كتاب الطالب

الدرس الأول – المماس والعمودي على المماس

مثال 1:

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 3x + 2$ عند النقطة $(2,12)$

الخطوة 1: أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة المعطاة.

أجد $f'(2)$:

الاقتران المعطى $f(x) = x^2 + 3x + 2$

بإيجاد المشتقة $f'(x) = 2x + 3$

بتعويض $x = 2$ $f'(2) = 2(2) + 3$

بالتبسيط $= 7$

إذن، ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(2,12)$ هو: $f'(2) = 7$

الخطوة 2: أجد معادلة المماس.

معادلة مماس منحنى الاقتران $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

بتعويض $a = 2, f(2) = 12, f'(2) = 7$ $y - 12 = 7(x - 2)$

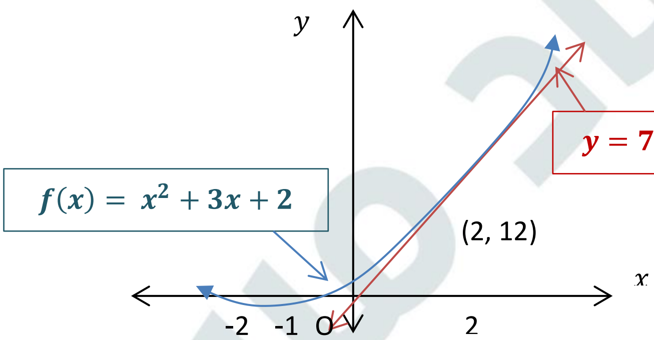
بالتبسيط $y = 7x - 2$

الدعم البياني

يُبين التمثيل البياني المجاور منحنى الاقتران:

$f(x) = x^2 + 3x + 2$،

ومماس المنحنى عند النقطة $(2,12)$.



أتحقق من فهمي

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ عند النقطة (3,5)

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$f'(3) = 27 - 18 + 2 = 11$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

بتعويض $(x_1, y_1) = (3,5), m = 11$: $y - 5 = 11(x - 3)$

$y - 5 = 11x - 33$

$y = 11x - 28$

مثال 2:

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$ عندما $x = -2$.

الخطوة 1: أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران عند قيمة x المعطاة.

أجد $f'(-2)$:

الاقتران المعطى: $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$

بإيجاد المشتقة: $f'(x) = \frac{-16x}{(x^2+4)^2}$

بتعويض $x = -2$: $f'(-2) = \frac{-16(-2)}{((-2)^2+4)^2}$

بالتبسيط: $= \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$

إذن، ميل المماس لمنحنى الاقتران عندما $x = -2$ هو: $f'(-2) = \frac{1}{2}$

الخطوة 2: أجد الإحداثي y لنقطة التماس.

الاقتران المعطى: $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$

بتعويض $x = -2$: $f(-2) = \frac{8}{(-2)^2+4}$

بالتبسيط: $= \frac{8}{8} = 1$

إذن الإحداثي y لنقطة التماس هو: $f(-2) = 1$.

الخطوة 3: أجد معادلة المماس.

معادلة مماس منحنى الاقتران $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

بتعويض $a = -2, f(2) = 1, f'(-2) = \frac{1}{2}$ $y - 1 = \frac{1}{2}(x + 2)$

بالتبسيط $y = \frac{1}{2}x + 2$

أتحقق من فهمي

أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \frac{2x-1}{x}$ عندما $x = 1$.

$$f(1) = \frac{2-1}{1} = 1 \rightarrow (1,1)$$

$$f'(x) = \frac{(x)(2) - (2x-1)(1)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$f'(1) = \frac{1}{1^2} = 1$$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

بتعويض $(x_1, y_1) = (1,1), m = 1$ $y - 1 = 1(x - 1)$

$$y - 1 = x - 1$$

$$y = x$$

مثال 3:

1) أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x}$، التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$.

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقطة التماس.

الاقتران المعطى $f(x) = \sqrt{x}$

بإيجاد المشتقة $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

بتعويض $f'(x) = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$

بالضرب التبادلي $2\sqrt{x} = 2$

بقسمة طرفي المعادلة على 2 $\sqrt{x} = 1$

بتربيع طرفي المعادلة $x = 1$

الخطوة2: أجد الإحداثي y لنقطة التماس.

أجد $f(1)$:

الاقتران المعطى $f(x) = \sqrt{x}$

بتعويض $x = 1$ $f(1) = \sqrt{1}$

بالتبسيط $= 1$

إذن، نقطة التماس هي: (1,1).

2) أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = -x^3 + 6x^2$، التي يكون عندها المماس أفقياً.

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقطة (نقاط) التماس.

الاقتران المعطى $f(x) = -x^3 + 6x^2$

بإيجاد المشتقة $f'(x) = -3x^2 + 12x$

بتعويض $f'(x) = 0$ $-3x^2 + 12x = 0$

بإخراج $-3x$ عاملا مشتركا $-3x(x-4) = 0$

خاصية الضرب الصفري $-3x = 0 \quad or \quad x - 4 = 0$

بحل كل معادلة لـ x $x = 0 \quad or \quad x = 4$

الخطوة 2: أجد الإحداثي y لنقطتي التماس.

أجد $f(0)$، و $f(4)$:

الاقتران المعطى $f(x) = -x^3 + 6x^2$

بتعويض $x = 0$ $f(0) = -(0)^3 + 6(0)^2 = 0$

بتعويض $x = 4$ $f(4) = -(4)^3 + 6(4)^2 = 32$

إذن، أحداثيا نقطتي التماس هما: (0,0) , (4, 32)

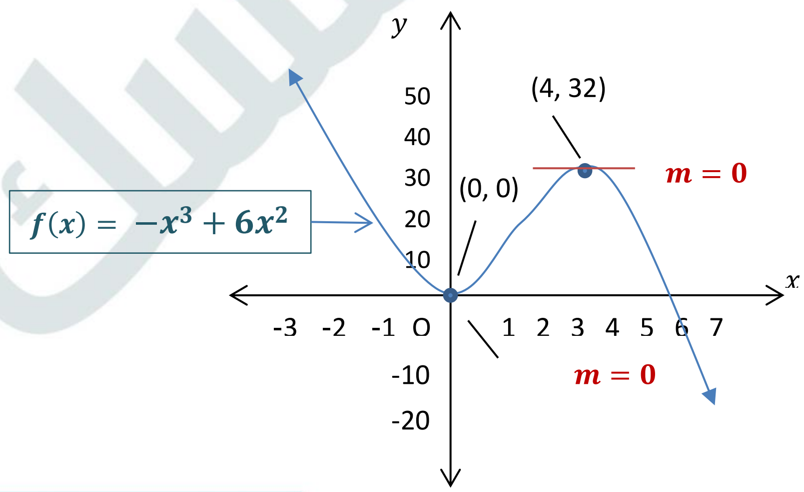
الدعم البياني

يُبين التمثيل البياني المجاور

لمنحنى الاقتران $f(x)$

وجود مماسين أفقيين

عندما $x = 4, x = 0$



أتحقق من فهمي

a) أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 1 - \sqrt{x}$، التي يكون عندها ميل المماس $-\frac{1}{4}$

$f(x) = 1 - \sqrt{x}\,, f'(x) = -\frac{1}{4}$

$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$-\frac{1}{4} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x} = 4$

$\sqrt{x} = 2$

$x = 4$

$f(4) = 1 - \sqrt{4} = -1$

نقطة التماس هي (4, -1)

b) أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$، التي يكون عندها المماس أفقيا.

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2\,, f'(x) = 0$

$f'(x) = -3x^2 + 6x$

$0 = -3x^2 + 6x$

$3x(-x + 2) = 0$

$x = 0 \; or \; x = 2$

$f(0) = -2$

$f(2) = -8 + 12 - 2 = 2$

نقطا التماس هما (2,2) ، (0, -2)

مثال 4:

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^{3x}$ عند النقطة $(0,1)$

الخطوة 1: أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة المعطاة.

الاقتران المعطى $f(x) = e^{3x}$

بإيجاد المشتقة $f'(x) = 3e^{3x}$

بتعويض $x = 0$ $f'(0) = 3e^{3(0)}$

بالتبسيط $= 3$

إذن، ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(0,1)$ هو: $f'(0) = 3$. ومن ثم، فإن ميل العمودي على المماس عند هذه النقطة هو: $-\frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{3}$.

الخطوة 2: أجد معادلة العمودي على المماس.

معادلة العمودي على مماس منحنى الاقتران $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$

بتعويض $a = 0, f(0) = 1, -\frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{3}$ $y - 1 = -\frac{1}{3}(x-0)$

بالتبسيط $y = -\frac{1}{3}x + 1$

أتحقق من فهمي:

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \ln x^3$ عند النقطة $(1,0)$

$f(x) = \ln x^3 \;, (1,0)$

$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$

$f'(1) = \frac{3}{1} = 3$

ميل المماس هو 3 إذن ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{3}$

معادلة العمودي على المماس $y - y_1 = m(x - x_1)$

بتعويض $(x_1, y_1) = (1,0), m = -\frac{1}{3}$ $y - 0 = -\frac{1}{3}(x-1)$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

أتدرب وأحل المسائل:

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة:

1) $f(x) = x^3 - 6x + 3, (2, -1)$

$f(x) = x^3 - 6x + 3\,, (2, -1)\,, \quad f(2) = -1$

$f'(x) = 3x^2 - 6$

$f'(2) = 12 - 6 = 6$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-1) = 6(x - 2)$

$y + 1 = 6x - 12$

$y = 6x - 13$

2) $f(x) = \frac{x^4 - 3x^3}{x}, (1, -2)$

$f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3}{x} = \dfrac{x^4}{x} - \dfrac{3x^3}{x} = x^3 - 3x^2\,, \quad (1, -2)\,, f(1) = -2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(1) = 3 - 6 = -3$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-2) = -3\,(x - 1)$

$y + 2 = -3x + 3$

$y = -3x + 1$

3) $f(x) = \sqrt{x}(x^2 - 1)\,, (1, 0)$

$f(x) = \sqrt{x}(x^2 - 1)\,, (1, 0)\,, f(1) = 0$

$f'(x) = (\sqrt{x})(2x) + (x^2 - 1)(\frac{1}{2\sqrt{x}})$

$f'(1) = (1)(2) + (0)\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = 2\,(x - 1)$

$y = 2x - 2$

4) $f(x) = x + \frac{4}{x}, (-4,-5)$

$f(x) = x + \frac{4}{x}, (-4,-5), f(-4) = -5$

$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$

$f'(-4) = 1 - \frac{4}{16} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ معادلة المماس:

$y - (-5) = \frac{3}{4}(x + 4)$

$y + 5 = \frac{3}{4}x + 3$

$y = \frac{3}{4}x - 2$

5) $f(x) = x + e^x, (0,1)$

$f(x) = x + e^x, (0,1), f(0) = 1$

$f'(x) = 1 + e^x$

$f'(0) = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ معادلة المماس:

$y - 1 = 2(x - 0)$

$y - 1 = 2x$

$y = 2x + 1$

6) $f(x) = \ln(x + e), (0,1)$

$f(x) = \ln(x + e), (0,1), f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{x + e}$

$f'(0) = \frac{1}{0 + e} = \frac{1}{e}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ معادلة المماس:

$y - 1 = \frac{1}{e}(x - 0)$

$y - 1 = \frac{1}{e}x$

$y = \frac{1}{e}x + 1$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

7) $f(x) = \sqrt{x-7}, x = 16$

$f(x) = \sqrt{x-7}, x = 16$

$f(16) = \sqrt{16-7} = 3 \rightarrow (16, 3)$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-7}}$

$f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16-7}} = \frac{1}{6}$

معادلة المماس:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = \frac{1}{6}(x - 16)$

$y - 3 = \frac{1}{6}x - \frac{8}{3}$

$y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$

8) $f(x) = (x-1)e^x, x = 1$

$f(x) = (x-1)e^x, x = 1$

$f(1) = (1-1)e^1 = 0 \rightarrow (1, 0)$

$f'(x) = (x-1)e^x + e^x(1) = xe^x$

$f'(1) = 1e^1 = e$

معادلة المماس:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = e\,(x - 1)$

$y = ex - e$

9) $f(x) = \frac{x+3}{x-3}, x = 4$

$$f(x) = \frac{x+3}{x-3}, x = 4$$

$$f(4) = \frac{4+3}{4-3} = 7 \rightarrow (4,7)$$

$$f'(x) = \frac{(x-3)(1) - (x+3)(1)}{(x-3)^2} = \frac{-6}{(x-3)^2}$$

$$f'(4) = \frac{-6}{(4-3)^2} = -6$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 7 = -6(x - 4)$$

$$y - 7 = -6x + 24$$

$$y = -6x + 31$$

10) $f(x) = (\ln x)^2, x = e$

$$f(x) = (\ln x)^2, x = e$$

$$f(e) = (\ln e)^2 = 1 \rightarrow (e, 1)$$

$$f'(x) = 2(\ln x)(\frac{1}{x})$$

$$f'(e) = 2(\ln e)\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{2}{e}(x - e)$$

$$y - 1 = \frac{2}{e}x - 2$$

$$y = \frac{2}{e}x - 1$$

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى كل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة:

11) $f(x) = (3x+10)^2, (-3, 1)$

$f(x) = (3x+10)^2, (-3, 1)$

$f'(x) = 2(3x+10)^1(3) = 6(3x+10)$

$f'(-3) = 6(-9+10) = 6$

ميل المماس هو 6 إذن ميل العمودي على المماس هو $-\frac{1}{6}$

معادلة العمودي على المماس:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = -\frac{1}{6}(x+3)$

$y - 1 = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}$

12) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+1}}, (4, 1)$

$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+1}}, (4, 1)$

$f'(x) = \frac{-3 \times \frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}$

$f'(4) = \frac{-3 \times \frac{1}{\sqrt{8+1}}}{8+1} = -\frac{1}{9}$

ميل المماس هو $-\frac{1}{9}$ إذن ميل العمودي على المماس هو 9

معادلة العمودي على المماس:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

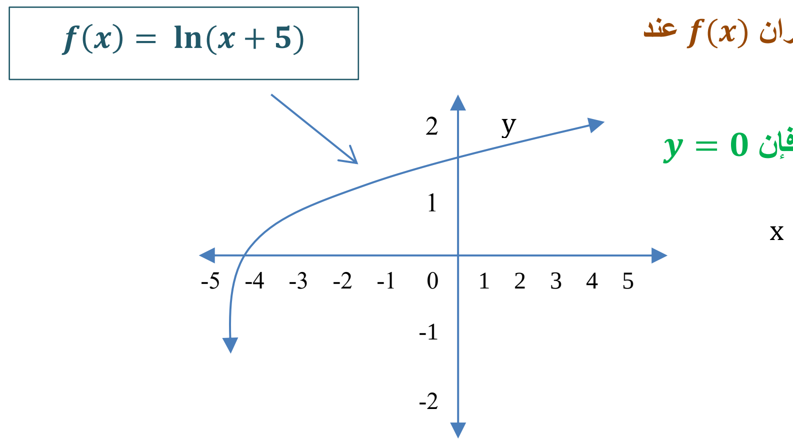
$y - 1 = 9(x-4)$

$y = 9x - 35$

يُبين الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \ln(x+5)$:

13) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور x.

إرشاد: عند تقاطع المنحنى مع المحور x، فإن $y = 0$



نلاحظ من الرسم أن المنحنى يقطع المحور x في النقطة (-4.0) أي أنّ $f(-4) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x+5}$$

$$f'(-4) = \frac{1}{-4+5} = 1$$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -\frac{1}{1}(x+4)$$

$$y = -x - 4$$

14) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور y.

