x) = 1 - 12x + 2x^2$$

$$f'(x) = 4x - 12$$

$$2 \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$$

النقطة الحرجة لهذا الاقتران هي: (3, -17)

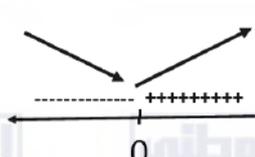
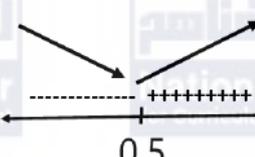
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$$

$$f'(x) = x^2 - 1$$

$$3 \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي:  $(1, -\frac{2}{3}), (-1, \frac{2}{3})$



4	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ $f'(x) = x^2 - 2x$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$ <p>النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي: <math>(0,0), (2, -\frac{4}{3})</math></p>
5	$f(x) = 4x + 3$ $f'(x) = 4$ <p>الاقتران <math>f</math> متزايد على مجموعة الأعداد الحقيقية</p>
6	$f(x) = 7 - 5x$ $f'(x) = -5$ <p>الاقتران <math>f</math> متناقص على مجموعة الأعداد الحقيقية</p>
7	$f(x) = x^2 + 7$ $f'(x) = 2x$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$  <p>الاقتران <math>f</math> متناقص على <math>(-\infty, 0)</math> و متزايد على <math>(0, \infty)</math></p>
8	$f(x) = x^2 - x$ $f'(x) = 2x - 1$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$  <p>الاقتران <math>f</math> متناقص على <math>(-\infty, 0.5)</math> و متزايد على <math>(0.5, \infty)</math></p>

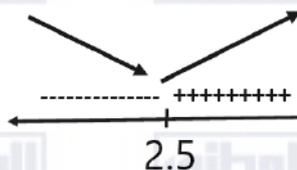


$$f(x) = x^2 - 5x + 2$$

$$f'(x) = 2x - 5$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

9



الاقتران  $f$  متناقص على  $(-\infty, 2.5)$  و متزايد على  $(2.5, \infty)$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2$$

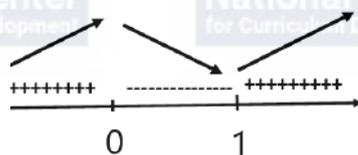
$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow 6x(x - 1) = 0$$

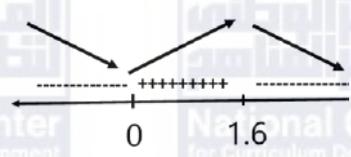
$$\Rightarrow x = 0, x = 1$$

10



الاقتران  $f$  متناقص على  $(0, 1)$  و متزايد على  $(-\infty, 0), (1, \infty)$



11	$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 20$ $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x + 3 = 0$ $\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$ $\Rightarrow (x + 1)^2 = 0$ $\Rightarrow x = -1$ <p style="text-align: center;"><math>f'(x)</math> إشارة</p>  <p style="text-align: right;">إذن، <math>f</math> متزايد على مجموعة الأعداد الحقيقية.</p>
12	$f(x) = 3x^2(12 - 5x) = 36x^2 - 15x^3$ $f'(x) = 72x - 45x^2$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 72x - 45x^2 = 0$ $\Rightarrow 9x(8 - 5x) = 0$ $\Rightarrow x = 0, x = \frac{8}{5} = 1.6$  <p style="text-align: right;">الاقتران <math>f</math> متزايد على <math>(0, 1.6)</math> ومتناقص على <math>(-\infty, 0), (1.6, \infty)</math></p>



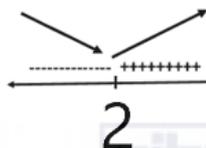
$$f(x) = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2$$

13



الاقتران  $f$  متناقص على  $(-\infty, 2)$  و متزايد على  $(2, \infty)$

$$f(x) = 2x^3 - x^4$$

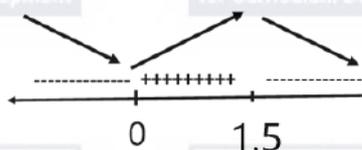
$$f'(x) = 6x^2 - 4x^3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 4x^3 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2(3 - 2x) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = \frac{3}{2} = 1.5$$

14



الاقتران  $f$  متزايد على  $(0, 1.5)$  و متناقص على  $(-\infty, 0)$  و  $(1.5, \infty)$



$$y = x^3 + 6x^2 - 15x - 90$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 12x - 15$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 12x - 15 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x + 5) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, x = -5$$

15

$$x = 1 \Rightarrow y = (1)^3 + 6(1)^2 - 15(1) - 90 = -98$$

$$x = -5 \Rightarrow y = (-5)^3 + 6(-5)^2 - 15(-5) - 90 = 10$$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي:  $(-5, 10), (1, -98)$



النقطة  $(1, -98)$  صغرى محلية، والنقطة  $(-5, 10)$  عظمى محلية.

$$y = -(x - 2)^3 + 1 = -(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + 1 = -x^3 + 6x^2 - 12x + 9$$

$$\frac{dy}{dx} = -3x^2 + 12x - 12$$

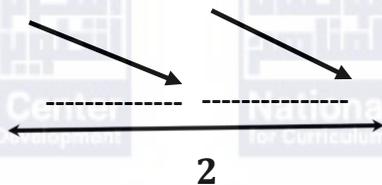
$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow -3x^2 + 12x - 12 = 0 \Rightarrow -3(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow -3(x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

16

$$x = 2 \Rightarrow y = -(2 - 2)^3 + 1 = 1$$

النقطة الحرجة لهذا الاقتران هي:  $(2, 1)$



النقطة  $(2, 1)$  نقطة انعطاف أفقي.



$$f(x) = x^4 - x^3$$

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(4x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

$$17 \quad x = \frac{3}{4} \Rightarrow f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{81}{256} - \frac{27}{64} = -\frac{27}{256}$$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي:  $\left(\frac{3}{4}, -\frac{27}{256}\right), (0,0)$



النقطة  $\left(\frac{3}{4}, -\frac{27}{256}\right)$  صغرى محلية، والنقطة  $(0,0)$  انعطاف أفقي.



18

$$f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 3$$

$$f'(x) = 12x^3 + 48x^2 + 48x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 + 48x^2 + 48x = 0$$

$$\Rightarrow x^3 + 4x^2 + 4x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow x(x + 2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = -2$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 3(0)^4 + 16(0)^3 + 24(0)^2 + 3 = 3$$

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = 3(-2)^4 + 16(-2)^3 + 24(-2)^2 + 3 = -13$$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي:  $(-2, -13), (0, 3)$



النقطة  $(0, 3)$  صغرى محلية، والنقطة  $(-2, -13)$  نقطة انعطاف أفقي.

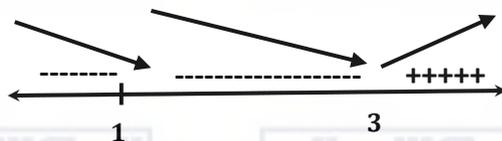
19

$$f'(x) = (x - 1)^2(x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$$

قيم  $x$  التي يكون عندها نقاط حرجة لهذا الاقتران هي:  $x = 1, x = 3$

$$f'(x) = (x - 1)^2(x - 3)$$



إذن، عند  $x = 3$  توجد قيمة صغرى محلية، وعند  $x = 1$  توجد نقطة انعطاف أفقي.



20	$V(x) = 18x - \frac{2}{3}x^3$ $V'(x) = 18 - 2x^2$ $V'(x) = 0 \Rightarrow 18 - 2x^2 = 0$ $\Rightarrow 2(9 - x^2) = 0$ $\Rightarrow 2(3 - x)(3 + x) = 0$ $\Rightarrow x = 3, x = -3$ <p>يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن عندما <math>x = 3</math></p>
21	$y = x^3 + ax^2 + b$ $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax$ $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2ax = 0$ $\Rightarrow x(3x + 2a) = 0$ $\Rightarrow x = 0, x = -\frac{2}{3}a$ <p>إذن، للاقتران نقطة حرجة عندما <math>x = 0</math> أي عند تقاطعه مع المحور <math>y</math></p> <p>إذا كان <math>a &gt; 0</math> يكون ترتيب أصفار المشتقة على خط الأعداد كالاتي:</p>
22	<p>إذن، للاقتران قيمة صغرى محلية عندما <math>x = 0</math></p>



23

$$f(2) = 4a - 8 + c = -7 \Rightarrow 4a + c = 1$$

$$f'(x) = 2ax - 4$$

$$f'(2) = 4a - 4 = 0 \Rightarrow a = 1, c = -3$$

24

$$y = px^3 - 4px^2 + 5x - 11, p > 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 3px^2 - 8px + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 3px^2 - 8px + 5 = 0$$

$$\Delta = (-8p)^2 - 4(3p)(5) = 64p^2 - 60p$$

حتى يكون للاقتران نقطتان حرجتان يجب أن يكون مميز هذه العبارة التربيعية موجباً.

$$64p^2 - 60p > 0 \Rightarrow 4p(16p - 15) > 0$$

$$\Rightarrow p \in \left(\frac{15}{16}, \infty\right)$$



الدرس الرابع: المشتقة الثانية وتطبيقاتها

مسألة اليوم صفحة 86

$$\begin{aligned}v(t) &= t + 15 \\a(t) &= 1 \\a(3) &= 1 \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

