المرجع في الرياضيات

الثاني ثانوي العلمي

كتاب الطالب + كتاب التمارين

الوحدة الثالثة

الأعداد المركبة

الأستاذ: معتصم ابراهيم

0786667808

يعتبر مرجعاً للطلاب ومعلمي المادة

أعزائي الطلاب: لأي ملاحظات الرجاء ارسالها على رقم الواتس اب أعلاه

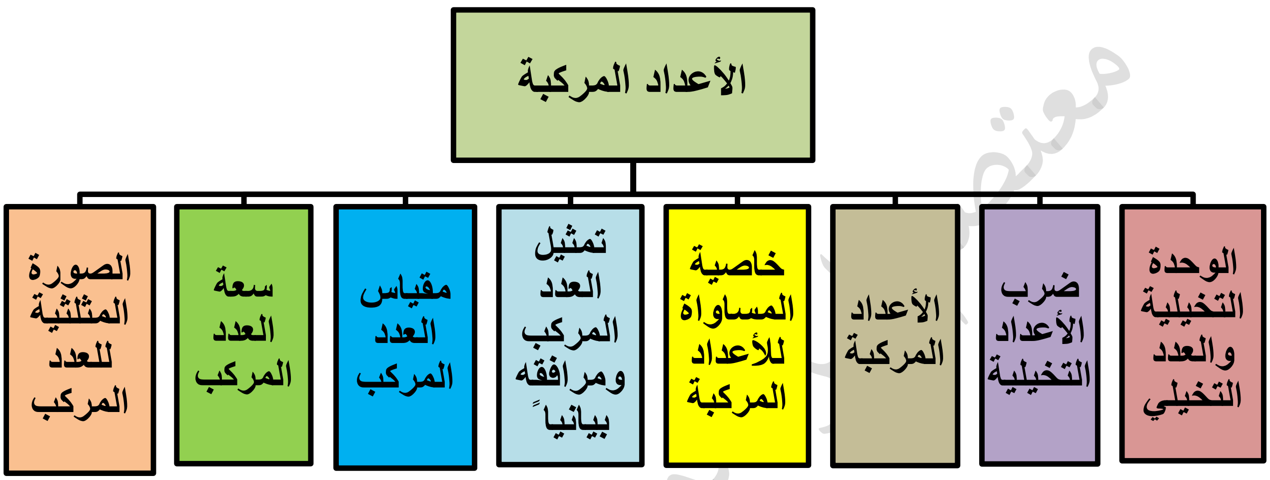
ولا تنسونا من دعائكم

طبعة العام الدراسي
2025/2024

الاعداد المركبة

الدرس الأول: الأعداد المركبة

مخطط الدرس الأول



مقدمة الدرس:

1) المعادلات التربيعية نوعان:

النوع الأول : لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية وهي التي يكون مميزها أكبر أو يساوي صفر $b^2 + 4ac \geq 0$.

النوع الثاني : ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية وهي التي يكون مميزها عدداً سالباً $b^2 + 4ac < 0$.

- لذلك فإنه لا يوجد حل حقيقي للمعادلة التربيعية $x^2 + 1 = 0$ ، لأنني إذا حاولت حلها، فإن الناتج سيكون: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$

وهذا غير ممكن، لأن مربع أي عدد حقيقي لا يكون سالباً .

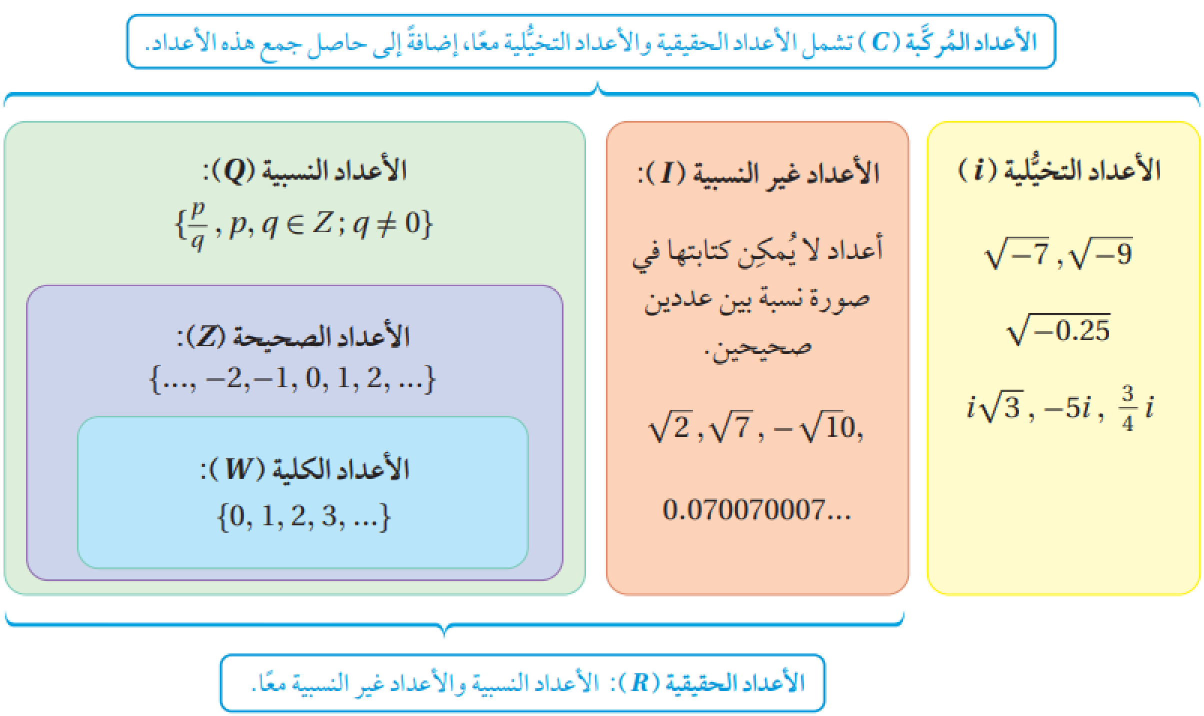
- إن ظهور مثل هذه المعادلات التربيعية في العديد من التطبيقات الهندسية والفيزيائية أدى للحاجة إلى توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة أوسع منها وهي مجموعة الأعداد المركبة والتي ستكون موضوع دراستنا في هذه الوحدة.

الوحدة التخيلية والعدد التخيلي:

مجموعة الأعداد الحقيقية؟

الأعداد الحقيقية: هي تضم جميع أنواع الأعداد باستثناء الأعداد التخيلية ويرمز لها بالرمز R .

1. الأعداد الطبيعية (N) : وتشمل جميع الأعداد الصحيحة الموجبة ، $\{1, 2, 3, \dots\}$.
2. الأعداد الكلية (W) :وتشمل جميع الأعداد الصحيحة الموجبة مع الصفر، $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
3. الأعداد الصحيحة (Z) : وهي تشمل جميع الأعداد الموجبة والسالبة والصفر، $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
4. الأعداد النسبية (Q) : وهي جميع الأعداد التي يمكن التعبير عنها في صورة كسر وتكون عدداً عشرياً منتهي أو دوري، $\left\{\frac{1}{4}, \frac{5}{8}, 1.91, 5.32, \dots\right\}$.
5. الأعداد غير النسبية (I) : وتضم جميع الأعداد التي لا يمكن التعبير عنها ككسر بسطه ومقامه أعداد صحيحة وتكون عدداً عشرياً غير منتهي أو غير دوري وهي (الجذور الصماء والنسبة التقريبية والعدد النيبيري)، $\{e, \pi, \sqrt{2}, -\sqrt{5}, \dots\}$.



مجموعة الأعداد المركبة: هي تضم جميع أنواع الأعداد الحقيقة و الأعداد التخيلية ويرمز لها بالرمز C .

العدد التخيلي: هو الجذر التربيعي للعدد -1 ، ونرمز له بالرمز (i) ويسمى الوحدة التخيلية $\sqrt{-1} = i$. ومنها $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = i^2 \Rightarrow i^2 = -1$.

ملاحظة: تمثل الأعداد التخيلية ركيزة أساسية في علم الهندسة الكهربائية.

ملاحظة: يكتب الرمز i على يمين العدد المضروب فيه، مثل $5i$: ، أما إذا كان مضروباً في متغير أو جذر فإنه يكتب على يسار المتغير أو الجذر، مثل $3i\sqrt{14}$, ix .

مسألة اليوم: (صفحة 136)

افترض عالم الرياضيات الإيطالي جيرولامو كاردانو قديماً أن القيمة $\sqrt{-1}$ تمثل حلاً للمعادلة $x^2 + 1 = 0$.

إذا تصورنا وجود جذر تربيعي للعدد -1 في مجموعة ما من مجموعات الأعداد ، فإن :

$$\left(\sqrt{-1}\right)^2 + 1 = 0 \Rightarrow -1 + 1 = 0$$

وبالتالي يكون $\sqrt{-1}$ حلاً للمعادلة $x^2 + 1 = 0$

مثال 1: (صفحة 137)

أجد قيمة الجذر الرئيس في كل مما يأتي بدلالة i :

1) $\sqrt{-16}$

$$= \sqrt{16 \times -1} \Rightarrow = \sqrt{-1} \times \sqrt{16} \Rightarrow = i \times 4 \Rightarrow = 4i$$

2) $\sqrt{-72}$

$$= \sqrt{36 \times 2 \times -1} \Rightarrow = \sqrt{36} \times \sqrt{2} \times \sqrt{-1} \Rightarrow = 6 \times \sqrt{2} \times i \Rightarrow = 6i\sqrt{2}$$

اتحقق من فهمي: (صفحة 137)

1) $\sqrt{-75}$

$= \sqrt{25 \times 3 \times -1} \quad \Rightarrow = \sqrt{25} \times \sqrt{3} \times \sqrt{-1} \quad \Rightarrow = 5i\sqrt{3}$

2) $\sqrt{-47}$

$= \sqrt{49 \times -1} \quad \Rightarrow \ = \sqrt{49} \times \sqrt{-1} \quad \Rightarrow \ = 7i$

ضرب الأعداد التخيلية:

يتم كتابة الأعداد التخيلية بدلالة i ثم استعمال خاصيتي التبديل والتجميع كما هو يلي :

$\sqrt{-9} \times \sqrt{-4} \quad \Rightarrow \ = i\sqrt{9} \times i\sqrt{4} \quad \Rightarrow = 3i \times 2i \quad \Rightarrow = 6i^2$

ملاحظات مهمة:

1) خاصية التبديل للضرب: إذا كان a , b عددين حقيقين فإن : $a \times b = b \times a$

2) خاصية التجميع للضرب: إذا كان a , b , c أعداد حقيقية فإن : $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

3) خاصية عند الرفع تضرب الاسس: إذا كان a عدد حقيقي فإن : $(a^n)^m = a^{nm}$

مثال 2: (صفحة 138)

أجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة مفترضاً أن $\sqrt{-1} = i$:

1) $\sqrt{-8} \times \sqrt{-18}$

$= \sqrt{8}i \times \sqrt{18}i \quad \Rightarrow = \sqrt{144}i^2 \quad \Rightarrow = 12 \times -1 \quad \Rightarrow = -12$

2) $5i \times \sqrt{-4}$

$= 5i \times \sqrt{4}i \quad \Rightarrow = 5i \times 2i \quad \Rightarrow = 10i^2 \quad \Rightarrow = -10$

3) i^{15}

$= (i^2)^7 \times i \quad \Rightarrow = (-1)^7 \times i \quad \Rightarrow \ = -1 \times i \quad \Rightarrow = -i$

$= i^{15} \quad \Rightarrow \ = i^3 \quad \Rightarrow \ = -i$ طريقة ثانية للحل

ملاحظة مهمة جداً : طريقة ثانية أسهل للتعامل مع قوى i : حيث نقسم أس i على 4 وباقي القسمة هو الأس الجديد لـ i .

1) إذا كان ناتج القسمة على 4 الباقي 0 فإن i^0 وتساوي 1 .

2) إذا كان ناتج القسمة على 4 الباقي 1 فإن i^1 وتساوي i .

3) إذا كان ناتج القسمة على 4 الباقي 2 فإن i^2 وتساوي -1 .

4) إذا كان ناتج القسمة على 4 الباقي 3 فإن i^3 وتساوي $-i$.

اتحقق من فهمي: (صفحة 138)

1) $\sqrt{-27} \times \sqrt{-48}$

$= \sqrt{-1 \times 27} \times \sqrt{-1 \times 48} \quad \Rightarrow = i\sqrt{27} \times i\sqrt{48} \quad \Rightarrow = i\sqrt{9 \times 3} \times i\sqrt{16 \times 3}$

$\Rightarrow = 3i\sqrt{3} \times 4i\sqrt{3} \quad \Rightarrow = 3i \times 4i \times 3 \quad \Rightarrow = 36i^2 \quad \Rightarrow = -36$

2) $\sqrt{-50} \times -4i$

$= \sqrt{-1 \times 50} \times -4i \quad \Rightarrow = \sqrt{-1 \times 25 \times 2} \times -4i \quad \Rightarrow = 5i\sqrt{2} \times -4i$

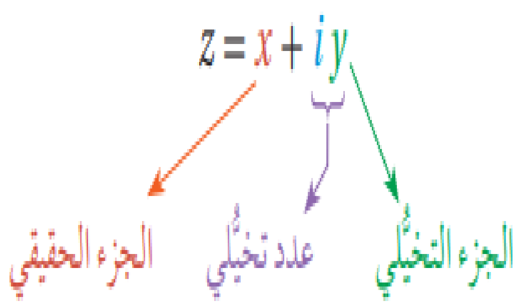
$\Rightarrow = -20\sqrt{2}i^2 \quad \Rightarrow = 20\sqrt{2}$

3) i^{2021}

$= i^{2021} \quad \Rightarrow = i^1 \quad \Rightarrow = i$

الاعداد المركبة

العدد المركب : هو عدد يمكن كتابته في صورة $a + ib$ ، حيث a و b عددان حقيقيان، ويتكون من **جزء حقيقي** هو العدد a ، **وجزء تخيلي** هو العدد b .



العدد المركب
$z = a + ib$

جزء تخيلي	جزء حقيقي
b	a

ملاحظات مهمة:

1) الصورة القياسية للعدد المركب : وهي عند كتابة العدد المركب بصورة $(a + ib)$.

2) الأعداد الحقيقة هي أعداد مركبة بحيث يمكن كتابة أي عدد حقيقي a بالصورة القياسية للعدد المركب $(a + 0i)$.

3) الأعداد التخيلية هي أعداد مركبة بحيث يمكن كتابة أي عدد حقيقي ib بالصورة القياسية للعدد المركب $(0 + ib)$.

4) الأعداد الحقيقة والأعداد التخيلية تمثل مجموعتين جزئيتين من النظام العددي، وإن اتحادهما معاً ينتج عنه مجموعة الأعداد المركبة.

خاصية المساواة للأعداد المركبة:

قاعدة: يتساوى العددان المركبان إذا تساوى جزآهما الحقيقيان، وتساوى جزآهما التخيليان.

بحيث: $a + ib = c + id$ ، فيكون $a = c$ و $b + d$.

ملاحظة مهمة: يتم استخدام قاعدة تساوي الأعداد المركبة لإيجاد قيمة أحد المجاهيل في أي من العددين المركبين في السؤال، بحيث يتم مساواة الجزأين الحقيقين ومن ثم حل المعادلة الناتجة، ومساواة العددين التخيلين ومن ثم حل المعادلة الناتجة.

مثال 3: (صفحة 140)

أجد قيمة x ، وقيمة y الحقيقتين اللتين تجعلان المعادلة : $2x - 6 + (3y + 2)i = 4x + 8i$ صحيحية .

$$2x - 6 + (3y + 2)i = 4x + 8i$$

مساواة الجزئين الحقيقن $2x - 6 = 4x \Rightarrow -6 = 4x - 2x \Rightarrow -6 = 2x \Rightarrow \boxed{x = -3}$

مساواة الجزئين التخيلين $3y + 2 = 8 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow \boxed{y = 2}$

أتحقق من فهمي: (صفحة 140)

أجد قيمة x ، وقيمة y الحقيقتين اللتين تجعلان المعادلة : $x + 5 + (4y - 9)i = 12 - 5i$ صحيحية .

$$x + 5 + (4y - 9)i = 12 - 5i \Rightarrow x + 5 = 12 \Rightarrow x = 12 - 5 \Rightarrow \boxed{x = 7}$$

$4y - 9 = -5 \quad \Rightarrow 4y = -5 + 9 \quad \Rightarrow 4y = 4 \quad \Rightarrow \boxed{y = 1}$

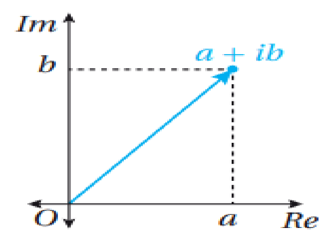
تمثيل العدد المركب ومرافقه بيانياً.

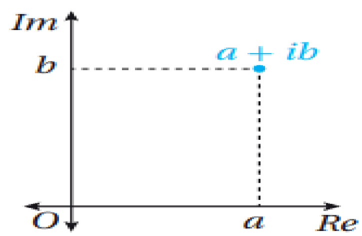
1) يمكن تمثيل العدد المركب $a + ib$ في المستوى الإحداثي في صورة الزوج المركب (a, b) أو صورة المتجه $\langle a, b \rangle$.

2) المحور الأفقي هو المحور الحقيقي ويرمز له (Re) .

3) المحور الرأسي هو المحور التخيلي ويرمز له (Im) .

4) يسمى المستوى الإحداثي في هذه الحالة المستوى المركب أو مستوى آرجاند.





مرافق العدد المركب: ويرمز له بالرمز $\bar{z}$ وهو العدد المركب نفسه مع تغير إشارة الجزء التخيلي

- إذا كان العدد المركب $z = a + ib$ ، مرافق العدد المركب $\bar{z} = a - ib$.
- إذا كان العدد المركب $z = a - ib$ ، مرافق العدد المركب $\bar{z} = a + ib$.

أمثلة:

$z = 2 + 3i \quad \Rightarrow$ مرافق العدد المركب $\bar{z} = 2 - 3i$

$z = 6 - 5i \quad \Rightarrow$ مرافق العدد المركب $\bar{z} = 6 + 5i$

$z = 4 + i \quad \Rightarrow$ مرافق العدد المركب $\bar{z} = 4 - i$

$z = 1 - i \quad \Rightarrow$ مرافق العدد المركب $\bar{z} = 1 + i$

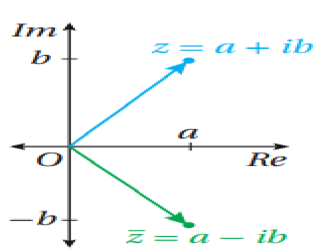
$z = -5i \quad \Rightarrow$ مرافق العدد المركب $\bar{z} = 5i$

$z = 2 \quad \Rightarrow$ مرافق العدد المركب $\bar{z} = 2$

ملاحظة مهمة:

عند تمثيل z ومرافقه بيانياً في المستوى الإحداثي نفسه،

ألاحظ أن كلا منهما هو انعكاس للآخر في المحور



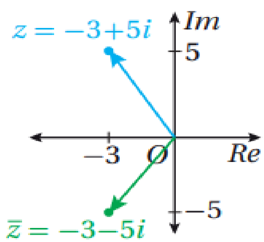
الحقيقي (Re) كما في الشكل المجاور.

مثال 4: (صفحة 141)

أمثل العدد المركب ومرافقه بيانياً في المستوى المركب في كل مما يأتي:

1) $z = -3 + 5i$

$\bar{z} = -3 - 5i$

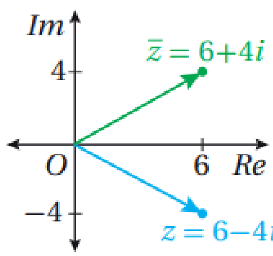


يمثل الزوج المرتب $(-3, 5)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(-3, -5)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

2) $z = 6 - 4i$

$\bar{z} = 6 + 4i$

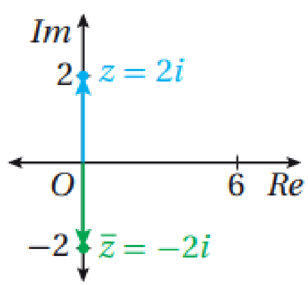


يمثل الزوج المرتب $(6, -4)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(6, 4)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

3) $z = 2i$

$\bar{z} = -2i$



يمثل الزوج المرتب $(0, 2)$ العدد المركب z .

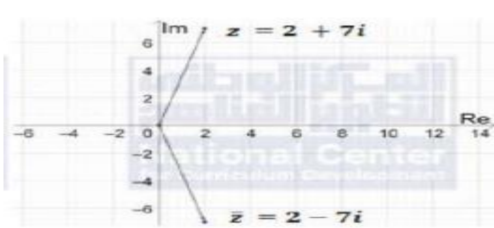
يمثل الزوج المرتب $(0, -2)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

أتحقق من فهمي: (صفحة 141)

أمثل العدد المركب ومرافقه بيانياً في المستوى المركب في كل مما يأتي:

1) $z = 2 + 7i$

$\bar{z} = 2 - 7i$

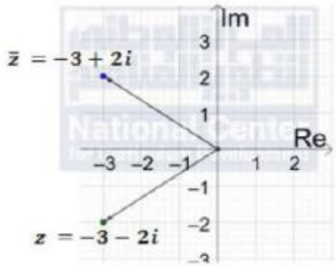


يمثل الزوج المرتب $(2, 7)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(2, -7)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

2) $z = -3 - 2i$

$\bar{z} = -3 + 2i$

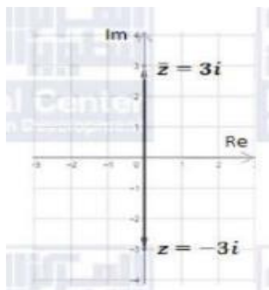


يمثل الزوج المرتب $(-3, -2)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(-3, 2)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

3) $z = -3i$

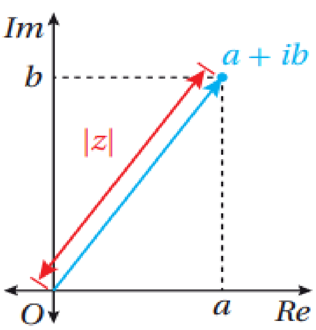
$\bar{z} = 3i$



يمثل الزوج المرتب $(0, -3)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(0, 3)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

مقياس العدد المركب



-هو المسافة بين نقطة الأصل $(0, 0)$ والنقطة (a, b) ،

ويرمز إليه عادة $|z|$ أو الرمز r.

- يتم استعمال قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد مقياس العدد المركب.

$$|z| = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} \implies |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- عند تمثيل العدد المركب في صورة المتجه، فإن مقياس العدد المركب هو طول المتجه.

مثال 5 : (صفحة 142)

أجد مقياس كل عدد مركب مما يأتي:

1) $z = 3 - 4i$

$$|z| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} \implies |z| = \sqrt{9 + 16} \implies |z| = \sqrt{25} \implies |z| = 5$$

2) $z = 12i$

$$|z| = \sqrt{(0)^2 + (12)^2} \implies |z| = \sqrt{0 + 144} \implies |z| = \sqrt{144} \implies |z| = 12$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 142)

أجد مقياس كل عدد مركب مما يأتي:

1) $z = -3 - 6i\sqrt{2}$

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + \left(-6\sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{9 + (36 \times 2)^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{9 + (36 \times 2)}$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{9 + 72} \Rightarrow |z| = \sqrt{81} \Rightarrow |z| = 9$$

2) $z = -2i$

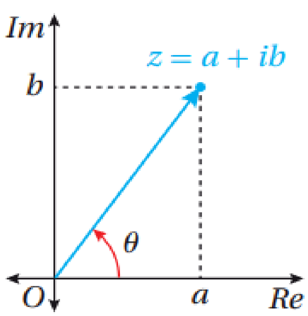
$$|z| = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{4} \Rightarrow |z| = 2$$

3) $z = 4 + \sqrt{-20}$

$$|z| = \sqrt{(4)^2 + \left(\sqrt{-20}\right)^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{16 + 20} \Rightarrow |z| = \sqrt{36} \Rightarrow |z| = 6$$

سعة العدد المركب

- السعة أو (السعة الرئيسية): هي الزاوية θ المحصورة بين المحور الحقيقي الموجب والقطعة المستقيمة التي تصل نقطة الأصل بالنقطة التي تمثل العدد المركب مقيسه بالراديان وتقع في الفترة $-\pi < \theta \leq \pi$ ، ويرمز إليها بالرمز $Arg(z)$.