إرشاد: عند تقاطع المنحنى مع المحور y، فإن $x = 0$

عند تقاطع المنحنى مع المحور y يكون $x = 0$

ويكون $y = \ln(0+5) = \ln 5$

نقطة تقاطع المنحنى مع محور y هي: $(0, \ln 5)$

$$f'(x) = \frac{1}{x+5}$$

$$f'(0) = \frac{1}{0+5} = \frac{1}{5}$$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \ln 5 = -5(x - 0)$$

$$y = -5x + \ln 5$$

أذا كان: $f(x) = 4e^{2x=1}$، فأجد كلا مما يأتي:

15)معادلة المماس لمنحنى الاقتران$f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم: $x = -1$.

$$f(x) = 4e^{2x+1}$$

$$f(-1) = 4e^{-2+1} = \frac{4}{e} \to (-1, \frac{4}{e})$$

$$f'(x) = 8e^{2x+1}$$

$$f'(-1) = 8e^{-2+1} = \frac{8}{e}$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{4}{e} = \frac{8}{e}(x + 1)$$

$$y - \frac{4}{e} = \frac{8}{e}x + \frac{8}{e}$$

$$y = \frac{8}{e}x + \frac{12}{e}$$

16) معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور y.

$$y = 4e^{2(0)+1} = 4e \to (0, 4e)$$

نقطة تقاطع المنحنى مع محور y هي: $(0, 4e)$

$$f'(x) = 8e^{2x+1}$$

$$f'(0) = 8e^{0+1} = 8e$$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4e = -\frac{1}{8e}(x)$$

$$y = -\frac{1}{8e}x + 4e$$

17) أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - x - 12$ والتي يكون عندها ميل المماس 3، ثم أكتب معادلة هذا المماس.

$f(x) = x^2 - x - 12$

$f'(x) = 2x - 1$

$3 = 2x - 1$

$4 = 2x$

$x = 2$

$f(2) = 4 - 2 - 12 = -10$

النقطة هي (2, -10)

معادلة المماس:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-10) = 3(x - 2)$

$y + 10 = 3x - 6$

$y = 3x - 16$

18)أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4$ التي يكون عندها المماس أفقيا.

مماس المنحنى أفقي أي $f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 8x$

$0 = 3x^2 - 8x$

$x(3x - 8) = 0$

$x = 0 \; or \; 3x - 8 = 0 \rightarrow 3x = 8 \rightarrow x = \frac{8}{3}$

$f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 - 4 = -4$

$f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 4 = -\frac{364}{27}$

النقاط هي $(0, -4), (\frac{8}{3}, -\frac{364}{27})$

19)أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-1}}$، التي يكون عندها المماس أفقيا.

مماس المنحنى أفقي أي $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2x-1}(1) - (x)\left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right)}{2x-1}$$

$$0 = \frac{\sqrt{2x-1} - \frac{x}{\sqrt{2x-1}}}{2x-1}$$

$$\sqrt{2x-1} - \frac{x}{\sqrt{2x-1}} = 0$$

$$\sqrt{2x-1} = \frac{x}{\sqrt{2x-1}}$$

$$2x - 1 = x$$

$$x = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{2-1}} = 1$$

النقطة هي $(1, 1)$

20) أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 5x^2 - 49x + 12$، التي يكون عندها ميل المماس 1.

ميل مماس المنحنى يساوي 1 أي $f'(x) = 1$

$$f'(x) = 10x - 49$$

$$1 = 10x - 49$$

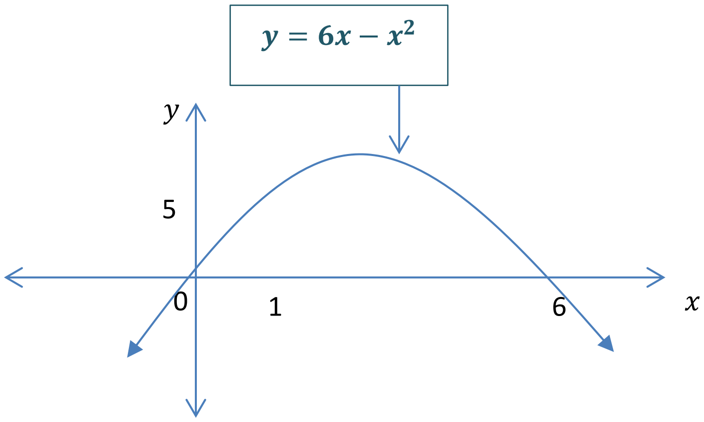
$$10x = 50$$

$$x = 5$$

$$f(5) = 5(5)^2 - 49(5) + 12 = 125 - 245 + 12 = -108$$

النقطة هي $(5, -108)$

يُبين الشكل المجاور منحنى الاقتران: $y = 6x - x^2$:



21) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P.

$f'(x) = 6 - 2x$

$f'(1) = 6 - 2 = 4$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 5 = 4(x - 1)$

$y - 5 = 4x - 4$

$y = 4x + 1$

22) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P.

معادلة العمودي على المماس:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = -\frac{1}{4}(x - 1)$$

$$y - 5 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{21}{4}$$

مهارات التفكير العليا:

تبرير: إذا كان: $f(x) = 6 - x^2$، فأجد كلا مما يأتي:

23) معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند كل من النقطة (1,5-) والنقطة (1,5)، مبررا إجابتي.

$f'(x) = -2x$

معادلة المماس عند النقطة $(-1, 5)$: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 5 = 2(x + 1)$

$y - 5 = 2x + 2$

$y = 2x + 7$

معادلة المماس عند النقطة $(1, 5)$: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 5 = -2(x - 1)$

$y - 5 = -2x + 2 \quad \rightarrow \quad y = -2x + 7$

24) نقطة تقاطع المماسين مع الفرع السابق، مبررا إجابتي.

$2x + 7 = -2x + 7$

$4x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

$y = -2(0) + 7 = 7$

نقطة تقاطع المماسين هي: $(0, 7)$

تحد: إذا كان: $f(x) = \sqrt{x}$، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعا:

25) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة (1,1).

$f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(1) = \frac{1}{2}$

معادلة المماس عند النقطة $(1, 1)$: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$

$y - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

26) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة (1,1).

معادلة العمودي على المماس:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -2(x - 1)$$

$$y - 1 = -2x + 2$$

$$y = -2x + 3$$

27)تبرير: أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x} - 1$، التي يكون عندها مماس منحنى الاقتران موازيا للمستقيم: $y = 2x - 1$

$$f(x) = \sqrt{x} - 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ميل المستقيم $y = 2x - 1$ هو 2، والمماس يوازيه فميله أيضا هو 2، إذن:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2$$

$$4\sqrt{x} = 1$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{16}$$

$$f\left(\frac{1}{16}\right) = \sqrt{\frac{1}{16}} - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

النقطة هي $(\frac{1}{16}, -\frac{3}{4})$

كتاب التمارين

الدرس الأول – المماس والعمودي على المماس

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة:

1) $f(x) = 2x^3 + 6x + 10, (-1, 2)$

$f'(x) = 6x^2 + 6$

$f'(-1) = 6 + 6 = 12$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = 12(x + 1)$

$y - 2 = 12x + 12$

$y = 12x + 14$

2) $f(x) = \frac{e^x}{x+4}, (0, \frac{1}{4})$

$$f'(x) = \frac{(x+4)(e^x) - (e^x)(1)}{(x+4)^2}$$

$$f'(0) = \frac{(4)(1) - (1)(1)}{16} = \frac{3}{16}$$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - \frac{1}{4} = \frac{3}{16}(x)$$

$$y = \frac{3}{16}x + \frac{1}{4}$$

3) $f(x) = x^2 - \frac{7}{x^2}, (1, -6)$

$$f(x) = 2x - \frac{-(7)(2x)}{x^4} = 2x + \frac{14}{x^3}$$

$$f'(1) = 2 + \frac{14}{1} = 16$$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-6) = 16(x - 1)$

$y + 6 = 16x - 16$

$y = 16x - 22$

4) $f(x) = x^2 - \frac{8}{\sqrt{x}}, (4, 12)$

$$f'(x) = 2x - \frac{-(8)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} = 2x + \frac{\frac{4}{\sqrt{x}}}{x}$$

$$f'(4) = 8 + \frac{\frac{4}{2}}{4} = \frac{17}{2}$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 12 = \frac{17}{2}(x - 4)$$

$$y - 12 = \frac{17}{2}x - 34$$

$$y = \frac{17}{2}x - 22$$

5) $f(x) = 4\sqrt{x}, (9, 12)$

$$f'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$f'(9) = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 12 = \frac{2}{3}(x - 9)$$

$$y - 12 = \frac{2}{3}x - 6$$

$$y = \frac{2}{3}x + 6$$

6) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, (3, 4)$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$f'(3) = \frac{-3}{\sqrt{25 - 9}} = -\frac{3}{4}$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

7) $f(x) = \sqrt[3]{x}, x = 8$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}, x = 8$$

$$f(8) = \sqrt[3]{8} = 2 \rightarrow (8, 2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} = 1/12$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{1}{12}(x - 8)$$

$$y - 2 = \frac{1}{12}x - \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{12}x + \frac{4}{3}$$

8) $f(x) = \frac{4+x}{x-2}, x = 8$

$$f(8) = \frac{4+8}{8-2} = 2 \rightarrow (8,2)$$

$$f'(x) = \frac{(x-2)(1)-(4+x)(1)}{(x-2)^2} = \frac{-6}{(x-2)^2}$$

$$f'(8) = \frac{-6}{(x-2)^2} = \frac{-6}{36} = -\frac{1}{6}$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{6}(x-8)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$$

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{10}{3}$$

9) $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+11}}, x = 5$

$$f(5) = \frac{8}{\sqrt{5+11}} = 2 \rightarrow (5,2)$$

$$f'(x) = \frac{-(8)(\frac{1}{2\sqrt{x+11}})}{x+11}$$

$$f'(5) = \frac{-(8)(\frac{1}{2\sqrt{5+11}})}{5+11} = -\frac{1}{16}$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{16}(x-5)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{16}(x-5)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{16}x + \frac{5}{16}$$

$$y = -\frac{1}{16}x + \frac{37}{16}$$

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى كل اقتران مما يأتي عند قيمة x أو عند النقطة المعطاة:

10) $f(x) = 5x^3 + x^2 - 2, (-1, -6)$

$f'(x) = 15x^2 + 2x$

$f'(-1) = 15 - 2 = 13$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-6) = -\frac{1}{13}(x + 1)$

$y + 6 = -\frac{1}{13}x - \frac{1}{13}$

$y = -\frac{1}{13}x - \frac{79}{13}$

11) $f(x) = 2x^2(6 - x), x = 5$

$f(5) = 2(5)^2(6 - 5) = 50 \rightarrow (5, 50)$

$f'(x) = (2x^2)(-1) + (6 - x)(4x)$

$f(5) = (50)(-1) + (6 - 5)(20) = -30$

معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 50 = \frac{1}{30}(x - 5)$

$y - 50 = \frac{1}{30}x - \frac{1}{6}$

$y = \frac{1}{30}x + \frac{299}{6}$

12)أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 2x^6 - x^4 - 2$، التي يكون عندها المماس أفقيا.

مماس المنحنى أفقي أي $f'(x) = 0$

$f'(x) = 12x^5 - 4x^3$

$12x^5 - 4x^3 = 0$

$4x^3(3x^2 - 1) = 0 \to x = 0$ أو $x^2 = \frac{1}{3} \to x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f(0) = 2(0)^6 - (0)^4 - 2 = -2$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2(\frac{1}{\sqrt{3}})^6 - (\frac{1}{\sqrt{3}})^4 - 2 = \frac{2}{27} - \frac{1}{9} - 2 = -\frac{55}{27}$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 - 2 = \frac{2}{27} - \frac{1}{9} - 2 = -\frac{55}{27}$

النقاط هي $(0,-2), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{55}{27}\right), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{55}{27})$

13) أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 20x^3 - 3x^5$، التي يكون عندها المماس أفقيا.

مماس المنحنى أفقي أي $f'(x) = 0$

$f'(x) = 60x^2 - 15x^4$

$60x^2 - 15x^4 = 0$

$15x^2(4 - x^2) = 0 \to x = 0 \ \ or \ \ x^2 = 4 \to \ \ x = \pm 2$

$f(0) = 20(0)^3 - 3(0)^5 = 0$

$f(-2) = 20(-2)^3 - 3(-2)^5 = -160 + 96 = -64$

$f(2) = 20(2)^3 - 3(2)^5 = 160 - 96 = 64$

النقاط هي $(0,0), (-2,-64), (2,64)$

14)أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 10x$، التي يكون عندها ميل المماس 6.

ميل المماس 6 أي $f'(x) = 6$

$f'(x) = x^4 - 10$

$x^4 - 10 = 6$

$x^4 = 16 \to x = \sqrt[4]{16} \to x = \pm 2$

$f(-2) = \frac{1}{5}(-2)^5 - 10(-2) = -\frac{32}{5} + 20 = \frac{68}{5}$

$f(2) = \frac{1}{5}(2)^5 - 10(2) = \frac{32}{5} - 20 = -\frac{68}{5}$

النقاط هي $\left(-2. \frac{68}{5}\right), (2, -\frac{68}{5})$

15) إذا كان: $f(x) = kx^3 + h$، حيث h, k ثابتان، فأجد قيمة k التي تجعل المستقيم: $y = 2x + 5$ مماسا لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 1$.

معادلة المماس عند $x = 1$ هي $y = 2x + 5$ إذن ميل المماس يساوي 2 عند $x = 1$، ومنه $f'(1) = 2$

$$f(x) = kx^3 + h$$

$$f'(x) = 3kx^2$$

$$f'(1) = 3k$$

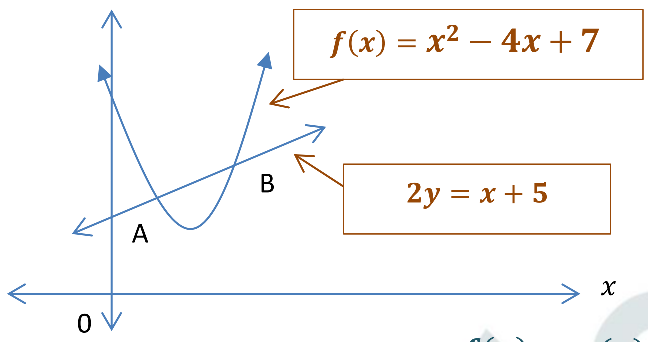
$$3k = 2$$

$$k = \frac{2}{3}$$

يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 4x + 7$،

والمستقيم: $2y = x + 5$:

16) أجد إحداثيي كل من النقطة A والنقطة B.



لإيجاد إحداثيي نقاط التقاطع بين $f(x)$ و $g(x)$ نحل المعادلة $f(x) = g(x)$

المستقيم الذي معادلته $2y = x + 5$ تصبح $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

$$x^2 - 4x + 7 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2} = 0$$

$$2x^2 - 9x + 9 = 0$$

$$(2x - 3)(x - 3) = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \quad \text{أو} \quad x = 3$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right) + 7 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$$

$$f(3) = (3)^2 - 4(3) + 7 = 9 - 12 + 7 = 4$$

$$A\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right), B(3,4)$$

17) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند كل من النقطة A و النقطة B.

معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $A(\frac{3}{2},\frac{13}{4})$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right) - 4 = -1$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{13}{4} = -\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$y - \frac{13}{4} = -x + \frac{3}{2}$$

$$y = -x + \frac{19}{4}$$

معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $B(3,4)$

$$f'(3) = 2(3) - 4 = 2$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = 2(x - 3)$$

$$y - 4 = 2x - 6$$

$$y = 2x - 2$$

كتاب الطالب

الدرس الثاني – المشتقة الثانية، السرعة، والتسارع

مثال 1:

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \sin x$

الاقتران المعطى $f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \sin x$

المشتقة الأولى $f'(x) = 5x^4 - 2x^3 + \cos x$

المشتقة الثانية $f''(x) = 20x^3 - 6x^2 - \sin x$

2) $f(x) = \ln x + e^x$

الاقتران المعطى $f(x) = \ln x + e^x$

المشتقة الأولى $f'(x) = \frac{1}{x} + e^x$

المشتقة الثانية $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + e^x$

أتحقق من فهمي:

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + \cos x$

$f'(x) = 4x^3 - 6x - \sin x$

$f''(x) = 12x^2 - 6 - \cos x$

b) $f(x) = \frac{2}{x^3}$

$f(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$

$f'(x) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$

$f''(x) = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$

مثال 2:

يُمثل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

1) ما سرعة الجسم عندما $t = 2$؟

اقتران السرعة $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 8t + 5$

بتعويض $t = 2$ $v(2) = 3(2)^2 - 8(2) + 5$

بالتبسيط $= 1$

إذن، سرعة الجسم عندما $t = 2$ هي: $1\ m/s$

2) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 2$؟

بما أن إشارة السرعة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب عندما $t = 2$.

3) ما تسارع الجسم عندما $t = 2$؟

أجد مشتقة اقتران السرعة، ثم أعوض $t = 2$ في المشتقة:

اقتران التسارع $a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 8$

بتعويض $t = 2$ $a(2) = 6(2) - 8$

بالتبسيط $= 4$

إذن، تسارع الجسم عندما $t = 2$ هو: $4\ m/s^2$

4) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي

يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كانت سرعته 0؛ أي عندما $v(t) = 0$:

بمساواة اقتران السرعة بالصفر $3t^2 - 8t + 5 = 0$

بتحليل العبارة التربيعية $(3t - 5)(t - 1) = 0$

خاصية الضرب الصفري $3t - 5 = 0 \quad or \quad t - 1 = 0$

بحل كل معادلة لـ t $t = \frac{5}{3} \quad or \quad t = 1$

إذن، يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما $t = 1$، و $t = \frac{5}{3}$.

أتحقق من فهمي:

يُمثل الاقتران: $s(t) = 3t^2 - t^3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

a) ما سرعة الجسم عندما $t = 3$؟

$$v(t) = 6t - 3t^2$$

$$v(3) = 6(3) - 3(3)^2 = 18 - 27 = -9 \text{ m/s}$$

b) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 3$؟

بما أن إشارة السرعة سالبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب عندما $t = 3$

c) ما تسارع الجسم عندما $t = 3$؟

$$a(t) = 6 - 6t$$

$$a(3) = 6 - 6(3) = -12 \text{ m/s}^2$$

d) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته 0

$$6t - 3t^2 = 0$$

$$3t(2 - t) = 0$$

$$t = 0 \text{ or } t = 2$$

مثال 3: من الحياة

أسد جبال: يمكن نمذجة موقع أسد جبال يطارد فريسته على أرض مستوية متحركا في خط مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = t^3 - 15t^2 + 63t$

حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

1) ما سرعة أسد الجبال بعد 4 ثوان من بدء حركته؟

أجد مشتقة اقتران الموقع، ثم أعوض $t = 4$ في المشتقة:

اقتران السرعة $\quad v(t) = s'(t) = 3t^2 - 30t + 63$

بتعويض $t = 4$ $\quad v(4) = 3(4)^2 - 30(4) + 63$

بالتبسيط $\quad = -9$

إذن، سرعة أسد الجبال بعد 4 ثوان من بدء حركته هي: $-9\ m/s$

2) ما تسارع أسد الجبال بعد 4 ثوان من بدء حركته؟

أجد مشتقة اقتران السرعة، ثم أعوض $t = 4$ في المشتقة:

اقتران التسارع $a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 30$

بتعويض $t = 4$ $a(4) = 6(4) - 30$

بالتبسيط $= -6$

إذن، تسارع أسد الجبال بعد 4 ثوان من بدء حركته هي: $-6\ m/s^2$

3) أجد قيم t التي يكون عندها أسد الجبال في حالة سكون لحظي.

يكون أسد الجبال في حالة سكون لحظي إذا كانت سرعته 0؛ أي عندما $v(t) = 0$:

بمساواة اقتران السرعة بالصفر $3t^2 - 30t + 63 = 0$

بقسمة طرفي المعادلة على 3 $t^2 - 10t + 21 = 0$

بتحليل العبارة التربيعية $(t-3)(t-7) = 0$

خاصية الضرب الصفري $t - 3 = 0 \quad or \quad t - 7 = 0$

بحل كل معادلة لـ t $t = 3 \quad or \quad t = 7$

إذن، يكون أسد الجبال في حالة سكون لحظي عندما $t = 3$، و $t = 7$.

أتحقق من فهمي:

فهد: يمكن نمذجة موقع فهد يطارد فريسته على أرض مستوية متحركا في خط مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

a) ما سرعة الفهد بعد 3 ثوان من بدء حركته؟

$v(t) = 3t^2 - 12t + 9$

$v(3) = 3(3)^2 - 12(3) + 9 = 27 - 36 + 9 = 0\ \mathrm{m/s}$

b) ما تسارع الفهد بعد 3 ثوان من بدء حركته؟

$a(t) = 6t - 12$

$a(3) = 6(3) - 12 = 6m/s^2$

c) أجد قيم t التي يكون عندها الفهد في حالة سكون لحظي.

يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته 0

$3t^2 - 12t + 9 = 0$

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$(t-1)(t-3) = 0$

$t = 1\ or\ t = 3$

أتدرب وأحل المسائل:

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x$

$f'(x) = 9x^2 - 8x + 5$

$f''(x) = 18x - 8$

2) $f(x) = 2e^x + x^2$

$f'(x) = 2e^x + 2x$

$f''(x) = 2e^x + 2$

3) $f(x) = 2\cos x - x^3$

$f'(x) = -2 \sin x - 3x^2$

$f''(x) = -2\cos x - 6x$

4) $f(x) = 4\ln x - 3x^3$

$f'(x) = 4\left(\frac{1}{x}\right) - 9x^2 = \frac{4}{x} - 9x^2$

$f''(x) = -\frac{4}{x^2} - 18x$

5) $f(x) = x^3(x+6)^6$

$f'(x) = (x^3)(6)(x+6)^5(1) + (x+6)^6(3x^2)$

$= 6x^3(x+6)^5 + 3x^2(x+6)^6$

$f''(x) = (6x^3)(5)(x+6)^4 + (x+6)^5(18x^2) + 3x^2(6)(x+6)^5 + (x+6)^6(6x)$

$= 30x^3(x+6)^4 + 18x^2(x+6)^5 + 18x^2(x+6)^5 + 6x(x+6)^6$

6) $f(x) = x^7 \ln x$

$f'(x) = (x^7)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(7x^6)$

$= x^6 + (\ln x)(7x^6)$

$f''(x) = 6x^5 + (\ln x)(42x^5) + (7x^6)\left(\frac{1}{x}\right)$

$=13x^5 + (\ln x)(42x^5)$

7) $f(x) = \frac{x}{x+2}$

$$f'(x) = \frac{(x+2)(1) - (x)(1)}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2 \times 2(x+2)(1)}{(x+2)^4} = \frac{-4(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{-4}{(x+2)^3}$$

8) $f(x) = sin\, x^2$

$f'(x) = 2x \cos x^2$

$f''(x) = (2x)(-2x \sin x^2) + (\cos x^2)(2) = -4x^2 \sin x^2 + 2\cos x^2$

9) $f(x) = 2x^{-3}$

$f'(x) = -6x^{-4}$

$f''(x) = 24x^{-5}$

10) $f(x) = x^3 - \frac{5}{x}$

$$f(x) = x^3 - \frac{5}{x} = x^3 - 5x^{-1}$$

$f'(x) = 3x^2 + 5x^{-2}$

$f''(x) = 6x - 10x^{-3}$

11) $f(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

12) $f(x) = 2 - 4x + x^2 - x^3$

$f'(x) = -4 + 2x - 3x^2$

$f''(x) = 2 - 6x$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

13) $f(x) = 8x^3 - 3x + \frac{4}{x}, x = -2$

$$f(x) = 8x^3 - 3x + \frac{4}{x} = 8x^3 - 3x + 4x^{-1}$$

$$f'(x) = 24x^2 - 3 - 4x^{-2}$$

$$f''(x) = 48x + 8\,x^{-3}$$

$$f''(-2) = 48(-2) + 8(-2)^{-3} = -96 - 1 = -97$$

14) $f(x) = \frac{1}{1x-4}, x = 3$

$$f'(x) = \frac{-2}{(2x-4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2 \times 2 \times (2x-4)^1 \times 2}{(2x-4)^4} = \frac{8}{(2x-4)^3}$$

$$f''(3) = \frac{8}{(2(3)-4)^3} = \frac{8}{8} = 1$$

15) إذا كان: $f(x) = px^3 - 3px^2 + x - 4$، وكانت: $f''(2) = -1$، فأجد قيمة الثابت p.

$$f'(x) = 3px^2 - 6px + 1$$

$$f''(x) = 6px - 6p$$

$$f''(2) = 6p(2) - 6p$$

$$-1 = 12p - 6p$$

$$-1 = 6p$$

$$p = -\frac{1}{6}$$

يمثل الاقتران: $s(t) = t^5 - 20t^2, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك على خط مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

16) ما سرعة الجسم عندما $t = 3$؟

$$v(t) = 5t^4 - 40t$$

$$v(3) = 5(3)^4 - 40(3) = 405 - 120 = 285\ m/s$$

17) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 3$؟

بما أن إشارة السرعة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب عندما $t = 3$

18) ما تسارع الجسم عندما $t = 3$؟

$$a(t) = 20t^3 - 40$$
$$a(3) = 20(3)^3 - 40 = 540 - 40 = 500\ m/s^2$$

19) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته 0

$$5t^4 - 40t = 0$$
$$5t(t^3 - 8) = 0$$
$$t = 0\ or\ t = 2$$

يمثل الاقتران: $s(t) = \frac{3t}{1+t}, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

20) ما سرعة الجسم عندما $t = 4$؟

$$s(t) = \frac{3t}{1+t}$$
$$v(t) = \frac{(1+t)(3) - (3t)(1)}{(1+t)^2} = \frac{3}{(1+t)^2}$$
$$v(4) = \frac{3}{(1+4)^2} = \frac{3}{25} = 0.12\ \mathrm{m/s}$$

21) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 4$؟

بما أن إشارة السرعة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب عندما $t = 4$

22) ما تسارع الجسم عندما $t = 4$؟

$$a(t) = \frac{-3 \times 2(1+t)(1)}{(1+t)^4} = \frac{-6}{(1+t)^3}$$
$$a(4) = \frac{-6}{(1+4)^3} = \frac{-6}{125} = = 0.048\ m/s^2$$

لوح تزلج: يتحرك رامي في مسار مستقيم على لوح تزلج، بحيث يمكن نمذجه موقعه باستعمال الاقتران: $s(t) = t^2 - 8t + 12$، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

23) ما سرعة رامي بعد 6 ثوان من بدء حركته؟

$$v(t) = 2t - 8$$
$$v(6) = 2(6) - 8 = 4 \text{ m/s}$$

24) ما تسارع رامي بعد 6 ثوان من بدء حركته؟

$$a(t) = 2$$
$$a(6) = 2\ m/s^2$$

25) أجد قيم t التي يكون عندها رامي في حالة سكون لحظي.

يكون رامي في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته 0

$$2t - 8 = 0 \rightarrow t = 4$$

مهارات التفكير العليا:

26) تبرير: إذا كان: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(5-3x^2)^6}$، فأثبت أن $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{5+33x^2}{(5-3x^2)^7}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(5-3x^2)^6(1) - (x)(6)(5-3x^2)^5(-6x)}{(5-3x^2)^{12}}$$
$$= \frac{(5-3x^2)^5(5-3x^2+36x^2)}{(5-3x^2)^{12}}$$
$$= \frac{(5+3x^2)^6}{(5-3x^2)^{12}} + \frac{36x^2(5-3x^2)^5}{(5-3x^2)^{12}}$$
$$= \frac{5-3x^2}{(5-3x^2)^7} + \frac{36x^2}{(5-3x^2)^7}$$
$$= \frac{5+33x^2}{(5-3x^2)^7}$$

27) تحد: إذا مثل الاقتران: $s(t) = t^3 - 12t - 9, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني، فما سرعة الجسم عندما يكون تسارعه صفرا؟

$$v(t) = 3t^2 - 12$$

$$a(t) = 6t$$

$$a(t) = 0 \to 6t = 0 \to t = 0$$

$$v(0) = 3(0)^2 - 12 = -12 \text{ m/s}$$

28) تحد: إذا مثل الاقتران: $s(t) = 3t^3 - 24t - 10, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني، فما تسارع الجسم عندما تكون سرعته صفرا؟

$$v(t) = 6t^2 - 24$$

$$a(t) = 12t$$

$$v(t) = 0 \to 6t^2 - 24 = 0 \to t^2 = 4 \to t = 2$$

$$a(2) = 12(2) = 24\ m/s^2$$

كتاب التمارين

الدرس الثاني – المشتقة الثانية، السرعة، والتسارع

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 5x^3 + 4x$

$f'(x) = 15x^2 + 4$

$f''(x) = 30x$

2) $f(x) = 5e^{4x}$

$f'(x) = 20e^{4x}$

$f''(x) = 80e^{4x}$

3) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$

4) $f(x) = 7\ln x$

$f'(x) = \frac{7}{x}$

$f''(x) = -\frac{7}{x^2}$

5) $f(x) = (x-1)(2x+3)$

$f(x) = (x-1)(2x+3) = 2x^2 + 3x - 2x - 3 = 2x^2 + x - 3$

$f'(x) = 4x + 1$

$f''(x) = 4$

6) $f(x) = e^x \sin x$

$f'(x) = (e^x)(\cos x) + (\sin x)(e^x)$

$= e^x \cos x + e^x \sin x$

$f''(x) = (e^x)(-\sin x) + (\cos x)(e^x) + (\sin x)(e^x) + (e^x)(\cos x)$

$= -e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \sin x \ e^x \cos x$

$= 2e^x \cos x$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي عند قيمة $x = 2$ المعطاة:

7) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{3x-2}}$

$$f'(x) = \frac{-4 \times \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{3x-2} = \frac{-\frac{6}{\sqrt{3x-2}}}{3x-2} = \frac{-6}{(3x-2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f''(x) = \frac{6 \times \frac{3}{2}(3x-2)^{\frac{1}{2}} \times 3}{(3x-2)^3} = \frac{27\sqrt{3x-2}}{(3x-2)^3}$$

$$f''(2) = \frac{27\sqrt{6-2}}{(6-2)^3} = \frac{54}{64} = \frac{27}{32}$$

8) $f(x) = 1 - 7x^2, x = -3$

$f'(x) = -14x$

$f''(x) = -14$

$f''(-3) = -14$

9) إذا كان: $f(x) = ax^4 - 3x^2$، وكانت: $f''(2) = 42$، فأجد قيمة a.

$f'(x) = 4ax^3 - 6x$

$f''(x) = 12ax^2 - 6$

$f''(2) = 12a(2)^2 - 6$

$42 = 48a - 6$

$48 = 48a$

$a = 1$

يمثل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 7, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

10) ما سرعة الجسم عندما $t = 1$؟

$$v(t) = 3t^2 - 8t + 5$$
$$v(1) = 3(1)^2 - 8(1) + 5 = 0\ m/s$$

11) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 1$؟

بما أن السرعة صفر، فإن الجسم في حالة سكون لحظي عندما $t = 1$.

