البوصلة في الرياضيات

الوحدة الخامسة

الإحصاء والاحتمالات

الفرع الأدبي

أ.محمد العلي

2007

البوصلة طريقك نحو التميز

الدرس الاول : التوزيع الهندسي

التجربة الاحتمالية الهندسية

(مفهوم أساسي)

إذا توافرت الشروط الأربعة الآتية في تجربة عشوائية ما، فإنَّها تُعَدُّ تجربة احتمالية هندسية:

1) اشتمال التجربة على محاولات مستقلة ومُتكرِّرة.

2) فرز النتائج المُمكِنة في كل محاولة إلى نجاح أو فشل.

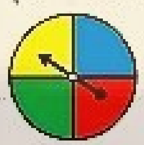
3) ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.

4) التوقُّف عند أوَّل نجاح.

مثال 1

أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية هندسية في كلٍّ ممّا يأتي:

1) تدوير سلمى المُتكرِّر لمُؤشِّر القرص الذي ينقسم إلى 4 قطاعات مُتطابِقة، ثم توقُّفها عند استقرار رأس السهم على اللون الأحمر.



2) سحب كمال 3 كرات على التوالي من دون إرجاع من صندوق فيه 4 كرات حمراء، و5 كرات خضراء، ثم كتابة عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

3) إلقاء ريّان حجر نرد منتظمًا 4 مرّات، ثم كتابة الأعداد الظاهرة.

4) إلقاء حنان قطعة نقد منتظمة بشكل مُتكرِّر، ثم التوقُّف عند ظهور الصورة.

(مفهوم أساسي)

إذا كان: $X \sim Geo(p)$، فــإنَّ: $x \in \{1, 2, 3, \ldots\}$، ويعطى

التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$$

حيث: x: عدد المحاولات وصولًا إلى أوّل نجاح.

p: احتمال النجاح في كل محاولة.

مثال 2

إذا كان: $X \sim Geo(0.8)$ فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1. $P(X = 3)$

2. $P(X \leq 2)$

3. $P(X > 3)$

مثال 3

إذا كان: $X \sim Geo(0.4)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1. $P(X = 2)$

2. $P(X \leq 3)$

3. $P(X > 4)$

مثال 4

إذا كان: $X \sim Geo\left(\frac{1}{8}\right)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي، مُقرّبًا

إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:

1. $P(X = 4)$

مثال 5

يكرِّر أحمد محاولة تدوير مَقْبِض الاشتعال في فــرن مطبخه بعــد حدوث عطــل فيه حتى يتمكَّــن من تشــغيل الفـــرن لطهي الطعــام. إذا كان احتمال اشتعال الفرن في كل محاولة هو $\frac{1}{3}$، ومثَّل X عدد محاولات أحمد حتى يشتعل الفرن، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) احتمال أنْ يتمكَّن أحمد من إشعال الفرن في المحاولة الرابعة.

2) احتمال أنْ يحاول أحمد إشعال الفرن أكثر من 4 مرّات.

2) $P(3 \le X < 5)$

3) $P(1 < X < 3)$

4) $P(X \le 4)$

5) $P(X < 2)$

6) $P(4 < X \le 6)$

7) $P(X \ge 2)$

8) $P(X > 5)$

9) $P(2 < X \le 4)$

مثال 6

في دراسة لقسم الجودة في مصنع للأواني الفخارية، تبيَّن أنَّ في 10% من الأواني الفخارية عيبًا مصنعيًا. إذا مثَّل X عدد الأواني الفخارية التي سيفحصها مُراقِب الجودة حتى إيجاد أوَّل إناء مَعيب، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) احتمال أنْ يكون الإناء العاشر هو أوَّل إناء مَعيب يجده مُراقِب الجودة.

2) احتمال أنْ يفحص مُراقِب الجودة أكثر من 3 أوانٍ حتى إيجاد أوَّل إناء مَعيب.

التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

(مفهوم أساسي)

إذا كان: $X \sim Geo(p)$، فإنَّ التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي X يعطى بالقاعدة الآتية:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

حيث p احتمال النجاح في كل محاولة.

مثال 7

تتدرَّب لينا على مسابقة رمي السهام. إذا كان احتمال إصابتها الهدف هو 0.2، فكم سهمًا يُتوقَّع أنْ تُطلِقَ لينا حتى تصيب الهدف أوَّل مَرَّة؟

مثال 8

قرَّر ريّان إلقاء حجر نرد منتظم بشكل مُتكرِّر، والتوقُّف عند ظهور العدد 4. كم مَرَّة يُتوقَّع أنْ يرمي ريّان حجر النرد؟

مثال 9

أجد التوقُّع لكلٍّ من المُتغيِّرات العشوائية الآتية:

1. $X \sim Geo(0.8)$

2. $X \sim Geo(0.1)$

3. $X \sim Geo(0.75)$

مثال 10

أطلق عماد رصاصة نحو هدف بصورة مُتكرِّرة، ثم توقَّف عند إصابته الهدف أوَّل مَرَّة. إذا كان احتمال إصابته الهدف في كل مَرَّة هو 0.7، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1. احتمال أنْ يصيب الهدف أوَّل مَرَّة في المحاولة العاشرة.

2. احتمال أنْ يُطلِق رصاصتين على الأقل حتى يصيب الهدف أوَّل مَرَّة.