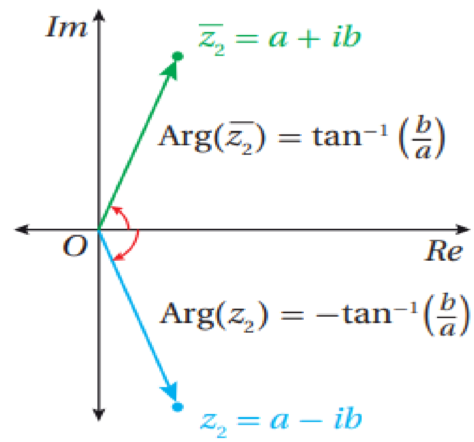
- الربع : الأول   العدد المركب: $z = a + ib$ السعة: $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

- الربع : الثاني   العدد المركب: $z = -a + ib$ السعة: $Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

- الربع : الثالث   العدد المركب: $z = -a - ib$ السعة: $Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$

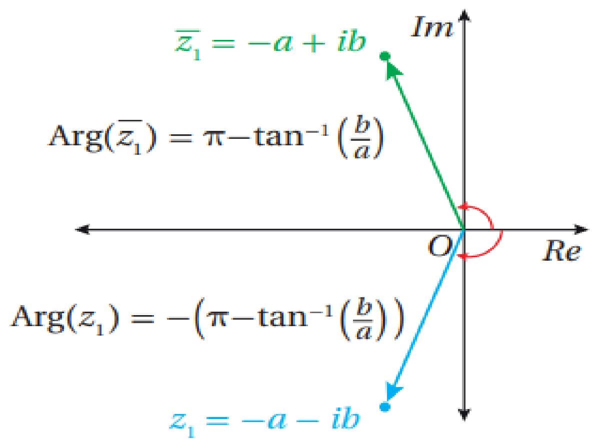
- الربع : الرابع   العدد المركب: $z = a - ib$ السعة: $Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

سعة مرافق العدد المركب (تساوي معكوس سعة العدد المركب)



عدد مُركَّب في الربع الرابع

سعة مرافق العدد المركب (تساوي معكوس سعة العدد المركب)



عدد مُركَّب في الربع الثالث

مثال 6 : (صفحة 145)

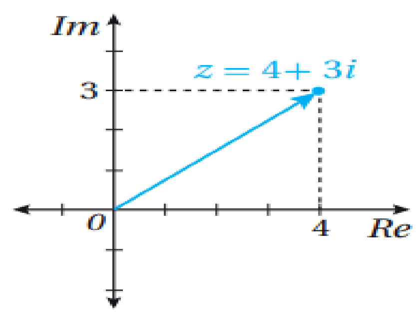
أجد سعة كل من الأعداد المركبة الآتية، مقربا إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين:

1) $z = 4 + 3i$

يقع في الربع الأول

$$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.64$$

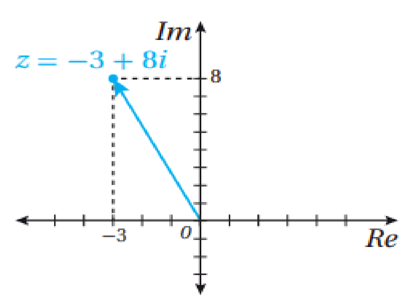


2) $z = -3 + 8i$

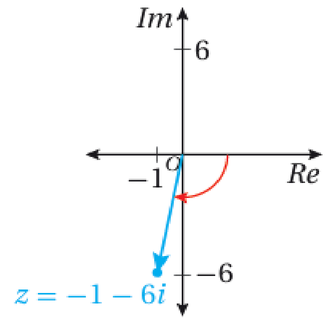
يقع في الربع الثاني

$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right) \approx 1.93$$



3) $z = -1 - 6i$

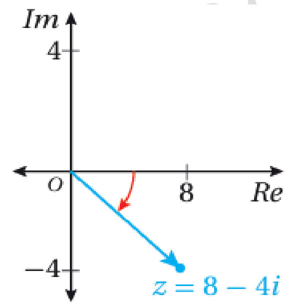


يقع في الربع الثالث

$$Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

$$Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{6}{1}\right)\right) \approx -1.74$$

4) $z = 8 - 4i$



يقع في الربع الرابع

$$Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{4}{8}\right) \approx -0.46$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 146)

أجد سعة كل من الأعداد المركبة الآتية، مقربا إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين:

1) $z = 8 + 2i$

$$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{8}\right) \approx 0.24$$ يقع في الربع الأول

2) $z = -5 + 12i$

$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right) \approx 1.97$$ يقع في الربع الثاني

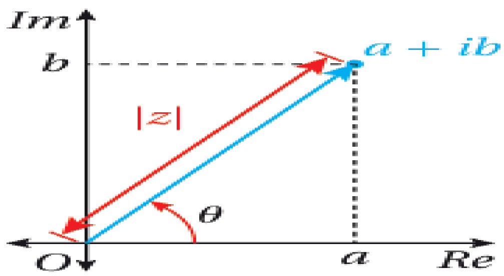
3) $z = -2 - 3i$

$$Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) \approx -2.16$$ يقع في الربع الثالث

4) $z = 8 - 8i\sqrt{3}$

$$Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{8}\right) = -\frac{\pi}{3} \approx -1.05$$ يقع في الربع الرابع

الصورة المثلثية للعدد المركب



يبين الشكل المجاور النقطة (a, b) التي تمثل العدد المركب : $z = a + ib$ ، الذي مقياسه: $|z| = r$ ، وسعته θ .

تحويل الصيغة العادية للعدد المركب $z = a + ib$ إلى الصيغة المثلثية للعدد المركب :
$: z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r\cos\theta \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin\theta = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r\sin\theta$$

$$z = a + ib \Rightarrow z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta \Rightarrow \boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

- خطوات كتابة العدد بالصورة المثلثية:

1) نضع العدد المركب بالصورة العادية $z = a + ib$.
2) نستخرج المقياس $|z| = r$.
3) نستخرج السعة θ .
4) نعوض في القانون $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

ملاحظة مهمة:

1) في هذا النوع من الأسئلة أما أن يعطيك المقياس والسعة بالسؤال فيتم التعويض مباشرة بالقانون.

2) أو أن يعطيك عدد مركب بالصورة العادية $z = a + ib$ ، فيتم استخراج المقياس $|z|$ ، واستخراج السعة θ ، ومن ثم التعويض في القانون.

ملاحظة: يمكن استعمال الصورة المثلثية للعدد المركب لاستخراج السعة والمقياس.

ملاحظة مهمة جداً:

يمكنني تحديد الربع الذي يقع فيه العدد المركب من خلال إشارات الجزء الحقيقي والتخيلي كما هو مبين أدناه:

- الربع : الأول الحقيقي: موجب التخيلي : موجب
- الربع : الثاني الحقيقي: سالب التخيلي : موجب
- الربع : الثالث الحقيقي: سالب التخيلي : سالب
- الربع : الرابع الحقيقي: موجب التخيلي : سالب

ملاحظة مهمة جداً :

إذا كان العدد المركب مكون من جزء حقيقي فقط أو تخيلي فقط، فيمكن استخراج المقياس والسعة بصورة سريعة كما هو مبين بالأمثلة أدناه:

ملاحظة مهمة: المقياس دائما موجب لأنه يمثل مسافة.

- العدد : 2 الحقيقي: موجب التخيلي : 0 المقياس: $|z| = 2$ السعة: $Arg(z) = 0$
- العدد : -2 الحقيقي: سالب التخيلي : 0 المقياس: $|z| = 2$ السعة: $Arg(z) = \pi$
- العدد : $5i$ الحقيقي: 0 التخيلي : موجب المقياس: $|z| = 5$ السعة: $Arg(z) = \frac{\pi}{2}$
- العدد : $-5i$ الحقيقي: 0 التخيلي : سالب المقياس: $|z| = 5$ السعة: $Arg(z) = \frac{3\pi}{2}$

مثال 7 : (صفحة 147)

اكتب العدد المركب z في كل مما يأتي بالصورة المثلثية :

1) $|z| = 4,\ Arg(z) = \frac{\pi}{6}$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \implies z = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

2) $z = -2 - 5i$

$$|z| = \sqrt{(2)^2 + (5)^2} \implies |z| = \sqrt{4 + 25} \implies |z| = \sqrt{29}$$

$$Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right) \implies$$ يقع في الربع الثالث

$$Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right) \approx -1.95$$

$$z = \sqrt{29}(\cos(-1.95) + i\sin(-1.95))$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 148)

اكتب العدد المركب z في كل مما يأتي بالصورة المثلثية :

1) $|z| = 4\sqrt{2},\ Arg(z) = -\frac{3\pi}{6}$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{6}\right)\right)$$

2) $z = -4 - 4i$

$$|z| = \sqrt{(-4)^2 + (4)^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{16 + 16}$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{32} \Rightarrow |z| = \sqrt{16}\,.\sqrt{2} \Rightarrow |z| = 4\sqrt{2}$$

$Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right) \Rightarrow$ يقع في الربع الثالث

$$Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right)\right) \approx -\frac{3\pi}{4}$$

$$z = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

3) $z = 2i$

$$|z| = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} \Rightarrow |z| = 4 \Rightarrow |z| = 2$$

$$Arg(z) = \frac{\pi}{2}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

حسب الملاحظة أعلاه:

العدد : $2i$ الحقيقي: 0 التخيلي : موجب المقياس: $|z| = 2$ السعة: $Arg(z) = \frac{\pi}{2}$

اتدرب وأحل المسائل: صفحة 148

أجد قيمة الجذر الرئيس في كل مما يأتي بدلالة i :

1) $\sqrt{-19}$

$= \sqrt{-1 \times 19} \Rightarrow = \sqrt{-1} \times \sqrt{19} \Rightarrow = i\sqrt{19}$

2) $\sqrt{\frac{-12}{25}}$

$= \sqrt{-1 \times \frac{12}{25}} \Rightarrow = \sqrt{-1} \times \sqrt{\frac{12}{25}} \Rightarrow = \frac{2\sqrt{3}}{5} i$

3) $\sqrt{\frac{-9}{32}}$

$= \sqrt{-1 \times \frac{9}{32}} \Rightarrow = \sqrt{-1} \times \sqrt{\frac{9}{32}} \Rightarrow = \frac{3}{4\sqrt{2}} i$

4) $\sqrt{-53}$

$= \sqrt{-1 \times 53} \Rightarrow = \sqrt{-1} \times \sqrt{53} \Rightarrow = \sqrt{53} i$

أجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة مفترضاً أن $\sqrt{-1} = i$:

5) i^{26}

$= (i^2)^{13} \Rightarrow = (-1)^{13} \Rightarrow = -1$

6) i^{39}

$= (i^2)^{19} \times i \Rightarrow = (-1)^{19} \times i \Rightarrow = (-1) \times i \Rightarrow = -i$

7) $(i)(2i)(-7i)$

$= (2i^2)(-7i) \Rightarrow = (-2)(-7i) \Rightarrow = 14i$

8) $\sqrt{-6} \times \sqrt{-6}$

$= \sqrt{-1 \times 6} \times \sqrt{-1 \times 6} \Rightarrow = i\sqrt{6} \times i\sqrt{6} \Rightarrow = 6i^2 \Rightarrow = -6$

9) $\sqrt{-4} \times \sqrt{-8}$

$= \sqrt{-1 \times 4} \times \sqrt{-1 \times 8} \implies = 2i \times 2\sqrt{2}i \implies = 2i \times 2\sqrt{2}i \implies = 4\sqrt{2}i^2 \implies = -4\sqrt{2}$

10) $2i \times \sqrt{-9}$

$= 2i \times \sqrt{-1 \times 9} \implies = 2i \times 3i \implies = 6i^2 \implies = -6$

اكتب في كل مما يأتي العدد المركب z بالصورة القياسية :

11) $\dfrac{2 + \sqrt{-4}}{2}$

$= \dfrac{2 + 2i}{2} \implies = 1 + i$

12) $\dfrac{8 + \sqrt{-16}}{2}$

$= \dfrac{8 + 4i}{2} \implies = 4 + 2i$

13) $\dfrac{10 - \sqrt{-50}}{5}$

$= \dfrac{10 - 5\sqrt{2}i}{5} \implies = 2 - \sqrt{2}i$

أحدد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لكل من الأعداد المركبة الآتية، ثم أمثلها جميعاً في المستوى المركب نفسه:

14) $z = 2 + 15i$

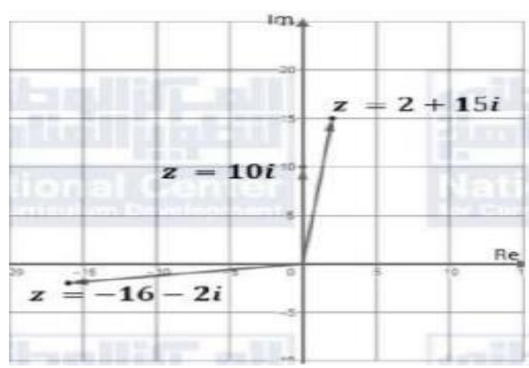
$Re(z) = 2 \; , Im(z) = 15$

15) $z = 10i$

$Re(z) = 0 \; , Im(z) = 10$

16) $z = -16 - 2i$

$Re(z) = -16 \; , Im(z) = -2$



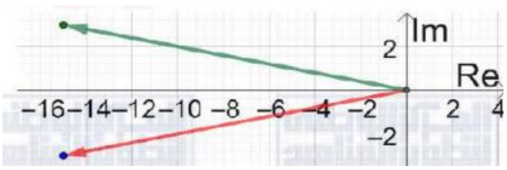
أمثل العدد المركب ومرافقه بيانياً في المستوى المركب في كل مما يأتي:

17) $z = -15 + 3i$

$\bar{z} = -15 - 3i$

يمثل الزوج المرتب $(-15, 3)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(-15, -3)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

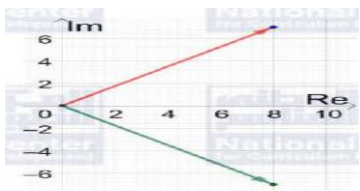


18) $z = 8 - 7i$

$\bar{z} = 8 + 7i$

يمثل الزوج المرتب $(8, -7)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(8, 7)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

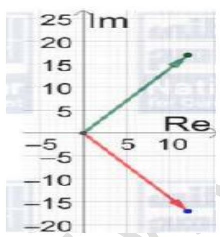


19) $z = 12 + 17i$

$\bar{z} = 12 - 17i$

يمثل الزوج المرتب $(12, 17)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(12, -17)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

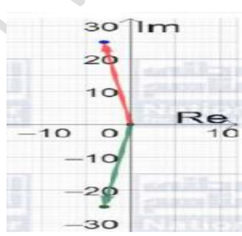


20) $z = -3 - 25i$

$\bar{z} = -3 + 25i$

يمثل الزوج المرتب $(-3, -25)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(-3, 25)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

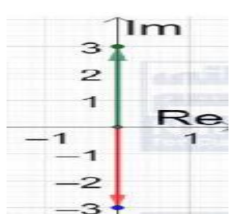


21) $3i$

$\bar{z} = -3i$

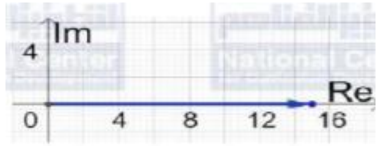
يمثل الزوج المرتب $(0, 3)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(0, -3)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.



22) 15

$\bar{z} = 15$



يمثل الزوج المرتب $(15, 0)$ العدد المركب z .

يمثل الزوج المرتب $(15, 0)$ مرافق العدد المركب $\bar{z}$.

أجد $|z|$ و $\bar{z}$ لكل مما يأتي :

23) $z = -5 + 5i$

$\bar{z} = -5 - 5i$

$|z| = \sqrt{(-5)^2 + (5)^2} \implies |z| = \sqrt{25 + 25} \implies |z| = \sqrt{50} \implies |z| = 5\sqrt{2}$

24) $z = 3 + 3i\sqrt{3}$

$\bar{z} = 3 - 3i\sqrt{3}$

$|z| = \sqrt{(3)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} \implies |z| = \sqrt{9 + 27} \implies |z| = 6$

25) $z = 6 - 8i$

$\bar{z} = 6 + 8i$

$|z| = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} \implies |z| = \sqrt{36 + 64} \implies |z| = 10$

أجد قيم كل من x و y الحقيقية التي تجعل كلا من المعادلات الآتية صحيحية :

26) $x^2 - 1 + i(2y - 5) = 8 + 9i$

$x^2 - 1 = 8 \implies x^2 = 9 \implies \boxed{x = \pm 3}$

$2y - 5 = 9 \implies 2y = 14 \implies \boxed{y = 7}$

27) $2x + 3y + i(x - 2y) = 8 - 3i$

$2x + 3y = 8 \ldots\ldots (1)$

$x - 2y = -3 \quad \Longrightarrow \quad x = -3 + 2y \ldots\ldots (2)$

$2(-3 + 2y) + 3y = 8 \ldots\ldots (1)$

$-6 + 4y + 3y = 8 \quad \Longrightarrow \quad -6 + 7y = 8 \quad \Longrightarrow \quad 7y = 14 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = 2}$

$x = -3 + 2(2) \ldots\ldots (2)$

$x = -3 + 4 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = 1}$

28) $y - 3 + i(3x + 2) = 9 + i(y - 4)$

$y - 3 = 9 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = 12}$

$3x + 2 = y - 4 \quad \Longrightarrow \quad 3x = y - 6$

$3x = 12 - 6 \quad \Longrightarrow \quad 3x = 6 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = 2}$

29) $i(2x - 5y) + 3x + 5y = 7 + 3i$

$2x - 5y = 3 \quad \Longrightarrow \quad 2x = 3 + 5y \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}y} \ldots\ldots\ldots (1)$

$3x + 5y = 7 \ldots\ldots (2) \quad \Longrightarrow \quad 3\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}y\right) + 5y = 7$

$\Longrightarrow \quad \frac{9}{2} + \frac{15}{2}y + 5y = 7 \quad \Longrightarrow \quad \frac{15}{2}y + 5y = 7 - \frac{9}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = \frac{1}{5}}$

$x = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{5}\right) \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{4}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = 2}$

أجد سعة كل من الأعداد المركبة الآتية، مقرباً إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين:

30) 1

$z = 1$

$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) \quad \Longrightarrow \quad Arg(z) = 0$

31) $3i$

$z = 3i$

$$Arg(z) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow Arg(z) \approx 1.57$$

32) $-5 - 5i$

$$Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{5}\right)\right) \Rightarrow Arg(z) = -\frac{3\pi}{4} \Rightarrow Arg(z) \approx -2.36$$

33) $1 - i\sqrt{3}$

$$Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) \Rightarrow Arg(z) = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow Arg(z) \approx -1.05$$

34) $6\sqrt{3} + 6i$

$$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{6}{6\sqrt{3}}\right) \Rightarrow Arg(z) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow Arg(z) \approx 0.52$$

35) $3 - 4i$

$$Arg(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \Rightarrow Arg(z) \approx -0.93$$

36) $-12 + 5i$

$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) \Rightarrow Arg(z) \approx 2.75$$

37) $-58 - 93i$

$$Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{93}{58}\right)\right) \Rightarrow Arg(z) \approx -2.13$$

38) $2i - 4$

$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{4}\right) \Rightarrow Arg(z) \approx 2.68$$

اكتب في كل مما يأتي العدد المركب z بالصورة المثلثية :

39) $|z| = 2 \;, Arg\, z = \frac{\pi}{2}$

$r = |z| = 2 \qquad , \; Arg(z) = \frac{\pi}{2}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \;\Rightarrow\; z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

40) $|z| = 3 \;, Arg\, z = \frac{\pi}{3}$

$r = |z| = 3 \qquad , Arg(z) = \frac{\pi}{3}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \;\Rightarrow\; z = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

41) $|z| = 7 \;, Arg\, z = \frac{5\pi}{6}$

$r = |z| = 7 \qquad , Arg(z) = \frac{5\pi}{6}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \;\Rightarrow\; z = 7\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

42) $|z| = 1 \;, Arg\, z = \frac{\pi}{4}$

$r = |z| = 1 \qquad , Arg(z) = \frac{\pi}{4}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \;\Rightarrow z = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \;\Rightarrow\; z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

43) $z = 6$

$r = |z| = \sqrt{(6)^2 + (0)^2} \;\Rightarrow\; r = |z| = \sqrt{36} \;\Rightarrow\; r = |z| = 6$

$Arg(z) = 0$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \;\Rightarrow\; z = 6(\cos(0) + i\sin(0))$

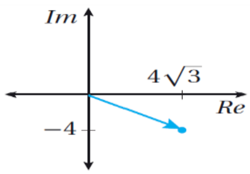
44) $z = 1 + i$

$r = |z| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} \;\Rightarrow\; r = |z| = \sqrt{2}$

$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) \;\Rightarrow\; Arg(z) = \frac{\pi}{4}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \;\Rightarrow\; z = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

45) يبين الشكل المجاور التمثيل البياني للعدد المركب z_1 في المستوى المركب ، أجد العدد المركب z_2 الذي يحقق ما يأتي :



$$|z_2| = 40 \quad and \quad Arg\, z_2 = Arg\, \overline{z_1}$$

$$z_1 = 4\sqrt{3} - 4i \implies \overline{z_1} = 4\sqrt{3} + 4i$$

$$Arg\, z_2 = Arg\, \overline{z_1} \implies Arg\, \overline{z_1} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{4\sqrt{3}}\right) \implies Arg\, \overline{z_1} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \implies Arg\, \overline{z_1} = \frac{\pi}{6}$$

$$z_2 = r(\cos\theta + i\sin\theta) \implies z_2 = 40(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

$$z_2 = 40\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \implies z_2 = 20(\sqrt{3} + i) \implies z_2 = 20\sqrt{3} + 20i$$

بافتراض أن : $z = a + bi$ ، حيث $|z| = 10\sqrt{2}$ وأن: $Arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

46) اكتب العدد المركب z بالصورة القياسية .

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \implies z = 10\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$\implies z = 10\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right)\right) \implies z = 10\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\implies z = 10\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \implies z = 10(-1 + i) \implies z = -10 + 10i$$

47) أجد قياس الزاوية المحصورة بين z و $\bar{z}$.