أتحقق من فهمي صفحة 87

a

$$\begin{aligned}f'(x) &= 4x^3 - 6x \\f''(x) &= 12x^2 - 6\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{2}{x^3} = 2x^{-3} \\f'(x) &= -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4} \\f''(x) &= 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}\end{aligned}$$

أتحقق من فهمي صفحة 89

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 4x - 4 \\3x^2 - 4x - 4 &= 0 \\(3x + 2)(x - 2) &= 0 \\x &= -\frac{2}{3} \quad \text{أو} \quad x = 2\end{aligned}$$

القيم الحرجة هي:  $x = 2$  و  $x = -\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}f''(x) &= 6x - 4 \\f''\left(-\frac{2}{3}\right) &= 6\left(-\frac{2}{3}\right) - 4 = -8 < 0 \\f''(2) &= 6(2) - 4 = 8 > 0\end{aligned}$$

توجد قيمة عظمى محلية عندما  $x = -\frac{2}{3}$  وهي  $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{175}{27}$   
توجد قيمة صغرى محلية عندما  $x = 2$  وهي  $f(2) = -3$



أتحقق من فهمي صفحة 90

$$f(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3$$

$$f'(x) = 4x^3 - 8x^2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 8x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 16 - \frac{64}{3} = -\frac{26}{3}$$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي:  $(0,0), (2, -\frac{26}{3})$

$$f''(x) = 12x^2 - 16x$$

$$f''(2) = 48 - 32 = 16 > 0$$

إذن،  $(2, -\frac{26}{3})$  نقطة صغرى محلية

a

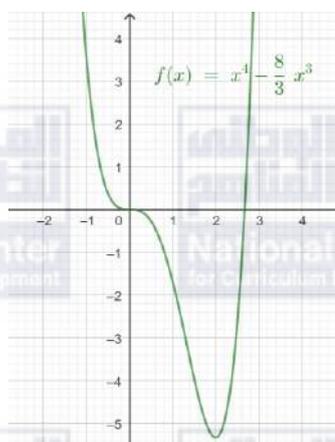
$$f''(0) = 0$$

يجب دراسة إشارة المشتقة الأولى حول  $x = 0$  لتحديد نوع النقطة.

$$f'(-1) = 4(-1)^3 - 8(-1)^2 = -12$$

$$f'(1) = 4(1)^3 - 8(1)^2 = -4$$

إذن،  $(0,0)$  نقطة انعطاف أفقي.





$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3, x = -1$$

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 4 = -23$$

$$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 4 = 9$$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي:  $(3, -23), (-1, 9)$

$$f''(x) = 6x - 6$$

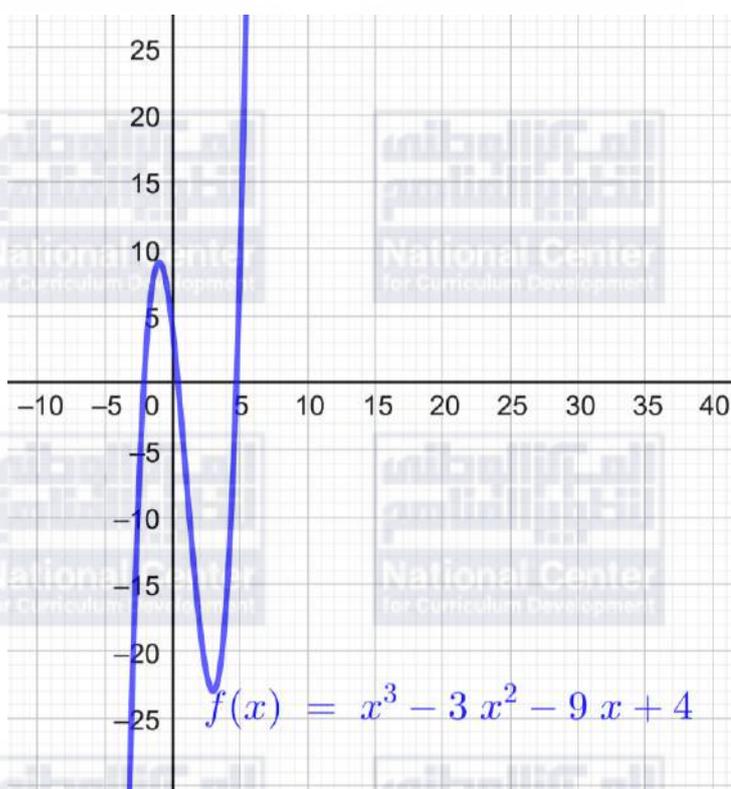
$$f''(3) = 6(3) - 6 = 12 > 0$$

$$f''(-1) = 6(-1) - 6 = -12 < 0$$

إذن،  $(3, -23)$  نقطة صغيرة محلية

إذن،  $(-1, 9)$  نقطة عظمى محلية

b





أنحقق من فهمي صفحة 92	
a	$v(t) = 6t - 3t^2$ $v(3) = 6(3) - 3(3)^2 = 18 - 27 = -9 \text{ m/s}$
b	بما أن إشارة السرعة سالبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب عندما $t = 3$
c	$a(t) = 6 - 6t$ $a(3) = 6 - 6(3) = -12 \text{ m/s}^2$
d	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته 0 $6t - 3t^2 = 0$ $3t(2 - t) = 0$ $t = 0$ أو $t = 2$
أنحقق من فهمي صفحة 94	
a	$v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ $v(3) = 3(3)^2 - 12(3) + 9 = 27 - 36 + 9 = 0 \text{ m/s}$
b	$a(t) = 6t - 12$ $a(3) = 6(3) - 12 = 6 \text{ m/s}^2$
c	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته 0 $3t^2 - 12t + 9 = 0$ $t^2 - 4t + 3 = 0$ $(t - 1)(t - 3) = 0$ $t = 1$ أو $t = 3$
أتدرب وأحل المسائل صفحة 94	
1	$f'(x) = 9x^2 - 8x + 5$ $f''(x) = 18x - 8$
2	$f'(x) = -6x^{-4}$ $f''(x) = 24x^{-5}$
3	$f(x) = x^3 - \frac{5}{x} = x^3 - 5x^{-1}$ $f'(x) = 3x^2 + 5x^{-2}$ $f''(x) = 6x - 10x^{-3}$



4	$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$
5	$f'(x) = -4 + 2x - 3x^2$ $f''(x) = 2 - 6x$
6	$f(x) = 8x^3 - 3x + \frac{4}{x} = 8x^3 - 3x + 4x^{-1}$ $f'(x) = 24x^2 - 3 - 4x^{-2}$ $f''(x) = 48x + 8x^{-3}$ $f''(-2) = 48(-2) + 8(-2)^{-3} = -96 - 1 = -97$
7	$f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ $f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4\sqrt{x}}$ $f''(4) = \frac{3}{8}$



$$y = x^4 - 2x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow 4x(x + 1)(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = -1, x = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow y = (0)^4 - 2(0)^2 = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^4 - 2(-1)^2 = -1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = (1)^4 - 2(1)^2 = -1$$

8

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي:  $(0,0), (1, -1), (-1, -1)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 4$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = 12(0)^2 - 4 = -4 < 0$$

إذن،  $(0,0)$  نقطة عظمى محلية

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=1} = 12(1)^2 - 4 = 8 > 0$$

إذن،  $(1, -1)$  نقطة صغرى محلية

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=-1} = 12(-1)^2 - 4 = 8 > 0$$

إذن،  $(-1, -1)$  نقطة صغرى محلية



$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$$

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 - 24x^2 + 12x = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 2x^2 + x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 3(0)^4 - 8(0)^3 + 6(0)^2 = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 3(1)^4 - 8(1)^3 + 6(1)^2 = 1$$

9

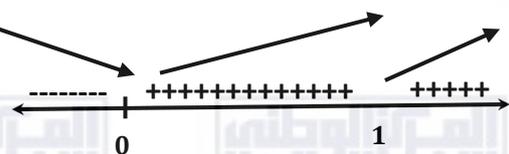
النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي:  $(0,0), (1,1)$

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12$$

$$f''(0) = 36(0)^2 - 48(0) + 12 = 12 > 0$$

$$f''(1) = 36(1)^2 - 48(1) + 12 = 0$$

إذن،  $(0,0)$  نقطة صغرى محلية



إذن،  $(1,1)$  نقطة انعطاف أفقي



$$y = x^2(x - 4) = x^3 - 4x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x = 0$$

$$\Rightarrow x(3x - 8) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = \frac{8}{3}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = (0)^2(0 - 4) = 0$$

$$x = \frac{8}{3} \Rightarrow y = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \left(\frac{8}{3} - 4\right) = -\frac{64}{27}$$

10

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 8$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = 6(0) - 8 = -8 < 0$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=\frac{8}{3}} = 6\left(\frac{8}{3}\right) - 8 = 8 > 0$$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي:  $(0,0), \left(\frac{8}{3}, -\frac{64}{27}\right)$