3. العدد المُتوقَّع من الرصاصات التي سيُطلِقها عماد حتى يصيب الهدف أوَّل مَرَّة.

مثال 11

دوّرت هديل مُؤشّر قرص بشكل مُتكرّر، وكان القرص مُقسّمًا إلى 4 قطاعات مُتطابِقة ومُلوّنة بالأحمر، والأخضر، والأزرق، والأصفر. إذا دلّ المُتغيّر العشوائي X على عدد مرّات تدوير مُؤشّر القرص حتى توقُّفه عند اللون الأصفر أوّل مرّة، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 احتمال أنْ تكون المرّة الثالثة هي أوّل مرّة يتوقّف فيها مُؤشّر القرص عند اللون الأصفر.

2 احتمال أنْ تُدوّر هديل مُؤشّر القرص أكثر من 4 مرّات حتى يتوقّف المُؤشّر عند اللون الأصفر أوّل مرّة.

مثال 12

إذا كان X مُتغيّرًا عشوائيًا هندسيًا، وكان التوقُّع $E(X) = 2$ فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 $P(X = 1)$

2 $P(X > 3)$

مهارات التفكير العليا

21 **أكتشف الخطأ:** أرادت لانا حَلَّ السؤال الآتي:

" عند إلقاء قطعة نقد غير منتظمة، كان احتمال ظهور الصورة هو $\frac{2}{5}$. إذا أُلقِيت قطعة النقد بصورة مُتكرِّرة حتى تظهر الصورة أوَّل مَرَّة، فما احتمال ظهور الصورة أوَّل مَرَّة عند إلقاء قطعة النقد في المَرَّة الثانية؟ " . وكان حَلُّها على النحو الآتي:

$$P(X = 2) = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{2}{5}\right)^2$$
$$= \frac{18}{125}$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ لانا، ثم أُصحِّحه، مُبرِّرًا إجابتي.

22 **تبرير:** إذا كان: $X \sim Geo(p)$، وكان: $P(X \leq 3) = \frac{819}{1331}$، فأجد $P(X > 3)$، مُبرِّرًا إجابتي.

23 **تحدٍّ:** إذا كان: $X \sim Geo(p)$، وكان: $P(X = 1) = 0.2$، فأجد التوقُّع $E(X)$.

الدرس الثاني : توزيع ذي الحدين

التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين

(مفهوم أساسي)

إذا توافرت الشروط الأربعة الآتية في تجربة عشوائية ما، فإنَّها تُعَدُّ تجربة احتمالية ذات حدَّين:

1. اشتمال التجربة على محاولات مستقلة ومُتكرِّرة.
2. فرز النتائج المُمكِنة في كل محاولة إلى نجاح أو فشل.
3. ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.
4. وجود عدد محدد من المحاولات في التجربة.

مثال 1

أُبيِّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثِّل تجربة احتمالية ذات حدَّين في كلٍّ ممّا يأتي:

1. إلقاء 10 قطع نقدية منتظمة ومتمايزة، ثم كتابة عدد الصور التي ظهرت.

2. إلقاء حجر نرد منتظم 20 مَرَّة، ثم كتابة عدد المَرّات التي يظهر فيها العدد 1 على الوجه العلوي لحجر النرد.

3. إلقاء حجر نرد منتظم 20 مَرَّة، ثم كتابة عدد المَرّات التي يظهر فيها العدد 1 على الوجه العلوي لحجر النرد.

4. اختيار 7 طلبة عشوائيًا من صف روضة فيه 15 ولدًا و10 بنات، ثم كتابة عدد البنات اللاتي وقع عليهن الاختيار.

(مفهوم أساسي)

إذا كان: $X \sim B(n, p)$، فــإنّ: $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

ويعطــى التوزيــع الاحتمالــي للمُتغيِّر العشوائي X

بالقاعدة الآتية: $P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$

حيث:

n: عدد المحاولات في التجربة.

p: احتمال النجاح في كل محاولة.

r: عدد المحاولات الناجحة من بين n من المحاولات.

مثال 2

إذا كان: $X \sim B(4, 0.3)$ فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1. $P(X = 2)$

2. $P(X > 2)$

3. $P(X \leq 3)$

مثال 3

إذا كان: $X \sim B(5, 0.1)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1. $P(X = 4)$

2. $P(X \leq 2)$

3. $P(X > 2)$

مثال 4

إذا كان: $X\sim B\left(20,\frac{1}{8}\right)$ فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) $P(X=18)$

2) $P(X\leq 3)$

3) $P(1<X\leq 3)$

مثال 5

وَفقًا لنموذج تقييم الخدمة الإلكتروني في إحدى شركات صيانة الأجهزة الكهربائية المنزلية، تبيَّن رضا 75% من الزبائن عن خدمات الشركة. إذا قدَّمت الشركة خدماتها لـ 10 زبائن في أحد الأيام، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) احتمال رضا 4 زبائن فقط عن خدمات الشركة.

2) احتمال رضا 3 زبائن على الأقل عن خدمات الشركة.

مثال 6

في دراسة تناولت حالة الطقس مدَّة طويلة في إحدى المدن، تبيَّن أنَّ احتمال أنْ يكون أيُّ يوم فيها ماطرًا هو $\frac{2}{7}$. إذا اختيرت 5 أيام عشوائيًا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) احتمال أنْ تكون 3 أيام فقط من هذه الأيام ماطرة.