12) ما تسارع الجسم عندما $t = 1$؟

$$a(t) = 6t - 8$$
$$a(1) = 6(1) - 8 = -2\ m/s^2$$

13) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته 0

$$3t^2 - 8t + 5 = 0$$
$$(3t - 5)(t - 1) = 0$$
$$t = \frac{5}{3} \quad or \quad t = 1$$

يمثل الاقتران: $s(t) = (t-3)^3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

14) ما سرعة الجسم عندما $t = 5$؟

$$v(t) = 3(t-3)^2$$
$$v(5) = 3(5-3)^2 = 12\ m/s$$

15) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 5$؟

بما أن إشارة السرعة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب عندما $t = 5$.

16) ما تسارع الجسم عندما $t = 5$؟

$$a(t) = 6(t-3)$$
$$a(5) = 6(5-3) = 12\ m/s^2$$

17) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته 0

$$3(t-3)^2=0$$
$$(t-3)^2=0$$
$$t-3=0$$
$$t=3$$

سيارات سباق: يمكن نمذجة موقع سيارة سباق تتحرك في مسار مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t)=6t^2-2t$،
حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

18) ما سرعة السيارة بعد 5 ثوان من بدء حركتها؟

$$v(t)=12t-2$$
$$v(5)=12(5)-2=58\ m/s$$

19) ما تسارع السيارة بعد 5 ثوان من بدء حركتها؟

$$a(t)=12$$
$$a(5)=12\ m/s^2$$

20) أجد قيم t التي تكون عندها السيارة في حالة سكون لحظي.

تكون السيارة في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعتها 0

$$v(t)=12t-2=0 \rightarrow 12t=2 \rightarrow t=\frac{1}{6}$$

كتاب الطالب

الدرس الثالث – تطبيقات القيم القصوى

مثال 1:

إذا كان: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران f.

الخطوة 1: أجد المشتقة الأولى والقيم الحرجة للاقتران.

الاقتران المعطى $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

مشتقة كثيرات الحدود $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

بمساواة المشتقة بالصفر $6x^2 + 6x - 12 = 0$

بقسمة طرفي المعادلة على 6 $x^2 + x - 2 = 0$

بتحليل العبارة التربيعية $(x + 2)(x - 1) = 0$

خاصية الضرب الصفري $x + 2 = 0 \quad or \quad x - 1 = 0$

بحل كل معادلة لـ x $x = -2 \qquad x = 1$

إذن، القيم الحرجة للاقتران f هي: $x = -2, x = 1$

الخطوة 2: أجد المشتقة الثانية للاقتران.

اقتران المشتقة $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

مشتقة كثيرات الحدود $f''(x) = 12x + 6$

الخطوة 3: أعوض القيم الحرجة في المشتقة الثانية؛ لتصنيفها.

بتعويض $x = -2$ $f''(-2) = 12(-2) + 6 = -18 < 0$

بتعويض $x = 1$ $f''(1) = 12(1) + 6 = 18 > 0$

ألاحظ أن:

- $f'(-2) = 0$, $f''(-2) < 0$ إذن، توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = -2$ وهي: $f(-2) = 20$
- $f'(1) = 0$, $f''(1) > 0$ أذن، توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي: $f(1) = -7$.

أتحقق من فهمي:

إذا كان: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران f.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$$

$$3x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$(3x + 2)(x - 2) = 0$$

$x = -\frac{2}{3}$ أو $x = 2$

القيم الحرجة هي: $x = 2$ و $x = -\frac{2}{3}$

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f''\left(-\frac{2}{3}\right) = 6\left(-\frac{2}{3}\right) - 4 = -8 < 0$$

$$f''(2) = 6(2) - 4 = 8 > 0$$

توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = -\frac{2}{3}$ وهي $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{-8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} + 5 = \frac{175}{27}$

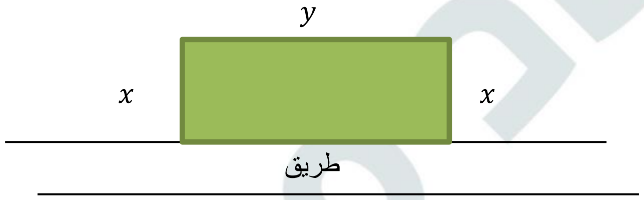
توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 2$ وهي $f(2) = 8 - 2(4) - 4(2) + 5 = -3$

مثال 2: من الحياة:

اشترى مزارع سياجا طوله $800\ m$ لتسييج حقل مستطيل الشكل من مزرعته، وكان هذا الحقل مقابلا لطريق زراعي محاط به سياج من قبل. أجد أكبر مساحة ممكنة للحقل يمكن للمزارع أن يحيط السياج بها.

الخطوة 1: أرسم مخططا.

أفترض أن y هو طول الحقل، وأن x هو عرضه كما في المخطط المجاور.



الخطوة 2: أكتب الاقتران الذي أريد إيجاد قيمته القصوى بدلالة متغير واحد.

- أجد اقتران مساحة الحقل:

مساحة المستطيل $A = xy$

- أكتب y بدلالة x باستعمال المحيط:

محيط الحقل $P = 2x + y$

بتعويض $P = 800$: $800 = 2x + y$

بكتابة المعادلة بدلالة y: $y = 800 - 2x$

- أعوض y في اقتران مساحة الحقل

اقتران مساحة الحقل $A = xy$

بتعويض $y = 800 - 2x$ $A(x) = x(800 - 2x)$

بالتبسيط $= 800x - 2x^2$

إذن، الاقتران الذي يمثل مساحة الحقل هو: $A(x) = 800x - 2x^2$

الخطوة 3: أجد القيم الحرجة للاقتران.

بإيجاد مشتقة اقتران مساحة الحقل $A'(x) = 800 - 4x$

بمساواة المشتقة بالصفر $800 - 4x = 0$

بحل المعادلة لـ x $x = 200$

إذن، توجد قيمة حرجة واحدة، وهي: $x = 200$.

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = 200$.

بإيجاد المشتقة الثانية لاقتران مساحة الحقل $A''(x) = -4$

بما أن المشتقة الثانية للاقتران سالبة لقيم x الموجبة جميعها، فإنه توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 200$، وهذا يعني أن مساحة الحقل تكون أكبر ما يمكن إذا كان عرضه 200 m.

إذن، أكبر مساحة ممكنة للحقل يمكن للمزارع أن يحيط السياج بها هي:

$$A(200) = 800(200) - 2(200)^2 = 80000\ m^2$$

أتحقق من فهمي:

بنى نجار سقفا خشبيا لحظيرة حيوانات، وكان السقف على شكل مستطيل محيطه 54 m.

أجد أكبر مساحة ممكنة لسطح الحظيرة.

مساحة المستطيل $A = xy$

محيط المستطيل $P = 2x + 2y$

$54 = 2x + 2y$

$27 = x + y \rightarrow y = 27 - x$

$A = xy$

$A(x) = x(27 - x)$

$= 27x - x^2$

$A'(x) = 27 - 2x$

$27 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{27}{2}$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \frac{27}{2}$

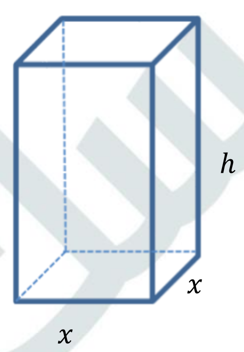
$A''(x) = -2 \rightarrow A''\left(\frac{27}{2}\right) = -2 < 0$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \frac{27}{2}$، وتكون أكبر مساحة ممكنة لسطح الحظيرة هي:

$$A\left(\frac{27}{2}\right) = \frac{729}{4} = 182.25\ m^2$$

مثال 3:

أراد مصنع إنتاج علب من الكرتون على شكل متوازي مستطيلات مغلق، بحيث يكون حجم كل منها $1000\ cm^3$، وقاعدتها مربعة الشكل. أجد أبعاد العلبة الواحدة التي تجعل كمية الكرتون المستعملة لصنعها أقل ما يمكن.



الخطوة 1: أرسم مخططا.

أفترض أن x هو طول قاعدة العلبة، وأن h هو ارتفاعها كما في المخطط المجاور.

الخطوة 2: أكتب الاقتران الذي أريد إيجاد قيمته القصوى بدلالة متغير واحد.

- أجد اقتران المساحة الكلية لسطح العلبة:

المساحة الكلية لسطح العلبة $S = 4xh + 2x^2$

أكتب h بدلالة x باستعمال حجم متوازي المستطيلات:

حجم العلبة $V = x^2h$

بتعويض $v = 1000$ $1000 = x^2h$

بكتابة المعادلة بدلالة h $h = \frac{1000}{x^2}$

أعوض h في اقتران المساحة الكلية لسطح العلبة:

اقتران المساحة الكلية لسطح العلبة $S = 4xh + 2x^2$

بتعويض $h = \frac{1000}{x^2}$ $S(x) = 4x\left(\frac{1000}{x^2}\right) + 2x^2$

بالتبسيط $= \frac{4000}{x} + 2x^2$

إذن، الاقتران الذي يمثل المساحة الكلية لسطح العلبة هو: $S(x) = \frac{4000}{x} + 2x^2$.

الخطوة 3: أجد القيم الحرجة للاقتران.

بإيجاد مشتقة اقتران مساحة السطح $S'(x) = -\frac{4000}{x^2} + 4x$

بمساواة المشتقة بالصفر $-\frac{4000}{x^2} + 4x = 0$

بضرب طرفي المعادلة في x^2 $4x^3 = 4000$

بقسمة طرفي المعادلة على 4 $x^3 = 1000$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين $x = 10$

إذن، توجد قيمة حرجة واحدة، هي: $x = 10$

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = 10$:

بإيجاد المشتقة الثانية لاقتران مساحة السطح $S''(x) = \frac{8000}{x^3} + 4$

بتعويض $x = 10$ $S''(10) = \frac{8000}{(10)^3} + 4 = 12 > 0$

ألاحظ وجود قيمة صغرى محلية عندما $x = 10$، وهذا يعني أن كمية الكرتون المستعملة تكون أقل ما يمكن إذا كان طول القاعدة 10 cm

إذن، أبعاد العلبة الواحدة هي: $l = x = 10\ cm, w = x = 10cm, h = \frac{1000}{x^2} = 10\ cm$

أتحقق من فهمي:

أرادت إحدى الشركات أن تصنع خزانات معدنية على شكل متوازي مستطيلات مغلق، بحيث يكون حجم كل منها $2\ m^3$، وقاعدته مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزان الواحد التي تجعل كمية المعدن المستعملة لصنعه أقل ما يمكن.

المساحة الكلية لسطح الخزان $S = 4xy + 2x^2$

حجم الخزان $V = x^2 h$

$$2 = x^2 h \to h = \frac{2}{x^2}$$

$$S = 4xh + 2x^2$$

$$S(x) = 4x\left(\frac{2}{x^2}\right) + 2x^2 = \frac{8}{x} + 2x^2$$

$$S'(x) = \frac{-8}{x^2} + 4x$$

$$\frac{-8}{x^2} + 4x = 0 \to 4x = \frac{8}{x^2} \to 4x^3 = 8 \to x^3 = 2 \to x = \sqrt[3]{2}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{2}$

$$S''(x) = \frac{16}{x^3} + 4$$

$$S''(\sqrt[3]{2}) = \frac{16}{(\sqrt[3]{2})^3} + 4 = 12 > 0$$

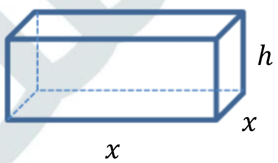
إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = \sqrt[3]{2}$،

وتكون أبعاد الخزان التي تجعل كمية المعدن المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$l = x = \sqrt[3]{2}\ m, w = x = \sqrt[3]{2}\ m, h = \frac{2}{(\sqrt[3]{2})^2} = \sqrt[3]{2}\ m$$

مثال 4:

لدى حداد صفيحة معدنية مساحتها $36\ m^2$. أراد الحداد أن يصنع منها خزان ماء على شكل متوازي مستطيلات مغلق، وأن تكون قاعدة الخزان مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزان التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن.



الخطوة 1: أرسم مخططا

أفترض أن x هو طول قاعدة الخزان، وأن h هو ارتفاعه كما في المخطط المجاور.

الخطو 2: أكتب الاقتران الذي أريد إيجاد قيمته القصوى بدلالة متغير واحد.

- أجد اقتران حجم الخزان:

صيغة حجم متوازي المستطيلات $V = l \times w \times h$

بتعويض $l = x, w = x$ $\quad = x \times x \times h$

بالتبسيط $\quad = x^2 h$

- أكتب h بدلالة x باستعمال المساحة الكلية لسطح الخزان:

المساحة الكلية لسطح الخزان $S = 4xh + 2x^2$

بتعويض $S = 36$ $\quad 36 = 4xh + 2x^2$

بكتابة المعادلة بدلالة h $\quad h = \frac{36-2x^2}{4x}$

بالتبسيط $\quad h = \frac{18-x^2}{2x}$

- أعوض h في اقتران حجم الخزان:

اقتران حجم الخزان $V = x^2 h$

بتعويض $h = \frac{18-x^2}{2x}$ $\quad V(x) = x^2(\frac{18-x^2}{2x})$

بالتبسيط $\quad = 9x - \frac{1}{2}x^3$

إذن، الاقتران الذي يمثل حجم الخزان هو: $V(x) = 9x - \frac{1}{2}x^3$

الخطوة 3: أجد القيم الحرجة للاقتران.

بإيجاد مشتقة اقتران الحجم $V'(x) = 9 - \frac{3}{2}x^2$

بمساواة المشتقة بالصفر $9 - \frac{3}{2}x^2 = 0$

بحل المعادلة لـ x^2 $\quad x^2 = 6$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $x = \pm\sqrt{6}$

بما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبا، فإنه توجد قيمة حرجة واحدة، هي: $x = \sqrt{6}$

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = \sqrt{6}$:

بإيجاد المشتقة الثانية لاقتران الحجم $V''(x) = -3x$

بتعويض $x = \sqrt{6}$ $V''(\sqrt{6}) = -3(\sqrt{6}) < 0$

ألاحظ وجود قيمة عظمى محلية عندما $x = \sqrt{6}$، وهذا يعني أن حجم الخزان يكون أكبر ما يمكن إذا كان طول القاعدة $\sqrt{6}\, m$. إذن، أبعاد الخزان هي:

$$l = x = \sqrt{6}\, m\, , w = x = \sqrt{6}\, m\, , h = \frac{18 - x^2}{2x} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}\, m$$

<u>أتحقق من فهمي:</u>

لدى حداد صفيحة معدنية مساحتها $54\ m^2$. أراد الحداد أن يصنع منها خزان ماء على شكل متوازي مستطيلات. وأن يكون الخزان مفتوحا من الأعلى، وقاعدته مربعة الشكل. أجد أبعاد الخزان التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن.

حجم الخزان $V = x^2h$

مساحة سطح الخزان المفتوح من الأعلى $A = 4xh + x^2$

$$54 = 4xh + x^2 \to 4xh = 54 - x^2 \to h = \frac{54 - x^2}{4x}$$

$$V = x^2h$$

$$V(x) = x^2\left(\frac{54 - x^2}{4x}\right)$$

$$= \frac{54x - x^3}{4}$$

$$= \frac{54}{4}x - \frac{1}{4}x^3$$

$$V'(x) = \frac{54}{4} - \frac{3}{4}x^2$$

$$\frac{54}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 0 \to 54 - 3x^2 = 0 \to x^2 = \frac{54}{3} = 18 \to x = \pm\sqrt{18}$$

بما أن الطول لا يمكن أن يكون سالباً، فإنه توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt{18}$

$$V''(x) = -\frac{3}{2}x$$

$$V''(\sqrt{18}) = -\frac{3}{2}\sqrt{18} < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \sqrt{18}$، وتكون أبعاد الخزان التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن هي:

$$l = x = \sqrt{18}\, m, w = x = \sqrt{18}\, m, h = \frac{54-18}{4\sqrt{18}} = \frac{9}{\sqrt{18}}\, m$$

مثال 5: من الحياة

وجد خبير تسويق أنه لبيع x حاسوبا من نوع جديد، فإن سعر الحاسوب الواحد (بالدينار) يجب أن يكون: $s(x) = 1000 - x$، حيث x عدد الأجهزة المبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الأجهزة تعطى بالاقتران: $C(x) = 3000 + 20x$ فأجد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن.