إذن،  $(0,0)$  نقطة عظمى محلية

إذن،  $\left(\frac{8}{3}, -\frac{64}{27}\right)$  نقطة صغرى محلية



$$y = x^5 - 5x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 15x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 5x^4 - 15x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 5x^2(x^2 - 3) = 0$$

$$\Rightarrow 5x^2(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = (0)^5 - 5(0)^3 = 0$$

$$x = -\sqrt{3} \Rightarrow y = (-\sqrt{3})^5 - 5(-\sqrt{3})^3 = 6\sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{3} \Rightarrow y = (\sqrt{3})^5 - 5(\sqrt{3})^3 = -6\sqrt{3}$$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي:  $(0,0), (\sqrt{3}, -6\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$

$$11 \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - 30x$$

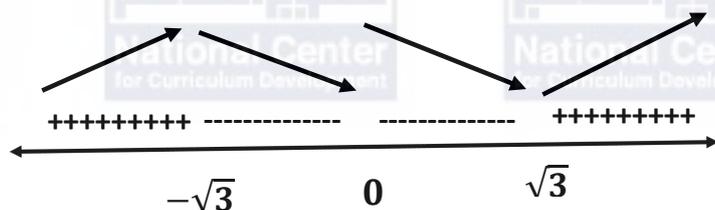
$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=-\sqrt{3}} = 20(-\sqrt{3})^3 - 30(-\sqrt{3}) = -30\sqrt{3} > 0$$

إذن،  $(-\sqrt{3}, -30\sqrt{3})$  نقطة عظمى محلية

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=\sqrt{3}} = 20(\sqrt{3})^3 - 30(\sqrt{3}) = 30\sqrt{3} > 0$$

إذن،  $(\sqrt{3}, 30\sqrt{3})$  نقطة صغرى محلية

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = 20(0)^3 - 30(0) = 0$$



إذن،  $(0,0)$  نقطة انعطاف أفقي



$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1, x = 3$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 15 = 20$$

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 15 = -12$$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي:  $(-1, 20), (3, -12)$

$$f''(x) = 6x - 6$$

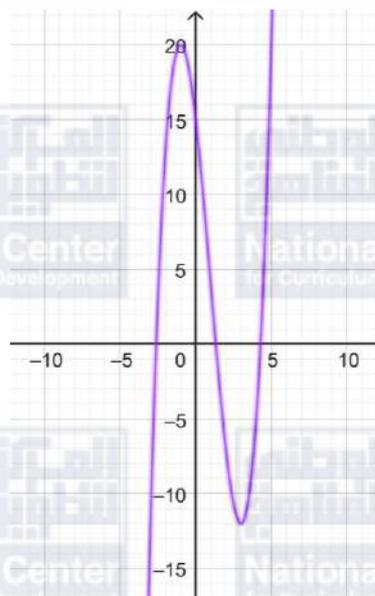
$$f''(-1) = 6(-1) - 6 = -12 < 0$$

$$f''(3) = 6(3) - 6 = 12 > 0$$

إذن،  $(-1, 20)$  نقطة عظمى محلية

إذن،  $(3, -12)$  نقطة صغرى محلية

12





$$y = x^2 - 12x - 20$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 12$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow x = 6$$

$$x = 6 \Rightarrow y = (6)^2 - 12(6) - 20 = -56$$

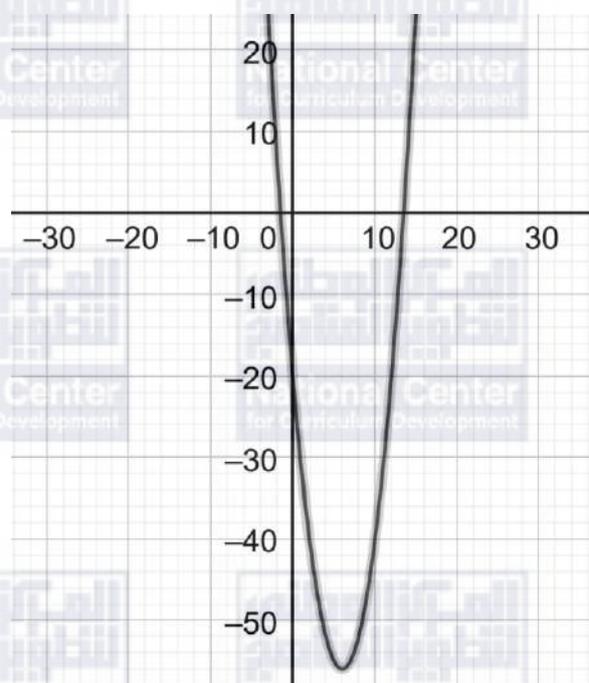
النقطة الحرجة لهذا الاقتران هي:  $(6, -56)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=6} = 2 > 0$$

13

إذن،  $(6, -36)$  نقطة صغرى محلية





$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 180x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 180$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x - 180 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 60 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 6)(x - 10) = 0$$

$$\Rightarrow x = -6, x = 10$$

$$x = -6 \Rightarrow f(-6) = (-6)^3 - 6(-6)^2 - 180(-6) = 648$$

$$x = 10 \Rightarrow f(10) = (10)^3 - 6(10)^2 - 180(10) = -1400$$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي:  $(-6, 648), (10, -1400)$

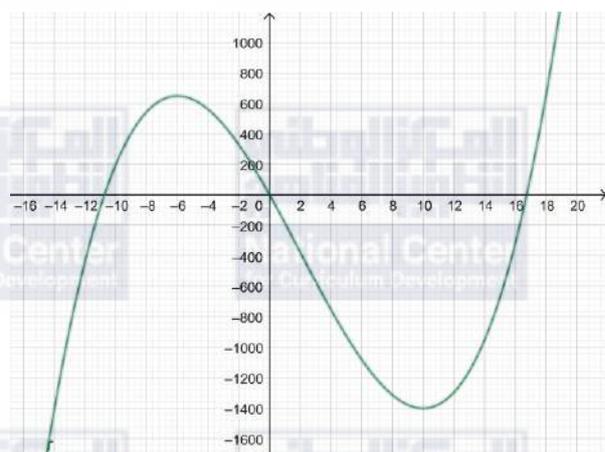
$$f''(x) = 6x - 12$$

$$14 \quad f''(-6) = 6(-6) - 12 = -48 < 0$$

$$f''(10) = 6(10) - 12 = 48 > 0$$

إذن،  $(-6, 648)$  نقطة عظمى محلية

إذن،  $(10, -1400)$  نقطة صغرى محلية





$$y = 2x^4 - 15x^2 + 12$$

$$\frac{dy}{dx} = 8x^3 - 30x$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 8x^3 - 30x = 0 \Rightarrow 2x(4x^2 - 15) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = -\frac{\sqrt{15}}{2}, x = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 12$$

$$x = -\frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow y = -\frac{129}{8}$$

$$x = \frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow y = -\frac{129}{8}$$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي:  $(0,12), \left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{129}{8}\right), \left(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{129}{8}\right)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 24x^2 - 30$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = -30 < 0$$

15

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=-\frac{\sqrt{15}}{2}} = 60 > 0$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=\frac{\sqrt{15}}{2}} = 60 > 0$$

إذن،  $(0,12)$  نقطة عظمى محلية

إذن،  $\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{129}{8}\right)$  نقطة صغرى محلية

إذن،  $\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{129}{8}\right)$  نقطة صغرى محلية





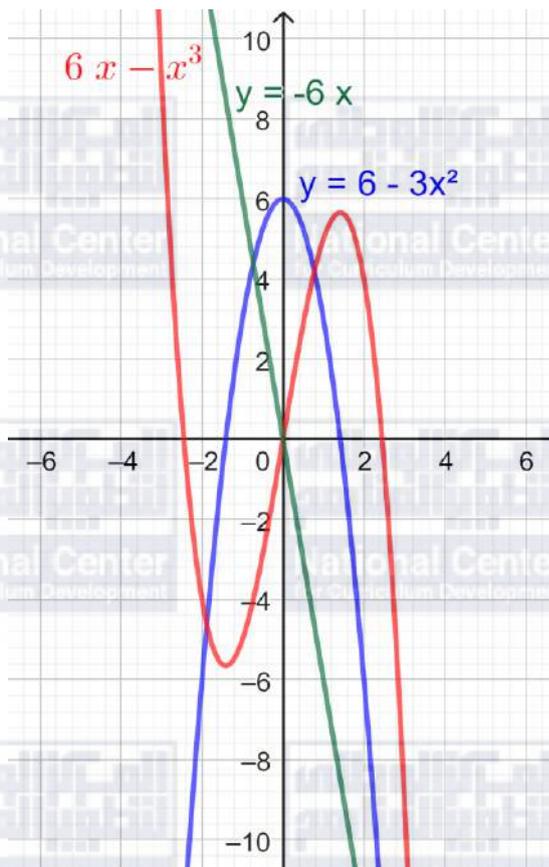
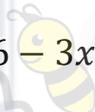
16	$v(t) = 5t^4 - 40t$ $v(3) = 5(3)^4 - 40(3) = 405 - 120 = 285 \text{ m/s}$
17	بما أن إشارة السرعة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب عندما $t = 3$
18	$a(t) = 20t^3 - 40$ $a(3) = 20(3)^3 - 40 = 540 - 40 = 500 \text{ m/s}^2$
19	يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته 0 $5t^4 - 40t = 0$ $5t(t^3 - 8) = 0$ $t = 0$ أو $t = 2$
20	$v(t) = 2t - 8$ $v(6) = 2(6) - 8 = 4 \text{ m/s}$
21	$a(t) = 2$ $a(6) = 2 \text{ m/s}^2$
22	يكون رامي في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته 0 $2t - 8 = 0 \Rightarrow t = 4$



$$y = x(6 - x^2) = 6x - x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 6 - 3x^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -6x$$