2) احتمال أنْ يكون يوم واحد على الأقل من هذه الأيام ماطرًا.

مثال 7

يُمثِّل الشكل المجاور قرصًا على شكل خماسي منتظم. إذا دُوِّر مُؤشِّر القرص 10 مرّات، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مرّات توقُّف المُؤشِّر على الحرف A، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) احتمال أنْ يتوقَّف المُؤشِّر على الحرف A ثلاث مرّات فقط.

2) احتمال أنْ يتوقَّف المُؤشِّر على الحرف A ثلاث مرّات على الأقل.

3) احتمال ألّا يتوقَّف المُؤشِّر على الحرف A نهائيًا.

مثال 8

يواجه الطيّارون صعوبة في الرؤيا باحتمال 0.25 عند الهبوط بالطائرات في أحد المطارات خلال فصل الشتاء بسبب سوء الأحوال الجوية. إذا هبط طيّار 20 مرّة في هذا المطار شتاءً فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) احتمال أنْ يواجه الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في ثلاث مرّات فقط.

2) احتمال أنْ يواجه الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في ثلاث مرّات على الأقل.

3) احتمال أنْ يواجه الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في المرّات جميعها.

4) العدد المُتوقَّع من المرّات التي سيواجه فيها الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط.

(مفهوم أساسي)

إذا كان: $X \sim B(n, p)$، فإنَّ: $x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

ويعطى التوقُّع للمُتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$E(X) = np$$

حيث:

n: عدد المحاولات في التجربة.

p: احتمال النجاح في كل محاولة.

مثال 9

بعد إجراء مسح لمُنتَج صنعته إحدى الشركات، تبيَّن أنَّ نسبة القطع المَعيبة في هذا المُنتَج هي 8% إذا اختارت لجنة الرقابة الحكومية 50 قطعة من هذا المُنتَج عشوائيًا، فأجد عدد القطع التي يُتوقَّع أنْ تكون مَعيبة من هذه العيِّنة.

مثال 10

بعد إجراء مسح لمشتركي إحدى شركات الاتصالات، تبيَّن أنَّ 30% من المشتركين هم من الإناث. إذا اختير 400 مشترك عشوائيًا لاستطلاع آرائهم حيال الخدمات التي تُقدِّمها الشركة، فأجد عدد الإناث المُتوقَّع في هذه العيِّنة.

مثال 11

وَفقًا لدراسة طبية، فإنَّ 9% من البالغين حول العالَم مصابون بمرض السُّكَّري. إذا اختيرت عيِّنة عشوائية من البالغين تضمُّ 12000 شخص، فما العدد المُتوقَّع من المصابين بمرض السُّكَّري في هذه العيِّنة؟

(مفهوم أساسي)

إذا كان: $X \sim B(n, p)$، فإنَّ: $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

ويعطى التباين للمُتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = np(1-p)$$

حيث: n: عدد المحاولات في التجربة.

p: احتمال النجاح في كل محاولة.

مثال 12

أجد التوقُّع والتباين لكلٍّ من المُتغيِّرات العشوائية الآتية:

1) $X \sim B(20, 0.7)$

2) $X \sim B\left(400, \frac{3}{8}\right)$

3) $X \sim B(40, 0.2)$

4) $X \sim B(280, 0.4)$

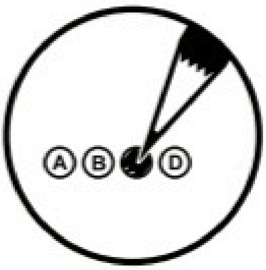
5) $X \sim B\left(48, \frac{1}{6}\right)$

مهارات التفكير العليا

19 تبرير: إذا كان: $X \sim B(3, p)$، وكان: $P(X \geq 1) = \frac{215}{216}$، فأجد $P(X = 2)$، مُبرِّرًا إجابتي.

20 تبرير: إذا كان: $X \sim B(100, p)$، وكان التباين للمُتغيِّر العشوائي X هو 24، فأجد قيمة p، مُبرِّرًا إجابتي.

21 تحدٍّ: يتألَّف اختبار لمبحث الجغرافيا من 25 سـؤالًا، جميعها من نوع الاختيار من مُتعدِّد، ولكلٍّ منها 4 بدائل، واحد منها فقط صحيح، ولكل فقرة 4 علامات. إذا أجاب رامي عن هذه الأسئلة جميعها بصورة عشوائية، فما احتمال أنْ يحصل على علامة 76 من 100؟



الدرس الثالث : التوزيع الطبيعي

المنحنى الطبيعي

(مفهوم أساسي)

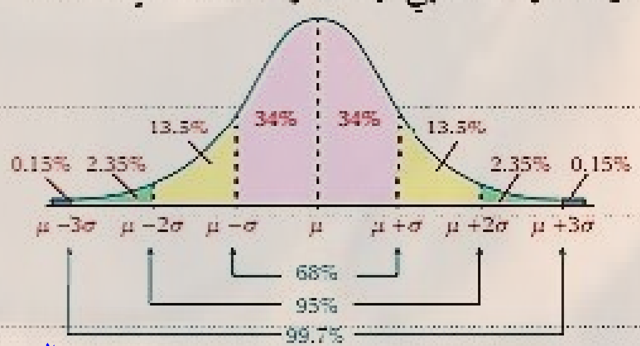
يمتاز المنحنى الطبيعي بالخصائص الآتية:

- منحنى متصل له شكل الجرس.
- تطابق الوسط الحسابي والوسيط والمنوال، وتوسُّط البيانات في كلٍّ منها.
- تماثل البيانات حول الوسط الحسابي.
- اقتراب المنحنى عند طرفيه من المحور x من دون أنْ يمسَّه.
- المساحة الكلية أسفل المنحنى هي 1.