الخطوة 1: أجد اقتران الإيراد.

اقتران الإيراد $R(x) =$ (سعر الحاسوب الواحد)×(عدد القطع المبيعة)

بالتعويض $= x(1000 - x)$

باستعمال خاصية التوزيع $= 1000x - x^2$

إذن، اقتران الإيراد هو: $R(x) = 1000x - x^2$

الخطوة 2: أجد اقتران الربح.

اقتران الربح $P(x) = R(x) - C(x)$

بالتعويض $= (1000x - x^2) - (3000 + 20x)$

بالتبسيط $= -x^2 + 980x - 3000$

إذن، اقتران الربح هو: $P(x) = -x^2 + 980\,x - 3000$

الخطوة 3: أجد الربح الحدي، ثم أجد القيمة الحرجة، محددا نوعها.

الربح الحدي $P'(x) = -2x + 980$

بمساواة المشتقة بالصفر $-2x + 980 = 0$

بحل المعادلة لـ x $x = 490$

إذن، توجد قيمة حرجة واحدة، هي: $x = 490$

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = 490$:

بإيجاد المشتقة الثانية للربح الحدي $P''(x) = -2$

بما أن المشتقة الثانية للاقتران سالبة لقيم x الموجبة جميعها، فإنه توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 490$.

إذن، تحقق الشركة أكبر ربح ممكن عند إنتاجها وبيعها 490 جهاز حاسوب.

أتحقق من فهمي:

وجدت خبيرة تسويق أنه لبيع x ثلاجة من نوع جديد، فإن سعر الثلاجة الواحدة (بالدينار) يجب أن يكون: $s(x) = 1750 - 2x$، حيث x عدد الأجهزة المبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الأجهزة تعطى بالاقتران: $C(x) = 2250 + 18x$، فأجد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن.

اقتران الإيراد $R(x) = (1750 - 2x)x = 1750x - 2x^2$

اقتران التكلفة $C(x) = 2250 + 18x$

اقتران الربح $P(x) = R(x) - C(x)$

$P(x) = 1750x - 2x^2 - 2250 - 18x$

$= 1732x - 2x^2 - 2250$

$P'(x) = 1732 - 4x$

$1732 - 4x = 0 \rightarrow x = \frac{1732}{4} = 433$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 433$

$P''(x) = -4 \rightarrow P''(433) = -4 < 0$

إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 433$

ومنه فإنه لتحقيق أكبر ربح ممكن يجب إنتاج وبيع 433 ثلاجة.

أتدرب وأحل المسائل

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = x^2 - 2x + 5$

$f'(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0$

$\rightarrow 2x = 2$

$\rightarrow x = 1$

القيمة الحرجة هي: $x = 1$

$f''(x) = 2$

$f''(1)\ 2 > 0$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي: $f(1) = 1 - 2 + 5 = 4$

2) $f(x) = 20 + 15x - x^2 - \frac{x^3}{3}$

$f'(x) = 15 - 2x - x^2$

$f'(x) = 0 \to 15 - 2x - x^2 = 0$

$\to x^2 + 2x - 15 = 0$

$\to (x+5)(x-3) = 0$

$\to x = -5 \; or \; x = 3$

القيم الحرجة هي: $x = -5 \,, x = 3$

$f''(x) = -2 - 2x$

$f''(-5) = -2 + 10 = 8 > 0$

$f''(3) = -2 - 6 = -8 < 0$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -5$ وهي:

$f(-5) = 20 - 75 - 25 + \frac{125}{3} = -\frac{115}{3}$

وتوجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 3$ وهي: $f(3) = 20 + 45 - 9 - 9 = 47$

3) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \to 4x^3 - 4x = 0$

$\to 4x(x^2 - 1) = 0$

$\to x = 0 \,, x = \pm 1$

القيم الحرجة هي: $x = 0 \,, x = 1, x = -1$

$f''(x) = 12x^2 - 4$

$f''(0) = 0 - 4 = -4 < 0$

$f''(1) = 12 - 4 = 8 > 0$

$f''(-1) = 12 - 4 = 8 > 0$

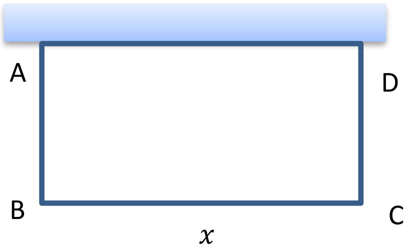
إذن توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ وهي: $f(0) = 0 - 0 - 2 = -2$

وتوجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ و $x = -1$ هي:

$f(1) = f(-1) = 1 - 2 - 2 = -3$

يمثل الشكل المجاور مخططا لحديقة منزلية على شكل مستطيل أنشئت مقابل جدار.

إذا كان محيط الحديقة من دون الجدار 300 m، فأجد كلا مما يأتي:



4) المقدار الجبري الذي يمثل طول الضلع AB بدلالة x

محيط الحديقة من دون الجدار

$$P = AB + BC + CD$$

$$300 = AB + x + AB$$

$$300 = 2AB + x$$

$$300 - x = 2AB$$

$$AB = \frac{300 - x}{2} = 150 - \frac{1}{2}x$$

5) اقتران مساحة الحديقة بدلالة x

مساحة الحديقة المستطيلة

$$A = BC \times AB$$

$$A(x) = x \times (150 - \frac{1}{2}x)$$

$$= 150x - \frac{1}{2}x^2$$

6) بُعدي الحديقة اللذين يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن.

$$A'(x) = 150 - x$$

$$150 - x = 0$$

$$x = 150$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 150$

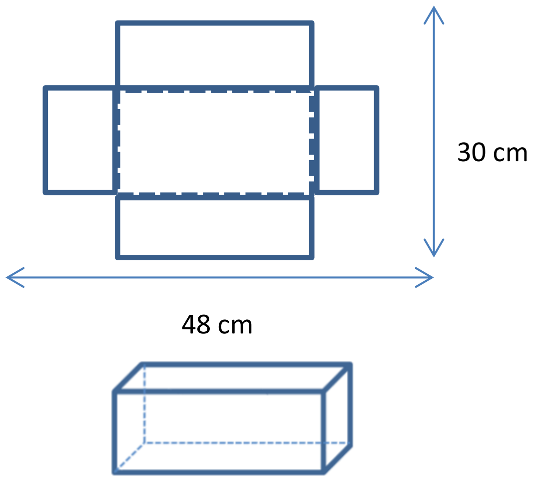
$$A''(x) = -1$$

$$A''(150) = -1 < 0$$

إذن توجد قيمة عظمى عندما $x = 150$، ويكون بعدا الحديقة اللذان يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن هما:

$$BC = x = 150\ m\ , AB = 150 - \frac{1}{2}x = 150 - \frac{1}{2}(150) = 75\ m$$

قطعة ورق مستطيلة الشكل، طولها 48 cm، وعرضها 30 cm. قُص من زوايا القطعة مربعات متطابقة، طول ضلع كل منها $x\ cm$ كما في الشكل المجاور، ثم ثُنيت لتشكيل عُلبة:



7) أجد الاقتران اللذي يمثل حجم العلبة بدلالة x.

حجم العلبة $V = lwh$

$$V(x) = (48 - 2x)(30 - 2x)x\,, \qquad 0 \le x \le 15$$
$$= (1440 - 96x - 60x + 4x^2)x$$
$$= (1440 - 156x + 4x^2)x$$
$$= 1440x - 156x^2 + 4x^3$$

8) أجد قيمة x التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يمكن.

$$V'(x) = 1440 - 312x + 12x^2$$
$$12x^2 - 312x + 1440 = 0$$
$$x^2 - 26x + 120 = 0$$
$$(x - 20)(x - 6) = 0$$
$$x = 20 \text{ or } x = 6$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 6$ والقيمة $x = 20$ خارج مجال اقتران الحجم، إذ يستحيل قص مربعات طول ضلع كل منها 20 cm من زوايا الورقة التلي عرضها 30 cm

$$V''(x) = -312 + 24x$$
$$V''(6) = -312 + 24(6) = -312 + 144 = -168 < 0 \rightarrow$$ قيمة عظمى $V(6)$

إذن يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن عندما $x = 6$

يمثل الاقتران: $s(x) = 150 - 0.035x$ سعر القطعة الواحدة من منتج بالدينار لإحدى الشركات، حيث x عدد القطع المنتجة. ويمثل الاقتران: $C(x) = 16000 + 10x + 0.09x^2$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار:

9) أجد اقتران الإيراد

سعر المنتج الواحد هو $p(x) = 150 = 0.035x$

اقتران الإيراد $R(x) = (150 = 0.035x)x = 150x - 0.035x^2$

10) أجد عدد القطع x الذي يتساوى عندها الإيراد الحدي مع التكلفة الحدية.

الإيراد الحدي: $R'(x) = 150 - 0.07\,x$

التكلفة الحدية: $C'(x) = 10 + 0.18x$

$R'(x) = C'(x)$

$150 - 0.07x = 10 + 0.18x$

$150 - 10 = 0.07x + 0.18x$

$140 = 0.25x$

$x = \frac{140}{0.25} = 560$

11) أجد اقتران الربح.

اقتران الربح $P(x) = R(x) - C(x)$

$= (150 - 0.035x^2) - (16000 + 10x + 0.09x^2)$

$= 150x - 0.035x^2 - 16000 - 10x - 0.09x^2$

$= 140x - 0.125x^2 - 16000$

12)أجد عدد القطع اللازم بيعها من المنتج لتحقيق أكبر ربح ممكن، ثم أجد أكبر ربح ممكن.

$P'(x) = 140 - 0.250x$

$140 = -.250x = 0$

$140 = 0.250x$

$x = \frac{140}{0.250} = 560$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 560$

$P''(x) = -0.250$

$P''(560) = -0.250 < 0$

إذن توجد قيمة عظمى عندما $x = 560$، فيكون عدد القطع اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن هو 560 قطعة

أكبر ربح ممكن هو:

$P(560) = 140(560) - 0.125(560)^2 - 16000 = 23200$

13) أجد سعر الوحدة الواحدة من المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن.

سعر الوحدة الواحدة من المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن

$$p(250) = 150 - 0.035(560)$$
$$= 130.4$$

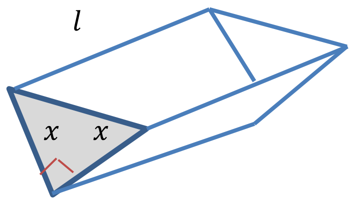
مهارات التفكير العليا:

تحد: قالب لصنع الكعك على شكل منشور ثلاثي مفتوح من الأعلى،

قاعدته على شكل مثلث قائم الزاوية كما في الشكل المجاور.

إذا كان حجم القالب $1000\ cm^3$،

فأجد أبعاده التي تجعل المواد المستعملة لصنعه أقل ما يمكن، مبررا إجابتي.



حجم المنشور الثلاثي القائم = مساحة القاعدة المثلثة × ارتفاع المنشور

مساحة المثلث = نصف طول القاعدة المثلث × ارتفاع المثلث

مساحة المثلث:

$$A_1 = \frac{1}{2}x(x) = \frac{1}{2}x^2$$

حجم المنشور:

$$V = \frac{1}{2}x^2 l$$
$$1000 = \frac{1}{2}x^2 l$$
$$2000 = x^2 l$$
$$l = \frac{2000}{x^2}$$

مساحة سطح القالب = مساحتي القاعدتين المثلثتين + مساحتي الوجهين اللذين إحدى حافيتيهما ضلع القائمة x

$$A = 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 2(xl) = x^2 + 2xl$$

$$A(x) = x^2 + 2x\left(\frac{2000}{x^2}\right)$$

$$= x^2 + \frac{4000}{x}$$

$$A'(x) = 2x - \frac{4000}{x^2}$$

$$2x - \frac{4000}{x^2} = 0$$

$$2x = \frac{4000}{x^2}$$

$$2x^3 = 4000$$

$$x^3 = 2000$$

$$x = \sqrt[3]{2000}$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = \sqrt[3]{2000}$

$$A''(x) = 2 + \frac{8000}{x^3}$$

$$A''\left(\sqrt[3]{2000}\right) = 2 + \frac{8000}{(\sqrt[3]{2000})^3} = 2 + \frac{8000}{2000} = 2 + 4 = 5 > 0$$

توجد قيمة صغرى عندما $x = \sqrt[3]{2000}$

إذن أبعاد القالب التي تجعل المواد المستعملة لصنعه أقل ما يمكن هي:

$$x = \sqrt[3]{2000}\ cm,\ l = \frac{2000}{x^2} = \frac{2000}{(\sqrt[3]{2000})^2} = \sqrt[3]{2000}\ cm$$

كتاب التمارين

الدرس الثالث – تطبيقات القيم القصوى

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$

$f'(x) = 4x + 4$

$4x + 4 = 0 \rightarrow x = -1$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = -1$

$f''(x) = 4$

$f''(-1) = 4 > 0$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -1$ هي: $f(-1) = 2(-1)^2 + 4(-1) - 3 = -5$

2) $f(x) = x^3 - 5x^2 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$

$3x^2 - 10x + 3 = 0$

$(3x - 1)(x - 3) = 0$

$x = \frac{1}{3}$ أو $x = 3$

توجد قيمتان حرجتان هما $x = 3$, $x = \frac{1}{3}$

$f''(x) = 6x - 10$

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{3}\right) - 10 = -8 < 0$

$f''(3) = 6(3) - 10 = 8 > 0$

إذن توجد قيمة صغرى عندما $x = 3$، هي: $f(3) = (3)^3 - 5(3)^2 + 3(3) + 1$

وتوجد قيمة عظمى عندما $x = \frac{1}{3}$ هي: $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{40}{27}$

3) $f(x) = x^3(x-2)$

$$f(x) = x^3(x-2) = x^4 - 2x^3$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$$

$$4x^3 - 6x^2 = 0$$

$$2x^2(2x-3) = 0$$

$$x = 0 \text{ او } x = \frac{3}{2}$$

توجد قيمتان حرجتان هما $x = 0 , x = \frac{3}{2}$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x$$

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = 12\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{3}{2}\right) = 9 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى عندما $x = \frac{3}{2}$، هي $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{16}$

$$f''(0) = 12(0)^2 - 12(0) = 0$$

يفشل اختبار المشتقة الثانية في تحديد نوع النقطة الحرجة $(0,0)$ لذلك نلجأ لاختبار المشتقة الأولى:

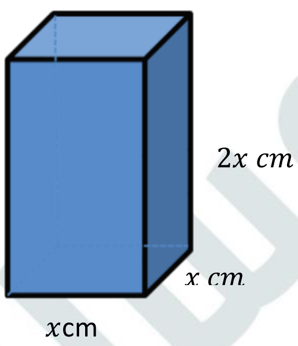
$$f'(-1) = 4(-1)^3 - 6(-1)^2 = -4 - 6 = -10 < 0$$

$$f'(1) = 4(1)^3 - 6(1)^2 = 4 - 6 = -2 < 0$$

إشارة $f'(x)$ سالبة على يسار $x = 0$ وعلى يمينها، فالنقطة $(0,0)$ ليست نقطة قيمة قصوى.