23

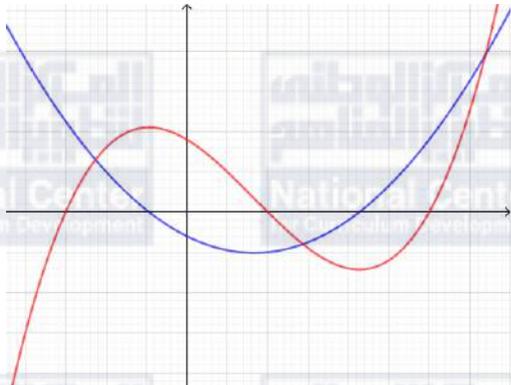
نلاحظ أنه في الفترة التي يكون فيها منحنى الاقتران متزايداً، تكون إشارة مشتقته موجبة، أي أن منحنى المشتقة فوق المحور  $x$

و في الفترة التي يكون فيها منحنى الاقتران متناقصاً، تكون إشارة مشتقته سالبة، أي أن منحنى المشتقة تحت المحور  $x$

24

و عند قيم  $x$  التي تكون عظمى محلية أو صغرى محلية في منحنى الاقتران، تكون مشتقته صفراً، أي أن منحنى المشتقة يقطع المحور  $x$



25	
26	$v(t) = 3t^2 - 12$ $a(t) = 6t$ $a(t) = 0 \rightarrow 6t = 0 \rightarrow t = 0$ $v(0) = 3(0)^2 - 12 = -12 \text{ m/s}$
27	$v(t) = 6t^2 - 24$ $a(t) = 12t$ $v(t) = 0 \rightarrow 6t^2 - 24 = 0 \rightarrow t^2 = 4 \rightarrow t = 2$ $a(2) = 12(2) = 24 \text{ m/s}^2$



الدرس الخامس: تطبيقات القيم القصوى

مسألة اليوم صفحة 96

$$S = 4xy + x^2$$

$$V = x^2y$$

$$0.2 = x^2y \rightarrow y = \frac{0.2}{x^2}$$

$$S = 4xy + x^2$$

$$S(x) = 4x \left( \frac{0.2}{x^2} \right) + x^2 = \frac{0.8}{x} + x^2$$

$$S'(x) = \frac{-0.8}{x^2} + 2x$$

$$\frac{-0.8}{x^2} + 2x = 0 \rightarrow 2x = \frac{0.8}{x^2} \rightarrow 2x^3 = 0.8 \rightarrow x^3 = 0.4 \rightarrow x = \sqrt[3]{0.4}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي  $x = \sqrt[3]{0.4}$

$$S''(x) = \frac{1.6}{x^3} + 2$$

$$S''(\sqrt[3]{0.4}) = \frac{1.2}{(\sqrt[3]{0.4})^3} + 2 = 5 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما  $x = \sqrt[3]{0.4}$  ،

وتكون أبعاد الحوض التي تجعل كمية الزجاج المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$x = \sqrt[3]{0.4} \text{ m} , \quad y = \frac{0.2}{(\sqrt[3]{0.4})^2} \text{ m}$$



أتحقق من فهمي صفحة 98

$$A = xy$$

$$P = 2x + 2y$$

$$54 = 2x + 2y$$

$$27 = x + y \rightarrow y = 27 - x$$

$$A = xy$$

$$A(x) = x(27 - x)$$

$$= 27x - x^2$$

$$A'(x) = 27 - 2x$$

$$27 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{27}{2}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي  $x = \frac{27}{2}$

$$A''(x) = -2 \rightarrow A''\left(\frac{27}{2}\right) = -2 < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما  $x = \frac{27}{2}$  ، وتكون أكبر مساحة ممكنة لسطح الحظيرة هي:

$$A\left(\frac{27}{2}\right) = \frac{729}{4} = 182.25 \text{ m}^2$$

مساحة المستطيل

محيط المستطيل



أتحقق من فهمي صفحة 100

$$S = 4xh + 2x^2$$
$$V = x^2h$$
$$2 = x^2h \rightarrow h = \frac{2}{x^2}$$

$$S = 4xh + 2x^2$$

$$S(x) = 4x\left(\frac{2}{x^2}\right) + 2x^2 = \frac{8}{x} + 2x^2$$

$$S'(x) = \frac{-8}{x^2} + 4x$$

$$\frac{-8}{x^2} + 4x = 0 \rightarrow 4x = \frac{8}{x^2} \rightarrow 4x^3 = 8 \rightarrow x^3 = 2 \rightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي  $x = \sqrt[3]{2}$

$$S''(x) = \frac{16}{x^3} + 4$$

$$S''(\sqrt[3]{2}) = \frac{16}{(\sqrt[3]{2})^3} + 4 = 12 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما  $x = \sqrt[3]{2}$ ،

وتكون أبعاد الخزان التي تجعل كمية المعدن المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$l = x = \sqrt[3]{2} \text{ m}, \quad w = x = \sqrt[3]{2} \text{ m}, \quad h = \frac{2}{(\sqrt[3]{2})^2} = \sqrt[3]{2} \text{ m}$$



أتحقق من فهمي صفحة 102



$$V = x^2h$$

$$A = 4xh + x^2$$

$$54 = 4xh + x^2 \rightarrow 4xh = 54 - x^2 \rightarrow h = \frac{54 - x^2}{4x}$$

$$V = x^2h$$

$$V(x) = x^2 \left( \frac{54 - x^2}{4x} \right)$$

$$= \frac{54x - x^3}{4}$$

$$= \frac{54}{4}x - \frac{1}{4}x^3$$

$$V'(x) = \frac{54}{4} - \frac{3}{4}x^2$$

$$\frac{54}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 0 \rightarrow 54 - 3x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{54}{3} = 18 \rightarrow x = \pm\sqrt{18}$$

بما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا، فإنه توجد قيمة حرجة واحدة هي  $x = \sqrt{18}$

$$V''(x) = -\frac{3}{2}x$$

$$V''(\sqrt{18}) = -\frac{3}{2}\sqrt{18} < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما  $x = \sqrt{18}$ ، وتكون أبعاد الخزان التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن هي:

$$l = x = \sqrt{18} \text{ m}, \quad w = x = \sqrt{18} \text{ m}, \quad h = \frac{54 - 18}{4\sqrt{18}} = \frac{9}{\sqrt{18}} \text{ m}$$



أتحقق من فهمي صفحة 103

$$R(x) = (1750 - 2x)x = 1750x - 2x^2$$

$$C(x) = 2250 + 18x$$

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = 1750x - 2x^2 - 2250 - 18x \\ = 1732x - 2x^2 - 2250$$

$$P'(x) = 1732 - 4x$$

$$1732 - 4x = 0 \rightarrow x = \frac{1732}{4} = 433$$

$$P''(x) = -4 \rightarrow P''(433) = -4 < 0$$

اقتران الإيراد

اقتران التكلفة

اقتران الربح

توجد قيمة حرجة واحدة هي  $x = 433$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما  $x = 433$

ومنه فإنه لتحقيق أكبر ربح ممكن يجب إنتاج وبيع 433 ثلاجة.

أتدرب وأحل المسائل صفحة 104

$$P = AB + BC + CD$$

$$300 = AB + x + AB$$

$$300 = 2AB + x$$

$$300 - x = 2AB$$

$$AB = \frac{300 - x}{2} = 150 - \frac{1}{2}x$$

محيط الحديقة من دون الجدار

$$A = BC \times AB$$

$$A(x) = x \times \left(150 - \frac{1}{2}x\right)$$

$$= 150x - \frac{1}{2}x^2$$

مساحة الحديقة المستطيلة

$$A'(x) = 150 - x$$

$$150 - x = 0$$

$$x = 150$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي  $x = 150$

$$A''(x) = -1$$

$$A''(150) = -1 < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى عندما  $x = 150$  ، ويكون بعدا الحديقة اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن هما:

$$BC = x = 150 \text{ m} , AB = 150 - \frac{1}{2}x = 150 - \frac{1}{2}(150) = 75 \text{ m}$$



نفرض  $x$  طول الحقل المستطيل الشكل، و  $y$  عرضه.