القاعدة التجريبية

(مفهوم أساسي)

إذا اتخذت مجموعة من البيانات شكل المنحنى الطبيعي، وكان وسطها الحسابي μ، وانحرافها المعياري σ، فإنَّ:



- 68% من البيانات تقريبًا تقع بين $\mu-\sigma$ و $\mu+\sigma$؛ أيْ إنَّ 68% من البيانات لا يزيد البُعْد بينها وبين الوسط الحسابي على قيمة الانحراف المعياري.
- 95% من البيانات تقريبًا تقع بين $\mu-2\sigma$ و $\mu+2\sigma$؛ أيْ إنَّ 95% من البيانات لا يزيد البُعْد بينها وبين الوسط الحسابي على مثلَي قيمة الانحراف المعياري.
- 99.7% من البيانات تقريبًا تقع بين $\mu-3\sigma$ و $\mu+3\sigma$؛ أيْ إنَّ 99.7% من البيانات لا يزيد البُعْد بينها وبين الوسط الحسابي على ثلاثة أمثال قيمة الانحراف المعياري.

مثال 1

إذا اتخذت كتل مجموعة من طلبة الصف الثاني عشر شكل المنحنى الطبيعي، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع كتلهم فوق الوسط الحسابي.

2) النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البُعْد بين كتلهم والوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.

3) النسبة المئوية للطلبة الذين تقلُّ كتلهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

4) النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد كتلهم على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين، أو تقلُّ عنه بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد.

مثال 2

إذا اتخذ التمثيل البياني لأطوال مجموعة من طلبة الصف الثاني عشر شكل المنحنى الطبيعي، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي.

2) النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البُعْد بين أطوالهم والوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.

3) النسبة المئوية للطلبة الذين تقلُّ أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

4) النسبة المئوية للطلبة الذين تقلُّ أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

مثال 3

إذا اتخذ التمثيل البياني لأطوال مجموعة من طلبة الصف السابع شكل المنحنى الطبيعي، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي.

2) النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البُعْد بين أطوالهم والوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.

3) النسبة المئوية للطلبة الذين تقلُّ أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

4) النسبة المئوية للطلبة الذين تقلُّ أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

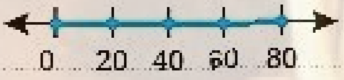
(مفهوم أساسي)

- المُتغيِّرُ العشوائي المنفصل هو مُتغيِّرٌ عشوائي يأخذ قِيَمًا معدودةً.

مثال: عدد السيّارات التي ستمرُّ أمام إحدى المدارس خلال الساعة القادمة.

- المُتغيِّرُ العشوائي المتصل هو مُتغيِّرٌ عشوائي يأخذ قِيَمًا متصلةً ضمن فترة مُعيَّنة من الأعداد الحقيقية.

مثال: سرعة أوّل سيّارة ستمرُّ أمام إحدى المدارس خلال الساعة القادمة.



مثال 4

إذا كان: $X \sim N(20, 4)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1. $P(X > 20)$
2. $P(18 < X < 22)$
3. $P(X > 22)$

مثال 5

إذا كان: $X \sim N(55, 121)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1. $P(X < 55)$
2. $P(55 < X < 66)$
3. $P(X > 77)$

مثال 6

توصّلت دراسة إلى أنَّ أطوال النساء في إحدى المدن تتبع توزيعًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 167 cm، وانحرافه المعياري 8 cm. إذا اختيرت امرأة عشوائيًا، فأجد ما يأتي:

1. احتمال أنْ يكون طول المرأة أقل من 167 cm
2. احتمال أنْ يتراوح طول المرأة بين 159 cm و 167 cm

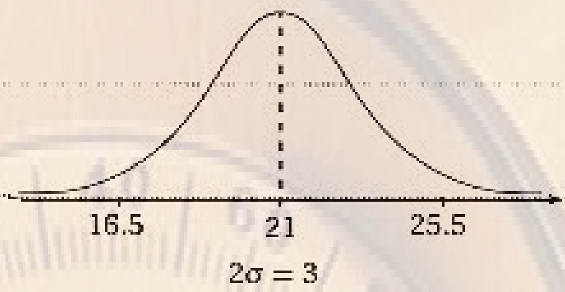
مثال 7

توصّلت دراسة إلى أنَّ أطوال الرجال في إحدى المدن تتبع توزيعًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 178 cm، وانحرافه المعياري 7 cm. إذا اختير رجل عشوائيًا، فأجد ما يأتي:

1. احتمال أنْ يكون طول الرجل أكثر من 178 cm
2. احتمال أنْ يتراوح طول الرجل بين 171 cm و 192 cm