يبين الشكل المجاور قالبا يستعمل لصنع لَبِنات البناء، وتبلغ مساحة سطحه الكلية: $600\ cm^2$

4) أجد الاقتران الذي يمثل حجم القالب بدلالة x



حجم القالب: $V = lwh = yx(2x) = 2x^2y$

مساحة سطح القالب: $A = 2xy + (2x+2y)(2x) = 6xy + 4x^2$

$$600 = 6xy + 4x^2$$

$$600 - 4x^2 = 6xy$$

$$y = \frac{600 - 4x^2}{6x}$$

حجم القالب بدلالة x:

$$V(x) = 2x^2\left(\frac{600-4x^2}{6x}\right)$$

$$V(x) = 200x - \frac{4}{3}x^3$$

5) أجد قيمة x التي تجعل حجم القالب أكبر ما يمكن.

$$V'(x) = 200 - 4x^2$$
$$200 - 4x^2 = 0$$
$$200 = 4x^2$$
$$x^2 = \frac{200}{4} = 50 \rightarrow x = \pm 5\sqrt{2}$$

لكن الطول لا يكون سالبا، لذا فإن $x = 5\sqrt{2}\ cm$

$$V''(x) = -8x$$
$$V''(5\sqrt{2}) = -40\sqrt{2} < 0$$

توجد قيمة عظمى عندما $x = 5\sqrt{2}$، ويكون حجم القالب أكبر ما يمكن عندما $x = 5\sqrt{2}\ cm$.

يمثل الاقتران: $s(x) = 150 - 0.5x$ سعر البدلة الرجالية الذي حددته شركة لإنتاج الملابس، حيث x عدد البدلات المبيعة.
ويمثل الاقتران: $C(x) = 4000 + 0.25x^2$ تكلفة إنتاج x بدلة:

6) أجد اقتران الإيراد.

سعر البدلة الواحدة $s(x) = 150 - 0.5\,x$

اقتران الإيراد: $R(x) = x(150 - 0.5x) = 150x - 0.5x^2$

7) أجد عدد البدلات x التي يكون عندها الإيراد الحدي مثلي التكلفة الحدية.

الإيراد الحدي: $R'(x) = 150 - x$

التكلفة الحدية: $C'(x) = 0.5x$

$$R'(x) = 2C'(x)$$
$$150 - x = 2(0.5x)$$
$$150 - x = x$$
$$2x = 150$$
$$x = 75$$

8) أجد اقتران الربح.

اقتران الربح: $P(x) = R(x) - C(x)$

$$= 150x - 0.5x^2 - 4000 - 0.25x^2$$
$$= 150x = 0.75x^2 - 4000$$

9) أجد عدد البدلات اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن، ثم أجد أكبر ربح ممكن.

$$P'(x) = 150 - 1.5x$$

$$150 - 1.5x = 0$$

$$150 = 1.5x$$

$$x = \frac{150}{1.5} = \frac{1500}{15} = 100$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 100$

$$P''(x) = -1.5$$

$$P''(100) = -1.5 < 0$$

توجد قيمة عظمى لهذا الاقتران عندما $x = 100$.

ويكون أكبر ربح ممكن عندما تكون عدد البدلات المبيعة 100، ويكون أكبر ربح ممكن هو:

$$P(100) = 150(100) - 0.75(100)^2 - 4000$$

$$= 15000 - 7500 - 4000 = 3500$$

10) أجد سعر البدلة الواحدة الذي يحقق أكبر ربح ممكن.

ويكون حينها سعر البدلة الواحدة: $s(100) = 150 - 0.5(100) = 100$

11)أرادت إحدى الشركات أن تصنع خزانات من الفولاذ الرقيق المقاوم للصدأ على شكل متوازي مستطيلات، بحيث يكون كل منها مفتوحا من الأعلى، وحجمه $500\ m^3$، وقاعدته مربعة الشكل. أجد الأبعاد التي تجعل مساحة سطح الخزان أقل ما يمكن.

حجم الخزان $V = x^2h$

مساحة سطح الخزان المفتوح من الأعلى $A = 4xh + x^2$

$$500 = x^2h \rightarrow h = \frac{500}{x^2}$$

$$A = 4xh + x^2$$

$$A(x) = 4x\left(\frac{500}{x^2}\right) + x^2$$

$$= \frac{200}{x} + x^2$$

$$A'(x) = -\frac{2000}{x^2} + 2x$$

$$-\frac{2000}{x^2} + 2x = 0 \rightarrow \frac{2000}{x^2} = 2x$$

$$\rightarrow 2x^3 = 2000$$

$$\rightarrow x^3 = 1000$$

$$\rightarrow x = 10$$

توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 10$

$$A''(x) = \frac{4000}{x^3} + 2$$

$$A''(10) = \frac{4000}{(10)^3} + 2 = 6 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى عندما $x = 10$، وتكون أبعاد الخزان التي تجعل مساحة سطحه أقل ما يمكن هي:

$$l = x = 10\ m\ , w = x = 10\ m, h = \frac{500}{(10)^2} = 5\ m$$

كتاب الطالب

الدرس الرابع – الاشتقاق الضمني والمُعدلات المرتبطة

مثال1:

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1) $2x + 3y^2 = 1$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المتغير x
$$\frac{d}{dx}(2x + 3y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

قاعدتا مشتقة المجموع، ومشتقة الثابت
$$\frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(3y^2) = 0$$

قاعدتا مشتقة اقتران القوة، ومشتقة السلسلة
$$2 + 6y\frac{dy}{dx} = 0$$

بحل المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{6y}$$

بالتبسيط
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3y}$$

2) $y^3 - \sin x = 4y^2$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المتغير x
$$\frac{d}{dx}(y^3 - \sin x) = \frac{d}{dx}(4y^2)$$

قاعدة مشتقة الفرق
$$\frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{d}{dx}(4y^2)$$

قواعد مشتقة اقتران القوة، ومشتقة السلسلة ومشتقة الجيب
$$3y^2\frac{dy}{dx} - \cos x = 8y\frac{dy}{dx}$$

بإعادة ترتيب المعادلة
$$3y^2\frac{dy}{dx} - 8y\frac{dy}{dx} = \cos x$$

بإخراج $\frac{dy}{dx}$ عاملا مشتركا
$$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 8y) = \cos x$$

بحل المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 - 8y}$$

3) $xy - 2y = 3e^x$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المتغير x
$$\frac{d}{dx}(xy - 2y) = \frac{d}{dx}(3e^x)$$

قاعدتا مشتقة الفرق، ومشتقة الاقتران الأسي الطبيعي
$$\frac{d}{dx}(xy) - \frac{d}{dx}(2y) = 3e^x$$

قاعدة مشتقة الضرب
$$x\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(2y) = 3e^x$$

قاعدتا مشتقة اقتران القوة، ومشتقة السلسلة
$$x\frac{dy}{dx} + y - 2\frac{dy}{dx} = 3e^x$$

بإعادة ترتيب المعادلة
$$x\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 3e^x - y$$

بإخراج $\frac{dy}{dx}$ عاملا مشتركا
$$\frac{dy}{dx}(x - 2) = 3e^x - y$$

بحل المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3e^x - y}{x - 2}$$

أتحقق من فهمي:

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

a) $x^2 + y^2 = 2$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

b) $5y^2 - 2e^x = 4y$

$$10y\frac{dy}{dx} - 2e^x = 4\frac{dy}{dx}$$
$$10y\frac{dy}{dx} - 4\frac{dy}{dx} = 2e^x$$
$$\frac{dy}{dx}(10y - 4) = 2e^x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^x}{10y - 4}$$

c) $xy + y^2 = 4\cos x$

$$(x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(1) + 2y\frac{dy}{dx} = -4\sin x$$

$$(x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2y\frac{dy}{dx} = -4\sin x - y$$

$$\frac{dy}{dx}(x + 2y) = -4\sin x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y + 4\sin x}{x + 2y}$$

مثال 2:

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $y^3 + xy = 2$ عند النقطة $(1,1)$

الخطوة 1: أجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(1,1)$.

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المتغير x : $\frac{d}{dx}(y^3 + xy) = \frac{d}{dx}(2)$

قاعدتا مشتقة المجموع، ومشتقة الثابت: $\frac{d}{dx}(y^3) + \frac{d}{dx}(xy) = 0$

قواعد مشتقة اقتران القوة، ومشتقة الضرب، ومشتقة السلسلة: $3y^2\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$

بتعويض $x = 1, y = 1$: $3(1)^2\frac{dy}{dx} + (1)\frac{dy}{dx} + (1) = 0$

بالتبسيط: $4\frac{dy}{dx} + 1 = 0$

بحل المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$

إذن، ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1,1)$ هو: $-\frac{1}{4}$

الخطوة 2: أجد معادلة المماس عند النقطة $(1,1)$.

معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة: $y - y_1 = m(x - x_1)$

بتعويض $x_1 = 1, y_1 = 1, m = -\frac{1}{4}$: $y - 1 = -\frac{1}{4}(x - 1)$

باستعمال خاصية التوزيع: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

أتحقق من فهمي:

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^3 + 2y^3 = 6$ عند النقطة (2,-1).

$x^3 + 2y^3 = 6 , \qquad (2, -1)$

$3x^2 + 6y^2 \dfrac{dy}{dx} = 0$

بتعويض (x, y) = (2, -1)

$3(2)^2 + 6(-1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$

$12 + 6\dfrac{dy}{dx} = 0$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{12}{6} = -2$

ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة (2,-1) هو -2

معادلة المماس:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - (-1) = -2(x - 2)$

$y + 1 = -2x + 4$

$y = -2x + 3$

مثال 3: من الحياة

عند رمي حجر في مسطح مائي، تتكون موجات دائرية متحدة المركز.

إذا كان نصف قطر دائرة يزداد بمعدل 8 cm/s، فأجد معدل تغير مساحة هذه الدائرة عندما يكون نصف قطرها 10 cm، علماً بأن العلاقة التي تربط بين مساحة الدائرة (A) ونصف قطرها (r) هي: $A = \pi r^2$.

الخطوة 1: أحدد المعطيات والمطلوب.

المعادلة: $A = \pi r^2$

معدل التغير المعطى: $\dfrac{dr}{dt} = 8$

المطلوب: $\dfrac{dA}{dt}\Big|_{r=10}$

الخطوة 2: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، ثم أعوض.

المعادلة $A = \pi r^2$

بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t $\frac{d}{dt}(A) = \frac{d}{dt}(\pi r^2)$

قاعدة السلسلة $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \times \frac{dr}{dt}$

بتعويض $r = 10, \frac{dr}{dt} = 8$ $= 2\pi(10)(8)$

بالتبسيط $= 160\pi$

إذن، تزداد مساحة الدائرة بمعدل $160\pi\ cm^2/s$ عندما يكون نصف قطرها 10 cm.

أتحقق من فهمي:

بالونات: نفخت هديل بالونا على شكل كرة، فازداد نصف قطره بمعدل 3 cm/s.

أجد معدل تغير حجم البالون عندما يكون نصف قطره 4cm،

علما بأن العلاقة التي تربط بين حجم البالون (V) ونصف قطره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

معدل التغير المعطى: $\frac{dr}{dt} = 3$

معدل التغير المطلوب: $\frac{dV}{dt}\Big|_{r=4}$

العلاقة التي تربط بين حجم البالون ونصف قطره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$= 4\pi(4)^2(3)$$

$$= 192\pi$$

إذن يزداد حجم البالون بمعدل $192\pi\ cm^3/s$ عندما يكون طول نصف قطره 4 cm

أتدرب وأحل المسائل:

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1) $x^2 - 2y^2 = 4$

$$2x - 4y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$4y\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4y} = \frac{x}{2y}$$

2) $x^2 + y^3 = 2$

$$2x + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{3y^2}$$

3) $x^2 + 2y - y^2 = 5$

$$2x + 2\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx}(2 - 2y) = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2 - 2y} = \frac{-x}{1 - y}$$

4) $2xy - 3y = y^2 - 7x$

$$2x\frac{dy}{dx} + 2y - 3\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx} - 7$$

$$2x\frac{dy}{dx} - 3\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = -7 - 2y$$

$$\frac{dy}{dx}(2x - 3 - 2y) = -7 - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-7 - 2y}{2x - 3 - 2y}$$

5) $y^5 = x^3$

$$5y^4\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{5y^4}$$

6) $x^2y^3 + y = 11$

$$(x^2)\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right) + (y^3)(2x) + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$3x^2y^2\frac{dy}{dx} + 2xy^3 + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$3x^2y^2\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = -2xy^3$$

$$\frac{dy}{dx}(3x^2y^2 + 1) = -2xy^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy^3}{3x^2y^2 + 1}$$

7) $\sqrt{x}+\sin y=16$

$$\sqrt{x}+\ \sin y=16$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{dy}{dx}\cos y=0$$

$$\frac{dy}{dx}\cos y=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{x}\ \cos y}$$

8) $e^{x}y=xe^{y}$

$$(e^{x})\left(\frac{dy}{dx}\right)+(y)(e^{x})=(x)\left(\frac{dy}{dx}e^{y}\right)+(e^{y})(1)$$

$$e^{x}\frac{dy}{dx}-xe^{y}\frac{dy}{dx}=e^{y}-ye^{x}$$

$$\frac{dy}{dx}(e^{x}-xe^{y})=e^{y}-ye^{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{y}-ye^{x}}{e^{x}-xe^{y}}$$

9) $\cos x=\ln y=3$

$$\sin x+\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=-\sin x$$

$$\frac{dy}{dx}=-y\sin x$$

10) $16y^{2}-x^{2}=16$

$$32y\frac{dy}{dx}-2x=0$$

$$32y\frac{dy}{dx}=2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{32y}=\frac{x}{16y}$$

11) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 9$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 4 + 6\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} + 6\frac{dy}{dx} = 4 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx}(2y + 6) = 4 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 2x}{2y + 6}$$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند النقطة المعطاة:

12) $3x^3 - y^2 = 8, (2, 4)$

$$9x^2 - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$9(2)^2 - 2(4)\frac{dy}{dx} = 0$$ بتعويض $(x, y) = (2, 4)$

$$36 - 8\frac{dy}{dx} = 0$$

$$8\frac{dy}{dx} = 36$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

13) $2x^2 - 3y^3 = 5, \ (-2, 1)$

$$4x - 9y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$4(-2) - 9(1)^2\frac{dy}{dx} = 0$$ بتعويض $(x, y) = (-2, 1)$

$$-8 - 9\frac{dy}{dx} = 0$$

$$9\frac{dy}{dx} = -8$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{8}{9}$$

14) $y^2 = \ln x, \ (e,1)$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$2(1)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e}$$ بتعويض $(x,y) = (e,1)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2e}$$

15) $(y-3)^2 = 4x - 20, (6,1)$

$$2(y-3)^1\frac{dy}{dx} = 4$$

$$2(1-3)^1\frac{dy}{dx} = 4$$ بتعويض $(x,y) = (6,1)$

$$-4\frac{dy}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{-4} = -1$$

إذا كان: $2x^2 + y^2 = 34$ فأجد كلا مما يأتي:

16) ميل المماس عند النقطة $(3, 4)$.

$$4x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$4(3) + 2(4)\frac{dy}{dx} = 0$$ بتعويض $(x,y) = (3,4)$

$$12 + 8\frac{dy}{dx} = 0$$

$$8\frac{dy}{dx} = -12$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$$

ميل المماس عند النقطة $(3,4)$ هو $-\frac{3}{2}$

17)معادلة المماس عند النقطة $(3,4)$.

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 4 = -\frac{3}{2}(x - 3)$$
$$y - 4 = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$$
$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$$

إذا كان: $y^2 + xy + x^2 = 7$ فأجد كلا مما يأتي:

18)ميل المماس عند النقطة $(3,-2)$

$$2y\frac{dy}{dx} + (x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + y + 2x = 0$$

بتعويض $(x,y) = (3, -2)$

$$2(-2)\frac{dy}{dx} + (3)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (-2) + 2(3) = 0$$
$$-4\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} - 2 + 6 = 0$$
$$-\frac{dy}{dx} = -4$$
$$\frac{dy}{dx} = 4$$

ميل المماس عند النقطة $(3, -2)$ هو 4

19) معادلة المماس عند النقطة $(3,-2)$.