$$A = xy = 216 \Rightarrow y = \frac{216}{x}$$

$$P = 2x + 3y = 2x + 3\left(\frac{216}{x}\right) = 2x + 648x^{-1}$$

$$P'(x) = 2 - 648x^{-2} = 2 - \frac{648}{x^2} = \frac{2x^2 - 648}{x^2}$$

$$4 \quad P'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 648 = 0 \Rightarrow x^2 = 324 \Rightarrow x = \sqrt{324} = 18$$

$$P''(\sqrt{324}) = \frac{1296}{18^3} > 0$$

إذن، يكون طول السياج أقل ما يمكن عندما تكون الأبعاد كالآتي:

$$x = 18 \text{ m} , y = \frac{216}{18} = 72 \text{ m}$$

وعندها يكون طول السياج كاملاً هو:

$$P = 2(18) + 3(72) = 252 \text{ m}$$

$$V = lwh$$

حجم العربة

$$V(x) = (48 - 2x)(30 - 2x)x$$

$$5 \quad = (1440 - 96x - 60x + 4x^2)x$$

$$= (1440 - 156x + 4x^2)x$$

$$= 1440x - 156x^2 + 4x^3$$



6	$V'(x) = 1440 - 312x + 12x^2$ $12x^2 - 312x + 1440 = 0$ $x^2 - 26x + 120 = 0$ $(x - 20)(x - 6) = 0$ $x = 20 \quad \text{or} \quad x = 6$ <p>توجد قيمتان حرجتان هما <math>x = 20</math> و <math>x = 6</math></p> $V''(x) = -312 + 24x$ $V''(20) = -312 + 24(20) = -312 + 480 = 168 > 0$ $V''(6) = -312 + 24(6) = -312 + 144 = -168 < 0$ <p>توجد قيمة عظمى عندما <math>x = 6</math> ، إذن يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن عندما <math>x = 6</math></p>	
7	$p(x) = 150 - 0.035x$ $R(x) = (150 - 0.035x)x = 150x - 0.035x^2$	سعر المنتج الواحد هو اقتران الإيراد
8	$R'(x) = C'(x)$ $150 - 0.07x = 10 + 0.18x$ $150 - 10 = 0.07x + 0.18x$ $140 = 0.25x$ $x = \frac{140}{0.25} = 560$	الإيراد الحدي: $R'(x) = 150 - 0.07x$ التكلفة الحدية: $C'(x) = 10 + 0.18x$
9	$P(x) = R(x) - C(x)$ $= (150x - 0.035x^2) - (16000 + 10x + 0.09x^2)$ $= 150x - 0.035x^2 - 16000 - 10x - 0.09x^2$ $= 140x - 0.125x^2 - 16000$	اقتران الربح



10	$P'(x) = 140 - 0.250x$ $140 - 0.250x = 0$ $140 = 0.250x$ $x = \frac{140}{0.250} = 560$ <p>توجد قيمة حرجة واحدة هي <math>x = 560</math></p> $P''(x) = -0.250$ $P''(560) = -0.250 < 0$ <p>إذن توجد قيمة عظمى عندما <math>x = 560</math> ، فيكون عدد القطع اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن هو 560 قطعة أكبر ربح ممكن هو:</p> $P(560) = 140(560) - 0.125(560)^2 - 16000 = 23200$
11	<p>سعر الوحدة الواحدة من المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن</p> $p(250) = 150 - 0.035(560)$ $= 130.4$
12	$r + h = 60 \Rightarrow h = 60 - r$ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2(60 - r) = 20\pi r^2 - \frac{1}{3}\pi r^3$ $V'(r) = 40\pi r - \pi r^2$ $V'(r) = 0 \Rightarrow 40\pi r - \pi r^2 = 0 \Rightarrow \pi r(40 - r) = 0 \Rightarrow r = 0, r = 40$ $V''(r) = 40\pi - 2\pi r$ $V''(40) = 40\pi - 2\pi(40) = -40\pi < 0$ <p>للاقتران قيمة عظمى محلية عندما <math>r = 40</math> إذن، يكون حجم المخروط أكبر ما يمكن عندما: <math>h = 20 \text{ cm}</math> و <math>r = 40 \text{ cm}</math></p>



13	$200 = 2r + r\theta \Rightarrow \theta = \frac{200 - 2r}{r}$ $A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{200 - 2r}{r}\right) = 100r - r^2$
14	$A'(r) = 100 - 2r$ $A'(r) = 0 \Rightarrow r = 50$ $A''(r) = -2$ $A''(50) = -2 < 0$ <p>إذن، أكبر مساحة ممكنة للقطاع الدائري هي: <math>A(50) = 100(50) - (50)^2 = 2500 \text{ cm}^2</math></p>
15	$V = 9x^2h - x^2h = 8x^2h$ $2000 = 8x^2h \Rightarrow h = \frac{250}{x^2}$ $A = 16x^2 + 12xh = 16x^2 + 12x\left(\frac{250}{x^2}\right) = 16x^2 + \frac{3000}{x}$
16	$A'(x) = 32x - \frac{3000}{x^2}$ $A'(x) = 0 \Rightarrow 32x - \frac{3000}{x^2} = 0 \Rightarrow 32x = \frac{3000}{x^2} \Rightarrow x^3 = 93.75 \Rightarrow x = \sqrt[3]{93.75}$ $A''(x) = 32 + \frac{6000}{x^3}$ $A''(\sqrt[3]{93.75}) = 32 + \frac{6000}{\sqrt[3]{93.75}^3} = 32 + \frac{6000}{93.75} = 96 > 0$ <p>إذن، توجد لهذا الاقتران قيمة صغرى محلية عندما <math>x = \sqrt[3]{93.75}</math> تكون المساحة الكلية الخارجية لسطح العلبة أقل ما يمكن عندما <math>x \approx 4.5 \text{ cm}</math></p>
17	$400 = 2x + 2\pi r \Rightarrow x = \frac{400 - 2\pi r}{2}$ $A = 2xr + \pi r^2 = 2\left(\frac{400 - 2\pi r}{2}\right)r + \pi r^2 = 400r - \pi r^2$



$$A'(r) = 400 - 2\pi r$$

$$A'(r) = 0 \Rightarrow 400 - 2\pi r = 0 \Rightarrow r = \frac{200}{\pi}$$

$$A''(r) = -2\pi$$

18

$$A''\left(\frac{200}{\pi}\right) = -2\pi < 0$$

إذن، للمضمار الدائري قيمة عظمى عندما  $x = \frac{400-2\pi r}{2} = 0$  و  $r = \frac{200}{\pi}$  أي أن المضمار لا يحتوي على أجزاء مستقيمة، وإنما هو مضمار دائري.



الدرس السادس: قاعدة السلسلة

مسألة اليوم صفحة 106

$$\frac{dr}{dt} = 0.5$$

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{r=2.8}$$

$$A = 4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dr} = 8\pi r$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \times \frac{dr}{dt}$$

$$= 8\pi(2.8)(0.5)$$

$$= 11.2\pi$$

إذن تتزايد مساحة سطح الفقاعة بمعدل  $11.2\pi \text{ cm}^2/\text{s}$  عندما يكون طول نصف قطرها  $2.8 \text{ cm}$

معدل التغير المعطى:

معدل التغير المطلوب:

العلاقة التي تربط بين مساحة سطح الفقاعة ونصف قطرها:

أتحقق من فهمي صفحة 108

$$y = (x^2 - 2)^4$$

$$u = x^2 - 2, \quad y = u^4$$

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad \frac{dy}{du} = 4u^3$$

a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= 4u^3 \times 2x$$

$$= 8xu^3$$

$$= 8x(x^2 - 2)^3$$

$$y = \sqrt{x^3 + 4x} = (x^3 + 4x)^{\frac{1}{2}}$$

$$u = x^3 + 4x, \quad y = u^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 4, \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$$

b

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \times (3x^2 + 4)$$

$$= \frac{3x^2 + 4}{2\sqrt{x^3 + 4x}}$$



أتحقق من فهمي صفحة 110

a

$$f'(x) = 5(x^4 + 1)^4(4x^3)$$
$$= 20x^3(x^4 + 1)^4$$
$$f'(1) = 20(1)^3((1)^4 + 1)^4 = 20 \times 16 = 320$$

b

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$$
$$f'(x) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$$
$$f'(2) = \frac{2(2) + 3}{2\sqrt{2^2 + 3 \times 2 + 2}} = \frac{7}{2\sqrt{12}}$$

c

$$f(x) = \sqrt[4]{(2x^2 - 7)^5} = (2x^2 - 7)^{\frac{5}{4}}$$
$$f'(x) = \frac{5}{4}(2x^2 - 7)^{\frac{1}{4}}(4x)$$
$$= \frac{5}{4}(4x)(2x^2 - 7)^{\frac{1}{4}}$$
$$= 5x \times \sqrt[4]{2x^2 - 7}$$
$$f'(4) = 5 \times 4 \times \sqrt[4]{2(4)^2 - 7} = 20\sqrt[4]{25}$$

أتحقق من فهمي صفحة 111

a

$$f'(x) = 4(1 + x^3)^3(3x^2) + 8x^7$$
$$= 12x^2(1 + x^3)^3 + 8x^7$$

b

$$f(x) = (2x - 1)^{\frac{1}{3}} - (x - 3)^3$$
$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x - 1)^{-\frac{2}{3}}(2) - 3(x - 3)^2(1)$$
$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x - 1)^2}} - 3(x - 3)^2$$