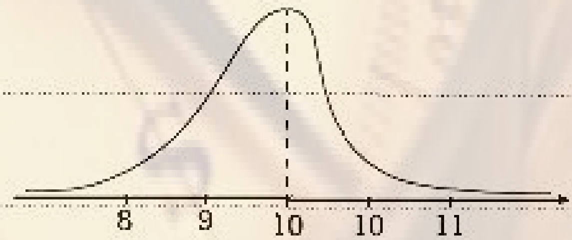
مثال 8

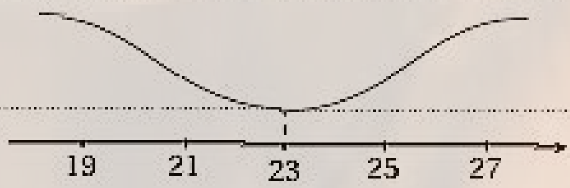
يُبيِّن الشكل منحنى توزيع طبيعي. أُعبِّر عن المُتغيِّر العشوائي لهذا التوزيع باستعمال الرموز.



مثال 9

أُبيِّن لماذا لا يُمثِّل أيٌّ من التمثيلين الآتيين منحنى توزيع طبيعي:





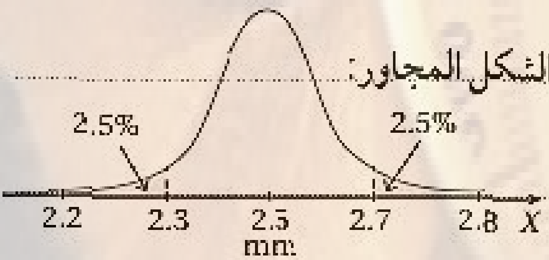
مثال 10

إذا كان: $X \sim N(8, 0.04)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1. $P(X > 8)$
2. $P(7.8 < X < 8.2)$
3. $P(X > 8.4)$

مثال 11

يُمكِن نمذجة أطوال أقطار مسامير يُنتِجها مصنع بمنحنى التوزيع الطبيعي المُبيَّن في الشكل المجاور:



1. أجد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لأطوال أقطار المسامير.
2. أجد النسبة المئوية للمسامير التي يزيد طول قُطْر كلٍّ منها على الوسط الحسابي بما لا يزيد على انحرافين معياريين.

22 أكتشف الخطأ: قال يوسف: "إنَّ $X\sim N(4^2, t^2)$ مُتغيِّر عشوائي طبيعي، وسطه الحسابي 4، وانحرافه المعياري t^2 ".
أكتشف الخطأ في قول يوسف، ثم أُصحِّحه.

23 تبريـر: يدلُّ المُتغيِّر العشـوائي $X\sim N(100, \sigma^2)$ علـى أطوال الأفاعي (بالسـنتيمتر) في أحد مجتمعاتها. إذا كانت أطوال 68% منها تتراوح بين 93 cm و 107 cm، فأجد σ^2، مُبرِّرًا إجابتي.

24 تحدٍّ: تتبع العلامات في أحد الاختبارات توزيعًا طبيعيًّا، وسـطه الحسابي 68، وانحرافه المعياري 15. إذا لم ينجح في الاختبار 16% من الطلبة، فأجد علامة النجاح.

الدرس الرابع : التوزيع الطبيعي المعياري

مثال 1

أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

1) $P(Z < 1.34)$

2) $P(Z > -2.01)$

3) $P(Z < 0.69)$

4) $P(Z > -1.67)$

5) $P(Z < 3.05)$

6) $P(Z > -2.88)$

7) $P(Z > 1.25)$

8) $P(Z < -0.62)$

9) $P(Z > 2.56)$

10) $P(Z < -0.09)$

⑪ $P(Z > 1.01)$

⑫ $P(Z < -1.52)$

⑬ $P(0.47 < Z < 1.1)$

⑭ $P(-1.5 < Z < 2.34)$

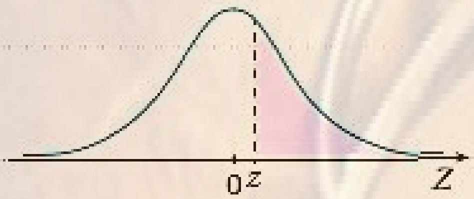
⑮ $P(0 < Z < 0.33)$

⑯ $P(-1 < Z < 1.25)$

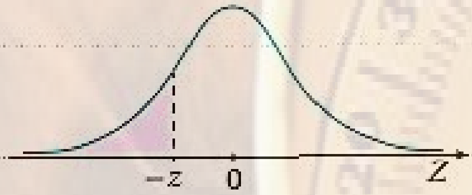
ملخص المفهوم

إذا كان: $Z \sim N(0, 1)$، فإنَّ:

1 $P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$

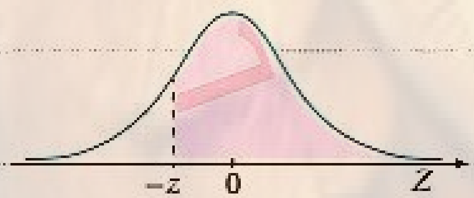


2 $P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$

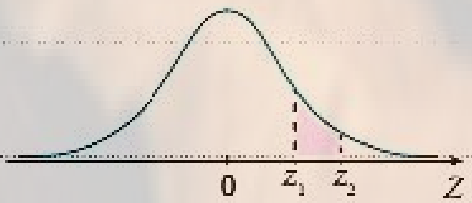


إذا كان: $Z \sim N(0, 1)$، فإنَّ:

3 $P(Z > -z) = P(Z < z)$



4 $P(z_1 < Z < z_2) = P(Z < z_2) - P(Z < z_1)$



مثال 2

أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

1. $P(Z < 1.42)$
2. $P(Z < -2.78)$
3. $P(-2.65 < Z < -1.43)$
4. $P(-1.8 < Z < 1.8)$
5. $P(-1 < Z < -0.33)$
6. $P(Z > 1.06)$
7. $P(Z < 0.87)$
8. $P(Z > -1.33)$
9. $P(0.24 < Z < 1.1)$
10. $P(Z < -1.75)$
11. $P(0.4 < Z < 1.7)$

⑫ $P(1.1 < Z < 2.1)$

⑬ $P(Z < -0.54)$

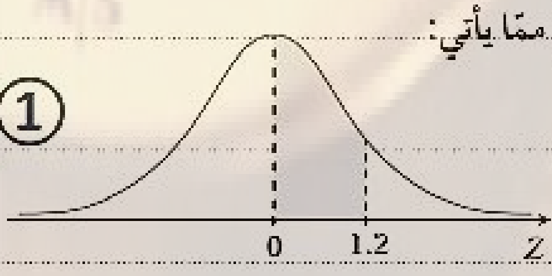
⑭ $P(Z > 0.81)$

⑮ $P(Z > 2.09)$

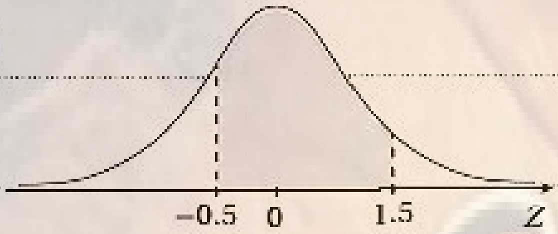
مثال 3

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كلٍّ ممّا يأتي:

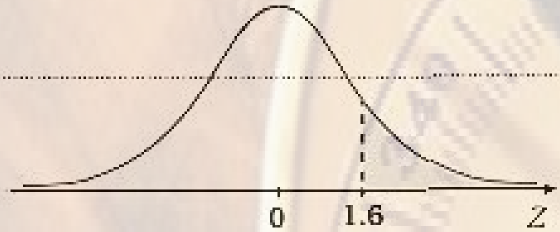
①



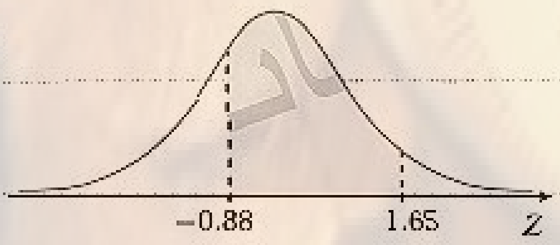
②



③



④



إيجاد قيمة المُتغيِّر العشوائي إذا عُلِم الاحتمال

مثال 4

أجد قيمة a التي تُحقِّق الاحتمال المعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $P(Z < a) = 0.8212$

2) $P(Z < a) = 0.32$

3) $P(Z > a) = 0.9406$

4) $P(Z > a) = 0.015$

5) $P(Z < a) = 0.9788$

6) $P(Z > a) = 0.9738$

7) $P(Z < a) = 0.25$

8) $P(Z > a) = 0.2$

9) $P(Z < a) = 0.9082$

10) $P(Z < a) = 0.5442$

11) $P(Z < a) = 0.0314$

⑫ $P(Z > a) = 0.2743$

⑬ $P(Z > a) = 0.95$

⑭ $P(Z > a) = 0.6231$

مثال 5

إذا كان: $Z \sim N(0, 1)$، وكان: $P(1 < Z < c) = 0.1408$

فأجد قيمة الثابت c.

مهارات التفكير العليا

22 أكتشف الخطأ: عبَّرت روان عن المُتغيِّر العشوائي الطبيعي المعياري على النحو الآتي:

$$N \sim Z(1, 0^2)$$

أكتشف جميع الأخطاء التي وقعت فيها روان، ثم أُصحِّحها.

23 تحدٍّ: إذا كان $a > 0$، فأُثبِت أنَّ: $P(-a < Z < a) = 2P(Z < a) - 1$.

تبرير: **أجد قيمة a التي تُحقِّق الاحتمال المعطى في كلٍّ ممّا يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:**

24 $P(0 < Z < a) = 0.45$

25 $P(-a < Z < a) = 0.1272$

الدرس الخامس : احتمال المتغير العشوائي الطبيعي باستعمال الجدول

تحويل قِيَم التوزيع الطبيعي إلى قِيَم معيارية

مثال 1

إذا كان X مُتغيّرًا عشوائيًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 64 وانحرافه المعياري 5، فأجد القيمة المعيارية z التي تُقابِل قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

① $x = 70$

② $x = 55$

مثال 2

إذا كان X مُتغيّرًا عشوائيًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 15 وانحرافه المعياري 4، فأجد القيمة المعيارية z التي تُقابِل قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

① $x = 24$

② $x = 10$

مثال 3

إذا كان X مُتغيّرًا عشوائيًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 89 وانحرافه المعياري 11.5 ، فأجد القيمة المعيارية z التي تُقابِل قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