بما أن z في الربع الثاني ،إذن $\bar{z}$ في الربع الثالث

فيكون قياس الزاوية الصغرى بينهما هو $\frac{\pi}{2}$

إذا كان : $z = -8 + 8i$ فأجد كلا مما يأتي :

48) $|z|$

$$z = -8 + 8i$$

$$|z| = \sqrt{(-8)^2 + (8)^2} \implies |z| = \sqrt{64 + 64} \implies |z| = 8\sqrt{2}$$

49) $Arg\,(z)$

$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{8}\right) \implies Arg(z) = \pi - \tan^{-1}(1) \implies Arg(z) = \frac{3\pi}{4}$$

50) $|\overline{z}|$

$$|\overline{z}| = |z| = 8\sqrt{2}$$

51) $Arg\ (\overline{z})$

$$\overline{z} = -8 - 8i$$

$$Arg(\overline{z}) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{8}\right)\right) \quad \Longrightarrow \quad Arg(\overline{z}) = -\frac{3\pi}{4}$$

أو نكتبه مباشرة:

$$Arg(\overline{z}) = -Arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$$

مهارات التفكير العليا:

تبرير إذا كان : $Arg\ (5+2i) = \alpha$ ، فأجد سعة كل مما يأتي بدلالة α، مبرراً إجابتي :

52) $-5-2i$

$$Arg\ (5+2i) = \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$Arg\ (-5-2i) \quad \Longrightarrow = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)\right) \Longrightarrow = -(\pi - \alpha) \Longrightarrow = -\pi + \alpha$$

53) $5-2i$

$$Arg\ (5-2i) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \quad \Longrightarrow \quad Arg\ (5-2i) = -\alpha$$

54) $-5+2i$

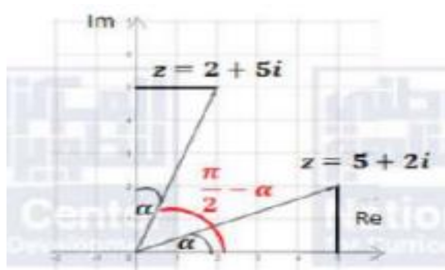
$$Arg\ (-5+2i) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \quad \Longrightarrow \quad Arg\ (-5+2i) = \pi - \alpha$$

55) $2+5i$

$$Arg\ (2+5i) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$Arg\ (2+5i) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$Arg\ (2+5i) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$



56) $-2+5i$

$$Arg\,(-2+5i)=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\;\Rightarrow=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\;\Rightarrow=\frac{\pi}{2}+\alpha$$

57) تحد : إذا كان : $z=5+im$ ، حيث : $|z|=6$ و $0<Arg(z)<\frac{\pi}{2}$ ، فأجد قيمة العدد الحقيقي m .

$$z=5+im\quad,\quad |z|=6\quad,\quad 0<Arg(z)<\frac{\pi}{2}$$

$$|z|=\sqrt{(5)^2+(m)^2}\Rightarrow |z|=\sqrt{25+m^2}\Rightarrow \sqrt{25+m^2}=6$$

$$\Rightarrow 25+m^2=36\Rightarrow m^2=11\Rightarrow m=\pm\sqrt{11}$$

لكن $0<Arg(z)<\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أن z في الربع الأول ، ومنه $m=\sqrt{11}$

58) تبرير : إذا كان : $z=5+3ik$, ، حيث $|z|=13$ فأجد جميع قيم k الحقيقية الممكنة ، مبرراً إجابتي

$$z=5+3ik\quad,\quad |z|=13$$

$$|z|=\sqrt{(5)^2+(3k)^2}\Rightarrow |z|=\sqrt{25+9k^2}\Rightarrow \sqrt{25+9k^2}=13$$

$$\Rightarrow 25+9k^2=169\Rightarrow 9k^2=144\Rightarrow k^2=16\Rightarrow k=\pm4$$

تحد : بافتراض أن z_1 عدد مركب ، مقياسه : $4\sqrt{5}$ ، وسعته $\theta=\tan^{-1}(2)$:

59) اكتب z_1 بالصورة القياسية .

$$|z_1|=4\sqrt{5}\quad,Arg\,(z_1)=\tan^{-1}(2)=\theta$$

نستنتج أن z_1 تقع في الربع الأول ، ففي الأرباع الأخرى تكون الإشارة سالبة أو تحتوي على π .

$$\tan\theta=2$$

60) إذا كان : $z_2=7-3i\,,z_3=-5+i$ ، فأجد مساحة المثلث الذي رؤوسه : $z_1\,,z_2\,,z_3$ في المستوى المركب .

$$\tan\theta=\theta$$

الدرس الثاني

العمليات على الأعداد المركبة

مخطط الدرس الثاني

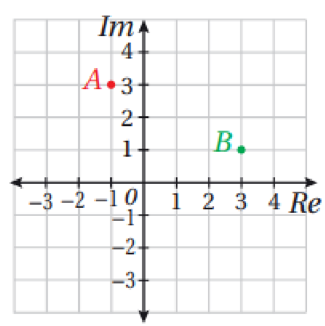
العمليات على الأعداد المركبة

- جمع الأعداد المركبة وطرحها
- ضرب الأعداد المركبة
- قسمة الأعداد المركبة
- ضرب الأعداد المركبة المكتوبة بالصورة المثلثية وقسمتها
- الجذر التربيعي للعدد المركب
- الجذور المركبة لمعادلات كثيرات الحدود

ملاحظة 1): العمليات الحسابية الأربعة هي: (الجمع، الطرح، الضرب، والقسمة).

مسألة اليوم: (صفحة 151)

معتمداً المستوى المركب المجاور الذي يبين العددين المركبين A و B ، أجد السعة والمقياس للعدد المركب AB .



$$A = -1 + 3i \quad , B = 3 + i$$

$$AB = (-1 + 3i)(3 + i) \quad \Rightarrow \quad AB = -3 - i + 9i + 3i^2$$

$$\Rightarrow AB = -3 - i + 9i - 3 \quad \Rightarrow \quad AB = -6 + 8i$$

$$|AB| = \sqrt{(-6)^2 + (8)^2} \quad \Rightarrow \quad |AB| = \sqrt{36 + 64}$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{100} \quad \Rightarrow \quad |AB| = 10$$

$$Arg(AB) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right) \quad \Rightarrow \quad Arg(AB) \approx 2.21$$

جمع الأعداد المركبة وطرحها

ملاحظة1): لجمع عددين مركبين:

(الحقيقي من العدد الأول+ الحقيقي من العدد الثاني) + (التخيلي من العدد الأول+ التخيلي من العدد الثاني)

$z_1 = a + ib \quad , \quad z_2 = x + iy$

$z_1 + z_2 = (a + x) + i(b + y)$

ملاحظة2): لطرح عددين مركبين:

(الحقيقي من العدد الأول - الحقيقي من العدد الثاني) + (التخيلي من العدد الأول - التخيلي من العدد الثاني)

$z_1 = a + ib \quad , \quad z_2 = x + iy$

$z_1 - z_2 = (a - x) + i(b - y)$

ملاحظة 3):يحقق جمع الأعداد المركبة خاصية التبديل، فإذا كان z و w عددين مركبين، فإن:

$z + w = w + z$

مثال 1: (صفحة 151)

أجد ناتج كل مما يأتي:

1) $(5 + 7i) + (-9 - 4i)$

$= 5 + 7i - 9 - 4i \quad \Longrightarrow = (5 - 9) + (7 - 4)i \quad \Longrightarrow = -4 + 3i$

2) $(8 - 5i) - (2 - 11i)$

$= 8 - 5i - 2 + 11i \quad \Longrightarrow = (8 - 2) + (-5 + 11)i \quad \Longrightarrow = 6 + 6i$

أتحقق من فهمي: (صفحة 152)

أجد ناتج كل مما يأتي:

1) $(7 + 8i) + (-9 + 14i)$

$= 7 + 8i - 9 + 14i \quad \Longrightarrow = (7 - 9) + (8 + 14)i \quad \Longrightarrow = -2 + 22i$

2) $(11 + 9i) - (4 - 6i)$

$= 11 + 9i - 4 + 6i \quad \Longrightarrow = (11 - 4) + (9 + 6)i \quad \Longrightarrow = 7 + 15i$

ضرب الأعداد المركبة:

ملاحظة 1) : يتم ضرب الأعداد المركبة بطريقة مشابهة لعملية ضرب المقادير الجبرية، باستعمال خاصية التوزيع.

ملاحظة 2) : بعد إتمام عملية الضرب، يوضع $\boxed{-1}$ بدل من $\boxed{i^2}$ أينما وجدت.

ملاحظة 4) : عند ضرب عدد مركب بمرافقه ، فإن ناتج الضرب هو عدد حقيقي.

ملاحظة مهمة:

مرافق العدد المركب : العدد المركب نفسه مع تغير إشارة العدد التخيلي فقط ويرمز له $\bar{c}$.

ملاحظة مهمة: يوجد طريقة سريعة لضرب العدد بمرافقه.

$$(a+ib)\,(a+ib) \Rightarrow = (a)^2+(b)^2$$

مثال 2: (صفحة 152)

أجد ناتج كل مما يأتي، ثم اكتبه بالصورة القياسية:

1) $5i(3-7i)$

$= 15i-35i^2 \quad \Rightarrow = 15i+35 \quad \Rightarrow = 35+15i$

2) $(6+2i)(7-3i)$

$= 42-18i+14i-6i^2 \quad \Rightarrow = 42-18i+14i+6$

$\Rightarrow = (42+6)+(-18+14)i \quad \Rightarrow = 48-4i$

3) $(5+4i)(5-4i)$

$= 25-20i+20i-16i^2 \quad \Rightarrow = 25-20i+20i+16 \quad \Rightarrow = 41$

ضرب العدد بمرافقه $\Rightarrow \; = \; (5)^2+(4)^2 \quad \Rightarrow 25+16=41$

أتحقق من فهمي: (صفحة 153)

أجد ناتج كل مما يأتي، ثم اكتبه بالصورة القياسية:

1) $-3i(4-5i)$

$= -12i + 15i^2 \quad \Rightarrow = -12i - 15 \quad \Rightarrow = -15 - 12i$

2) $(5+4i)(7-4i)$

$= 35 - 20i + 28i - 16i^2 \quad \Rightarrow = 51 + 8i$

3) $(3+6i)^2$

$= 9 + 36i + 36i^2 \quad \Rightarrow = 9 + 36i - 36 \quad \Rightarrow = -27 + 36i$

قسمة الأعداد المركبة:

ملاحظة مهمة: عند قسمة عددين مركبين يجب ان يكون البسط والمقام بالصيغة العادية للعدد المركب، ثم نضرب البسط والمقام في مرافق المقام وذلك ليصبح المقام عدد حقيقي.

مثال 3: (صفحة 153)

أجد ناتج كل مما يأتي، ثم اكتبه بالصورة القياسية:

1) $\dfrac{8-5\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$

$= \dfrac{8-5i}{3-2i} \times \dfrac{3+2i}{3+2i} \quad \Rightarrow = \dfrac{24+16i-15i-10i^2}{(3)^2+(2)^2}$

$\Rightarrow = \dfrac{24+16i-15i+10}{13} \quad \Rightarrow = \dfrac{34+i}{13} \quad \Rightarrow = \dfrac{34}{13} + \dfrac{1}{13}i$

2) $\dfrac{3+5i}{2i}$

$= \dfrac{3+5i}{2i} \times \dfrac{i}{i} \quad \Rightarrow = \dfrac{3i+5i^2}{2i^2} \quad \Rightarrow = \dfrac{3i-5}{-2} \quad \Rightarrow = -\dfrac{3}{2}i + \dfrac{5}{2} \quad \Rightarrow = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}i$

أتحقق من فهمي: (صفحة 154)

أجد ناتج كل مما يأتي، ثم اكتبه بالصورة القياسية:

1) $\dfrac{-4+3i}{1+i}$

$$= \frac{-4+3i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} \quad \Rightarrow = \frac{-4+4i+3i-3i^2}{(1)^2+(1)^2}$$

$$\Rightarrow = \frac{-4+4i+3i+3}{2} \quad \Rightarrow = \frac{-1+7i}{2} \quad \Rightarrow = -\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i$$

2) $\dfrac{2-6i}{-3i}$

$$= \frac{2-6i}{-3i} \times \frac{i}{i} \quad \Rightarrow = \frac{2i-6i^2}{-3i^2} \quad \Rightarrow = \frac{2i+6}{3} \quad \Rightarrow = \frac{2}{3}i+\frac{6}{3} \quad \Rightarrow = 2+\frac{2}{3}i$$

3) $\dfrac{7i}{4-4i}$

$$= \frac{7i}{4-4i} \times \frac{4+4i}{4+4i} \quad \Rightarrow = \frac{28i+28i^2}{(4)^2+(4)^2} \quad \Rightarrow = \frac{28i-28}{32}$$

$$\Rightarrow = \frac{28}{32}i - \frac{28}{32} \quad \Rightarrow = \frac{7}{8}i - \frac{7}{8} \quad \Rightarrow = -\frac{7}{8}+\frac{7}{8}i$$

ضرب الأعداد المركبة المكتوبة بالصورة المثلثية وقسمتها

قاعدة ضرب الأعداد المركبة بالصورة المثلثية:

إذا كان : $\boxed{z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}$ ، وكان : $\boxed{z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$

فإن : $\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))}$

ملاحظة: إذا كان : $\boxed{-\pi < \theta_1+\theta_2 \le \pi}$ ، فإن : $\boxed{Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)}$

قاعدة قسمة الأعداد المركبة بالصورة المثلثية:

إذا كان : $\boxed{z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}$ ، وكان : $\boxed{z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$

فإن : $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))}$

ملاحظة: إذا كان : $\boxed{-\pi < \theta_1 - \theta_2 \le \pi}$ ، وكان $z_2 \neq 0$ فإن : $\boxed{Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)}$

ملاحظة مهمة: تقع السعة الرئيسة في الفترة $\boxed{-\pi < \theta_1 - \theta_2 \le \pi}$ ، ويمكن تحديدها بطرح $2\pi n$ ، أو إضافته إلى الزاوية الناتجة من الجمع أو الطرح.

مثال 4 : (صفحة 155)

إذا كان : $z_1 = 10(\cos(-\frac{2\pi}{7}) + i\sin(-\frac{2\pi}{7}))$ ، وكان : $z_2 = 2(\cos(\frac{6\pi}{7}) + i\sin(\frac{6\pi}{7}))$ ، فأجد ناتج كل مما يأتي بالصورة المثلثية :

1) $z_1 z_2$

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

$$z_1z_2 = 10\times 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}\right)\right)$$

$$z_1z_2 = 20\left(\cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7}\right)$$

2) $\frac{z_1}{z_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)) \Longrightarrow = \frac{10}{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{7}-\frac{6\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{7}-\frac{6\pi}{7}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow = 5\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\right) \quad \Longrightarrow = 5\left(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}+2\pi\right) + i\sin\left(-\frac{8\pi}{7}+2\pi\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 5\left(\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}\right)$$

أتحقق من فهمي: (صفحة 156)

أجد ناتج كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

1) $6(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) \times 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)) \Rightarrow = 6\times 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\Rightarrow = 12\left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right) \Rightarrow z_1 z_2 = 12\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

2) $6(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})) \div 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)) \Rightarrow = \frac{6}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$\Rightarrow = 5\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right) \Rightarrow = 5\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi\right)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 5\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

الجذر التربيعي للعدد المركب:

ملاحظة مهمة: يوجد لكل عدد مركب جذران تربيعيان، وهما عددان مركبان أيضاً ، ويتم إيجادهما بالخطوات التالية:

1) نفرض أن جذري العدد المركب يساوي $\sqrt{z} = x + yi$.

2) نربع الطرفين ونحلل القوس المرفوع لتربيع.

3) ثم المقارنة بين الأجزاء الحقيقة والأجزاء التخيلية في طرفي المعادلة.

ملاحظة مهمة : يتساوى العددان المركبان : $\boxed{z_1 = a + bi}$ ، و $\boxed{z_2 = c + di}$ ، إذاً
وفقط إذا كان : $\boxed{b = d}$ ، و $\boxed{a = c}$.

مثال 5: (صفحة 156)

أجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $z = 21 - 20i$

$$\sqrt{z} = x + yi \quad \Rightarrow \quad z = (x + yi)^2$$

$$21 - 20i = (x + yi)^2 \quad \Rightarrow \quad 21 - 20i = x^2 + 2xyi + y^2 i^2$$

$$\Rightarrow \quad 21 - 20i = x^2 - y^2 + 2xyi \quad \Rightarrow \quad 2xy = -20 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-20}{2x}$$

$$y = -\frac{10}{x} \dots \dots \dots (1)$$

$$x^2 - y^2 = 21 \dots \dots \dots \dots (2)$$

$$x^2 - \left(-\frac{10}{x}\right)^2 = 21 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{100}{x^2} = 21 \quad \Rightarrow \quad \left[x^2 - \frac{100}{x^2} = 21\right] \times x^2$$

$$\Rightarrow \quad x^4 - 100 = 21x^2 \quad \Rightarrow \quad x^4 - 21x^2 - 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2 - 25)(x^2 + 4) = 0$$

$$x^2 - 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \pm 5}$$

$$y = \frac{-10}{5} \quad \Rightarrow \quad y = -2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-10}{-5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 2}$$

عندما $x = 5$ فإن $y = -2$ ، وعندما $x = -5$ فإن $y = 2$.

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = 21 - 20i$ هما : $5 - 2i$ و $-5 + 2i$

أتحقق من فهمي: (صفحة 157)

أجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب لكل من الأعداد المركبة الآتية:

1) $-5 - 12i$

$$\sqrt{z} = x + yi \quad \Rightarrow \quad z = (x + yi)^2$$

$$-5 - 12i = (x + yi)^2 \quad \Rightarrow \quad -5 - 12i = x^2 + 2xyi + y^2 i^2$$

$$\Rightarrow \quad -5 - 12i = x^2 - y^2 + 2xyi \quad \Rightarrow \quad 2xy = -12 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{-12}{2x}}$$

$$y = -\frac{6}{x} \dots \dots \dots (1)$$

$$x^2 - y^2 = -5 \dots \dots \dots \dots (2)$$

$$x^2 - \left(-\frac{6}{x}\right)^2 = -5 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{36}{x^2} = -5 \quad \Rightarrow \quad \left[x^2 - \frac{36}{x^2} = -5\right] \times x^2$$

$$\Rightarrow \quad x^4 - 36 = -5x^2 \quad \Rightarrow x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2 + 9)(x^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \pm 2}$$

$$y = -\frac{6}{x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-6}{2} \quad \Rightarrow y = -3 \quad \Rightarrow y = \frac{-6}{-2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 3}$$

عندما $x = 2$ فإن $y = -3$ ، وعندما $x = -2$ فإن $y = 3$.

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = -5 - 12i$ هما : $2 - 3i$ و $-2 + 3i$

2) $-9i$

$\sqrt{z} = x + yi \quad \Rightarrow \quad z = (x + yi)^2$

$-9i = (x + yi)^2 \quad \Rightarrow \quad -9i = x^2 + 2xyi + y^2 i^2$

$\Rightarrow -9i = x^2 - y^2 + 2xyi \quad \Rightarrow \quad 2xy = -9$

$$y = -\frac{9}{2x} \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$x^2 - y^2 = 0 \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

$$x^2 - \left(-\frac{9}{2x}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{81}{4x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[x^2 - \frac{81}{4x^2} = 0\right] \times 4x^2$$

$$\Rightarrow 4x^4 - 81 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2x^2 + 9)(2x^2 - 9) = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}}$$

$$y = -\frac{9}{2x} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{9}{2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = -\frac{9}{3\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{9}{2\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{9}{3\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{3}{\sqrt{2}}}$$

عندما $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ فإن $y = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ ، وعندما $x = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ فإن $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = -5 - 12i$ هما : $\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i$ و $-\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i$

$3)\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{z}=x+yi \quad \Rightarrow \quad z=(x+yi)^2$

$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=(x+yi)^2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+2xyi+y^2i^2$

$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=x^2-y^2+2xyi \quad \Rightarrow \quad 2xy=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y=\frac{\sqrt{3}}{4x} \ldots\ldots\ldots (1)$

$x^2-y^2=-\frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$x^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{4x}\right)^2=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2-\frac{3}{16x^2}=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \left[x^2-\frac{3}{16x^2}=-\frac{1}{2}\right]\times 16x^2$

$16x^4-3=-8x^2 \quad \Rightarrow \quad 16x^4+8x^2-3=0 \quad \Rightarrow (4x^2-1)(4x^2+3)=0$

$\Rightarrow \quad 4x^2-1=0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2=1 \quad \Rightarrow \quad x^2=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=\pm\frac{1}{2}}$

$y=\frac{\sqrt{3}}{4x} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{\sqrt{3}}{4\left(\frac{1}{2}\right)} \quad \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{\sqrt{3}}{4\left(-\frac{1}{2}\right)} \quad \Rightarrow \boxed{y=-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

عندما $x=\frac{1}{2}$ فإن $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، وعندما $x=-\frac{1}{2}$ فإن $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ هما : $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

الجذور المركبة لمعادلات كثيرات الحدود:

ملاحظة مهمة : يتم حل بعض المعادلات التربيعية في صورة $ax^2 + bx + c = 0$ ،
حيث : a, b, c ، أعداد حقيقية ، باستعمال القانون العام : $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ملاحظة مهمة : يتم استخدام المميز $\triangle = b^2 - 4ac$ ، لتحديد إذا كان للمعادلة جذران تربيعيان أم لا ، وإذا كان الجذران متساويان أم لا كما هو مبين في الجدول الأتي:

جذرا المعادلة التربيعية	$\triangle = b^2 - 4ac$
حقيقيان مختلفان	$\triangle > 0$
حقيقيان متساويان	$\triangle = 0$
لا توجد جذور حقيقية	$\triangle < 0$

ملاحظة مهمة : في حالة إذا كان المميز سالباً ، وبعد دراسة وحدة الأعداد المركبة ، فإن للمعادلة جذرين مركبين مترافقين من تعويض القيم : a, b, c ، في القانون العام. ليصبح الجدول على النحو الآتي :

جذرا المعادلة التربيعية	$\triangle = b^2 - 4ac$
حقيقيان مختلفان	$\triangle > 0$
حقيقيان متساويان	$\triangle = 0$
مُركّبان مُترافِقان في صورة: $f \pm ig, g \neq 0$	$\triangle < 0$

ملاحظة مهمة : يوجد جذر مركب واحد على الأقل لأي معادلة كثير حدود درجتها أكبر من الصفر ، وهي ما تسمى النظرية الاساية في الجبر.

ملاحظة مهمة : درجة معادلة كثير الحدود هي أعلى أسّ للمتغير فيها .

ملاحظة مهمة : لأي معادلة كثير حدود من الدرجة n ، حيث $n \neq 0$ ، يوجد n من الجذور المركبة، بما في ذلك الجذور المكررة.

أمثلة :

$z^4 - 4z^2 + z^3 = 0$ لها أربع جذور

$5z^2 - z^3 + z - 19 = 0$ لها ثلاث جذور

$z^6 + 2z^5 - z + 7 = 0$ لها ستة جذور

ملاحظة مهمة : يتم تطبيق الجدول المجاور على كثيرات الحدود ذات المعاملات الحقيقية فقط.

درجة معادلة كثير الحدود	عدد الجذور	أنواع الجذور المُمكِنة
1	1	جذر حقيقي واحد.
2	2	جذران حقيقيان، أو جذران مُركّبان مُترافقان.
3	3	ثلاثة جذور حقيقية، أو جذر حقيقي واحد وجذران مُركّبان مُترافقان.
4	4	أربعة جذور حقيقية، أو جذران حقيقيان وجذران مُركّبان مُترافقان، أو أربعة جذور مُركّبة (زوجان من الجذور المُركّبة المُترافقة).
...	...	...

ملاحظة مهمة : يمكن استعمال نظرية الباقي والعوامل لتحليل كثير الحدود، وحل معادلته .

مثال 6: (صفحة 160)

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلة : $z^3 + 4z^2 + z = 26$

$$z^3 + 4z^2 + z = 26 \quad \Longrightarrow \quad z^3 + 4z^2 + z - 26 = 0$$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}}$: ± 26 ، ± 13 ، ± 2 ، ± 1 .

بالتعويض ، نجد أن العدد 2 يحقق هذه المعادلة :

$$2^3 + 4(2)^2 + 2 - 26 = 0$$

إذن أحد الجذور هو $\boxed{z_1 = 2}$ ، لإيجاد باقي الجذور نقسم :

	z^3	z^2	z	الثابت
$\boxed{2}$	1	4	1	-26
	0	2	12	26
	1	6	13	0

العامل الآخر هو

$$z^2 + 6z + 13 = 0$$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة:

$a = 1 \qquad b = 6 \qquad c = 13$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)} \Rightarrow = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2}$$

$$\Rightarrow = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} \Rightarrow = \frac{-6 \pm 4i}{2} \Rightarrow z = \frac{-6}{2} \pm \frac{4i}{2} \Rightarrow \boxed{z_2 = -3 + 2i} \Leftrightarrow \boxed{z_3 = -3 - 2i}$$

إذن لهذه المعادلة الجذور 3 جذور هي : $\{z_1 = 2 \quad , z_2 = -3 + 2i \quad , z_3 = -3 - 2i\}$

أتحقق من فهمي: (صفحة 161)

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلة : $z^3 - z^2 - 7z + 15 = 0$

$$z^3 - z^2 - 7z + 15 = 0$$

الأصفار النسبية المحتملة = $\frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}}$: ± 15 ، ± 5 ، ± 3 ، ± 1 .