أتحقق من فهمي صفحة 113



a	$P'(t) = \frac{20t + 1}{2\sqrt{10t^2 + t + 229}}$
b	$t = 2020 - 2015 = 5$ $P'(5) = \frac{20(5) + 1}{2\sqrt{250 + 5 + 229}} = \frac{101}{2\sqrt{484}} \approx 2.3$ <p>إذن، في سنة 2020 يزداد إجمالي الأرباح بمعدل 2300 دينار لكل سنة.</p>
<b>أتحقق من فهمي صفحة 114</b>	
	$\frac{dy}{du} = 5u^4 + 3u^2$ $\frac{du}{dx} = -4$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= (5u^4 + 3u^2) \times -4$ $= -4(5(3 - 4x)^4 + 3(3 - 4x)^2)$ $= -20(3 - 4x)^4 - 12(3 - 4x)^2$ $\left. \frac{dy}{dx} \right _{x=2} = -20(625) - 12(25) = -12800$
<b>أتدرب وأحل المسائل صفحة 114</b>	
1	$f'(x) = 4(1 + 2x)^3(2)$ $= 8(1 + 2x)^3$
2	$f'(x) = -5(3 - 2x^2)^{-6}(-4x)$ $= 20x(3 - 2x^2)^{-6}$ $= \frac{20x}{(3 - 2x^2)^6}$
3	$f'(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 7x + 1)^{\frac{1}{2}}(2x - 7)$ $= \frac{3}{2}(2x - 7)\sqrt{x^2 - 7x + 1}$



4	$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{7-x}}$
5	$f'(x) = 16(2+8x)^3(8)$ $= 128(2+8x)^3$
6	$f(x) = (4x-8)^{-\frac{1}{3}}$ $f'(x) = -\frac{1}{3}(4x-8)^{-\frac{4}{3}}(4)$ $= -\frac{4}{3}(4x-8)^{-\frac{4}{3}}$ $= \frac{-4}{3^3\sqrt{(4x-8)^4}}$
7	$f'(x) = \frac{9x^2}{2\sqrt{5+3x^3}}$
8	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2(x-3)$
9	$f(x) = (2x-x^5)^{\frac{1}{3}} + (4-x)^2$ $f'(x) = \frac{1}{3}(2x-x^5)^{-\frac{2}{3}}(2-5x^4) + 2(4-x)(-1)$ $= \frac{2-5x^4}{3^3\sqrt{(2x-x^5)^2}} - 8 + 2x$
10	$f'(x) = 4(\sqrt{x}+5)^3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $= \frac{2(\sqrt{x}+5)^3}{\sqrt{x}}$



11	$f'(x) = \frac{3(2x - 5)^2(2)}{2\sqrt{(2x - 5)^3}}$ $= \frac{3(2x - 5)^2}{\sqrt{(2x - 5)^3}} = 3\sqrt{2x - 5}$
12	$f'(x) = 5(2x^3 - 3x^2 + 4x + 1)^4(6x^2 - 6x + 4)$
13	$f(x) = (4x + 1)^{-2}$ $f'(x) = -2(4x + 1)^{-3}(4)$ $= -\frac{8}{(4x + 1)^3}$ $f'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{8}{\left(4 \times \frac{1}{4} + 1\right)^3} = -1$
14	$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$ $f'(3) = \frac{-3}{\sqrt{25 - (3)^2}} = -\frac{3}{4}$
15	$\frac{dy}{du} = 10u + 3$ $\frac{du}{dx} = 3x^2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= (10u + 3) \times 3x^2$ $= (10(x^3 + 1) + 3) \times 3x^2$ $= (10x^3 + 13) \times 3x^2$ $= 30x^5 + 39x^2$



16	$y = (2u + 5)^{\frac{1}{3}}$ $\frac{dy}{du} = \frac{1}{3}(2u + 5)^{-\frac{2}{3}}(2) = \frac{2}{3}(2u + 5)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2u + 5)^2}}$ $\frac{du}{dx} = 2x - 1$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= \frac{2}{3\sqrt[3]{(2u + 5)^2}} \times (2x - 1)$ $= \frac{2(2x - 1)}{3\sqrt[3]{(2(x^2 - x) + 5)^2}}$ $= \frac{4x - 2}{3\sqrt[3]{(2x^2 - 2x + 5)^2}}$
17	$\frac{dy}{du} = 6u - 5$ $\frac{du}{dx} = 2x$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= (6u - 5) \times (2x)$ $= (6(x^2 - 1) - 5) \times (2x)$ $\left. \frac{dy}{dx} \right _{x=2} = (6(4 - 1) - 5) \times (4) = 52$



18	$\frac{dy}{du} = 3(1 + u^2)^2(2u) = 6u(1 + u^2)^2$ $\frac{du}{dx} = 2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ $= 6u(1 + u^2)^2 \times (2)$ $= 12(2x - 1)(1 + (2x - 1)^2)^2$ $\left. \frac{dy}{dx} \right _{x=1} = 12(2 - 1)(1 + (2 - 1)^2)^2 = 48$
19	$C'(x) = \frac{1000(2x - 0.1)}{2\sqrt{x^2 - 0.1x}} = \frac{2000x - 100}{2\sqrt{x^2 - 0.1x}} = \frac{1000x - 50}{\sqrt{x^2 - 0.1x}}$
20	$C'(20) = \frac{1000(20) - 50}{\sqrt{(20)^2 - 0.1(20)}} = \frac{19950}{\sqrt{398}} \approx 1000$
21	$N(t) = 400(1 - 3(t^2 + 2))^{-2}$ $N'(t) = 400(6(t^2 + 2))^{-3}(2t) = \frac{4800t}{(t^2 + 2)^3}$ $N'(1) = \frac{4800}{(1 + 2)^3} \approx 178$
22	$N'(4) = \frac{4800(4)}{(16 + 2)^3} \approx 3$
23	$f'(x) = g'(h(x)) \times h'(x)$ $f'(3) = g'(h(3)) \times h'(3)$ $= g'(2) \times -2$ $= 6 \times -2 = -12$



24	$f'(x) = 3(h(x))^2 \times h'(x)$ $f'(3) = 3(h(3))^2 \times h'(3)$ $= 3(2)^2 \times -2 = -24$
25	$h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$ $h'(2) = f'(g(2)) \times g'(2)$ $= f'(3) \times -1$ <p>نجد مشتقة <math>f</math> ونحسب <math>f'(3)</math></p> $f(u) = u^2 - 1 \rightarrow f'(u) = 2u \rightarrow f'(3) = 2 \times 3 = 6$ $h'(2) = f'(3) \times -1$ $= 6 \times -1 = -6$ <p>إذن،</p>
26	$y = (x^2 - 4)^5$ $0 = (x^2 - 4)^5 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0$ $\rightarrow x = 2 \text{ أو } x = -2$ $\frac{dy}{dx} = 5(x^2 - 4)^4(2x) = 10x(x^2 - 4)^4$ $\left. \frac{dy}{dx} \right _{x=2} = 10(2)(2^2 - 4)^4 = 0$ $\left. \frac{dy}{dx} \right _{x=-2} = 10(-2)((-2)^2 - 4)^4 = 0$
27	$p(x)$ هو الاقتران الوحيد الذي يمكن اشتقاقه دون تطبيق قاعدة السلسلة.
28	$f(x) = (2x + (x^2 + x)^4)^{\frac{1}{3}}$ $f'(x) = \frac{1}{3}(2x + (x^2 + x)^4)^{-\frac{2}{3}}(2 + 4(x^2 + x)^3(2x + 1))$ $= \frac{2 + 4(x^2 + x)^3(2x + 1)}{3\sqrt[3]{(2x + (x^2 + x)^4)^2}}$



اختبار نهاية الوحدة الثانية

1	D
2	C
3	B
4	B
5	C
6	c
7	A
8	A
9	$\frac{1}{6}$
10	$\frac{3}{5}$
11	غير موجودة
12	$-\frac{2}{3}$
13	متصل، لأن النهاية تساوي قيمة $f(5)$ وتساوي 13
14	غير متصل لأنه غير معرف عند 0
15	غير متصل لأن النهاية غير موجودة



16	$y = 2x + \frac{8}{x}$ $\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{8}{x^2}$
17	$10 = 2x + \frac{8}{x} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 4$ $m_{\text{المماس}} = \left. \frac{dy}{dx} \right _{x=1} = 2 - 8 = -6$ $m_{\text{المماس}} = \left. \frac{dy}{dx} \right _{x=4} = 2 - 0.5 = 1.5$
18	$y = (3x + a)(x - 1) = 3x^2 - 3x + ax - a$ $\frac{dy}{dx} = 6x - 3 + a$ $\frac{dy}{dx} = a \Rightarrow 6x - 3 + a = a \Rightarrow x = 2$ $x = 2 \Rightarrow y = 12 - 6 + a = 6 + a$ <p>إحداثيات النقطة المطلوبة هي: <math>(2, 6 + a)</math></p>
19	$y = x^2(x^2 - p) = x^4 - px^2$ $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 2px$



$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 16x$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow 4x(x+2)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, -2, 2$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = -2 \Rightarrow y = 16 - 32 = -16$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 16 - 32 = -16$$

النقاط الحرجة لهذا الاقتران هي:  $(0,0), (-2, -16), (2, -16)$

20  $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 16$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = 12(0)^2 - 16 = -16 < 0$$

إذن،  $(0,0)$  نقطة عظمى محلية

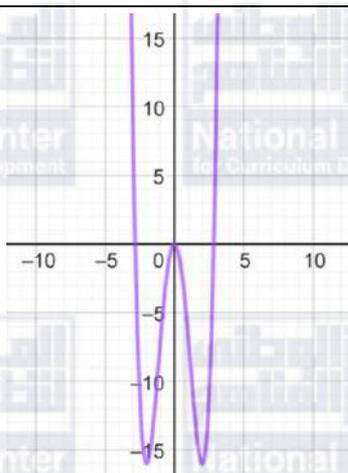
$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=-2} = 12(-2)^2 - 16 = 32 > 0$$