① $x = 81$

② $x = 92$

③ $x = 100$

مثال 4

إذا كان X مُتغيِّرًا عشـــوائيًّا طبيعيًّا، وسطه الحسابيِ 220 وانحرافه المعياري 10، فأجد قيمة x التي تُقابِل القيمة المعيارية z في كلٍّ ممّا يأتي:

① $z = 2$

② $z = -3.5$

③ $z = 4.2$

إيجاد احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي (غير المعياري)

مثال 5

إذا كان: $X \sim N(36, 8^2)$ فأجـــد كل احتمال ممّا يأتي، مُســـتعمِلًا جـــدول التوزيع الطبيعي المعياري:

① $P(X < 42)$

② $P(X > 28)$

③ $P(X > 46)$

④ $P(24 < X < 56)$

مثال 6

إذا كان: $X \sim N(7, 0.25)$، فأجـد كل احتمال ممّا يأتي، مُستعمِلًا جـدول التوزيع الطبيعي المعياري:

1. $P(X < 7.7)$

2. $P(X > 8.2)$

3. $P(X > 6.1)$

4. $P(6 < X < 7.1)$

مثال 7

إذا كان: $X \sim N(17, 100)$ ، فأجـد كل احتمال ممّا يأتي، مُستعمِلًا جـدول التوزيع الطبيعي المعياري:

1. $P(X < 25.8)$

2. $P(X > 10.5)$

3. $P(19.4 < X < 30.2)$

4. $P(4 < X < 17)$

مثال 8

تتبع كتل ثمار الجوّافة في إحدى مَزارع غور الأردن توزيعا طبيعيًا، وسطه الحسابي 70 g، وانحرافه المعياري 4 g:

1) أجد نسبة ثمار الجوّافة التي تزيد كتلة كلٍّ منها على 80 g

2) إذا وُضِع في ساحة 4500 ثمرة جوّافة من إنتاج هذه المزرعة، فأجد عدد ثمار الجوافة التي تقلُّ كتلة كلٍّ منها عن 65 g في هذه الساحة.

مثال 9

تتبع كتل ثمار البندورة في إحدى المَزارع توزيعًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 90 g، وانحرافه المعياري 5 g:

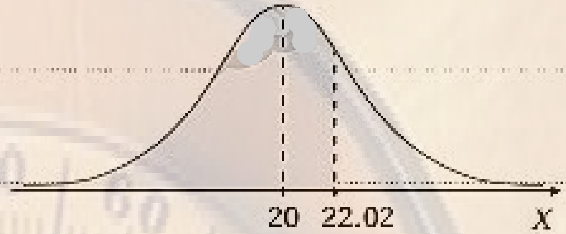
1) أجد نسبة ثمار البندورة التي تقلُّ كتلة كلٍّ منها عن 80 g

2) إذا احتوى صندوق على 200 حبَّة بندورة من إنتاج هذه المزرعة، فأجد عدد ثمار البندورة التي تزيد كتلة كلٍّ منها على 100 g في هذا الصندوق.

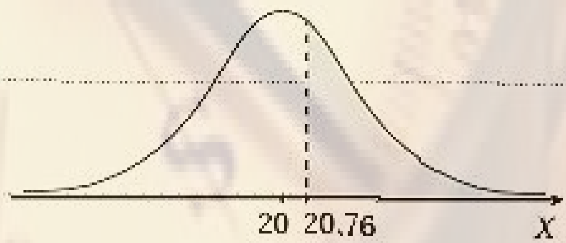
مثال 10

إذا كان: $X \sim N(20, 9)$، فأجد مساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي للمُتغيِّر العشوائي X في كلٍّ ممّا يأتي:

1



2



مثال 11

تتبع أطوال لاعبي كرة السلّة توزيعًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 185 cm، وانحرافه المعياري 5 cm. إذا اختير لاعب عشوائيًا، فأجد كُلًا ممّا يأتي:

1) احتمال أنْ يزيد طول اللاعب على 175 cm.

2) احتمال أنْ يتراوح طول اللاعب بين 180 cm و 190 cm

3) العدد التقريبي للاعبين الذين تزيد أطوالهم على 195 cm من بين 2000 لاعب.

مهارات التفكير العليا

20 **تبرير**: إذا كان: $X\sim N(\mu\ ,\ \sigma^2)$، وكانت القيمة المعيارية التي تُقابِل $x = 14$ هي $z = 3.2$، والقيمة المعيارية التي تُقابِل $x = -6$ هي $z = -1.8$، فأجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمُتغيِّر العشوائي X.