بالتعويض ، نجد أن العدد -3 يحقق هذه المعادلة :

$$-3^3 - (-3)^2 - 7(-3) + 15 = 0 \Rightarrow -27 - 9 + 21 + 15 = 0 \Rightarrow -36 + 36 = 0$$

إذن أحد الجذور هو $\boxed{z_1 = -3}$ ، لإيجاد باقي الجذور نقسم :

	z^3	z^2	z	الثابت
$\boxed{-3}$	1	-1	-7	15
	0	-3	2	-15
	1	-4	5	0

العامل الآخر هو

$$z^2 - 4z + 5 = 0$$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة:

$a = 1 \qquad b = -4 \qquad c = 5$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow z = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} \Rightarrow = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$\Rightarrow = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \Rightarrow = \frac{4 \pm 2i}{2} \Rightarrow = \frac{4}{2} \pm \frac{2i}{2} \Rightarrow \boxed{z_2 = 2 + i} \Leftrightarrow \boxed{z_3 = 2 - i}$$

إذن لهذه المعادلة الجذور 3 جذور هي : $\{z_1 = -3 \quad , z_2 = 2 + i \quad , z_3 = 2 - i\}$

مثال 7: (صفحة 161)

إذا كان : $3+9i$ هو أحد جذور المعادلة : $x^2+ax+b=0$ ، فأجد قيمة كل من a و b .

بما أن $3+9i$ هو أحد جذور المعادلة ، فإن مرافق هذا الجذر هو جذر آخر لهذه المعادلة.

$x=3\mp 9i \quad \Longrightarrow \quad x-3=\mp 9i$

$(x-3)^2=(\mp 9i)^2 \quad \Longrightarrow \quad (x-3)^2=-81 \quad \Longrightarrow \quad x^2-6x+9=-81$

$\Longrightarrow \quad x^2-6x+9+81=0 \quad \Longrightarrow \quad x^2-6x+90=0$

بعد مقارنة حدود المعادلة التربيعية الناتجة بالمعادلة المعطاة ، أستنتج أن : $b=90$ ، $a=-6$

طريقة أخرى لحل السؤال:

$3+9i$ الجذر الأول

$3-9i$ الجذر الثاني

x^2-(مجموع الجذرين)$x+$(حاصل ضرب الجذرين)$=0$

مجموع الجذرين $=(3+9i)+(3-9i) \quad \Longrightarrow =(3+3)+(9-9)i \quad \Longrightarrow =6$

حاصل ضرب الجذرين $=(3+9i)\times(3-9i) \quad \Longrightarrow =(3)^2+(9)^2 \quad \Longrightarrow =9+81 \quad \Longrightarrow =90$

$x^2-(6)x+(90)=0 \quad \Longrightarrow \quad x^2-6x+90=0$

بعد مقارنة حدود المعادلة التربيعية الناتجة بالمعادلة المعطاة ، أستنتج أن : $b=90$ ، $a=-6$

أتحقق من فهمي: (صفحة 161)

إذا كان : $2-i$ هو أحد جذور المعادلة : $x^2+ax+b=0$ ، فأجد قيمة كل من a و b .

بما أن $2-i$ هو أحد جذور المعادلة ، فإن مرافق هذا الجذر هو جذر آخر لهذه المعادلة.

$x=2\mp i \Longrightarrow x-2=\mp i \quad \Longrightarrow (x-2)^2=(\mp i)^2 \Longrightarrow (x-2)^2=-1$

$\Longrightarrow \quad x^2-4x+4=-1 \quad \Longrightarrow x^2-4x+4+1=0 \quad \Longrightarrow x^2-4x+5=0$

بعد مقارنة حدود المعادلة التربيعية الناتجة بالمعادلة المعطاة ، أستنتج أن : $b=5$ ، $a=-4$

طريقة أخرى لحل السؤال:

$2-i$ الجذر الأول

$2+i$ الجذر الثاني

$x^2 -$ (مجموع الجذرين)$x +$ (حاصل ضرب الجذرين) $= 0$

مجموع الجذرين $= (2 - i) + (2 + i) \quad \Longrightarrow = (2 + 2) + (1 - 1)i \quad \Longrightarrow = 4$

حاصل ضرب الجذرين $= (2 - i) \times (2 + i) \quad \Longrightarrow = (2)^2 + (1)^2 \quad \Longrightarrow = 4 + 1 \quad \Longrightarrow = 5$

$x^2 - (4)x + (5) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 4x + 5 = 0$

بعد مقارنة حدود المعادلة التربيعية الناتجة بالمعادلة المعطاة ، أستنتج أن : $a = -4$ ، $b = 5$

أتدرب وأحل المسائل: (صفحة 161)

أجد ناتج كل مما يأتي، ثم اكتبه بالصورة القياسية:

1) $(7 + 2i) + (3 - 11i)$

$= 7 + 2i + 3 - 11i \quad \Longrightarrow = 10 - 9i$

2) $(5 - 9i) - (-4 + 7i)$

$= 5 - 9i + 4 - 7i \quad \Longrightarrow = 9 - 16i$

3) $(4 - 3i)(1 + 3i)$

$= 4 + 12i - 3i - 9i^2 \quad \Longrightarrow = 4 + 12i - 3i + 9 \quad \Longrightarrow = 13 + 9i$

4) $(4 - 6i)(1 - 2i)(2 - 3i)$

$= (4 - 6i)(2 - 3i - 4i - 6) \quad \Longrightarrow = (4 - 6i)(-4 - 7i)$

$\Longrightarrow = -16 - 28i + 24i - 42 \quad \Longrightarrow = -58 - 4i$

5) $(9 - 2i)^2$

$= 81 - 36i + 4i^2 \quad \Longrightarrow = 81 - 36i - 4 \quad \Longrightarrow = 77 - 36i$

6) $\dfrac{10}{3-i}$

$$= \frac{10}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i} \quad \Longrightarrow = \frac{30+10i}{(3)^2+(1)^2} \quad \Longrightarrow = \frac{30+10i}{9+1}$$

$$\Longrightarrow = \frac{30+10i}{10} \quad \Longrightarrow = \frac{30}{10} + \frac{10}{10}i \quad \Longrightarrow = 3+i$$

أجد ناتج كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

7) $6(\cos\pi + i\sin\pi) \times 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$= 12\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) \quad \Longrightarrow = 12\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

8) $\left(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}\right) \div \left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{2\pi}{5}\right) \quad \Longrightarrow = \cos\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{4\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{4\pi}{10}\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$$

9) $12\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \div 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$= \frac{12}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right) \quad \Longrightarrow = \frac{12}{4}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{12} - \frac{4\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{12} - \frac{4\pi}{12}\right)\right)$$

$$= 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

10) $11\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \times 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$$= 22\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right)\right) \quad \Longrightarrow = 22\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{9\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{9\pi}{6}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow = 22\left(\cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{6}\right)\right) \quad \Longrightarrow = 22\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow = 22\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2\pi\right)\right) \quad \Longrightarrow = 22\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

أجد القيم الحقيقية للثابتين a و b في كل مما يأتي :

$11)\ (a+6i)+(7-ib)=-2+5i$

$(a+7)+(6-b)i=-2+5i$

$a+7=-2 \quad \Longrightarrow \quad a=-2-7 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a=-9}$

$b=6-5 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{b=1}$

$12)\ (11-ia)-(b-9i)=7-6i$

$11-b=7 \quad \Longrightarrow \quad b=11-7 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{b=4}$

$-a+9=-6 \quad \Longrightarrow \quad a=9+6 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a=15}$

$13)\ (a+ib)(2-i)=5+5i$

$2a-ai+2bi-bi^2=5+5i \quad \Longrightarrow \quad 2a-ai+2bi+b=5+5i$

$2a+b=5 \dots\dots\dots (1)$

$2b-a=5 \quad \Longrightarrow \quad a=2b-5 \quad \Longrightarrow 2(2b-5)+b=5$

$\Longrightarrow \quad 4b-10+b=5 \quad \Longrightarrow \quad 5b-10=5 \quad \Longrightarrow \quad 5b=15 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{b=3}$

$a=2(3)-5 \quad \Longrightarrow \quad a=6-5 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a=1}$

$14)\ \dfrac{a-6i}{1-2i}=b+4i$

$\dfrac{a-6i}{1-2i}\times\dfrac{1+2i}{1+2i}=b+4i \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{a+2ai-6i-12i^2}{(1)^2+(2)^2}=b+4i$

$\Longrightarrow \quad \dfrac{a+2ai-6i+12}{1+4}=b+4i \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{a+12+2ai-6i}{5}=b+4i$

$\Longrightarrow \quad \dfrac{a+12}{5}+\dfrac{2a-6}{5}i=b+4i \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{a+12}{5}=b \Longrightarrow a+12=5b \dots\dots\dots (1)$

$\dfrac{2a-6}{5}=4 \quad \Longrightarrow \quad 2a-6=20 \quad \Longrightarrow \quad 2a=20+6 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a=13}$

$a+12=5b \quad \Longrightarrow \quad 13+12=5b \quad \Longrightarrow 25=5b \quad \Longrightarrow \quad \boxed{b=5}$

$a+12=5b \dots\dots\dots (1)$

$a+12=5(5) \Longrightarrow \ a+12=25 \quad \Longrightarrow \quad a=25-12 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a=13}$

15) أضرب العدد المركب $8\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ في مرافقه .

$$z = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow z = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\bar{z} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z\bar{z} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \times 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z\bar{z} = 64\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - i^2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow z\bar{z} = 64\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z\bar{z} = 64\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \Rightarrow z\bar{z} = 64\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow z\bar{z} = 64\left(\frac{2}{2}\right) \Rightarrow z\bar{z} = 64(1) \Rightarrow z\bar{z} = 64$$

أجد الجذرين التربيعين لكل من الأعداد المركبة الآتية.

16) $3 - 4i$

$$\sqrt{3 - 4i} = x + yi \Rightarrow 3 - 4i = (x + yi)^2$$

$$3 - 4i = x^2 + 2xyi + y^2i^2 \Rightarrow 3 - 4i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\boxed{x^2 - y^2 = 3 \;\ldots\ldots\ldots (1)}$$

$$-4 = 2xy \Rightarrow y = -\frac{4}{2x} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{2}{x} \;\ldots\ldots\ldots (2)}$$

$$x^2 - \left(-\frac{2}{x}\right)^2 = 3 \Rightarrow x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{4}{x^2} = 3\right] \times x^2 \Rightarrow x^4 - 4 = 3x^2$$

$$\Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2}$$

$$y = -\frac{2}{x} \Rightarrow y = \frac{-2}{-2} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow y = \frac{-2}{2} \Rightarrow y = -1$$

عندما $x = 2$ فإن $y = -1$ ، وعندما $x = -2$ فإن $y = 1$.

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = 3 - 4i$ هما : $2 - i$ و $-2 + i$

17) $-15+8i$

$\sqrt{-15+8i}=x+yi \implies -15+8i=(x+yi)^2$

$\implies -15+8i=x^2+2xyi+y^2i^2 \implies -15+8i=x^2-y^2+2xyi$

$-15=x^2-y^2 \dots\dots\dots(1)$

$8=2xy \implies y=\frac{8}{2x} \implies y=\frac{4}{x}\dots\dots\dots(2)$

$x^2-\left(\frac{4}{x}\right)^2=-15 \implies x^2-\frac{16}{x^2}=-15 \implies \left[x^2-\frac{16}{x^2}=-15\right]\times x^2$

$x^4-16=-15x^2 \implies x^4+15x^2-16=0 \implies (x^2+16)(x^2-1)=0$

$\implies x^2-1=0 \implies x^2=1 \implies \boxed{x=\pm 1}$

$y=\frac{4}{x} \implies y=\frac{4}{1} \implies \boxed{y=4} \Leftrightarrow y=\frac{4}{-1} \implies \boxed{y=-4}$

عندما $x=1$ فإن $y=4$ ، وعندما $x=-1$ فإن $y=-4$.

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $z=-15+8i$ هما : $1+4i$ و $-1-4i$

18) $5-12i$

$\sqrt{5-12i}=x+yi \implies 5-12i=(x+yi)^2$

$5-12i=x^2+2xyi+y^2i^2 \implies 5-12i=x^2-y^2+2xyi$

$5=x^2-y^2 \dots\dots\dots(1)$

$-12=2xy \implies y=-\frac{12}{2x} \implies y=-\frac{6}{x}\dots\dots\dots(2)$

$x^2-\left(-\frac{6}{x}\right)^2=5 \implies x^2-\frac{36}{x^2}=5 \implies \left[x^2-\frac{36}{x^2}=5\right]\times x^2$

$\implies x^4-36=5x^2 \implies x^4-5x^2-36=0 \implies (x^2-9)(x^2+4)=0$

$\implies x^2-9=0 \implies x^2=9 \implies \boxed{x=\pm 3}$

$y=-\frac{6}{x} \implies y=\frac{-6}{-3} \implies \boxed{y=2} \implies y=\frac{-6}{3} \implies \boxed{y=-2}$

عندما $x=3$ فإن $y=-2$ ، وعندما $x=-3$ فإن $y=2$.

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $z=5-12i$ هما : $3-2i$ و $-3+2i$

19) $-7-24i$

$$\sqrt{-7-24i}=x+yi \implies -7-24i=(x+yi)^2$$

$$\implies -7-24i=x^2+2xyi+y^2i^2 \implies -7-24i=x^2-y^2+2xyi$$

$$-7=x^2-y^2 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$-24=2xy \implies y=-\frac{24}{2x} \implies y=-\frac{12}{x} \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$x^2-\left(-\frac{12}{x}\right)^2=-7 \implies x^2-\frac{144}{x^2}=-7 \implies \left[x^2-\frac{144}{x^2}=-7\right]\times x^2$$

$$x^4-144=-7x^2 \implies x^4+7x^2-144=0 \implies (x^2+16)(x^2-9)=0$$

$$x^2-9=0 \implies x^2=9 \implies \boxed{x=\pm 3}$$

$$y=-\frac{12}{x} \implies y=\frac{-12}{-3} \implies \boxed{y=4} \implies y=\frac{-12}{3} \implies \boxed{y=-4}$$

عندما $x=3$ فإن $y=-4$ ، وعندما $x=-3$ فإن $y=4$.

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $z=-7-24i$ هما : $3-4i$ و $-3+4i$

إذا كان : $w=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z=2\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ، فأجد كلاً مما يأتي بالصورة المثلثية :

20) zw

$$z=2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) \quad , \quad w=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$zw=4\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$zw=4\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{12}+\frac{4\pi}{12}\right)\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{12}+\frac{4\pi}{12}\right)$$

$$zw=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

21) $\frac{z}{w}$

$$\frac{z}{w}=1\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{z}{w}=\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{12}-\frac{4\pi}{12}\right)\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{12}-+\frac{4\pi}{12}\right)$$

$$\frac{z}{w}=\cos\frac{-7\pi}{12}+i\sin\frac{-7\pi}{12}$$

22) $\frac{w}{z}$

$$\frac{w}{z} = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{-\pi}{4}\right)\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{-\pi}{4}\right)$$

$$\frac{w}{z} = \left(\cos\left(\frac{4\pi}{12} - \frac{-3\pi}{12}\right)\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{12} - \frac{-3\pi}{12}\right) \Rightarrow \frac{w}{z} = \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}$$

23) $\frac{1}{z}$

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(0 - \frac{-\pi}{4}\right)\right) + i\sin\left(0 - \frac{-\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

24) w^2

$$w^2 = ww = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \times 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$ww = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \times i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$ww = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} \times i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

25) $5iz$

$$5i = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$5iz = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \times 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

$$5iz = 10\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{4}\right)\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{-\pi}{4}\right)$$

$$5iz = 10\left(\cos\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{-\pi}{4}\right)\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{-\pi}{4}\right)$$

$$5iz = 10\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة لكل من المعادلات الآتية:

$26)\ z^2 + 104 = 20z$

$z^2 - 20z + 104 = 0$

$a = 1 \qquad b = -20 \qquad c = 104$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow z = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(1)(104)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 416}}{2} \Rightarrow = \frac{20 \pm \sqrt{-16}}{2} \Rightarrow = \frac{20 \pm 4i}{2} \Rightarrow z = 10 \pm 2i$$

إذن ، لهذه المعادلة جذران هما : $10 + 2i$ ، $10 - 2i$

$27)\ z^2 + 18z + 202 = 0$

$a = 1 \qquad b = 18 \qquad c = 202$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow z = \frac{20 \pm \sqrt{(18)^2 - 4(1)(202)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow = \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 808}}{2} \Rightarrow = \frac{-18 \pm \sqrt{-484}}{2} \Rightarrow = \frac{-18 \pm 22i}{2} \Rightarrow z = -9 \pm 11i$$

إذن ، لهذه المعادلة جذران هما : $-9 + 11i$ ، $-9 - 11i$

$28)\ 9z^2 + 68 = 0$

$$9z^2 = -68 \Rightarrow z^2 = \frac{-68}{9} \Rightarrow \sqrt{z^2} = \sqrt{\frac{-68}{9}} \Rightarrow z = \pm\frac{\sqrt{-68}}{3} \Rightarrow z = \pm\frac{\sqrt{68}}{3}i$$

إذن ، لهذه المعادلة جذران هما : $\frac{\sqrt{68}}{3}i$ ، $-\frac{\sqrt{68}}{3}i$

29) $3z^3 - 2z^2 + 2z + 1 = 0$

الأصفار النسبية المحتملة = $\frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}}$: ± 1 ، $\pm\frac{1}{3}$

بالتعويض ، نجد أن العدد 2 يحقق هذه المعادلة :

$$3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = 0$$

$$3\left(-\frac{1}{27}\right) - 2\left(\frac{1}{9}\right) + 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{27} - \frac{2}{9} - \frac{2}{3} + 1 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{9} - \frac{2}{9} - \frac{6}{9} + \frac{9}{9} = 0 \Rightarrow -\frac{9}{9} + \frac{9}{9} = 0$$

إذن أحد الجذور هو $\boxed{z_1 = -\frac{1}{3}}$ ، لإيجاد باقي الجذور نقسم :

	z^3	z^2	z	الثابت
$\boxed{\frac{-1}{3}}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$
	1	-1	1	0

العامل الآخر هو

$$z^2 - z + 1 = 0$$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة:

$a = 1 \qquad b = -1 \qquad c = 1$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow z = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \boxed{z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}} \Rightarrow \boxed{z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}}$$

إذن لهذه المعادلة الجذور 3 جذور هي : $\left\{z_1 = -\frac{1}{3} \quad , z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \quad , z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right\}$

$30)\ z^3 + 4z + 10 = 5z^2$

$z^3 - 5z^2 + 4z + 10 = 0$

الأصفار النسبية المحتملة $= \dfrac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}}$: ± 10 ، ± 5 ، ± 2 ، ± 1 .

بالتعويض ، نجد أن العدد -1 يحقق هذه المعادلة :

$(-1)^3 - 5(-1)^2 + 4(-1) + 10 = 0 \Rightarrow -1 - 5 - 4 + 10 = 0 \Rightarrow -10 + 10 = 0$

إذن أحد الجذور هو $\boxed{z_1 = -1}$ ، لإيجاد باقي الجذور نقسم :

	z^3	z^2	z	الثابت
$\boxed{-1}$	1	-5	4	10
	0	-1	6	-10
	1	-6	10	0

العامل الآخر هو

$z^2 - 6z + 10 = 0$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة:

$a = 1 \qquad b = -6 \qquad c = 10$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow z = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} \Rightarrow z = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$\Rightarrow z = \frac{6 \pm 2i}{2} \Rightarrow z = \frac{6}{2} \pm \frac{2i}{2} \Rightarrow \boxed{z_2 = 3 + i} \Leftrightarrow \boxed{z_3 = 3 - i}$$

إذن لهذه المعادلة الجذور 3 جذور هي : $\{z_1 = -1 \quad , z_2 = 3 + i \quad , z_3 = 3 - i\}$

$31)\ 2z^3 = 8z^2 + 13z - 87$

$2z^3 - 8z^2 - 13z + 87 = 0$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}}: \pm 87$ ، $\pm\frac{87}{2}$ ، $\pm\frac{29}{2}$ ، ± 3 ، ± 2 ، ± 1 .