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-2) = 4(x - 3)$$
$$y + 2 = 4x - 12$$
$$y = 4x - 14$$

20)معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(3,-2)$.

معادلة العمودي على المماس:

$$y-y_1=-\frac{1}{m}(x-x_1)$$

$$y-(-2)=-\frac{1}{4}(x-3)$$

$$y+2=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$$

$$y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$$

21)هندسة: تتناقص أطوال أضلاع مكعب بمعدل $6\ cm/s$. أجد معدل تغير حجم المكعب عندما يكون طول ضلعه 30cm علما بأن العلاقة التي تربط بين حجم المكعب (V) وطول ضلعه (x) هي: $V=x^3$

معدل التغير المعطى: $\frac{dx}{dt}=-6$

معدل التغير المطلوب: $\frac{dV}{dt}\Big|_{x=30}$

العلاقة التي تربط بين حجم المكعب وطول ضلعه: $V=x^3$

$$\frac{dV}{dt}=3x^2\frac{dx}{dt}$$

$$=3(30)^2(-6)$$

$$=-16200$$

إذن يتناقص حجم المكعب بمعدل $16200\ cm^3/s$ عندما يكون طول ضلعه 30 cm

22)فقاقيع: يزداد نصف قطر فقاعة صابون كروية الشكل بمعدل 0.5 cm/s.
أجد سرعة زيادة مساحة سطح الفقاعة عندما يكون طول نصف قطرها 3 cm،
علما بأن العلاقة التي تربط بين مساحة سطح الفقاعة (A) ونصف قطرها (r) هي: $A=4\pi r^2$.

معدل التغير المعطى: $\frac{dr}{dt}=0.5$

معدل التغير المطلوب: $\frac{dA}{dt}\Big|_{r=3}$

العلاقة التي تربط بين مساحة سطح الفقاعة ونصف قطرها: $A=4\pi r^2$

$$\frac{dA}{dt}=8\pi r\frac{dr}{dt}$$

$$=8\pi(3)(0.5)=12\pi$$

إذن تتزايد مساحة سطح الفقاعة بمعدل $12\pi\ cm^2/s$ عندما يكون طول نصف قطرها 3 cm

23)أورام: اتخذ ورم شكلا كرويا تقريبا، وقد ازداد نصف قطره بمعدل 0.13 m لكل شهر. أجد معدل تغير حجم الورم عندما يكون طول نصف قطره 0.45 cm، علما بأن العلاقة التي تربط بين حجم الورم (V) ونصف قطره (r) هي: $V = \frac{3}{4}\pi$

معدل التغير المعطى: $\frac{dr}{dt} = 0.13$

معدل التغير المطلوب: $\frac{dV}{dt}\Big|_{r=0.45}$

العلاقة التي تربط بين حجم الورم ونصف قطره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$= 4\pi(0.45)^2(0.13)$$

$$= 0.1053\pi$$

إذن يزداد حجم الورم بمعدل 0.1053π cm³/s عندما يكون طول نصف قطره 0.13 cm

مهارات التفكير العليا:

24)تبرير: أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^2 + 6y^2 = 10$ عندما $x = 2$، مبررا إجابتي.

$$x^2 + 6y^2 = 10$$

$$(2)^2 + 6y^2 = 10 \rightarrow 6y^2 = 6 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$$

$$2x + 12y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y}$$

عند النقطة (2,1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

عند النقطة (2,-1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{6y} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = \frac{1}{3}(x - 2)$$

$$y + 1 = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$$

25) تحد: إذا كان: $\ln(xy) = x^2 + y^2$ فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2y-y}{x-2xy^2}$.

$$\ln(xy) = x^2 + y^2$$

$$\frac{(x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(1)}{xy} = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$(x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(1) = 2x^2y + 2xy^2\frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx} + y = 2x^2y + 2xy^2\frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx} - 2xy^2\frac{dy}{dx} = 2x^2y - y$$

$$\frac{dy}{dx}(x - 2xy^2) = 2x^2y - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2y - y}{x - 2xy^2}$$

26) تبرير: إذا كان المتغيران u, w مرتبطين بالعلاقة: $u = 150\sqrt[3]{w^2}$، وكانت قيمة المتغير w تزداد بمرور الزمن t وفقا للعلاقة: $w = 0.05t + 8$، فأجد معدل تغير u بالنسبة إلى الزمن عندما $w = 64$، مبررا إجابتي.

معدل التغير المطلوب

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{w=64}$$

العلاقة التي تربط u مع w هي:

$$u = 150\sqrt[3]{w^2}$$

$$u = 150w^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{du}{dt} = 150 \times \frac{2}{3}w^{-\frac{1}{3}}\frac{dw}{dt}$$

لكن $w = 0.05t + 8$، إذن: $\frac{dw}{dt} = 0.05$

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{w=64} = 150 \times \frac{2}{3}(64)^{-\frac{1}{3}}(0.05)$$

$$= 150 \times \frac{2}{3}\frac{1}{(64)^{\frac{1}{3}}}(0.05)$$

$$= 150 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}(0.05) = 1.25$$

كتاب التمارين

الدرس الرابع – الاشتقاق الضمني والمُعدات المرتبطة

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1) $x^2 + 5y^2 = 14$

$$2x + 10y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$10y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{10y} = -\frac{x}{5y}$$

2) $x^2 + 2xy = 3y^2$

$$2x + 2x\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2y(1) = 6y\frac{dy}{dx}$$

$$2x\frac{dy}{dx} - 6y\frac{dy}{dx} = -2\,y - 2x$$

$$\frac{(2x - 6y)dy}{dx} = -2x - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y - 2x}{2c - 6y}$$

3) $y \ln x = 1 + x$

$$(y)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)\left(\frac{dy}{dx}\right) = 1$$

$$\frac{y}{x} + \ln x\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\ln x\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{y}{x}}{\ln x}$$

4) $y + y^3 = \sin x - x^2$

$$\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = \cos x - 2x$$

$$\frac{dy}{dx}(1 + 3y^2) = xos\ x - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x - 2x}{1 + 3y^2}$$

5) $xe^y - 3x = 15$

$$(x)\left(e^y\frac{dy}{dx}\right) + (e^y)(1) - 3 = 0$$

$$xe^y\frac{dy}{dx} + e^y - 3 = 0$$

$$xe^y\frac{dy}{dx} = 3 - e^y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 - e^y}{xe^y}$$

6) $x^3 + xy^2 = 5x$

$$3x^2 + (x)\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + (y^2)(1) = 5$$

$$3x^2 + 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 5$$

$$2xy\frac{dy}{dx} = 5 - y^2 - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 - y^2 - 3x^2}{2xy}$$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند النقطة المعطاة:

7) $x^2y - 2x^3 - y^3 + 1 = 0, (2, -3)$

$$(x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(2x) - 6x^2 - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

بتعويض $(x, y) = (2, -3)$ ينتج أن:

$$4\frac{dy}{dx} - 12 - 24 - 27\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-23\frac{dy}{dx} - 36 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{36}{23}$$

8) $y^3 - x^2 = 4, (2, 2)$

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

بتعويض $(x, y) = (2, 2)$ ينتج أن:

$$3(2)^2\frac{dy}{dx} - 2\,(2) = 0$$

$$12\frac{dy}{dx} - 4 = 0$$

$$12\frac{dy}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

إذا كان: $y^2 - x^2 = 16$ فأجد كلا مما يأتي:

9) ميل المماس عند النقطة (3,5).

ميل المماس عند النقطة $(3,5)$

$$2y\frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

$$\frac{2(5)dy}{dx} - 2(3) = 0$$

$$10\frac{dy}{dx} - 6 = 0$$

$$10\frac{dy}{dx} = 6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

10) معادلة المماس عند النقطة $(3,5)$.

معادلة المماس عند النقطة $(3,5)$

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - 5 = \frac{3}{5}(x - 3)$$

$$y - 5 = \frac{3}{5}x - \frac{9}{5}$$

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{16}{5}$$

إذا كان: $x^2y = 8 - 4y$ فأجد كلا مما يأتي:

11) ميل المماس عند النقطة $(2,1)$

ميل المماس عند النقطة $(2,1)$

$$(x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(2x) = -4\frac{dy}{dx}$$

بتعويض $(x,y) = (2,1)$

$$(4)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (1)(4) = -4\frac{dy}{dx}$$

$$4\frac{dy}{dx} + 4 = -4\frac{dy}{dx}$$

$$4\frac{dy}{dx} + 4\frac{dy}{dx} = -4$$

$$8\frac{dy}{dx} = -4$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

12) معادلة المماس عند النقطة $(2,1)$

معادلة المماس عند النقطة $(2,1)$

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

إذا كان: $x^2 + 4xy + y^2$، فأجد كلا مما يأتي:

13) ميل المماس عند النقطة $(0,5)$

ميل المماس عند النقطة $(0,5)$

$$2x + (4x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(4) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

بتعويض $(x,y) = (0,5)$

$$0 + (0)\frac{dy}{dx} + 20 + 10\frac{dy}{dx} = 0$$

$$10\frac{dy}{dx} = -20$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{20}{10} = -2$$

14) معادلة المماس عند النقطة $(0,5)$

معادلة المماس عند النقطة $(0,5)$

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - 5 = -2(x - 0)$$

$$y - 5 = -2x$$

$$y = -2x + 5$$

15) مناطيد: يخرج الهواء من منطاد كروي الشكل بمعدل ثابت مقداره $0.6\ cm^3/s$. أجد معدل تناقص نصف قطر المنطاد عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر 2.5 m، علما بأن العلاقة التي تربط بين حجم المنطاد (V) ونصف قطره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

معدل التغير المعطى $\frac{dV}{dt} = -0.6$

معدل التغير المطلوب $\frac{dr}{dt}|_{r=250}$

العلاقة التي تربط بين حجم المنطاد ونصف قطره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$-0.6 = 4\pi(250)^2\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{0.6}{4\pi(250)^2} = -\frac{0.6}{250000\pi} = -\frac{6}{2500000\pi}$$

إذن يتناقص طول نصف قطر المنطاد بمعدل $\frac{6}{2500000\pi}\ cm/s$ عندما يكون طول نصف قطره 250 cm

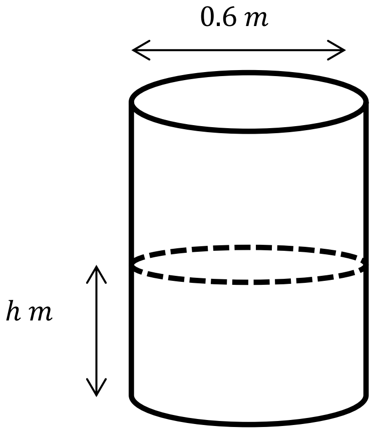
16) خزانات مياه: يبين الشكل المجاور خزان ماء أسطواني الشكل.

إذا كانت كمية الماء في الخزان تزداد بمعدل $0.4\ m^3/s$،

فأجد معدل تغير عمق الماء فيه (h)،

علما بأن العلاقة التي تربط بين حجم الخزان (V) وارتفاعه (h)

هي: $V = \pi r^2 h$



معدل التغير المعطى: $\frac{dV}{dt} = 0.4$

معدل التغير المطلوب: $\frac{dh}{dt}$

العلاقة التي تربط بين حجم الخزان وارتفاعه: $V = \pi r^2 h$

$$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$0.4 = \pi(0.3)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0.4}{\pi(0.3)^2} = \frac{0.4}{0.09\pi} = \frac{40}{9\pi}$$

إذن يتزايد عمق الماء في الخزان بمعدل $\frac{40}{9\pi}\ m/s$

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل ما يأتي:

1) ميل المماس لمنحنى الاقتران: $y = x^2 + 5x$ عندما $x = 3$ هو:

a) 24 b) $-\frac{5}{2}$ c) $\boxed{11}$ d) 8

2) إذا كان: $f(x) = x - \frac{1}{x}$، فإن $f''(x)$ هي:

a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$ c) $\frac{2}{x^3}$ d) $\boxed{-\frac{2}{x^3}}$

3) إذا كان: $y^2 - x^2 = 1$ فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ هو:

a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$ c) $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ d) $\sqrt{2}$

4) ميل العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $3x - 2y + 12 = 0$ هو:

a) 6 b) 3 c) $\frac{2}{3}$ d) $\boxed{-\frac{2}{3}}$

5) قيمة x التي عندها قيمة صغرى محلية للاقتران: $f(x) = x^4 - 32x$ هي:

a) $\boxed{2}$ b) -2 c) 1 d) -1

يمثل الاقتران: $s(t) = 2 + 7t - t^2, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

6) اللحظة التي تكون فيها حركة الجسم في الاتجاه السالب هي:

a) $t = 1$ b) $t = 2$ c) $t = 3.5$ d) $\boxed{t = 4}$

7) اللحظة التي يكون فيها الجسم في حالة سكون لحظي هي:

a) $t = 1$ c) $t = 2$ c) $\boxed{t = 3.5}$ d) $t = 4$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة:

8) $f(x) = x^2 - 7x + 10, (2, 0)$

$f(x) = x^2 - 7x + 10$ $(2, 0)$

$f'(x) = 2x - 7$

$f'(2) = 4 - 7 = -3$

معادلة المماس:

$y - 0 = -3(x - 2)$

$y = -3x + 6$

9) $f(x) = x^2 - \frac{8}{\sqrt{x}}, (4, 12)$

$f(x) = x^2 - \dfrac{8}{\sqrt{x}} \qquad (4, 12)$

$f'(x) = 2x + \dfrac{8(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{x} = 2x + \dfrac{4}{x\sqrt{x}}$

$f'(4) = 2(4) + \dfrac{4}{4\sqrt{4}} = 8 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{2}$

معادلة المماس:

$y - 12 = \frac{17}{2}(x - 4)$

$y - 12 = \dfrac{17}{2}x - 34$

$y = \frac{17}{2}x - 22$

10) $f(x) = \frac{2x-1}{x}, (1, 1)$

$f(x) = \dfrac{2x - 1}{x} \qquad (1, 1)$

$f'(x) = \dfrac{(x)(2) - (2x - 1)(1)}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$

$f'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

معادلة المماس:

$y - 1 = 1(x - 1)$

$y - 1 = x - 1$

$y = x$

$11)\ f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+1}}, (4,1)$

$f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2x+1}} \qquad (4,1)$

$f'(x) = \dfrac{-3\left(\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}\right)}{2x+1} = \dfrac{-3}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$

$f'(4) = \dfrac{-3}{(8+1)\sqrt{8+1}} = -\dfrac{1}{9}$

معادلة المماس:

$y - 1 = -\frac{1}{9}(x-4)$

$y - 1 = -\dfrac{1}{9}x + \dfrac{4}{9}$

$y = -\dfrac{1}{9}x + \dfrac{13}{9}$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

$12) f(x) = (x-7)(x+4), x = 1$

$f(x) = (x-7)(x+4) \quad , x = 1$

$f(1) = (1-7)(1+4) = -30 \rightarrow (1,-30)$

$f'(x) = (x-7)(1) + (x+4)(1)$

$f'(1) = (1-7) + (1+4) = -1$

معادلة المماس:

$y - (-30) = -1(x-1)$

$y + 30 = -x + 1$

$y = -x - 29$

13) $f(x) = \frac{x}{x+4}, x = -5$

$$f(x) = \frac{x}{x+4} \quad , x = -5$$

$$f(-5) = \frac{-5}{-5+4} = 5 \rightarrow (-5, 5)$$

$$f'(x) = \frac{(x+4)(1) - (x)(1)}{(x+4)^2} = \frac{4}{(x+4)^2}$$

$$f'(-5) = \frac{4}{(-5+4)^2} = 4$$

معادلة المماس:

$$y - 5 = 4(x+5)$$

$$y - 5 = 4x + 20$$

$$y = 4x + 25$$

14) $f(x) = 2x^4 + 9x^3 + x, x = -2$

$$f(x) = 2x^4 + 9x^3 + x \quad , x = -2 \ (-2, -42)$$

$$f(-2) = 2(-2)^4 + 9(-2)^3 + (-2) = -42$$

$$f'(x) = 8x^3 + 27x^2 + 1$$

$$f'(-2) = 8(-2)^3 + 27(-2)^2 + 1 = 45$$

معادلة المماس:

$$y - (-42) = 45(x+2)$$

$$y + 42 = 45x + 90$$

$$y = 45x + 48$$

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

15) $f(x) = 7x^3 + 6x - 5, x = 2$

$$f(x) = 7x^3 + 6x - 5 \quad , x = 2$$

$$f(2) = 7(2)^3 + 6(2) - 5 = 63$$

$$f'(x) = 21x^2 + 6$$

$$f'(2) = 21(2)^2 + 6 = 90$$

معادلة العمودي على المماس

$$y - 63 = -\frac{1}{90}(x-2)$$

$$y - 63 = -\frac{1}{90}x + \frac{1}{45}$$

$$y = -\frac{1}{90}x + \frac{2836}{45}$$

16) $f(x) = \frac{6x^2 - x^3}{4x^4}, x = -2$

$$f(x) = \frac{6x^2 - x^3}{4x^4} = \frac{3}{2}x^{-2} - \frac{1}{4}x^{-1} \quad , \qquad x = -2$$

$$f(-2) = \frac{3}{2}(-2)^{-2} - \frac{1}{4}(-2)^{-1} = \frac{3}{2 \times (-2)^2} - \frac{1}{4 \times (-2)^1} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -3x^{-3} + \frac{1}{4}x^{-2}$$

$$f'(-2) = \frac{-3}{(-2)^3} + \frac{1}{4 \times (-2)^2} = \frac{3}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$$

$y - \frac{1}{2} = -\frac{16}{7}(x + 2)$ معادلة العمودي على المماس

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{16}{7}x - \frac{32}{7}$$

$$y = -\frac{16}{7}x - \frac{32}{7} + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{16}{7}x - \frac{57}{14}$$

17)أجد إحداثيي النقطة (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^4 - 3x^3 + 1$، التي يكون عندها المماس أفقيا.

مماس المنحنى أفقي أي $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2$$

$$4x^3 - 9x^2 = 0$$

$$x^2(4x - 9) = 0$$

$x = 0$ أو $4x - 9 = 0 \to 4x = 9 \to x = \frac{9}{4}$

$$f(0) = (0)^4 - 3(0)^3 + 1 = 1$$

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = \left(\frac{9}{4}\right)^4 - 3\left(\frac{9}{4}\right)^3 + 1 = -\frac{1931}{256}$$

النقاط هي $(, -\frac{19319}{256\ 4})$، $(0,1)$

18) أجد إحداثيي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 + 3$، التي يكون عندها ميل المماس هو 12.

ميل مماس المنحنى 12 أي $f'(x) = 12$

$f'(x) = 3x^2$

$3x^2 = 12$

$x^2 = 4 \to x = 2$ أو $x = -2$

$f(2) = (2)^3 + 3 = 11$

$f(-2) = (-2)^3 + 3 = -5$

النقاط هي (-2, -5)، (2,11)

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي:

19)$f(x) = 4x^2 - 5x + 7$

$f'(x) = 8x - 5$

$f''(x) = 8$

20)$f(x) = \ln x - 9e^x$

$f'(x) = \frac{1}{x} - 9e^x$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 9e^x$

21)$f(x) = 10x - 2x\sqrt{x}$

$f'(x) = 10 - ((2x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (\sqrt{x})(2))$

$= 10 - (\sqrt{x} + 2\sqrt{x})$

$= 10 - 3\sqrt{x}$

$f''(x) = -3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{-3}{2\sqrt{x}}$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

22) $f(x) = \sqrt{x}(x+2), x = 2$

$$f(x) = \sqrt{x}(x+2) = x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(2) = \frac{3}{4}(2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

23) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2, x = 1$

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 \quad , x = 1$$

$$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 24x^2 - 18x - 2$$

$$f''(1) = 24 - 18 - 2 = 4$$

24) نفط: تسرب نفط من نافلة بحرية، مكونا بقعة دائرية الشكل على سطح الماء، تزداد مساحتها بمعدل $50\ m^2/min$. أجد سرعة تزايد نصف قطر البقعة عندما يكون طول نصف قطرها $20\ m$، علما بأن العلاقة التي تربط بين مساحة الدائرة (A) ونصف قطرها (r) هي: $A = \pi r^2$

معدل التغير المعطى: $\frac{dA}{dt} = 50$

معدل التغير المطلوب: $\frac{dr}{dt}\Big|_{r=20}$

العلاقة التي تربط بين مساحة الدائرة ونصف قطرها: $A = \pi r^2$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$50 = 2\pi(20)\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{5}{4\pi}$$

إذن يزداد طول نصف قطر البقعة بمعدل $\frac{5}{4\pi}$ m/min عندما يكون طول نصف قطرها 20 m

يمثل الاقتران: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 12t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

25) ما سرعة الجسم عندما $t = 2$؟

$$v(t) = 3t^2 - 12t + 12$$
$$v(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 12 = 0\ m/s$$

26) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 2$؟

بما أن السرعة صفر، إذن الجسم في حالة سكون لحظي.

27) ما تسارع الجسم عندما $t = 2$؟

$$a(t) = 6t - 12$$
$$a(t) = 12 - 12 = 0\ m/s^2$$

28) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

يكون الجسم في حالة سكون عندما تكون السرعة صفراً

$$3t^2 - 12t + 12 = 0$$
$$t^2 - 4t + 4 = 0$$
$$(t-2)(t-2) = 0$$
$$t = 2$$

دراجات: يمكن نمذجة موقع شخص يقود دراجة في مسار مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

29) ما سرعة الشخص بعد 3 ثوان من بدء حركته؟

$$v(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}$$
$$v(3) = \frac{9}{2} + 3 + \frac{1}{2} = 8\ m/s$$

30) ما تسارع الشخص بعد 3 ثوان من بدء حركته؟

$$a(t) = t + 1$$
$$a(3) = 3 + 1 = 4\ m/s^2$$

31)أجد قيم t التي يكون عندها الشخص في حالة سكون لحظي (إن وجدت).

يكون الشخص في حالة سكون عندما تكون السرعة صفراً

لكن السرعة هنا هي $\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(t^2 + 2t + 1) = \frac{1}{2}(t + 1)^2$

وهذا مقدار موجب لجميع قيم $t \geq 0$، ولا يمكن أن يكون صفراً، فلا يكون الشخص في حالة سكون لحظي أبداً.

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي:

32) $f(x) = 9 + 24x - 2x^3$

$f'(x) = 24 - 6x^2$

$24 - 6x^2 = 0$

$6x^2 = 24 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

القيم الحرجة هي: $x = -2$ و $x = 2$

$f''(x) = -12x$

$f''(-2) = 24 > 0$

$f''(2) = -24 < 0$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -2$ وهي $f(-2) = 9 - 48 + 16 = -23$

وتوجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 2$ وهي $f(2) = 9 + 48 - 16 = 41$

33) $f(x) = (3x - 2)^3 - 9x$

$f'(x) = 3(3x - 2)^2(3) - 9 = 9(3x - 2)^2 - 9$

$9(3x - 2)^2 - 9 = 0$

$(3x - 2)^2 = 1 \rightarrow 3x - 2 = \pm 1 \rightarrow x = 1 \text{ or } x = \frac{1}{3}$

القيم الحرجة هي: $x = 1, x = \frac{1}{3}$

$f''(x) = 18(3x - 2)^1(3) = 54(3x - 2)$

$f''(1) = 54 > 0$

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = -54 < 0$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي $f(1) = (3 - 2)^3 - 9 = -8$

وتوجد قيمة عظمى محلية عندما $x = \frac{1}{3}$ وهي $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(3\left(\frac{1}{3}\right) - 2\right)^3 - 9\left(\frac{1}{3}\right) = -4$

34) $f(x) = 4x^5 - 10x^2$

$f(x) = 4x^5 - 10x^2$

$f'(x) = 20x^4 - 20x$

$20x^4 - 20x = 0$

$20x(x^3 - 1) = 0 \rightarrow x = 0$ أو $x = 1$

القيم الحرجة هي $x = 0$ و $x = 1$

$f''(x) = 80x^3 - 20$

$f''(0) = -20 < 0$

$f''(1) = 60 > 0$

إذن توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ وهي $f(1) = -6$

وتوجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$ وهي $f(0) = 0$

35)بالونات: نفخت ماجدة بالونا على شكل كرة، فازداد حجمه بمعدل $800\ cm^3/s$. أجد معدل زيادة نصف قطر البالون عندما يكون طول نصف قطره 60 cm، علما بأن العلاقة التي تربط بين حجم البالون (V) ونصف قطره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

معدل التغير المعطى: $\frac{dV}{dt} = 800$

معدل التغير المطلوب: $\frac{dr}{dt}\Big|_{r=60}$

العلاقة التي تربط بين حجم البالون ونصف قطره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

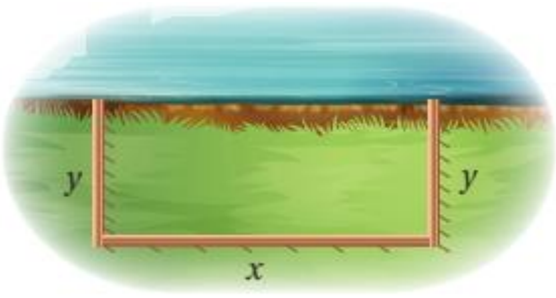
$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$800 = 4\pi(60)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{800}{14400\pi} = \frac{1}{18\pi}$$

إذن يزداد طول نصف قطر البالون $\frac{1}{18\pi}$ cm/s عندما يكون طول نصف قطره 60 cm

36) خطط مزارع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل التالي، وحدد مساحة الحظيرة بـ $245000\ m^2$؛ لتوفير كمية عشب كافية لأغنامه. أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يمكن، علما بأن الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.



طول السياج $P = x + 2y$

مساحة الحظيرة المستطيلة $A = xy$

$$245000 = xy \rightarrow y = \frac{245000}{x}$$

$$P = x + 2y$$

$$P(x) = x + 2\left(\frac{245000}{x}\right) = x + \frac{490000}{x}$$

$$P'(x) = 1 - \frac{490000}{x^2}$$

$$1 - \frac{490000}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{490000}{x^2} = 1 \rightarrow x^2 = 490000 \rightarrow x = \pm 700$$

لكن الأطوال لا تكون سالبة، لذا فإن $x = 700$

$$P''(x) = \frac{980000}{x^3}$$

$$P''(700) = \frac{980000}{(700)^3} = 2 > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى عندما $x = 700$

وتكون أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يمكن هي:

$x = 700\ m$ و $y = \frac{245000}{700} = 350\ m$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

37) $x^2 + y^2 = y$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$2y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx}(2y - 1) = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y - 1}$$

38) $x^2 + 6x - 8y + 5y^2 = 13$

$$2x + 6 - 8\frac{dy}{dx} + 10y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-8\frac{dy}{dx} + 10y\frac{dy}{dx} = -2x - 6$$

$$\frac{dy}{dx}(10y - 8) = -2x - 6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 6}{10y - 8}$$

إذا كان: $y^2 + xy + x^2 = 13$، فأجد كلا مما يأتي:

39)ميل المماس عند النقطة (-4, 3)

$$2y\frac{dy}{dx} + (x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(1) + 2x = 0$$

بتعويض $(x, y) = (-4,3)$ ينتج أنّ:

$$2(3)\frac{dy}{dx} + (-4)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (3)(1) + 2(-4) = 0$$

$$6\frac{dy}{dx} - 4\frac{dy}{dx} + 3 - 8 = 0$$

$$2\frac{dy}{dx} = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}$$

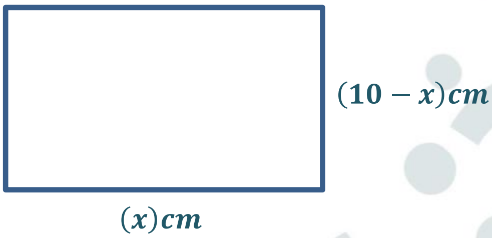
ميل المماس عند النقطة (-4, 3) هو $\frac{5}{2}$

40) معادلة المماس عند النقطة (3 ,4-)

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3 = \frac{5}{2}(x - (-4))$$
$$y - 3 = \frac{5}{2}x + 10$$
$$y = \frac{5}{2}x + 13$$

41)سلك طوله 20 cm. إذا أريد ثني السلك ليحيط بالمستطيل التالي، فأجد أكبر مساحة مغلقة يمكن إحاطة السلك بها.



مساحة المستطيل

$$A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$$
$$A'(x) = 10 - 2x$$
$$10 - 2x = 0 \rightarrow x = 5$$

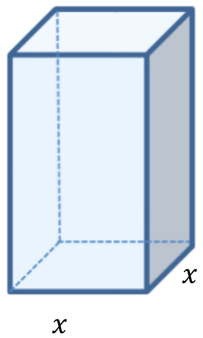
توجد قيمة حرجة واحدة هي $x = 5$

$$A''(x) = -2$$
$$A''(5) = -2 < 0$$

توجد قيمة عظمى عندما $x = 5$

إذن أكبر مساحة ممكنة هي $A(5) = 10(5) - (5)^2 = 25\text{cm}^2$

يبين الشكل الآتي صندوقا على شكل متوازي مستطيلات. إذا كانت قاعدة الصندوق مربعة الشكل. وطول ضلع القاعدة $x\ cm$، ومجموع أطوال أحرفه 144 cm، فأجد كلا مما يلي:



42)الاقتران الذي يمثل حجم الصندوق بدلالة x.

حجم الصندوق $V = x^2y$

مجموع أطوال الأحرف $S = 8x + 4y$

$144 = 8x + 4y$

$4y = 144 - 8x$

$y = 36 - 2x$

=حجم الصندوق بدلالة x $V(x) = x^2(36 - 2x)$

$36x^2 - 2x^3$

43) قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن.

$V'(x) = 72x - 6x^2$

$72x - 6x^2 = 0$

$6x(12 - x) = 0$

$x = 0$ أو $x = 12$

توجد قيمتان حرجتان هما $x = 0 , x = 12$

$V''(x) = 72 - 12x$

$V''(0) = 72 > 0$

$V''(12) = 72 - 144 = -72 < 0$

توجد قيمة عظمى عندما $x = 12$

إذن قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن هي $x = 12$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند النقطة المعطاة:

$$44)\ 2x^3 + 4y^2 = -12, (-2, -1)$$

$$6x^2 + 8y\frac{dy}{dx} = 0$$

بتعويض $(x, y) = (-2, -1)$ ينتج أن:

$$6(-2)^2 + 8(-1)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$24 - 8\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

$$45)\ x^3 - x^2y^2 = -9, (3, -2)$$

$$3x^2 - (x^2)\left(2y\frac{dy}{dx}\right) - (y^2)(2x) = 0$$

بتعويض $(x, y) = (3, -2)$ ينتج أن:

$$3(3)^2 - (3)^2\left(2(-2)\frac{dy}{dx}\right) - ((-2)^2)(2(3)) = 0$$

$$27 + 36\frac{dy}{dx} - 24 = 0$$

$$36\frac{dy}{dx} = -3$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{36} = -\frac{1}{12}$$