إذن،  $(-2, -16)$  نقطة صغرى محلية

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=2} = 12(2)^2 - 16 = 32 > 0$$

إذن،  $(2, -16)$  نقطة صغرى محلية

21



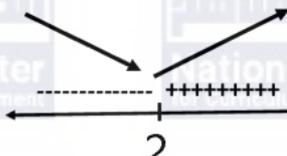
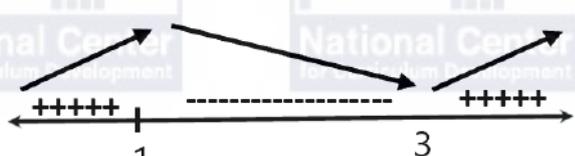


22	<p>ميل مماس المنحنى 12 أي <math>f'(x) = 12</math></p> $f'(x) = 3x^2$ $3x^2 = 12$ $x^2 = 4 \rightarrow x = 2 \text{ أو } x = -2$ $f(2) = (2)^3 + 3 = 11$ $f(-2) = (-2)^3 + 3 = -5$ <p>النقاط هي <math>(2,11), (-2, -5)</math></p>
23	<p>القيم الحرجة هي: <math>x = 2</math> و <math>x = -2</math></p> $f'(x) = 24 - 6x^2$ $24 - 6x^2 = 0$ $6x^2 = 24 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$ $f''(x) = -12x$ $f''(-2) = 24 > 0$ $f''(2) = -24 < 0$ <p>إنّ توجد قيمة صغرى محلية عندما <math>x = -2</math> وهي <math>f(-2) = 9 - 48 + 16 = -23</math></p> <p>و <math>x = 2</math> توجد قيمة عظمى محلية عندما <math>f(2) = 9 + 48 - 16 = 41</math></p>



24	$f'(x) = 3(3x - 2)^2(3) - 9$ $= 9(3x - 2)^2 - 9$ $9(3x - 2)^2 - 9 = 0$ $(3x - 2)^2 = 1 \rightarrow 3x - 2 = \pm 1 \rightarrow x = 1 \text{ أو } x = \frac{1}{3}$ <p style="text-align: right;">القيمة الحرجة هي: <math>x = 1, x = \frac{1}{3}</math></p> $f''(x) = 18(3x - 2)(3) = 54(3x - 2)$ $f''(1) = 54 > 0$ $f''\left(\frac{1}{3}\right) = -54 < 0$ <p>إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما <math>x = 1</math> وهي <math>f(1) = (3 - 2)^3 - 9 = -8</math></p> <p>وتوجد قيمة عظمى محلية عندما <math>x = \frac{1}{3}</math> وهي <math>f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(3\left(\frac{1}{3}\right) - 2\right)^3 - 9\left(\frac{1}{3}\right) = -4</math></p>
25	$f(x) = 4x^5 - 10x^2$ $f'(x) = 20x^4 - 20x$ $20x^4 - 20x = 0$ $20x(x^3 - 1) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ أو } x = 1$ <p style="text-align: right;">القيم الحرجة هي: <math>x = 1</math> و <math>x = 0</math></p> $f''(x) = 80x^3 - 20$ $f''(0) = -20 < 0$ $f''(1) = 60 > 0$ <p>إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما <math>x = 1</math> وهي <math>f(1) = -6</math></p> <p>وتوجد قيمة عظمى محلية عندما <math>x = 0</math> وهي <math>f(0) = 0</math></p>
26	غير موجودة
27	1



28	0
29	$pV = 1200 \Rightarrow V = \frac{1200}{p}$ $p = 10 + 0.4\sqrt{t} = 10 + 0.4t^{\frac{1}{2}}$ $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dp} \times \frac{dp}{dt} = -\frac{1200}{p^2} \times 0.2t^{-\frac{1}{2}} = -\frac{240}{\sqrt{t}(10 + 0.4\sqrt{t})^2}$ $\left. \frac{dV}{dt} \right _{t=100} = -\frac{240}{10(10 + 4)^2} = -\frac{6}{49}$
30	$g(x) = 3x^2 - 12x + 4$ $g'(x) = 6x - 12$ $g'(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$  <p>إذن، <math>g</math> متناقص في <math>(-\infty, 2)</math>، و متزايد في <math>(2, \infty)</math></p>
31	$h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ $h'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ $h'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$ $\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ $\Rightarrow (x - 3)(x - 1) = 0$ $\Rightarrow x = 1, x = 3$  <p>إذن، <math>h</math> متزايد في <math>(-\infty, 1)</math>، و متناقص في <math>(1, 3)</math>، و متزايد في <math>(3, \infty)</math></p>



32	$s(t) = 10 + 6t - 0.5t^2$ $v(t) = s'(t) = 6 - t$ $v(10) = s'(t) = 6 - 10 = -4 \text{ m/s}$	
	$V = x^2y$ $S = 8x + 4y$ $144 = 8x + 4y$ $4y = 144 - 8x$ $y = 36 - 2x$ $V(x) = x^2(36 - 2x)$ $= 36x^2 - 2x^3$ $V'(x) = 72x - 6x^2$ $72x - 6x^2 = 0$ $6x(12 - x) = 0$ $x = 0 \text{ or } x = 12$ $V''(x) = 72 - 12x$ $V''(0) = 72 > 0$ $V''(12) = 72 - 144 < 0$	حجم الصندوق مجموع أطوال الأحرف  حجم الصندوق بدلالة $x$
33		توجد قيمتان حرجتان هما $x = 0$ و $x = 12$  توجد قيمة عظمى عندما $x = 12$ إذن قيمة $x$ التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن هي $x = 12$



الوحدة الثالثة: الاحتمالات  
الدرس الأول: التباديل والتوافيق

مسألة اليوم صفحة 120

$${}_8C_2=28$$

أتحقق من فهمي صفحة 121

$$2 \times 3 \times 4 \times 3 = 54$$

أتحقق من فهمي صفحة 122

a  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

b  $5 \times 4 \times 3 = 60$

أتحقق من فهمي صفحة 124

a  ${}_{10}P_3=720$

b  ${}_4P_4=24$

أتحقق من فهمي صفحة 126

$${}_8C_5=56$$

أتحقق من فهمي صفحة 128

a  $P(A) = \frac{5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2}{7!} = \frac{5}{21}$

b  $P(A) = \frac{\frac{8!}{2!6!}}{\frac{16!}{2!14!}} = \frac{7}{30}$

أتحقق من فهمي صفحة 130

a  ${}_9C_4 \times {}_5C_3 = 1260$   
 ${}_{14}C_7 = 3432$   
 $P(A) = \frac{1260}{3432} \approx 0.37$

b  ${}_9C_4 \times {}_5P_2 \times {}_3C_1 = 7560$   
 ${}_{14}P_2 \times {}_{12}C_5 = 144144$   
 $P(A) = \frac{7560}{144144} \approx 0.05$



أُتدرب وأحل المسائل صفحة 130

1	$8! = 40320$
2	$9! - 2 \times 7! = 352800$
3	$\frac{6!}{2!3!} = 60$
4	$\frac{960}{60} = 16$
5	25872
6	47
7	36
8	$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$
9	$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
10	$2 \times 5! - 24 = 216$
11	28
12	${}_{10}C_4 = 210$
13	${}_6C_1 \times {}_4C_3 + {}_6C_2 \times {}_4C_2 + {}_6C_3 \times {}_4C_1 = 194$
14	6
15	$\frac{n!}{(n-2)!} = 42 \rightarrow n(n-1) = 42 \rightarrow n = 7$
16	$\frac{n!}{(n-3)!} = 10 \times \frac{n!}{(n-2)!} \rightarrow n(n-1)(n-2) = 10n(n-1) \rightarrow n = 12$
17	$\frac{n!}{(n-3)!3!} = 26n \rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 26n \rightarrow n = 14$



18	$\frac{n!}{(n-5)!5!} = \frac{n!}{(n-7)!7!} \rightarrow (n-5)(n-6) = 42 \rightarrow n = 12$
19	$\frac{n!}{(n-3)!3!} - \frac{(n-2)!}{(n-5)!3!} = 64 \rightarrow n = 10$
20	${}_{24}P_2 \times {}_{22}C_2 = 127512$ ${}_{14}P_1 \times {}_{10}P_1 \times {}_{13}P_2 = 21840$ $P(A) = \frac{21840}{127512} \approx 0.17$
21	${}_7C_2 = 21 \rightarrow P(A) = \frac{1}{21}$
22	${}_6C_2 \times {}_3C_2 = 45, \quad {}_9C_4 = 126, \quad \rightarrow P(A) = \frac{45}{126} \approx 0.36$
23	${}_6P_2 \times {}_3C_2 = 90, \quad \rightarrow P(A) = \frac{90}{126} \approx 0.7$
24	${}_8C_3 = 56 \rightarrow P(A) = \frac{4}{56}$
25	$\frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-r)!} \rightarrow r! = 1 \rightarrow r = 0 \text{ أو } r = 1$
26	<p>إجابة محتملة: يراد اختيار لجنة ثلاثية من بين 10 موظفين في شركة منهم سعيد وأمين وصادق، ما احتمال أن تتكون اللجنة من هؤلاء الزملاء الثلاثة؟ الإجابة: <math>\frac{1}{10C_3}</math></p>
27	$\frac{1}{14} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{182}$