بالتعويض ، نجد أن العدد -3 يحقق هذه المعادلة :

$2(-3)^3 - 8(-3)^2 - 13(-3) + 87 = 0$

$-54 - 72 + 39 + 87 = 0$

$-126 + 126 = 0$

إذن أحد الجذور هو $\boxed{z_1 = -3}$ ، لإيجاد باقي الجذور نقسم :

	z^3	z^2	z	الثابت
$\boxed{-3}$	2	-8	-13	87
	0	-6	42	-87
	2	-14	29	0

العامل الآخر هو

$2z^2 - 14z + 29 = 0$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة:

$a = 2 \qquad b = -14 \qquad c = 29$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow z = \frac{-(14) \pm \sqrt{(14)^2 - 4(2)(29)}}{2(2)}$$

$$\Rightarrow z = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 232}}{4} \Rightarrow z = \frac{-14 \pm \sqrt{-36}}{4}$$

$$\Rightarrow z = \frac{-14 \pm 6i}{4} \Rightarrow z = \frac{14}{4} \pm \frac{6i}{4} \Rightarrow \boxed{z_2 = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}i} \Rightarrow \boxed{z_3 = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}i}$$

إذن لهذه المعادلة الجذور 3 جذور هي : $\left\{z_1 = -3 \quad , \ z_2 = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}i \quad , z_3 = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}i\right\}$

أجد معادلة تربيعية لها الجذران المركبان المعطيان في كل مما يأتي:

32) $2 \pm 5i$

$x = 2 \pm 5i \implies x - 2 = \pm 5i \implies (x-2)^2 = (\pm 5i)^2$

$\implies x^2 - 4x + 4 = 25i^2 \implies x^2 - 4x + 4 = -25 \implies x^2 - 4x + 29 = 0$

طريقة أخرى للحل:

$2 + 5i$ الجذر الأول

$2 - 5i$ الجذر الثاني

$x^2 - ($مجموع الجذرين$)x + ($حاصل ضرب الجذرين$) = 0$

مجموع الجذرين $= (2 + 5i) + (2 - 5i) \implies= (2+2) + (5-5)i \implies= 4$

حاصل ضرب الجذرين $= (2 + 5i) \times (2 - 5i) \implies= (2)^2 + (5)^2 \implies= 4 + 25 \implies= 29$

$x^2 - (4)x + (29) = 0 \implies x^2 - 4x + 29 = 0$

33) $7 \pm 4i$

$x = 7 \pm 4i \implies x - 7 = \pm 4i \implies (x-7)^2 = (\pm 4i)^2$

$\implies x^2 - 14x + 49 = 16i^2 \implies x^2 - 14x + 49 = -16 \implies x^2 - 14x + 65 = 0$

طريقة أخرى للحل:

$7 + 4i$ الجذر الأول

$7 - 4i$ الجذر الثاني

$x^2 - ($مجموع الجذرين$)x + ($حاصل ضرب الجذرين$) = 0$

مجموع الجذرين $= (7 + 4i) + (7 - 4i) \implies = (7+7) + (4-4)i \implies = 14$

حاصل ضرب الجذرين $= (7 + 4i) \times (7 - 4i) \implies = (7)^2 + (4)^2 \implies= 49 + 16 \implies= 65$

$x^2 - (14)x + (65) = 0 \implies x^2 - 14x + 65 = 0$

34) $-8 \pm 20i$

$x = -8 \pm 20i \implies x + 8 = \pm 20i$

$(x+8)^2 = (\pm 20i)^2 \implies x^2 + 16x + 64 = 20i^2$

$\implies x^2 + 16x + 64 = -400 \implies x^2 + 16x + 464 = 0$

طريقة أخرى للحل:

$-8 + 20i$ الجذر الأول

$-8 - 20i$ الجذر الثاني

$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

مجموع الجذرين $= (-8 + 20i) + (-8 - 20i) \implies = (-8 + -8) + (20 - 20)i \implies = -16$

حاصل ضرب الجذرين $= (-8 + 20i) \times (-8 - 20i) \implies = (-8)^2 + (20)^2 \implies = 64 + 400 \implies = 464$

$x^2 - (-16)x + (464) = 0$

$x^2 + 16x + 464 = 0$

35) $-3 \pm 2i$

$x + 3 = \pm 2i \implies (x+3)^2 = (\pm 2i)^2$

$\implies x^2 + 6x + 9 = 4i^2 \implies x^2 + 6x + 9 = -4 \implies x^2 + 6x + 13 = 0$

طريقة أخرى للحل:

$3 + 2i$ الجذر الأول

$3 - 2i$ الجذر الثاني

$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

مجموع الجذرين $= (3 + 2i) + (3 - 2i) \implies = (3 + 3) + (2 - 2)i \implies = 6$

حاصل ضرب الجذرين $= (3 + 2i) \times (3 - 2i)$

حاصل ضرب الجذرين $= (3)^2 + (2)^2 \implies = 9 + 4 \implies = 13$

$x^2 - (6)x + (13) = 0 \implies x^2 + 6x + 13 = 0$

إذا كان : $z_3 = 2 - 2i$, $z_2 = \sqrt{5} - i\sqrt{15}$, $z_1 = \sqrt{12} - 2i$ ، فأجد المقياس والسعة الرئيسية لكل مما يأتي :

$$|z_1| = \sqrt{\left(\sqrt{12}\right)^2 + (-2)^2} \Rightarrow |z_1| = \sqrt{12+4} \Rightarrow |z_1| = \sqrt{16} \Rightarrow |z_1| = 4$$

$$|z_2| = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(-\sqrt{15}\right)^2} \Rightarrow = \sqrt{5+15} \Rightarrow |z_2| = \sqrt{20} \Rightarrow |z_2| = 2\sqrt{5}$$

$$|z_3| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} \Rightarrow |z_3| = \sqrt{4+4} \Rightarrow |z_3| = \sqrt{8} \Rightarrow |z_3| = 2\sqrt{2}$$

$$Arg(z_1) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) \Rightarrow Arg(z_1) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow Arg(z_1) = -\frac{\pi}{6}$$

$$Arg(z_2) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow Arg(z_2) = -\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) \Rightarrow Arg(z_2) = -\frac{\pi}{3}$$

$$Arg(z_3) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) \Rightarrow Arg(z_3) = -\tan^{-1}(1) \Rightarrow Arg(z_3) = -\frac{\pi}{4}$$

36) $\frac{z_2}{z_1}$

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} \Rightarrow \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{2\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = Arg(z_2) - Arg(z_1)$$

$$Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = -\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow = -\frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

37) $\frac{1}{z_3}$

$$\left|\frac{1}{z_3}\right| = \frac{|1|}{|z_3|} \Rightarrow \frac{|1|}{|z_3|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$Arg\left(\frac{1}{z_3}\right) = Arg(1) - Arg(z_3) \Rightarrow Arg\left(\frac{1}{z_3}\right) = 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow Arg\left(\frac{1}{z_3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

38) $\frac{z_3}{\overline{z_2}}$

$$\overline{z_2} = \sqrt{5} + i\sqrt{15}$$

$$Arg(\overline{z_2}) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow Arg(\overline{z_2}) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) \Rightarrow Arg(\overline{z_2}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\left|\frac{z_3}{\overline{z_2}}\right| = \frac{|z_3|}{|\overline{z_2}|} \Rightarrow \frac{|z_3|}{|\overline{z_2}|} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{|z_3|}{|\overline{z_2}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

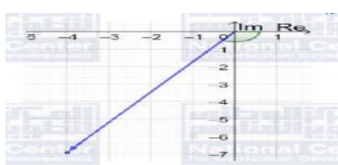
$$Arg\left(\frac{z_3}{\overline{z_2}}\right) = Arg(z_3) - Arg(\overline{z_2}) \Rightarrow = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \Rightarrow = -\frac{3\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} \Rightarrow = -\frac{7\pi}{12}$$

إذا كان : $z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

39) أمثل العدد z بيانياً في المستوى المركب .

$$z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow z = 8\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$$

إذن مقياس z يساوي 8 وسعته $\frac{-2\pi}{3}$



40) أجد الجذرين التربيعين للعدد z.

$$z = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow z = 8\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Rightarrow z = -4 - 4\sqrt{3}i$$

$$\sqrt{-4 - 4\sqrt{3}i} = x + yi \Rightarrow -4 - 4\sqrt{3}i = (x + yi)^2 \Rightarrow -4 - 4\sqrt{3}i = x^2 + 2xyi + y^2i^2$$

$$\Rightarrow -4 - 4\sqrt{3}i = x^2 - y^2 + 2xyi \Rightarrow \boxed{x^2 - y^2 = -4} \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$-4\sqrt{3} = 2xy \Rightarrow y = -\frac{4\sqrt{3}}{2x} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{2\sqrt{3}}{x}} \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$x^2 - \left(-\frac{2\sqrt{3}}{x}\right)^2 = -4 \Rightarrow x^2 - \frac{12}{x^2} = -4 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{12}{x^2} = -4\right] \times x^2$$

$$x^4 - 12 = -4x^2 \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 12 = 0 \Rightarrow (x^2 + 6)(x^2 - 2) = 0$$

$\Rightarrow\ x^2-2=0 \quad \Rightarrow\ x^2=2 \quad \Rightarrow\ x=\pm\sqrt{2}$

$y=-\dfrac{2\sqrt{3}}{x} \quad \Rightarrow\ y=\dfrac{-2\sqrt{3}}{-\sqrt{2}} \quad \Rightarrow y=\sqrt{2}\sqrt{3} \quad \Rightarrow\ y=\sqrt{6}$

$y=\dfrac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow\ y=-\sqrt{2}\sqrt{3} \quad \Rightarrow\ y=-\sqrt{6}$

عندما $x=\sqrt{2}$ فإن $y=-\sqrt{6}$ ، وعندما $x=-\sqrt{2}$ فإن $y=\sqrt{6}$.

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب هما : $\sqrt{2}-i\sqrt{6}$ و $-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$

41) إذا كان : $(a-3i)$ ، و $(b+ic)$ هما الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $55-48i$ ، فأجد قيمة كل من الثوابت الحقيقية : a ، و b ، و c .

بما أن $a-3i$ هو جذر للعدد المركب $55-48i$ ، إذن :

$(a-3i)^2=55-48i \quad \Rightarrow\ a^2-6ai-9=55-48i$

$a^2-9=55 \quad \Rightarrow\ -6a=-48 \quad \Rightarrow\ \boxed{a=8}$

وبما أن $b-ic$ هو جذر للعدد المركب $55-48i$ ، إذن :

$(b+ic)^2=55-48i \quad \Rightarrow\ b^2+2bci-c^2=55-48i$

$\boxed{b^2-c^2=55 \quad \ldots\ldots\ldots(1)}$

$2bc=-48 \quad \Rightarrow\ bc=-24 \quad \Rightarrow\ \boxed{c=\dfrac{-24}{b} \ldots\ldots\ldots(2)}$

$b^2-\left(\dfrac{-24}{b}\right)^2=55 \quad \Rightarrow b^2-\left(\dfrac{576}{b^2}\right)=55 \quad \Rightarrow \left[b^2-\left(\dfrac{576}{b^2}\right)=55\right] \quad \times b^2$

$\Rightarrow\ b^4-576=55b^2 \ \Rightarrow\ b^4-55b^2-576=0 \ \Rightarrow (b^2-64)(b^2+9)=0$

$\Rightarrow\ b^2-64=0 \quad \Rightarrow\ b^2=64 \quad \Rightarrow\ \boxed{b=\pm 8}$

$c=\dfrac{-24}{b} \quad \Rightarrow\ c=\dfrac{-24}{-8} \quad \Rightarrow\ \boxed{c=3} \quad \Leftrightarrow\ c=\dfrac{-24}{8} \quad \Rightarrow\ \boxed{c=-3}$

جذرا هذا العدد هما $-8+3i$ و $8-3i$

وبمقارنة هذين الجذرين مع الجذرين المعطيين $(a-3i)$ ، و $(b+ic)$ نلاحظ أن :

$a=8$ و $b=-8$ و $c=3$

الحل الأسهل:

بما أن $a-3i$ هو جذر للعدد المركب $55-48i$ ، إذن : $-a+3i$ هو أيضاً جذر له ، ومنه :

بالمقارنة مع الجذرين $a-3i$ و $b+ic$ نجد أن : $c=3$ و $b=-a$ ومنه :

$$(a-3i)^2 = 55-48i \Rightarrow a^2-6ai-9 = 55-48i$$

$$a^2-9=55 \quad \Rightarrow -6a=-48 \Rightarrow -6a=-48 \Rightarrow \boxed{a=8} \Leftrightarrow \boxed{b=-8}$$

أحل المعادلة المعطى أحد جذورها في كل مما يأتي:

42) $x^3+x^2+15x=225\ ,5$

$$x^3+x^2+15x=225 \Rightarrow x^3+x^2+15x-225=0 \Rightarrow x^3+x^2+15x-225=0$$

بما أن العدد 5 جذر لهذه المعادلة إذن $(x-5)$: بالقسمة عليه نحصل على :

	x^3	x^2	x	الثابت
$\boxed{5}$	1	1	15	-225
	0	5	30	225
	1	6	45	0

العامل الآخر هو

$$x^2+6x+45=0$$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة:

$$a=1 \qquad b=6 \qquad c=45$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-(6)\pm\sqrt{(6)^2-4(1)(45)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36-180}}{2} \Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{-144}}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-6\pm 12i}{2} \Rightarrow x=\frac{-6}{2}\pm\frac{12i}{2} \Rightarrow \boxed{x_2=-3+6i} \Leftrightarrow \boxed{x_3=-3-6i}$$

إذن لهذه المعادلة الجذور 3 جذور هي : $\{x_1=5 \quad , x_2=-3+6i \quad , x_3=-3-6i\}$

43) $x^3+7x^2-13x+45=0\ ,-9$

$$x^3+7x^2-13x+45=0$$

بما أن العدد -9 جذر لهذه المعادلة إذن $(x+9)$: بالقسمة عليه نحصل على :

	x^3	x^2	x	الثابت
$\boxed{-9}$	1	7	-13	45
	0	-9	18	-45
	1	-2	5	0

العامل الآخر هو

$$x^2-2x+5=0$$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة:

$a=1 \qquad b=-2 \qquad c=5$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \implies x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$\implies x=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2} \implies x=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}$$

$$\implies x=\frac{2\pm4i}{2} \implies x=\frac{2}{2}\pm\frac{4i}{2} \implies \boxed{x_2=1+2i} \Leftrightarrow \boxed{x_3=1-2i}$$

إذن لهذه المعادلة الجذور 3 جذور هي : $\{x_1=-9 \quad , x_2=1+2i \quad ,x_3=1-2i\}$

44) $3x(x^2+45)=2(19x^2+37)\ ,6-i$

$$3x^3+135x=38x^2+74 \implies 3x^3-38x^2+135x-74=0$$

بما أن العدد $6-i$ جذر لهذه المعادلة إذن مرافقه $(6+i)$ هو أيضاً جذر لهذه المعادلة :

نكون المعادلة التربيعية التي جذراها $(6-i)$ ، $(6+i)$

$$x=6\pm i \implies x-6=\pm i$$

$$(x-6)^2=(\pm i)^2 \implies x^2-12x+36=-1 \implies x^2-12x+37=0$$

ثم نقسم كثير الحدود $3x^3-38x^2+135x-74$ على $x^2-12x+37$ نجد أن :

$$3x^3-38x^2+135x-74=(x^2-12x+37)(3x-2)=0$$

$$3x-2=0 \implies 3x=2 \implies x=\frac{2}{3}$$

إذن لهذه المعادلة ثلاثة جذور هي : $\left\{x_1=\frac{2}{3} \quad , x_2=6+i \quad ,x_3=6-i\right\}$

45) $x^3 + 10x^2 + 29x + 30 = 0 , -2 + i$

بما أن العدد $(-2 + i)$ جذر لهذه المعادلة إذن مرافقه $(-2 - i)$ هو أيضاً جذر لهذه المعادلة :

نكون المعادلة التربيعية التي جذراها $(-2 + i)$ ، $(-2 - i)$

$x = -2 \pm i \quad \Rightarrow \quad x + 2 = \pm i$

$(x + 2)^2 = (\pm i)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = -1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x + 5 = 0$

ثم نقسم كثير الحدود $x^3 + 10x^2 + 29x + 30$ على $x^2 + 4x + 5$ نجد أن :

$x^3 + 10x^2 + 29x + 30 = (x^2 + 4x + 5)(x + 6) = 0$

$x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -6$

إذن لهذه المعادلة ثلاثة جذور هي : $\{x_1 = -6 \quad , \; x_2 = -2 + i \quad , x_3 = -2 - i\}$

إذا كان : $(4 + 11i)$ هو أحد جذري المعادلة : $z^2 - 8z + k = 0$ ، حيث k عدد حقيقي ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

46) أجد الجذر الآخر للمعادلة.

الجذر الآخر هو مرافق الجذر الأول أي $4 - 11i$

47) أجد قيمة الثابت k .

$k = (4 - 11i)(4 + 11i) \Rightarrow k = (4)^2 + (11)^2 \Rightarrow k = 16 + 121 \Rightarrow k = 137$

مهارات التفكير العليا:

تبرير: أجيب عن الاسئلة الثلاثة الآتية تباعاً، مبرراً إجابتي:

48) أجد ناتج : $(p+iq)^2$ ، حيث p و q عددان حقيقيان .

$$(p+iq)^2 \quad \Rightarrow = p^2 + 2pqi + i^2q^2 \quad \Rightarrow = p^2 + 2pqi - q^2$$

49) إذا كان : $(p+iq)^2 = 45 + im$ ، حيث p و q عددان صحيحان موجبان ، $p > q$ ، فأجد ثلاث قيم ممكنة للعدد الحقيقي m .

$$(p+iq)^2 = 45 + im \quad \Rightarrow p^2 + 2pqi + i^2q^2 = 45 + im$$

$$\Rightarrow p^2 - q^2 + 2pqi = 45 + im \quad \Rightarrow p^2 - q^2 = 45$$

$$\Rightarrow (p+q)(p-q) = 45 \quad \Rightarrow m = 2pq$$

بما أن p و q عددان صحيحان موجبان و $p > q$ فإن $(p+q)$ و $(p-q)$ عددان صحيحان موجبان أيضاً
و $(p-q) > (p+q)$ ومنه يكفي تحليل العدد 45 إلى عاملين صحيحين موجبين هي:

الحالة الأولى : $1 \times 45 = 45$ فإن $p+q = 45$ و $p-q = 1$

ومنه $p = 23$ و $q = 22$ أي أن : $m = 2pq = 1012$

الحالة الثانية : $3 \times 15 = 45$ فإن $p+q = 15$ و $p-q = 3$

ومنه $p = 9$ و $q = 6$ أي أن : $m = 2pq = 108$

الحالة الثالثة : $5 \times 9 = 45$ فإن $p+q = 9$ و $p-q = 5$

ومنه $p = 7$ و $q = 2$ أي أن : $m = 2pq = 28$

قيم m المطلوبة هي : $1012 \ , \ 108 \ , \ 28$

50) استعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $45 - 108i$

بما ان $m = 2pq = 108$ إذن العددان p و q مختلفان بالإشارة من السؤال السابق نجد أن: $q = -6$ و $p = 9$ أو $q = 6\ ,\ p = -9$

الجذران المطلوبان هما : $-9 + 6i$ ، $9 - 6i$

51) برهان : أثبت أن : $z\bar{z} = |z|^2$ لأي عدد مركب z .

ليكن $z = x + yi$ إذن : $\bar{z} = x - yi$

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) \quad \Rightarrow z\bar{z} = x^2 - y^2 i^2$$

$$\Rightarrow z\bar{z} = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow z\bar{z} = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow z\bar{z} = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2$$

52) برهان : إذا كان z عدداً مركباً ، حيث : $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $|z| = 5\sqrt{5}$ وكان : $\frac{z}{3+4i} = p + iq$ فأثبت أن $p + q = 1$.

$$|z| = 5\sqrt{5} \qquad , Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad , \quad \frac{z}{3+4i} = p + iq$$

ليكن $z = x + yi$

بما أن $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ، إذن يقع العدد المركب z في الربع الأول ، ويكون $x = 2y$

$$z = x + yi$$

$$|z| = 5\sqrt{5}$$

$$(2y)^2 + y^2 = 125 \Rightarrow 4y^2 + y^2 = 125 \Rightarrow 5y^2 = 125 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = 5$$

$$x^2 + y^2 = 125 \Rightarrow x^2 + (5)^2 = 125 \Rightarrow x^2 + 25 = 125 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$$

إذن $z = 10 + 5i$

$$p + iq = \frac{z}{3+4i} \quad \Rightarrow p + iq = \frac{10+5i}{3+4i} \quad \Rightarrow p + iq = \frac{10+5i}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i}$$

$$\Rightarrow p + iq = \frac{30 - 40i + 15i + 20}{9 + 16} \quad \Rightarrow p + iq = \frac{50 - 25i}{25}$$

$$\Rightarrow p + iq = \frac{50}{25} - \frac{25}{25}i \quad \Rightarrow p + iq = 2 - i$$

إذن $p = 2\ , q = -1$ ويكون : $p + q = 1$

53) تحد: العدد المركب $z = (10 - i) - (2 - 7i)$ هو أحد جذور المعادلة

$$z^3 + 20z^2 - 164z - 400 = 0$$

أجد بقية جذور هذه المعادلة ، ثم أحل المعادلة الآتية : $x^6 + 164x^2 = 20(x^4 + 20)$

$$z = (10 - i) - (2 - 7i)$$

$$z = 10 - i - 2 + 7i$$

$$z = 8 + 6i$$

بما أن $(8 + 6i)$ جذر لهذه المعادلة ، فإن مرافقه $(8 - 6i)$ هو أيضاً جذر لهذه المعادلة .

نكون المعادلة التربيعية التي جذراها $(8 + 6i)$ ، $(8 - 6i)$

$$(8 + 6i) + (8 + 6i) = 16$$

$$(8 + 6i) \times (8 + 6i) = 64 + 36 = 100$$

$$z^2 - 16z + 100 = 0$$

ثم نقسم كثير الحدود $z^3 + 20z^2 - 164z - 400$ على $z^2 - 16z + 100$ فنجد أن :

$$z^3 + 20z^2 - 164z - 400 = 0$$

$$(z^2 - 16z + 100)(z - 4) = 0$$

$$z_1 = 4$$

$$z_2 = 8 + 6i$$

$$z_3 = 8 - 6i$$

حلول هذه المعادلة هي : $z_1 = 4$ ، $z_2 = 8 + 6i$ ، $z_3 = 8 - 6i$

المعادلة الجديدة هي:

$$x^6 + 164x^2 = 20(x^4 + 20)$$

$$x^6 + 164x^2 = 20x^4 + 400$$

$$x^6 - 20x^4 + 164x^2 - 400 = 0$$

إذا عوضنا $z = x^2$ تتحول هذه المعادلة $x^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$

إذن ، حلول هذه المعادلة $x^6 - 20x^4 + 164x^2 - 400 = 0$ هي الجذور التربيعية لحلول المعادلة:

$x^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$

إذن حلول هذه المعادلة هي : $z_1 = 2$ ، $z_2 = \pm\sqrt{8+6i}$ ، $z_3 = \pm\sqrt{8-6i}$

نجد الجذرين التربيعين للعدد $8+6i$

$\sqrt{8+6i} = h + ki \quad \Longrightarrow \quad 8 + 6i = h^2 - k^2 + 2hki$

$h^2 - k^2 = 8 \quad \Longrightarrow \quad 2hk = 6 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{k = \frac{3}{h}}$

$h - \left(\frac{3}{h}\right)^2 = 8 \quad \Longrightarrow \quad h - \frac{9}{h^2} = 8 \quad \Longrightarrow \quad \left[h^2 - \frac{9}{h^2} = 8\right] \times h^2 \quad \Longrightarrow h^4 - 9 = 8h^2$

$\Longrightarrow \quad h^4 - 8h^2 - 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (h^2 + 1)(h^2 - 9) = 0 \quad \Longrightarrow h^2 - 9 = 0$

$\Longrightarrow \quad h^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad h = \pm 3 \quad \Longrightarrow \quad h^2 + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{h = \pm 1}$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $8+6i$ هما : $-3-i$ ، $3+i$

بالمثل نجد أن الجذرين التربيعين للعدد المركب $8-6i$ هما : $-3+i$ ، $3-i$

ويكون للمعادلة $x^6 - 20x^4 + 164x^2 - 400 = 0$ ستة حلول هي :

$x_1 = 2 \quad , x_2 = -2 \quad , x_3 = 3 + i \quad , x_4 = 3 - i \, , x_5 = -3 + i \quad , x_6 = -3 - i$

الدرس الثالث

المحل الهندسي في المستوى المركب

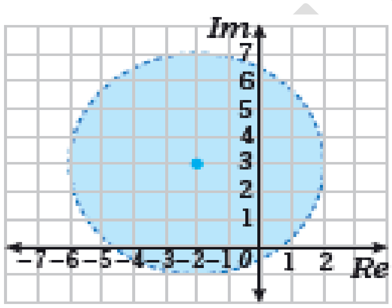
مخطط الدرس الثالث

المحل الهندسي في المستوى المركب

- الدائرة
- المنصف العمودي للقطعة المستقيمة
- الشعاع الذي يبدأ بالنقطة $(0,0)$
- الشعاع الذي يبدأ بالنقطة (a,b)
- تمثيل المتباينات في المستوى المركب
- تمثيل نظام متباينات في المستوى المركب

مسألة اليوم :(صفحة 164)

اكتب متباينة بدلالة z ، تحققها جميع الأعداد المركبة التي تقع في المنطقة المظللة المبينة في المستوى المركب في الشكل المجاور .



المنطقة المظللة تمثل الأعداد المركبة التي تبعد عن العدد $(-2+3i)$ مسافة تقل عن 4 وحدات ، فتكون المتباينة المطلوبة هي:

$$|z-(-2+3i)|<4 \quad \rightarrow \quad |z+2-3i|<4$$

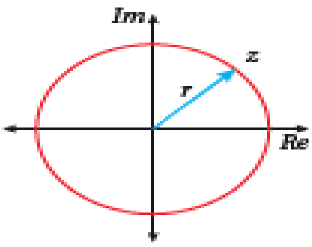
الدائرة

المحل الهندسي: هو مجموعة النقاط في المستوى المركب التي يمكن لنقطة متحركة ضمن شرط أو شروط (معادلة أو متباينة) أن تكون منها.

الدائرة: هي محل هندسي لنقطة تتحرك في مسار يبعد مسافة محددة عن نقطة ثابتة هي مركز الدائرة.

ملاحظات مهمة:

1) في المستوى المركب تبعد الأعداد المركبة التي تحقق المعادلة: $|z| = r$ مسافة r وحدة عن نقطة الأصل، لأن مقياس كل منها هو r وحدة .



2) المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها r كما في الشكل المجاور.

3) المحل الهندسي في المستوى المركب الذي تمثله المعادلة $|z - (a + ib)| = r$ هو دائرة مركزها (a , b) ، وطول نصف قطرها r وحدة.

4) الصيغة القياسية (الديكارتيه) لمعادلة الدائرة التي مركزها (h , k) ، ونصف قطرها r هي: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

مثال 1: (صفحة 165)

أجد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة : $|z - 2 + 8i| = 3$ ، ثم اكتب المعادلة بالصيغة الديكارتيه .