21 **تحدٍّ**: إذا كانت مُعدَّلات 600 طالب تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي هو 73، وانحرافه المعياري هو 8، وقرَّرت إدارة المدرسة تكريم الطلبة الخمسين الحاصلين على أعلى المُعدَّلات من بين هؤلاء الطلبة، فما أقل مُعدَّل للطلبة الخمسين؟

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان: $X \sim B(4, 0.4)$، فإنَّ: $P(X = 3)$ يساوي:

a) 0.1536 b) 0.0384
c) 0.064 d) 0.3456

2 إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، وكان معامله $n = 320$، وتوقُّعه 60، فإنَّ المعامل p هو:

a) $\frac{3}{16}$ b) $\frac{13}{16}$
c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{16}$

3 إذا كان: $X \sim B(8, 0.1)$، فإنَّ: $P(X < 2)$ إلى أقرب 4 منازل عشرية يساوي:

a) 0.3826 b) 0.8131
c) 0.4305 d) 0.1488

4 إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، وكان توقُّعه 8، وتباينه $\frac{20}{3}$، فإنَّ المعامل n هو:

a) 32 b) 64
c) 56 d) 48

5 النسبة المئوية لمساحة المنطقة المحصورة بين $\mu - 3\sigma$ و $\mu + 3\sigma$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي هي:

a) 68% b) 95%
c) 99.7% d) 89.7%

6 إذا كانت علامات 2000 طالب في أحد الاختبارات تتبع توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 83، وانحرافه المعياري 4، فإنَّ عدد الطلبة الذين تقلُّ علاماتهم عن 80 هو تقريبًا:

a) 453 b) 1547
c) 1567 d) 715

إذا كان: $X \sim Geo(0.3)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

7 $P(X = 4)$ 8 $P(3 < X \leq 5)$

9 $P(X > 4)$ 10 $E(X)$

إذا كان: $X \sim B(6, 0.3)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

11 $P(X = 2)$ 12 $P(X > 4)$

13 $P(2 \leq X < 3)$ 14 $E(X)$

أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

15 $P(Z < 1.93)$ 16 $P(Z < 0.72)$

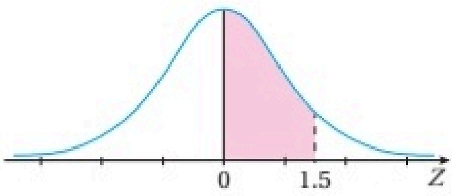
17 $P(Z > -1.04)$ 18 $P(-1.7 < Z < 3.3)$

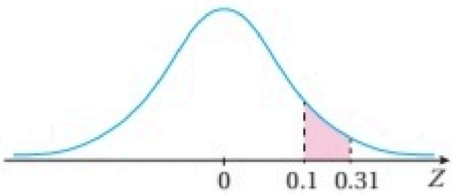
إذا كان: $X \sim N(55, 16)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

19 $P(X \leq 50)$ 20 $P(50 < X < 58)$

21 $P(56 < X < 59)$ 22 $P(X > 55)$

أجد مســاحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كلٍّ ممّا يأتي:

23 

24 

25 تبيَّن في مصنع للمصابيح الكهربائية أنَّ احتمــال أنْ يكون أيُّ مصباح من إنتاج المصنع تالفًا هو 0.17. إذا اختير 100 مصباح عشــوائيًا من إنتــاج المصنع، فأجد العدد المُتوقَّع من المصابيح التالفة.

أخذت نور تُراقِب السيّارات المارَّة أمــام منزلها. إذا كان احتمــال أنْ تمرَّ أيُّ ســيّارة زرقــاء من أمــام منزلها هو 0.1، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

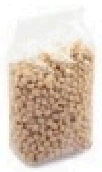
26 احتمــال عدم مرور أيِّ ســيّارة زرقاء مــن بين أوَّل 5 سيّارات مَرَّت أمام المنزل.

27 احتمال مرور أكثر من 3 ســيّارات حتى شــاهدت نور أوَّل سيّارة زرقاء.

أجد القيمة a التي تُحقِّق كل احتمال ممّا يأتي:

28 $P(Z < a) = 0.638$ 29 $P(Z > a) = 0.6$

تعبئة: يُعبِّئ مصنعٌ حبوبَ الحِمَّص في أكياس تتبع كتلها توزيعًا طبيعيًّا، وســطه الحســابي 250 g، وانحرافه المعياري 4 g:



30 أجد نســبة أكياس الحِمَّــص التي تزيد كتلــة كلٍّ منها على 260 g

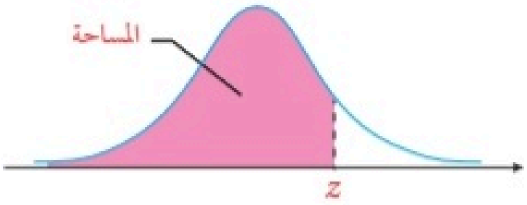
31 أجد نســبة أكياس الحِمَّص التي تتراوح كتلة كلٍّ منها بين 240 g و 250 g

في دراسة لإحدى شــركات الاتصالات، تبيَّن أنَّ 30% من المشــتركين يستعملون هواتفهم المحمولة لإجراء مكالمتين فقط يوميًا. إذا اختير 20 شــخصًا من المشتركين عشوائيًا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

32 احتمال أنْ يُجْــري 4 منهم فقط مكالمتين هاتفيتين في اليوم الواحد.

33 احتمال أنْ يُجْــري اثنان منهم علــى الأقل مكالمتين هاتفيتين في اليوم الواحد.

34 تُنتِج إحدى الشركات قوارير زيت، ويُفترَض أنْ تحوي كل قارورة منهــا 500 mL من الزيت، وأنْ يتبع حجم الزيت في هذه القوارير توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 506 mL، وانحرافــه المعيــاري 3 mL. إذا احتــوى صندوق على 100 قارورة توضَع عشــوائيًّا، فأجد عدد القوارير في هذا الصندوق التي تحوي كلٌّ منها أقل من 500 mL من الزيت.



جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998