الدرس الثاني: المتغيرات العشوائية

أتحقق من فهمي صفحة 133

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

أتحقق من فهمي صفحة 135

$$X = \{1, 3, 4, 6\}$$

X	1	3	4	6
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

أتحقق من فهمي صفحة 136

a  $g=0.1$

b  $0.25+0.1=0.35$

c  $0.25+0.1+0.35=0.7$

d 3

أتحقق من فهمي صفحة 138

a

X	1	2	3	4	5
P(X)	$\frac{7}{50}$	$\frac{22}{50}$	$\frac{18}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$

b  $E(X) = \frac{119}{50} = 2.38$

أتحقق من فهمي صفحة 139

X	0	1	2
P(X)	$\frac{1}{3}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{2}{15}$

$$E(X) = 0.8$$

أتحقق من فهمي صفحة 141

a  $E(X) = 1.4$

b  $Var(X) = 0.14$

أتدرب وأحل المسائل صفحة 141



1	$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$																
2	$X = \{2, 3\}$																
3	$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$																
4	$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$																
5	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>X</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>P(X)</td> <td><math>\frac{8}{27}</math></td> <td><math>\frac{12}{27}</math></td> <td><math>\frac{6}{27}</math></td> <td><math>\frac{1}{27}</math></td> </tr> </tbody> </table>	X	0	1	2	3	P(X)	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$						
X	0	1	2	3													
P(X)	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$													
6	$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ $= 1 - \frac{8}{27}$ $= \frac{19}{27}$																
7	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>X</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>P(X)</td> <td><math>\frac{1}{4}</math></td> <td><math>\frac{1}{8}</math></td> <td><math>\frac{9}{64}</math></td> <td><math>\frac{9}{32}</math></td> <td><math>\frac{5}{64}</math></td> <td><math>\frac{1}{16}</math></td> <td><math>\frac{1}{16}</math></td> </tr> </tbody> </table>	X	4	5	6	7	8	9	10	P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
X	4	5	6	7	8	9	10										
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$										
8	7																
9	$3b + 0.2 + 0.15 + 0.29 = 1 \rightarrow b = 0.12$																
10	$P(2 < X \leq 8) = 0.15 + 0.29 + 0.24 = 0.68$																
11	$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0.2 = 0.8$																
12	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>X</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>P(X)</td> <td><math>\frac{6}{115}</math></td> <td><math>\frac{27}{92}</math></td> <td><math>\frac{21}{46}</math></td> <td><math>\frac{91}{460}</math></td> </tr> </tbody> </table>	X	0	1	2	3	P(X)	$\frac{6}{115}$	$\frac{27}{92}$	$\frac{21}{46}$	$\frac{91}{460}$						
X	0	1	2	3													
P(X)	$\frac{6}{115}$	$\frac{27}{92}$	$\frac{21}{46}$	$\frac{91}{460}$													
13	$E(X) = -2 \times 0.13 - 1 \times 0.27 + 0 \times 0.1 + 1 \times 0.18 + 2 \times 0.22 + 3 \times 0.1$ $= 0.39$																



14	$E(X) = 2 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{5}{12} + 6 \times \frac{1}{3} + 8 \times \frac{1}{6} \approx 5.17$												
15	$E(X) = 1 \times \frac{7}{500} + 2 \times \frac{30}{500} + 3 \times \frac{58}{500} + 4 \times \frac{135}{500} + 5 \times \frac{150}{500} + 6 \times \frac{70}{500}$ $+ 7 \times \frac{40}{500} + 8 \times \frac{10}{500}$ $\approx 4.62$												
16	$-1 \times a + 0 \times 4b + 1 \times 2b + 2a = \frac{5}{12} \rightarrow a + 2b = \frac{5}{12}$ $a + 4b + 2b + a = 1 \rightarrow 2a + 6b = 1$ $a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{12}$												
17	<table border="1"><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>P(X)</td><td><math>\frac{3}{253}</math></td><td><math>\frac{30}{253}</math></td><td><math>\frac{90}{253}</math></td><td><math>\frac{195}{506}</math></td><td><math>\frac{65}{506}</math></td></tr></table> $E(X) = 2.5$	X	0	1	2	3	4	P(X)	$\frac{3}{253}$	$\frac{30}{253}$	$\frac{90}{253}$	$\frac{195}{506}$	$\frac{65}{506}$
X	0	1	2	3	4								
P(X)	$\frac{3}{253}$	$\frac{30}{253}$	$\frac{90}{253}$	$\frac{195}{506}$	$\frac{65}{506}$								
18	$-2a + 3(1 - a) = 2 \rightarrow a = -0.2$ $Var(Y) = 4 \times -0.2 + 9 \times 1.2 - 4 = 6$												
19	1												
20	السحب دون إرجاع، لأنه لو كان مع الإرجاع لظهرت النواتج (5, 5), (2, 2) التي تُعطي المجاميع 4 و 10												
21	<table border="1"><tr><td>X</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>P(X)</td><td><math>\frac{1}{12}</math></td><td><math>\frac{2}{9}</math></td><td><math>\frac{7}{18}</math></td><td><math>\frac{2}{9}</math></td><td><math>\frac{1}{12}</math></td></tr></table>	X	2	3	4	5	6	P(X)	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{12}$
X	2	3	4	5	6								
P(X)	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{12}$								



22	$(3, H, H, H), (5, H, H, H, T, T), (5, H, H, T, H, T), (5, H, H, T, T, H),$ $(5, H, T, H, H, T), (5, H, T, H, T, H), (5, H, T, T, H, H), (5, T, H, H, H, T),$ $(5, T, H, H, T, H), (5, T, H, H, H, T), (5, T, H, T, H, H), (5, T, T, H, H, H)$ $P(X) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{12}{32} = \frac{1}{6}$								
23	إجابة محتملة: <table border="1"><tr><td>X</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>P(X)</td><td>0.1</td><td>0.3</td><td>0.6</td></tr></table>	X	1	3	5	P(X)	0.1	0.3	0.6
X	1	3	5						
P(X)	0.1	0.3	0.6						



اختبار نهاية الوحدة الثالثة

1	b												
2	d												
3	c												
4	c												
5	b												
6	$5! \times 4! \times 2 = 5760$												
7	$4! \times 6! = 17280$												
8	$5! \times 4! = 2880$												
9	$\frac{4!}{3!} = 4$												
10	${}_6P_3 \times {}_6P_5 = 86400$												
11	${}_6P_1 \times {}_6P_6 \times {}_5P_1 = 21600$												
12	${}_1C_1 \times {}_5C_2 \times {}_5C_2 = 100$ ${}_{11}C_5 = 462$ $P(A) = \frac{100}{462} \approx 0.22$												
13	$P(A) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256} \approx 0.004$												
14	${}_5P_5 = 5! = 120$ ${}_5P_5 \times 2 = 4! \times 2 = 48$ $P(A) = \frac{48}{120} = 0.4$												
15	<table border="1"><tr><td>X</td><td>3</td><td>8</td><td>10</td><td>14</td><td>15</td></tr><tr><td>P(X)</td><td><math>\frac{1}{14}</math></td><td><math>\frac{3}{14}</math></td><td><math>\frac{2}{14}</math></td><td><math>\frac{5}{14}</math></td><td><math>\frac{3}{14}</math></td></tr></table>	X	3	8	10	14	15	P(X)	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{3}{14}$
X	3	8	10	14	15								
P(X)	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{3}{14}$								
16	$E(X) = \frac{3}{14} + \frac{24}{14} + \frac{20}{14} + \frac{70}{14} + \frac{45}{14} \approx 11.6$												
17	$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$												



18	$X = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16\}$														
19	$0.25 + k + 0.33 + 2k = 1 \rightarrow k = 0.81$														
20	$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 1) = 1 - 0.25 = 0.75$														
21	$E(X) = 1 \times 0.25 + 2 \times 0.81 + 3 \times 0.33 + 4 \times 1.62 = 9.34$ $V(X) = (1)^2 \times 0.25 + (2)^2 \times 0.81 + (3)^2 \times 0.33 + (4)^2 \times 1.62 - (9.34)^2 = 23.04$														
22	$\frac{n!}{(n-4)!4!} = \frac{n!}{(n-3)!3!} \rightarrow (n-4)!4! = (n-3)!3!$ $\rightarrow n-3 = 4 \rightarrow n = 7$														
23	$a = \frac{1}{5}$ و $b = \frac{1}{10}$ $a = \frac{1}{4}$ و $b = \frac{1}{16}$														
24	<table border="1"> <tr> <td>G</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>P(G)</td> <td><math>\frac{1}{36}</math></td> <td><math>\frac{3}{36}</math></td> <td><math>\frac{5}{36}</math></td> <td><math>\frac{7}{36}</math></td> <td><math>\frac{9}{36}</math></td> <td><math>\frac{11}{36}</math></td> </tr> </table>	G	1	2	3	4	5	6	P(G)	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$
G	1	2	3	4	5	6									
P(G)	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$									
25	$P(2 < G \leq 5) = \frac{5 + 7 + 9}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$														
26	$E(G) = \frac{1}{36} + \frac{6}{36} + \frac{15}{36} + \frac{28}{36} + \frac{45}{36} + \frac{66}{36} = \frac{161}{36} \approx 4.472$														