الخطوة الأولى: أجد المحل الهندسي

عندما اكتب المعادلة في صورة $|z - (a + ib)| = r$ فإن $|z - (2 - 8i)| = 3$ ، وهذه معادلة دائرة، مركزها $(2 - 8i)$ ، وطول نصف قطرها 3 وحدات .

الخطوة الثانية: أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية .

$$|z - 2 + 8i| = 3 \quad \Rightarrow \quad |x + yi - 2 + 8i| = 3 \quad \Rightarrow |(x - 2) + (y + 8)i| = 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 8)^2} = 3 \quad \Rightarrow \quad (x - 2)^2 + (y + 8)^2 = 9$$

ألاحظ أن المعادلة $(x - 2)^2 + (y + 8)^2 = 9$ هي أيضاً معادلة دائرة مركزها $(2, -8)$ وطول نصف قطرها 3 وحدات .

أتحقق من فهمي: (صفحة 165)

أجد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة : $|z+5-4i|=7$ ، ثم اكتب المعادلة بالصيغة الديكارتيه .

$$|z+5-4i|=7 \quad \Rightarrow \quad |z-(-5+4i)|=7$$

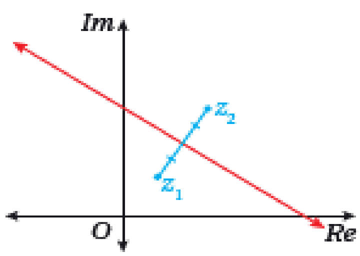
وهذه معادلة دائرة في المستوى المركب مركزها $(-5,4)$ وطول نصف قطرها 7 وحدات .

$$|z+5-4i|=7 \quad \Rightarrow \quad |x+yi+5-4i|=7 \quad \Rightarrow \quad |(x+5)+(y-4)i|=7$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x+5)^2+(y-4)^2}=7 \quad \Rightarrow \quad (x+5)^2+(y-4)^2=49$$

وهذه معادلة دائرة في المستوى المركب مركزها $(-5,4)$ وطول نصف قطرها 7 وحدات .

المنصف العمودي للقطعة المستقيمة



المنصف العمودي للقطعة المستقيمة : هو المحل الهندسي للنقطة التي تتحرك في المستوى المركب، وتظل على بعدين متساويين من النقطتين الثابتيين: z_1 و z_2 ، كما في الشكل المجاور.

المحل الهندسي في المستوى المركب للنقطة z التي تحقق المعادلة: $|z-(a+ib)|=|z-(c+id)|$ هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين : $(a\,,b)$ و $(c\,,d)$.

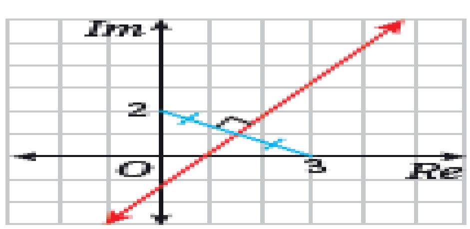
مثال2: (صفحة 166)

أجد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة : $|z-3|=|z-2i|$ ، ثم اكتب المعادلة بالصيغة الديكارتيه.

الخطوة الأولى: أجد المحل الهندسي.

عندما اكتب المعادلة في صورة:

$$|z-(a-ib)|=|z-(c-id)| \;\Rightarrow\; |z-(3-0i)|=|z-(0-2i)|$$



وهذه معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين : $(3-0i)$ و $(3-0i)$ ، وهو يظهر باللون الأحمر في الشكل المجاور .

الخطوة الثانية: اكتب معادلة بالصيغة الديكارتية.

لكتابة المعادلة بالصيغة الديكارتية ، أعوض $z=x+yi$ ، ثم أجد مقياس العدد المركب ، ثم أبسط :

$$|z-3|=|z-2i| \quad \Rightarrow \quad |x+yi-3|=|x+yi-2i| \quad \Rightarrow \quad |(x-3)+yi|=|x+(y-2)i|$$

$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-2)^2} \quad \Rightarrow \left(\sqrt{(x-3)^2+y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2+(y-2)^2}\right)^2$

$\Rightarrow (x-3)^2+y^2 = x^2+(y-2)^2 \quad \Rightarrow x^2-6x+9+y^2 = x^2+y^2-4y+4$

$\Rightarrow \ -6x+9 = -4y+4 \quad \Rightarrow \ 6x-4y-5=0$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي : $6x-4y-5=0$

أتحقق من فهمي: (صفحة 167)

أجد المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة : $|z+1| = |z-5i|$ ، ثم اكتب المعادلة بالصيغة الديكارتيه.

$|z+1| = |z-5i| \ \Rightarrow \ |z-(-1)| = |z-(5i)|$

وهذه معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين : $(0\,,5)$ و $(-1\,,0)$

$|x+yi+1| = |x+yi-5i| \quad \Rightarrow \ |(x+1)+yi| = |x+(y-5)i|$

$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-5)^2} \quad \Rightarrow \left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2+(y-5)^2}\right)^2$

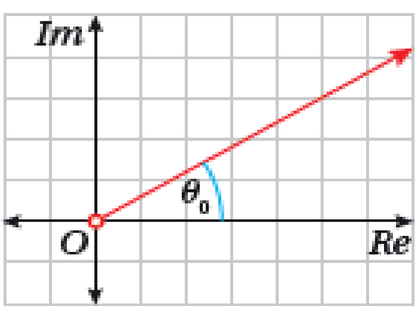
$\Rightarrow (x+1)^2+y^2 = x^2+(y-5)^2 \quad \Rightarrow \ x^2+2x+1+y^2 = x^2+y^2-10y+25$

$\Rightarrow \ 2x+1 = -10y+25 \quad \Rightarrow 2x+10y-24=0 \Rightarrow x+5y-12=0$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي : $x+5y-12=0$

الشعاع الذي يبدأ بالنقطة $(0,0)$

ملاحظات مهمة:



1) سعة جميع الأعداد المركبة التي تحقق المعادلة:

$Arg(z) = \theta_0$ هي θ_0 ، لذا فإنها تقع على شعاع يصنع

زاوية قياسها θ_0 راديان مع المحور الحقيقي الموجب.

2) يبدأ الشعاع بنقطة الأصل، ويمتد بصورة لا نهائية في أحد

اتجاهيه كما في الشكل المجاور.

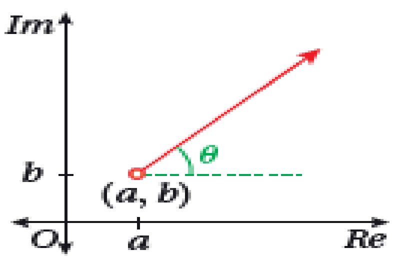
3) المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة: $Arg(z) = \theta_0$ هو شعاع يبدأ بنقطة الأصل وليس له نهاية .

4) بما أن سعة العدد المركب: $z=0$ غير معرفة، فإن الشعاع لا يحوي نقطة الأصل، ويعبر عن ذلك بدائرة مفرغة في بداية الشعاع.

الشعاع الذي يبدأ بالنقطة (a, b)

ملاحظات مهمة :

1) الأعداد المركبة z التي تحقق المعادلة $Arg(z-(a+ib))=\theta$
تقع جميعها على الشعاع الذي نقطة بدايته (a, b) ،
وهو يصنع زاوية قياسها θ راديان مع مستقيم يوازي
المحور الحقيقي كما في الشكل المجاور.



2) بما أن ناتج تعويض نقطة بداية الشعاع في المعادلة هو
$Arg(0)$ (قيمة غير معرفة)، فإن نقطة بداية الشعاع
تستثنى ويعبر عنها بدائرة مفرغة.

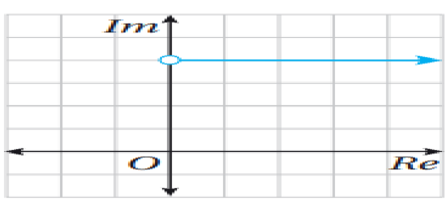
3) المحل الهندسي في المستوى المركب الذي تمثله المعادلة: $Arg(z-(a+ib))=\theta$:
هو شعاع يبدأ بالنقطة (a, b)، ويصنع زاوية قياسها θ راديان مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.

مثال 3: (صفحة 168)

أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، ثم ارسمه في المستوى المركب.

1) $Arg(z-4i)=0$

تمثل هذه المعادلة شعاعاً يبدأ بالنقطة $(0, 4)$ ، ولا يشملها ،
ويصنع زاوية قياسها 0 مع المستقيم الذي يوازي المحور الحقيقي ،
أي أنه يوازي المحور الحقيقي كما في الشكل المجاور.

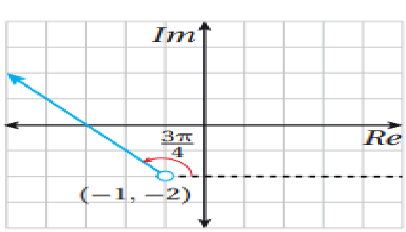


2) $Arg(z+1+2i)=\frac{3\pi}{4}$

عندما اكتب المعادلة في صورة:

$$Arg(z-(a+bi)=\theta \quad \Rightarrow Arg(z-(-1-2i)=\frac{3\pi}{4}$$

وهذه معادلة شعاع يبدأ بالنقطة $(-1, -2)$ ، ولا يشملها ،
ويصنع زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ مع المستقيم الذي يوازي المحور
الحقيقي كما في الشكل المجاور.

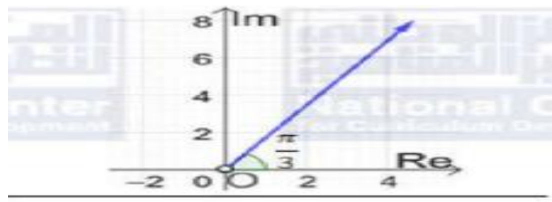


أتحقق من فهمي: (صفحة 169)

أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، ثم ارسمه في المستوى المركب.

$1)\ Arg(z) = \frac{\pi}{3}$

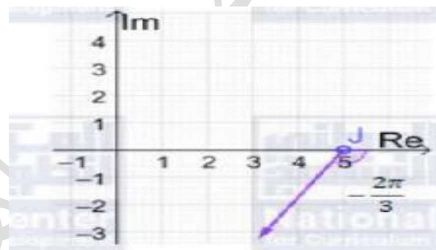
$Arg(z-(0)) = \frac{\pi}{3}$



تمثل هذه المعادلة شعاعاً يبدأ بالنقطة $(0,0)$ ، ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي

$2)\ Arg(z-5) = -\frac{2\pi}{3}$

$Arg(z-(5)) = -\frac{2\pi}{3}$



تمثل هذه المعادلة شعاعاً يبدأ بالنقطة $(5,0)$ ، ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي

تمثيل المتباينات في المستوى المركب

ملاحظات مهمة :

1) يعد حل المتباينة في المستوى المركب محلاً هندسياً يمكن تمثيله بيانياً بصورة مشابهة لتمثيل حل المتباينة في المستوى الإحداثي.

2) يتم رسم منحنى المعادلة المرتبطة بالمتباينة بعد استعمال رمز المساواة $(=)$ بدلاً من رمز المتباينة $(<, >, \leq, \geq)$، حيث تمثل المعادلة الناتجة منحنى يسمى المنحنى الحدودي.

3) يكون المنحنى الحدودي جزءاً من المحل الهندسي إذا تضمنت المتباينة الرمز $\geq$ ، أو الرمز $\leq$ ، فيرسم المنحنى الحدودي متصلاً .

4) لا يكون المنحنى الحدودي جزءاً من المحل الهندسي إذا تضمنت المتباينة الرمز $<$ ، أو الرمز $>$ ، فيرسم المنحنى الحدودي متقطعاً .

5) قد يكون المنحنى الحدودي مستقيماً ، أو شعاعاً، أو دائرة ، أو أي منحنى آخر.

مثال 4: (صفحة 170)

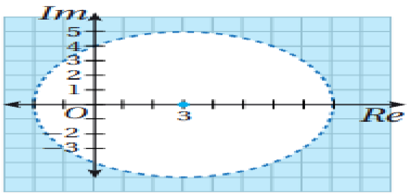
أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق كل متباينة مما يأتي:

1) $|z-3|>5$

الخطوة الأولى: أحدد منحنى الحدودي.

يمثل منحنى المعادلة $|z-3|>5$ المنحنى الحدودي للمتباينة $|z-3|>5$ ، وهو دائرة مركزها $(3,0)$ ، وطول نصف قطرها 5 وحدات ، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة ، فنرسم المنحنى الحدودي متقطعاً .

الخطوة الثانية: أحدد منطقة الحلول الممكنة.



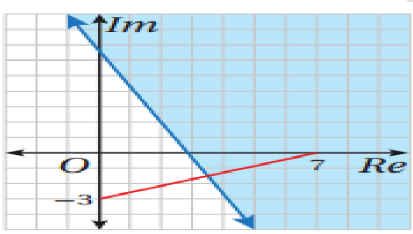
تبعد الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة $|z-3|>5$ مسافة تزيد على 5 وحدات عن مركز الدائرة ، إذن منطقة الحلول الممكنة للمتباينة تقع خارج محيط الدائرة ، $|z-3|=5$ كما في الشكل المجاور .

2) $|z-7|\le|z+3i|$

الخطوة الأولى: أحدد منحنى الحدودي.

يمثل منحنى المعادلة $|z-7|\le|z+3i|$ المنحنى الحدودي للمتباينة $|z-7|\le|z+3i|$ ، وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(7,0)$ و $(0,-3)$ وبما أنه لا يوجد مساواة في رمز المتباينة ، فإنني ارسم المنحنى الحدودي متصلاً .

الخطوة الثانية: أحدد منطقة الحلول الممكنة.



تتحقق المتباينة : $|z-7|\le|z+3i|$ في إحدى جهتي المنحنى الحدودي، ويمكن تحديدها باختبار عدد مركب عشوائياً في المتباينة.

اختبار العدد : $z=0+0i$ الذي تمثله نقطة الاصل :

$$|z-7|\le|z+3i| \implies |0-7|\le|0+3i| \implies \sqrt{49}\le\sqrt{9} \implies \boxed{7\le3}\ \times$$

بما أن العدد $z=0+0i$ لا يحقق المتباينة ، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي لا تحوي نقطة الأصل كما في الشكل المجاور .

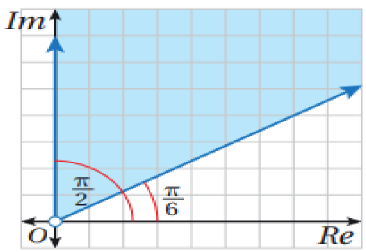
$3)\ \frac{\pi}{6} \leq Arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$

الخطوة الأولى: أحدد منحنى الحدودي.

- يمثل منحنى المعادلة $Arg(z) = \frac{\pi}{6}$ شعاعاً يبدأ بنقطة الأصل، ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{6}$ مع المحور الحقيقي الموجب ، ويمثل منحنى المعادلة : $Arg(z) = \frac{\pi}{2}$ شعاعاً آخر يبدأ بنقطة الأصل ، ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي الموجب .

- إذن يمثل الشعاعان معاً منحنى حدودياً للمتباينة : $\frac{\pi}{6} \leq Arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$ وبما أنه توجد مساواة في رمزي المتباينة ، فإنني أرسم المنحنى الحدودي متصلاً .

الخطوة الثانية: أحدد منطقة الحلول الممكنة.



المنطقة التي تمثلها المتباينة $\frac{\pi}{6} \leq Arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$ هي جزء من المستوى المركب محدود بشعاعين كما في الشكل المجاور.

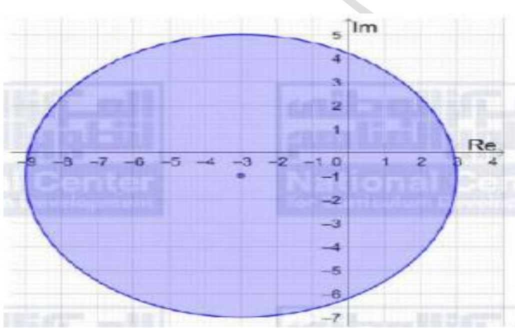
أتحقق من فهمي :(صفحة 172)

أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق كل متباينة مما يأتي:

$1)\ |z + 3 + i| \leq 6$

- المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z + 3 + i| \leq 6$ وهو دائرة مركزها $(-3, -1)$ وطول نصف قطرها 6 وحدات.

- وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلاً.



- أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد مسافة تقل عن 6 وحدات عن مركز الدائرة أو تساويها .

2) $|z + 3 + i| < |z - 4|$

- المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z + 3 + i| < |z - 4|$

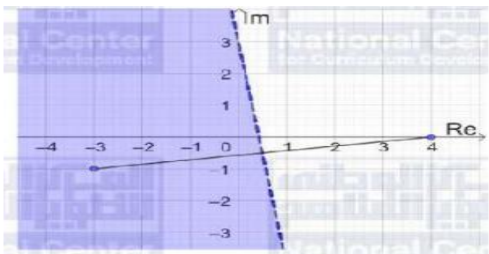
وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(-3, -1)$ و $(4, 0)$

- وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً .

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختبار نقطة الأصل مثلاً وتعويضها في المتباينة.

$|0 + 3 + i| < |0 - 4| \quad \Rightarrow \quad \sqrt{10} < 4 \quad \checkmark$

- بما أن نقطة الأصل تحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي نقطة الأصل.

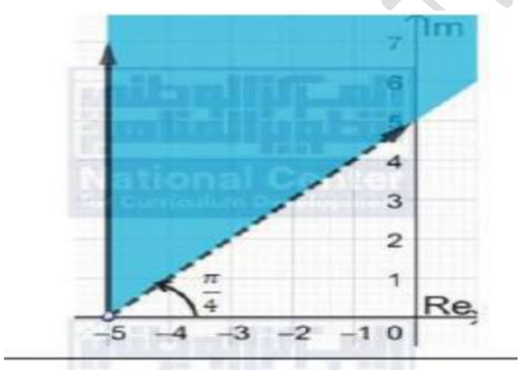


3) $\frac{\pi}{4} < Arg(z + 5) \leq \frac{\pi}{2}$

- يمثل منحنى المعادلة $Arg(z + 5) = \frac{\pi}{2}$ شعاعاً (نرسمه متصلاً بسب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-5, 0)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي .

- ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z + 5) = \frac{\pi}{4}$ شعاعاً (نرسمه متقطعاً بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-5, 0)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي .

- المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء المظلل من المستوى المركب كالآتي:



تمثيل نظام متباينات في المستوى المركب

يمكن تمثيل منطقة حل نظام متباينات بيانياً في المستوى المركب بصورة مشابهة لتمثيل أنظمة المتباينات في المستوى الإحداثي.

مثال 5:(صفحة 172)

أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة $|z-1-2i| \leq 5$ والمتباينة $\frac{\pi}{4} < Arg(z-1-2i) < \frac{2\pi}{3}$

الخطوة الأولى أحدد المنحنى الحدودي لكل متباينة.

تمثل المعادلة $|z-1-2i| \leq 5$ دائرة مركزها النقطة $(1,2)$ ، وطول نصف قطرها 5 وحدات ، وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة ، فإنني أرسم المنحنى الحدودي متصلاً .

تمثل المعادلة : $Arg(z-1-2i) = \frac{2\pi}{3}$ شعاعاً يبدأ بالنقطة $(1,2)$ ، ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي ، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة ، فإنني أرسم الشعاع متقطعا .

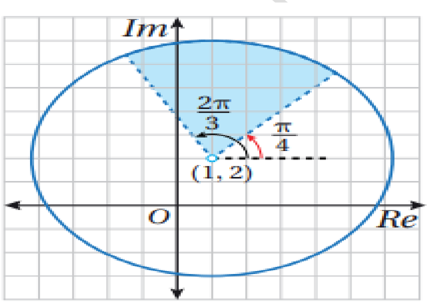
تمثل المعادلة : $Arg(z-1-2i) = \frac{2\pi}{3}$ شعاعاً يبدأ بالنقطة $(1,2)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي ، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة ، فإنني أرسم الشعاع متقطعا .

الخطوة الثانية: أحدد منطقة الحلول الممكنة.

تمثل المتباينة $|z-1-2i| \leq 5$ النقاط الواقعة داخل الدائرة ، وتمثل المتباينة : $\frac{\pi}{4} < Arg(z-1-2i) < \frac{2\pi}{3}$ النقاط الواقعة بين الشعاعين .

إذن المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معاً

هو الجزء الواقع داخل القطاع الدائري كما في الشكل المجاور.



أتحقق من فهمي: (صفحة 173)

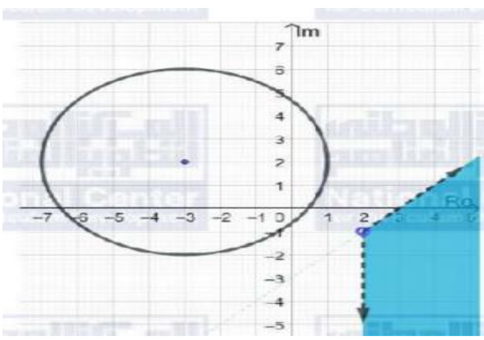
أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة $|z+3-2i| \geq 4$ والمتباينة $\frac{-\pi}{2} < Arg(z-2-i) < \frac{\pi}{4}$

- تمثل المعادلة $|z+3-2i| = 4$ دائرة مركزها النقطة $(-3,2)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات ، وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلاً .

- تمثل المعادلة $Arg(z-2-i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعاً يبدأ بالنقطة $(2,-1)$ ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي ، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة ، فإننا نرسم الشعاع متقطعا.

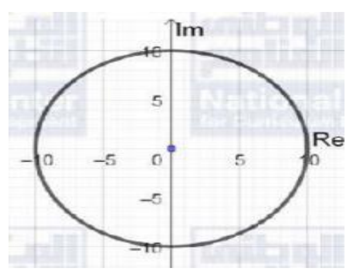
- تمثل المعادلة $Arg(z-2+i) > -\frac{\pi}{2}$ شعاعاً يبدأ بالنقطة $(2,-1)$ ، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{2}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي ، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة ، فإننيا نرسم الشعاع متقطعا .

- تمثل المتباينة $|z+3-2i| = 4$ النقاط الواقعة على الدائرة أو خارجها ، وتمثل المتباينة $\frac{-\pi}{2} < Arg(z-2+i) < \frac{\pi}{4}$ النقاط الواقعة بين الشعاعين، المنطقة التي تحقق المتباينتين هي الجزء المظلل في الرسم أدناه.



أتدرب وأحل المسائل: (صفحة 178)

أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، ثم أمثله في المستوى المركب، ثم أجد معادلته الديكارتيه :



$1)\ |z| = 10$

$|x+yi| = 10 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = 10$

$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = 10^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 = 100$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0,0)$ وطول نصف قطرها 10 وحدات .

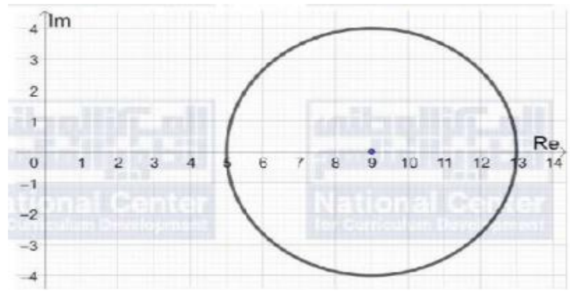
2) $|z-9|=4$

$|(x-9)+yi|=4$

$\sqrt{(x-9)^2+y^2}=4$

$\left(\sqrt{(x-9)^2+y^2}\right)^2=4^2$

$(x-9)^2+y^2=16$



المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(9,0)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات .

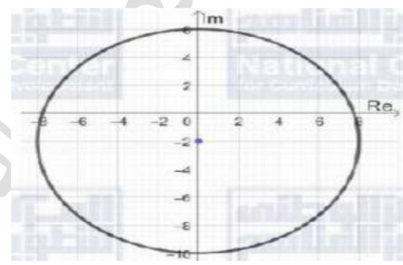
3) $|z+2i|=8$

$|x+(y+2)i|=8$

$\sqrt{x^2+(y+2)^2}=8$

$\left(\sqrt{x^2+(y+2)^2}\right)^2=8^2$

$x^2+(y+2)^2=64$



المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0,-2)$ وطول نصف قطرها 8 وحدات .

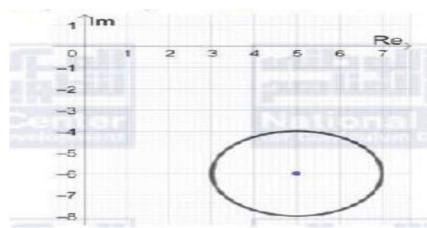
4) $|z-5+6i|=2$

$|(x-5)+(y+6)i|=2$

$\sqrt{(x-5)^2+(y+6)^2}=2$

$\left(\sqrt{(x-5)^2+(y+6)^2}\right)^2=2^2$

$(x-5)^2+(y+6)^2=4$

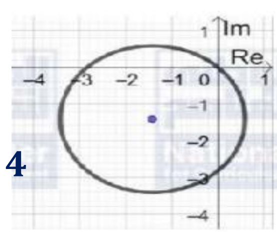


المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(5,-6)$ وطول نصف قطرها 2 وحدة .

5) $|z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}|=2$

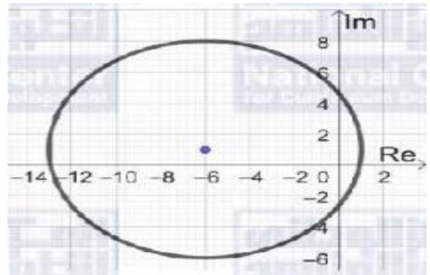
$|(x+\sqrt{2})+(y+\sqrt{2})i|=2 \quad \Rightarrow \sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2}=2$

$\left(\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2}\right)^2=2^2 \quad \Rightarrow (x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2=4$



المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ وطول نصف قطرها 2 وحدة.

$6)\ |z+6-i|=7$



$|(x+6)+i(y-1)|=7$

$\sqrt{(x+6)^2+(y-1)^2}=7$

$\left(\sqrt{(x+6)^2+(y-1)^2}\right)^2=7^2$

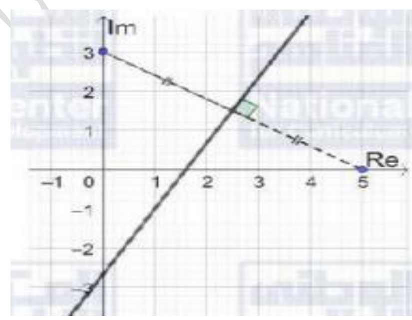
$(x+6)^2+(y-1)^2=49$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(-6,1)$ وطول نصف قطرها 7 وحدات.

$7)\ |z-5|=\ |z-3i|$

$|z-(5)|=\ |z-(3i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,3)$ ، $(5,0)$



$|(x-5)+yi|=\ |x+(y-3)i|$

$\sqrt{(x-5)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-3)^2}$

$(x-5)^2+y^2=\ x^2+(y-3)^2$

$x^2-10x+25+y^2=\ x^2+y^2-6y+9$

$10x-6y-16=0$

$5x-3y-8=0$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتيه هي : $5x-3y-8=0$

$8)\ |z+3i|=|z-7i|$

$|z-(-3i)|=|z-(7i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيم الواصلة بين النقطتين $(0,7)$ ، $(0,-3)$

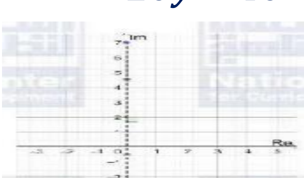
$|z-(-3i)|=|z-(7i)| \quad \Longrightarrow |x+(y+3)i|=\ |x+(y-7)i|$

$\sqrt{x^2+(y+3)^2}=\sqrt{x^2+(y-7)^2} \quad \Longrightarrow \quad x^2+(y+3)^2=\ x^2+(y-7)^2$

$\Longrightarrow \quad x^2+y^2+6y+9=\ x^2+y^2-14y+49$

$\Longrightarrow\ 20y-40=0 \quad \Longrightarrow y-2=0 \quad \Longrightarrow \boxed{y=2}$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتيه هي : $y=2$



$9)\ |z+5+2i| = |z-7|$

$|z-(-5-2i)| = |z-(7i)|$

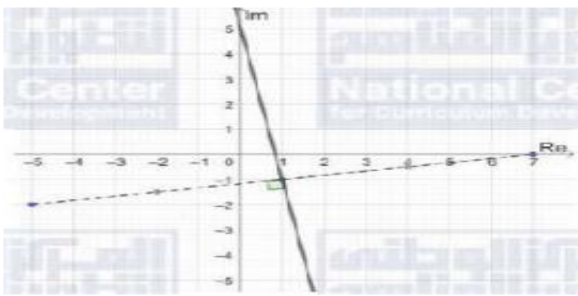
هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(7,0)$ ، $(-5,-2)$

$|(x+5)+(y+2)i| = |(x-7)+yi| \Longrightarrow \sqrt{(x+5)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-7)^2+y^2}$

$(x+5)^2+(y+2)^2 = (x-7)^2+y^2$

$\Longrightarrow\ x^2+10x+25+y^2+4y+4 = x^2-14x+49+y^2$

$24x+4y-20=0 \quad \Longrightarrow\ 6x+y-5=0$



إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة

بالصيغة الديكارتيه هي : $6x+y-5=0$

$10)\ |z-3| = |z-2-i|$

$|z-(3)| = |z-(2+i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(2,1)$ ، $(3,0)$

$|(x-3)+yi| = |(x-2)+(y-1)i|$

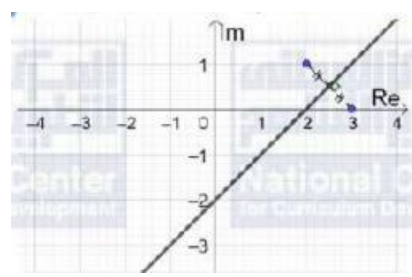
$\sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$

$(x-3)^2+y^2 = (x-2)^2+(y-1)^2$

$x^2-6x+9+y^2 = x^2-4x+4+y^2-2y+1$

$2x-2y-4=0$

$x-y-2=0$



إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتيه هي : $x-y-2=0$

$$11)\ \frac{|z+6-i|}{|z-10-5i|}=1$$

$|z+6-i| = |z-10-5i| \quad \Longrightarrow \quad |z-(-6+i)| = |z-(10+5i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(10,5)$ ، $(-6,1)$

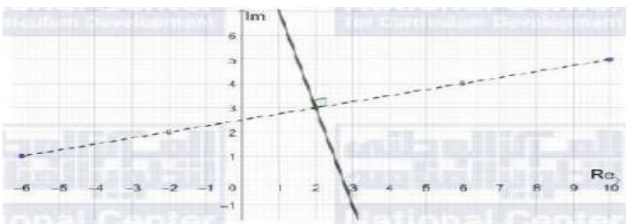
$|(x+6)-(y-1)i| = |(x-10)+(y-5)i|$

$\sqrt{(x+6)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}$

$(x+6)^2+(y-1)^2 = (x-10)^2+(y-5)^2$

$x^2+12x+36+y^2-2y+1 = x^2-20x+100+y^2-10y+25$

$32x+8y-88=0$



إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة

بالصيغة الديكارتيه هي : $4x+y-11=0$

$12)\ |z+7+2i| = |z-4-3i|$

$|z-(-7-2i)| = |z-(4+3i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(4,3)$ ، $(-7,-2)$

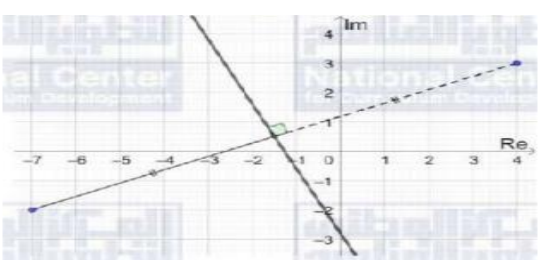
$|(x+7)-(y+2)i| = |(x-4)+(y-3)i|$

$\sqrt{(x+7)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}$

$(x+7)^2+(y+2)^2 = (x-4)^2+(y-3)^2$

$x^2+14x+49+y^2+4y+4 = x^2-8x+16+y^2-6y+9$

$22x+10y+28=0 \quad \Longrightarrow \quad 11x+5y+14=0$



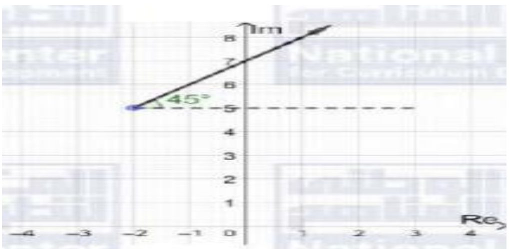
إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة

بالصيغة الديكارتيه هي : $11x+5y+14=0$

أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل من المعادلات الآتية، ثم أرسمه في المستوى المركب:

13) $Arg(z+2-5i)=\frac{\pi}{4}$

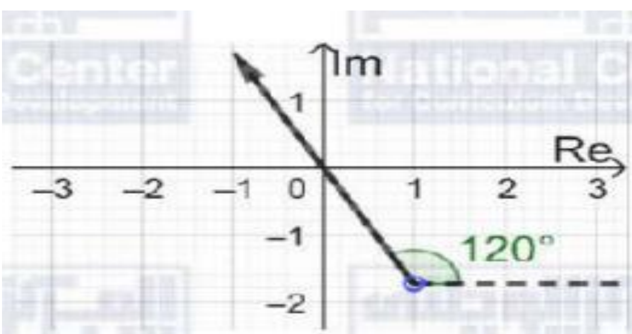
$Arg(z-(-2+5i))=\frac{\pi}{4}$



المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي .

14) $Arg(z-1-i\sqrt{3})=\frac{2\pi}{3}$

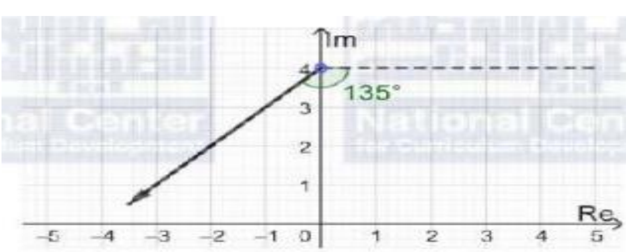
$Arg\left(z-(1-i\sqrt{3})\right)=\frac{2\pi}{3}$



المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(1,-\sqrt{3})$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي .

15) $Arg(z-4i)=-\frac{3\pi}{4}$

$Arg(z-(4i))=-\frac{3\pi}{4}$



المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(0,4)$ ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $-\frac{3\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.

أمثل في المستوى المركب المنطقة التي تحددها كل متباينة مما يأتي:

16) $|z-2| < |z+2|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-2| = |z+2|$ ، وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(-2,0)$ و $(2,0)$.

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً .

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z = 1+i$ مثلاً وتعويضه في المتباينة .

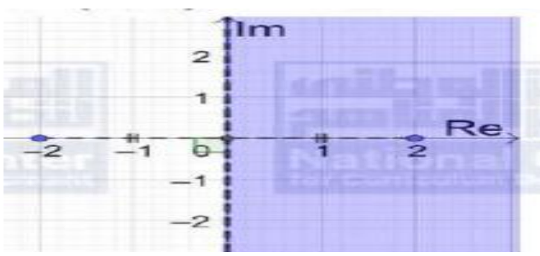
$|1+i-2| < |1+i+2|$

$|-1+i| < |3+i|$

$\sqrt{2} < \sqrt{10}$ ✓

بما أن $z = -1+i$ حقق المتباينة ، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z = -1+i$

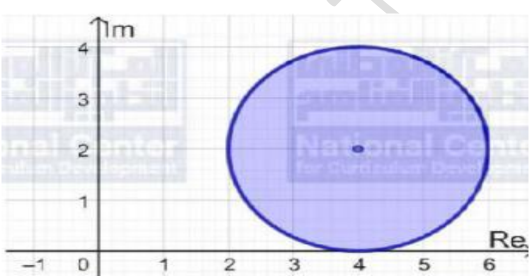
(أي نختار الجهة التي يكون فيها بعد النقاط عن النقطة $(2,0)$ أقل من بعدها عن النقطة $(-2,0)$) .



17) $|z-4-2i| \le 2$

$|z-(4+2i)| \le 2$

- المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-4-2i| = 2$ وهو دائرة مركزها $(4,2)$ وطول نصف قطرها وحدتان .
- وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلاً .
- أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف قطرها أو تساويها.



18) $|z-4| > |z-6|$

- المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-4| = |z-6|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين $(6,0)$ و $(4,0)$.

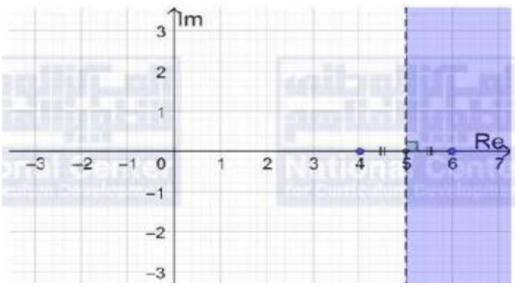
- وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً.

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z = 0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة .

$|0-4| > |0-6|$

$2 > \sqrt{6}$ ✗

بما أن العدد $z = 0$ لا يحقق المتباينة ، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي لا تحوي $z = 0$ (أي نختار الجهة التي يكون فيها بعد النقاط عن النقطة $(4,0)$ أكبر من بعدها عن النقطة $(6,0)$.

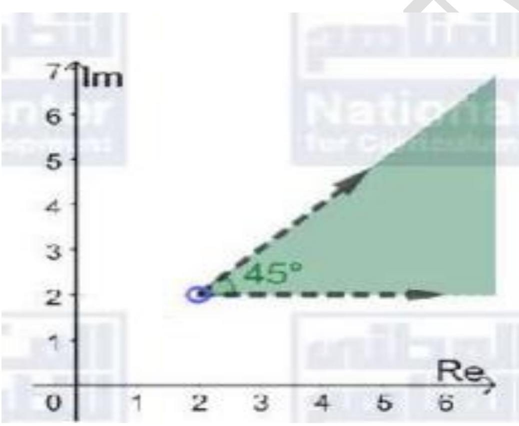


19) $0 < Arg(z-2-2i) < \frac{\pi}{4}$

- يمثل منحنى المعادلة $Arg(z-2-2i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعاً (نرسمه متقطعاً بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة)، يبدأ من النقطة $(2,2)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.

- ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z-2-2i) = 0$ شعاعاً (نرسمه متقطعاً بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) ، يبدأ من النقطة $(2,2)$ ولا يشملها، ويوازي المحور الحقيقي.

- المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء من المستوى المركب المحصور بين هذين الشعاعين.

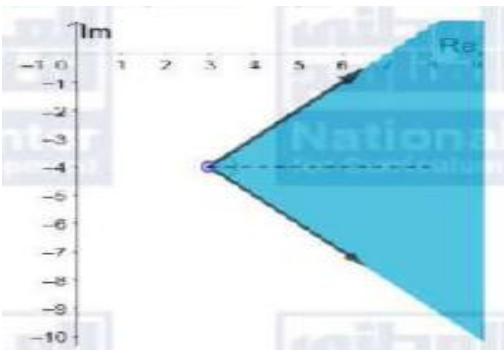


$20)\ -\frac{\pi}{4} \le Arg(z-3+4i) \le \frac{\pi}{4}$

- يمثل منحنى المعادلة $Arg(z-3+4i)=\frac{\pi}{4}$ شعاعاً (نرسمه متصلاً بسبب وجود مساواة في المتباينة) ، يبدأ من النقطة $(3,-4)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي .

- ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z-3+4i)=-\frac{\pi}{4}$ شعاعاً (نرسمه متصلاً بسبب وجود مساواة في المتباينة)، يبدأ من النقطة $(3,-4)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.

- المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء من المستوى المركب المبين في الشكل:

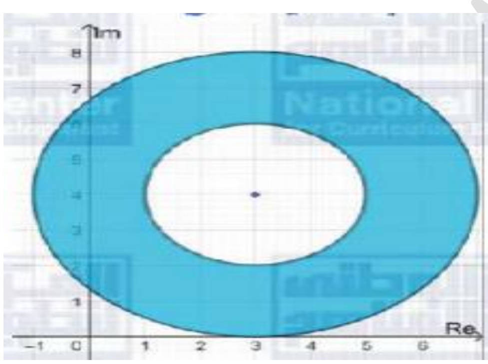


$21)\ 2 \le |z-3-4i| \le 4$

- يمثل منحنى المعادلة $|z-(3+4i)|=2$ دائرة مركزها $(3,4)$ وطول نصف قطرها وحدتان .

- وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا ترسم المنحنى الحدودي متصلاً .

- يمثل منحنى المعادلة $|z-(3+4i)|=4$ دائرة مركزها $(3,4)$ وطول نصف قطرها 4 .

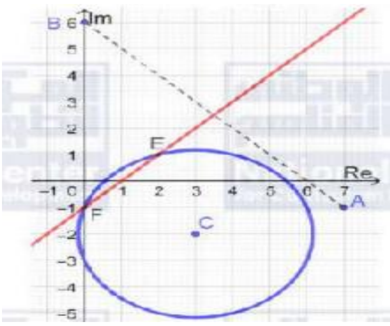


- وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا ترسم المنحنى الحدودي متصلاً .

أما منطقة المحل الهندسي فهي المنطقة التي تحوي جميع الأعداد الواقعة على الدائرتين أو بينهما.

22) أمثل في المستوى المركب نفسه المحل الهندسي الذي تمثله كل من المعادلة:

$|z-3-2i|=\sqrt{10}$ ، والمعادلة $|z-7+i| = |z-6i|$ ، ثم أجد الأعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معاً .



- المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة $|z-3+2i|=\sqrt{10}$

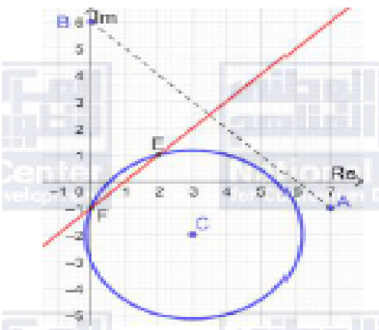
هو دائرة مركزها $(3,-2)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{10}$ وحدات ،

ومعادلتها الديكارتيه هي : $(x-3)^2+(y+2)^2=10$.

- المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة $|z-6i| = |z-7+i|$ هو

المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,6)$ و $(7,-1)$ ،

نستطيع إيجاد معادلته الديكارتيه عن طريق ميل العمودي ونقطة منتصف القطعة المستقيمة.



ميل القطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,6)$ و $(7,-1)$ هو -1 ،

فميل المنصف العمودي لها هو 1

$$m=1\ ,\ M\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right) \Rightarrow y-\frac{5}{2}=x-\frac{7}{2} \Rightarrow y=x-1$$

لإيجاد الأعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معاً ، نجد نقاط تقاطع المنحنيين:

$\boxed{y=x-1}$ و $(x-3)^2+(y+2)^2=10$ بالتعويض :

$$(x-3)^2+(y+2)^2=10 \Rightarrow (x-3)^2+(x-1+2)^2=10$$

$$\Rightarrow (x-3)^2+(x+1)^2=10 \Rightarrow x^2-6x+9+x^2+2x+1=10$$

$$\Rightarrow 2x^2-4x+10=10 \Rightarrow 2x^2-4x=0 \Rightarrow 2x(x-2)=0$$

$$2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \Rightarrow y=0-1 \Rightarrow \boxed{y=-1}$$

$$x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2} \Rightarrow y=2-1 \Rightarrow \boxed{y=1}$$

العددان المركبان اللذان يحققان المعادلتين معاً هما : $z_1=-i\ ,z_2=2+i$

23) أجدد العدد المركب الذي يحقق كلاً من المحل الهندسي: $|z-3|=|z+2i|$، والمحل الهندسي: $|z+3-i|=|z-1+5i|$.

$$|z-3|=|z+2i| \Rightarrow |(z-3)+yi|=|x+(y+2)i|$$

$$\Rightarrow (x-3)^2+y^2=x^2+(y+2)^2 \Rightarrow x^2-6x+9+y^2=x^2+y^2++4y+4$$

$$\Rightarrow -6x+9=4y+4 \Rightarrow \boxed{6x+4y=5} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$|z+3-i| = |z-1+5i| \quad \Longrightarrow \quad |(x+3)+(y-1)i| = |(x-1)+(y+5)i|$

$\Longrightarrow \quad (x+3)^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (y+5)^2$

$\Longrightarrow \quad x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 10y + 25$

$\Longrightarrow 8x - 12y = 16 \Longrightarrow 2x - 3y = 4 \Longrightarrow 2x = 4 + 3y \Longrightarrow \boxed{x = 2 + \frac{3}{2}y} \ldots(2)$

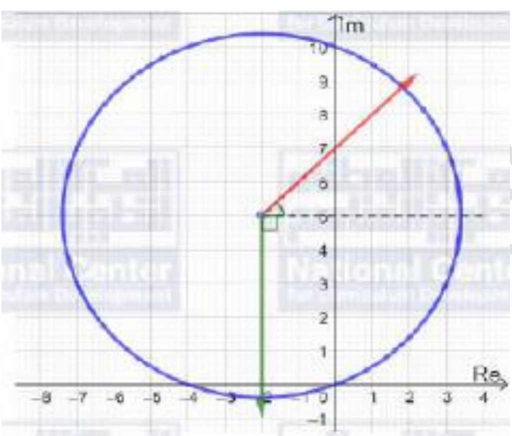
$\Longrightarrow 6\left(2 + \frac{3}{2}y\right) + 4y = 5 \Longrightarrow 12 + 9y + 4y = 5 \Longrightarrow 13y = -7 \Longrightarrow \boxed{y = -\frac{7}{13}}$

$x = 2 + \frac{3}{2}\left(-\frac{7}{13}\right) \quad \Longrightarrow \quad x = 2 - \frac{21}{26} \Longrightarrow \boxed{x = \frac{31}{26}}$

ويكون العدد المركب الذي يحقق كلاً من المعادلتين هو : $z = \frac{31}{26} - \frac{7}{13}i$

24) أمثل في المستوى المركب نفسه المحل الهندسي الذي تمثله كل من المعادلات الآتية:

$Arg(z+2-5i) = \frac{\pi}{4} \;, \quad Arg(z+2-5i) = \frac{-\pi}{2} \;, \quad |z+2-5i| = \sqrt{29}$



يمثل منحنى المعادلة $Arg(z+2-5i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعاً يبدأ بالنقطة $(-2,5)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z+2-5i) = -\frac{\pi}{2}$ شعاعاً يبدأ بالنقطة $(-2,5)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{2}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي.

ويمثل منحنى المعادلة $|z+2-5i| = \sqrt{29}$ دائرة مركزها $(-2,5)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{29}$

25) أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة: $|z-3|>|z+2i|$ والمتباينة: $|z+3-i|<|z-1+5i|$.

$1)\ |z-3|>|z+2i|$

- المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-3|>|z+2i|$ ، وهو المنصف العمودي للقطعه المستقيمة التي طرفاها $(0,-2)$ و $(3,0)$.

- وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً .

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة.

$|0-3|>|0+2i| \implies 3>2$ ✓

- بما أنه العدد 0 يحقق المتباينة ، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z=0$ (نقطة الأصل) .

$2)\ |z+3-i|<|z-1+5i|$

- المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z+3-i|=|z-1+5i|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(1,-5)$ و $(-3,1)$.

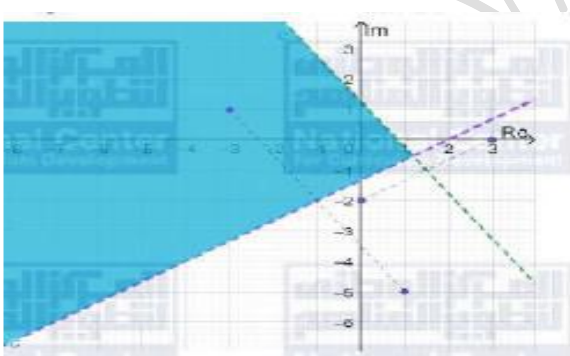
- وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً .

- نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة.

$|0+3-i|<|0-1+5i| \implies \sqrt{10}<\sqrt{26}$ ✓

- بما أنه العدد 0 يحقق المتباينة ، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z=0$ (نقطة الأصل) .

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معاً هو المنطقة المظللة في الشكل المجاور.



26) أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة:

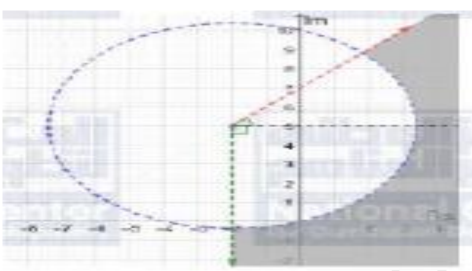
$\frac{-\pi}{2} < Arg(z+2-5i) < \frac{\pi}{4}$ ، والمتباينة : $|z+2-5i| > \sqrt{29}$

$$1)\ -\frac{\pi}{2} < Arg(z+2-5i) < \frac{\pi}{4}$$

- يمثل منحنى المعادلة $Arg(z+2-5i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعاً (نرسمه متقطعاً بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) ، يبدأ من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازي للمحور الحقيقي .

- ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z+2-5i) = -\frac{\pi}{2}$ شعاعاً (نرسمه متقطعاً بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) ، يبدأ من النقطة $(-2,5)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{2}$ مع مستقيم موازي للمحور الحقيقي.

$$2)\ |z+2-5i| > \sqrt{29}$$



- ويمثل منحنى المعادلة $|z-3+i| = \sqrt{29}$ دائرة

مركزها $(-2,5)$ وطول نصف قطرها $\sqrt{29}$

نرسمها متقطعة بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معاً هو

المنطقة المظللة في الشكل المجاور.

27) أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة:

$\frac{-\pi}{4} \leq Arg(z-2i) \leq \frac{\pi}{3}$ ، والمتباينة : $2 < |z-3+i| \leq 5$

$$1)\ -\frac{\pi}{4} \leq Arg(z-2i) \leq \frac{\pi}{3}$$

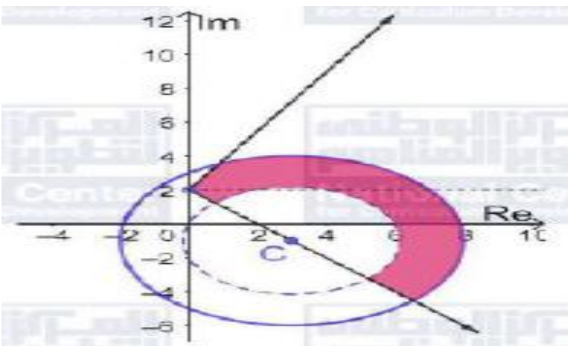
- يمثل منحنى المعادلة $Arg(z-2i) = -\frac{\pi}{4}$ شعاعاً (نرسمه متصلاً بسبب وجود مساواة في المتباينة) ، يبدأ من النقطة $(0,2)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازي للمحور الحقيقي .

- ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z-2i)=\frac{\pi}{3}$ شعاعاً (نرسمه متصلاً بسبب وجود مساواة في المتباينة) ، يبدأ من النقطة $(0,2)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ مع مستقيم موازي للمحور الحقيقي .

$2)\quad 2<|z-3+i|\le 5$

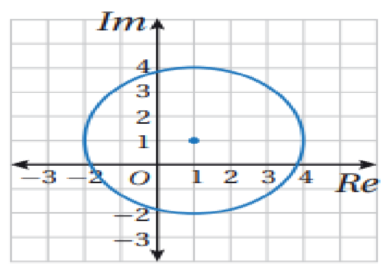
- ويمثل منحنى المعادلة $|z-3+i|=5$ دائرة مركزها $(3,-1)$ وطول نصف قطرها 5 ، نرسمها متقطعة بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة.

- المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معاً هو المنطقة المظللة في الشكل المجاور.



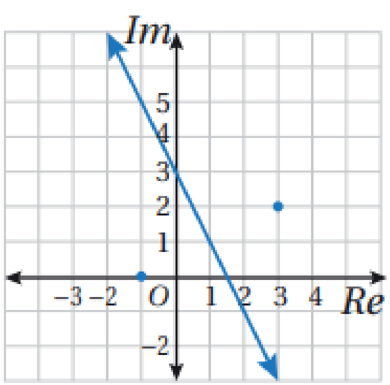
اكتب بدلالة z معادلة المحل الهندسي الممثل بيانياً في كل مما يأتي :

28



$|z-(1+i)|=3$

29



نبدأ بالتحقق من ان المستقيم المرسوم هو فعلاً العمود المنصف القطعة المستقيمة التي طرفاها $(3,2)$ و $(-1,0)$:

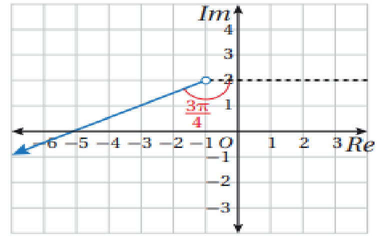
- ميل القطعة المستقيمة يساوي $\frac{1}{2}$ وميل المستقيم يساوي -2 فهما متعامدان .

- معادلة المستقيم هي : $y=3-2x$ ، ونقطة منتصف القطعة المستقيمة هي $(1,1)$ وهي واقعة على المستقيم لأن إحداثييها يحققان معادلته.

- إذن المستقيم المرسوم هو المنصف العمودي للقطعة، ومعادلته:

$|z-(3+2i)|=|z-(-1)| \quad \Longrightarrow |z-3-2i|=|z+1|$

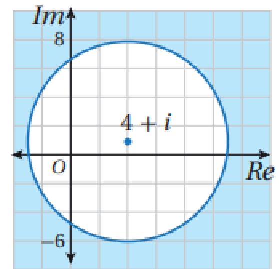
30) اكتب معادلة في صورة : $Arg(z-a)=\theta$ ، حيث a عدد مركب ، و $-\pi<\theta\le\pi$ تمثل المحل الهندسي المبين في الشكل المجاور .



$$Arg(z+1-2i)=-\frac{3\pi}{4}$$

اكتب بدلالة z نظام متباينة المحل الهندسي الذي تمثله المنطقة المظللة في كل مما يأتي :

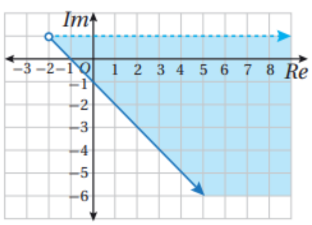
31



$$r=\sqrt{(4-4)^2+(1-8)^2}\implies r=\sqrt{49}\implies r=7$$

$$\implies |z-(4+i)|\ge 7$$

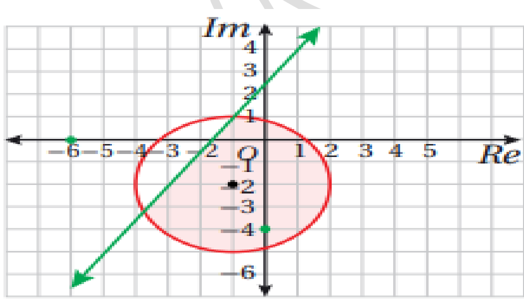
32



قياس الزاوية بين الشعاع والمستقيم الموازي للمحور الحقيقي هو $-\frac{\pi}{4}$ لأن ميل الشعاع -1

$$-\frac{\pi}{4}<Arg(z+2-i)<0$$

33) اكتب بدلالة z نظام متباينات يمثل النحل الهندسي المبين في الشكل المجاور .



الجزء المظلل يقع داخل دائرة مركزها $(-1,-2)$

وطول نصف قطرها 3 وحدات وهي مرسومة متصلة

فالمتباينة المرتبطة بها هي:

$$|z-(-1-2i)|\le 3 \implies |z=1+2i|\le 3$$

والمستقيم المرسوم متصل نجد ان ميله يساوي $\frac{6}{4}$ ، وميل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,-4)$ ، $(-6,0)$ هو $\frac{-4}{6}$ فهما متعامدان ونلاحظ ان المستقيم يمر بالنقطة $(-5,-5)$ فمعادلته هي : $y+5=\frac{6}{4}(x+5)$

وإذا عوضنا إحداثيي منتصف القطعة الواصلة بين $(0,-4)$ ، $(-6,0)$ ، وهي $(-3,-2)$ نجد أنها تحققها ، مما يعني أن المستقيم هو المنصف العمودي للقطعة الواصلة بين $(0,-4)$ ، $(-6,0)$ ، والمنطقة المظللة تمثل الأعداد المركبة الأقرب إلى النقطة $(0,-4)$ فالمتباينة المرتبطة بهذا المستقيم هي :

$$|z+6| \geq |z+4i|$$

إذن نظام المتباينات الذي يمثل المحل الهندسي المبين في الشكل المعطى هو:

$$|z+1+2i| \leq 3$$

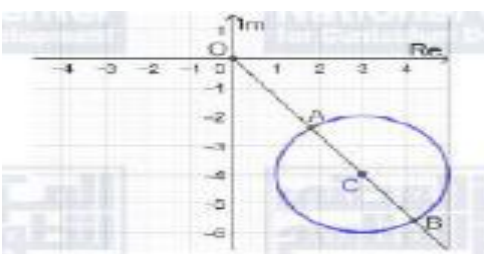
$$|z+6| \geq |z+4i|$$

مهارات التفكير العليا:

34) تبرير : إذا كان العدد المركب z يحقق المعادلة $|z-3+4i|=2$ فأجد أكبر قيمة $|z|$ وأقل قيمة له ، مبرراً إجابتي.

$$|z-3+4i|=2 \;\Longrightarrow\; |z-(3-4i)|=2$$

z يقع على الدائرة التي مركزها $(3,-4)$ وطول نصف قطرها 2 .



نفرض $z=x+yi$ فإن :

$|z|$ يساوي $\sqrt{x^2+y^2}$ وهو يمثل البعد بين النقطة (x,y) ونقطة الأصل في المستوى الديكارتي.

من الشكل أعلاه نجد ان:

$$OC=\sqrt{9+16} \;\Longrightarrow\; OC=\sqrt{25} \;\Longrightarrow\; OC=5$$

أقل قيمة لـ $|z|$ هي مقياس العدد الذي تمثله النقطة A وهي : $|z|=OC-r=5-2=3$

أقل قيمة لـ $|z|$ هي مقياس العدد الذي تمثله النقطة B وهي : $|z|=OC+r=5+2=7$

35) تحد : أثبت المعادلة $|z-6|=2|z+6-9i|$ تمثل دائرة ، ثم أجد مركزها وطول نصف قطرها .

$$|z-6|=2|z+6-9i| \;\Longrightarrow\; |x-6+yi|=2|(x+6)+(y-9)i|$$

$$(x-6)^2+(y)^2=4((x+6)^2+(y-9)^2)$$

$$x^2-12x+36+y^2=4(x^2+12x+36+y^2-18y+81)$$

$$x^2-12x+36+y^2=4x^2+48x+144+4y^2-72y+324$$

$$3x^2+3y^2+60x-72y+432=0 \implies x^2+y^2+20x-24y=-144$$

$$(x+10)^2-100=0$$

$$(y-12)^2-144=0$$

$$(x+10)^2-100+(y-12)^2-144=-144$$

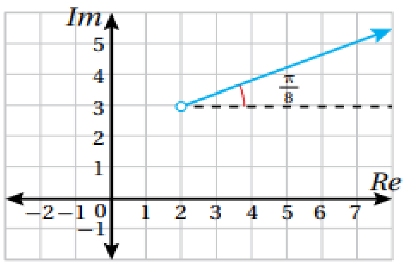
$$(x+10)^2+(y-12)^2=-144+100+144$$

$$(x+10)^2+(y-12)^2=100$$

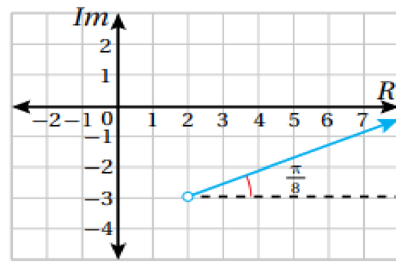
وهي معادلة دائرة مركزها $(-10,12)$ وطول نصف قطرها 10 وحدات

36) تبرير : أي الآتية هو المحل الهندسي الذي معادلته : $Arg(z-2+3i)=\frac{\pi}{8}$ ، مبرراً إجابتي؟

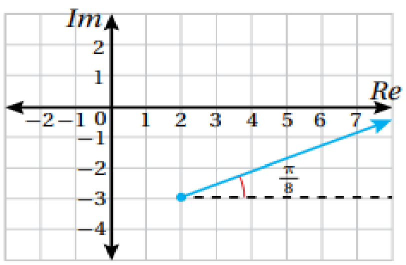
a)



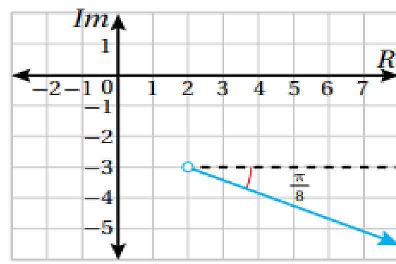
b)



c)



d)



المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(2,-3)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{8}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي ، وهو الممثل بالشكل b .

اما الشكل a فنقطة بداية الشعاع ليست صحيحية .

والشكل c فنقطة بداية الشعاع مشمولة ، وهو ليس صحيحاً.

والشكل d فنقطة العدد المركب هي $-\frac{\pi}{8}$ وهو مخالف للسعة المعطاة بالمعادلة .

اختبار نهاية الوحدة:

اختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) إذا كان : $\sqrt{-1} = i$ ، فإن i^{343} تساوي :

$a)-1$ $b)\ 1$ $\boxed{c)-i}$ $d)\ i$

$i^{343} = i^3 = -1$

2) ناتج: $(1-i)^3$ هو:

$a)-2+2i$ $\boxed{b)\ -2-2i}$ $c)\ 2-2i$ $d)\ 2+2i$

$(1-i)^3 \Rightarrow = (1-i)^2(1-i) \Rightarrow = (1-2i-1)(1-i) \Rightarrow = (-2i)(1-i) \Rightarrow = -2i-2$

3) إذا كان: $2i$ ، هو أحد جذور المعادلة $az^3 + 5z^2 + 8z + 20 = 0$ فإن قيمة a تساوي:

$a)-8$ $b)-2$ $\boxed{c)\ 2}$ $d)\ 8$

$a(2i)^3 + 5(2i)^2 + 8(2i) + 20 = 0 \Rightarrow a8i^3 + 5(4i^2) + 16i + 20 = 0$

$-a8i - 20 + 16i + 20 = 0 \Rightarrow -a8i + 16i = 0$

$\Rightarrow i(-a8+16) = 0 \Rightarrow -a8+16 = 0 \Rightarrow a8 = 16 \Rightarrow a = 2$

4) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = -1 + i\sqrt{3}$ هي :

$a)2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\boxed{b)\ 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$

$c)\ 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $d)\ 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{1+3} \Rightarrow |z| = \sqrt{4} \Rightarrow |z| = 2$

$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) \Rightarrow = \pi - \tan^{-1}(\sqrt{3}) \Rightarrow = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow = \frac{2\pi}{3}$

$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

5) الصورة القياسية لناتج $8\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \div 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ هي:

$\boxed{a)\ 4i}$ $\quad b)\ -4$ $\quad c)\ -4+4i$ $\quad d)\ 4-4i$

$$=\frac{8}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right) \Longrightarrow = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \quad \Longrightarrow = 4(0+i) \quad \Longrightarrow = 4i$$

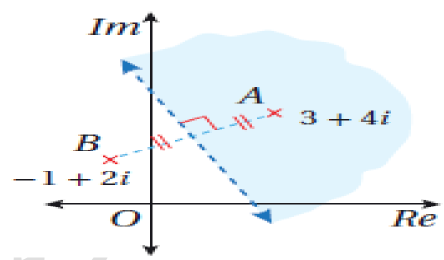
6) أحدى الآتية تصف المنطقة المظللة في الشكل المجاور:

$a)\ |z-1+2i| < |z+3+4i|$

$b)\ |z-1+2i| > |z+3+4i|$

$c)\ |z+1-2i| < |z-3-4i|$

$\boxed{d)\ |z+1-2i| > |z-3-4i|}$



$|z-(-1+2i)|\quad |z-(3+4i)|$

$|z+1-2i|\qquad |z-3-4i|$

لتحديد الإشارة $<$ أو $>$ لأنه لا يوجد نقطة محددة يمكن اختيارها في منطقة الحل ليتم تعويضها.

نختار النقطة $(0,0)$ وهي خارج منطقة الحل ليتم تعويضها ونتيجة التعويض تكون عبارة خاطئة.

$(0,0) \to z = 0+0i$

$|z+1-2i| \qquad |z-3-4i|$

$|0+0i\ +1-2i| \qquad |0+0i\ -3-4i|$

$|1-2i| \qquad |-3-4i|$

$\sqrt{(1)^2+(2)^2} \qquad \sqrt{(-3)^2+(-4)^2}$

$\sqrt{1+4} \qquad \sqrt{9+16}$

$\sqrt{5} \quad > \quad \sqrt{25}$

إذن الإجابة الصحيحة هي d:

$|z+1-2i|\ > |z-3-4i|$

7) أجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $z = 45 - 28i$

$$\sqrt{45-28i} = x + yi \implies \left(\sqrt{45-28i}\right)^2 = (x+yi)^2 \implies 45 - 28i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = 45 \implies 2xy = -28 \implies y = -\frac{28}{2x} \implies y = -\frac{14}{x}$$

$$x^2 - y^2 = 45 \implies x^2 - \left(-\frac{14}{x}\right)^2 = 45 \implies \left[x^2 - \frac{196}{x^2} = 45\right] \times x^2$$

$$\implies x^4 - 196 = 45x^2 \implies x^4 - 45x^2 - 196 = 0 \implies (x^2-49)(x^2+4) = 0$$

$$x^2 - 49 = 0 \implies x^2 = 49 \implies \boxed{x = \pm 7}$$

$$y = -\frac{14}{x} \implies y = \frac{-14}{7} \implies \boxed{y = -2} \implies y = \frac{-14}{-7} \implies \boxed{y = 2}$$

$$x = 7 \;, y = -2 \quad or\; x = -7 \;, y = 2$$

الجذران التربيعيان للعدد $z = 45 - 28i$ هما : $7 - 2i$ و $-7 + 2i$

8) أجد مقياس العدد المركب : $w = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}i$ ، وسعته ، مقرباً إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين .

$$|w| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \implies |w| = \sqrt{\frac{3}{9} + \frac{1}{4}} \implies |w| = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}$$

$$\implies |w| = \sqrt{\frac{7}{12}} \implies |w| \approx 0.76$$

$$Arg(w) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)\right) \implies = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \implies = -2.43$$

9) إذا كان : $z = -8 + 8i$ ، وكان : $w = a + 2i$ ، حيث $a < 0$ فأجد قيمة a ، علماً بأن :
$|z + w| = 26$

$$z + w = (-8 + 8i) + (a + 2i) \implies z + w = (-8 + a) + (8 + 2)i$$

$$z + w = -8 + a + 10i \implies |z + w| = \sqrt{(a-8)^2 + (10)^2} = 26$$

$$\implies \sqrt{(a-8)^2 + (10)^2} = 26 \implies (a-8)^2 + (10)^2 = 676$$

$$\implies (a-8)^2 + 100 = 676 \implies (a-8)^2 = 576 \implies a - 8 = \pm 24$$

$$\implies a = 24 + 8 \implies a = 32 \implies a = -24 + 8 \implies \boxed{a = -16}$$

ولأن $a < 0$ ، فإن : $a = -16$

إذا كان : $w = \frac{14-31i}{3-2i}$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

10) اكتب العدد w في صورة : $x+yi$.

$$w = \frac{14-31i}{3-2i} \Longrightarrow w = \frac{14-31i}{3-2i} \times \frac{3+2i}{3+2i} \Longrightarrow w = \frac{42+28i-93i+62}{(3)^2+(2)^2}$$

$$\Longrightarrow w = \frac{104-65i}{13} \Longrightarrow w = \frac{104}{13} - \frac{65}{13}i \Longrightarrow w = 8-5i$$

11) إذا كان العدد w هو أحد جذور المعادلة : $z^2+cz+d=0$ ، فأجد قيمة كل من العددين الحقيقيين c و d .

$$z^2+cz+d=0$$

$$(8-5i)^2+c(8-5i)+d=0 \Longrightarrow (64-80i-25)+(8c-5ci)+d=0$$

$$\Longrightarrow 39-80i+8c-5i+d=0 \Longrightarrow 39+8c+d-(80+5c)i=0$$

$$80+5c=0 \Longrightarrow 5c=-80 \Longrightarrow \boxed{c=-16}$$

$$39+8c+d=0 \Longrightarrow 39+8(-16)+d=0$$

$$\Longrightarrow 39-128+d=0 \Longrightarrow -89+d=0 \Longrightarrow \boxed{d=89}$$

حل آخر:

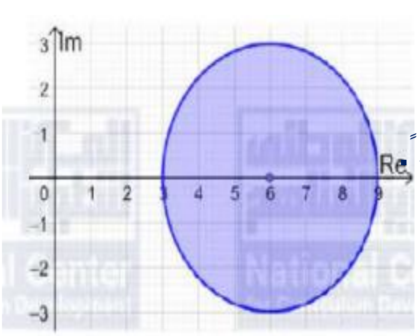
$$w=8-5i \Longrightarrow \bar{w}=8+5i$$

$$c=-(w+\bar{w}) \Longrightarrow c=-\big((8-5i)+(8+5i)\big) \Longrightarrow c=-(8-5i+8+5i) \Longrightarrow \boxed{c=-16}$$

$$d=(w\times\bar{w}) \Longrightarrow d=(8-5i)\times(8+5i) \Longrightarrow d=(8)^2+(5)^2 \Longrightarrow d=64+25 \Longrightarrow \boxed{d=89}$$

أمثل في المستوى المركب المنطقة التي تحددها كل متباينة مما يأتي:

12) $|z-6| \le 3$



- المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته : $|z-6|=3$ ، وهو دائرة مركزها $(6,0)$ وطول نصف قطرها 3 وحدات.

- وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلاً

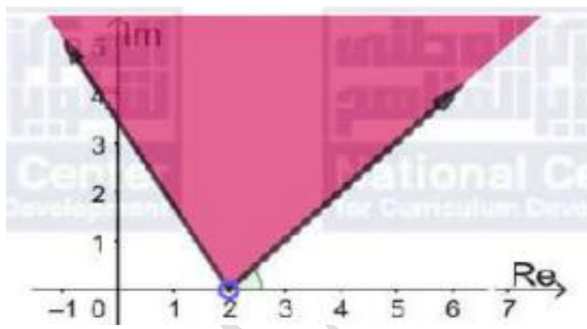
- أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، ولأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر أو تساويها.

$13)\ \frac{\pi}{4} \leq Arg(z-2) \leq \frac{2\pi}{3}$

- يمثل منحنى المعادلة $Arg(z-2) = \frac{\pi}{4}$ شعاعا (نرسمه متصلاً بسبب وجود المساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2,0)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي

- ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z-2) = \frac{2\pi}{3}$ شعاعاً (نرسمه متصلاً بسبب وجود المساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(2,0)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي

- المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه:



$14)\ |z+1+i| > |z-3-3i|$

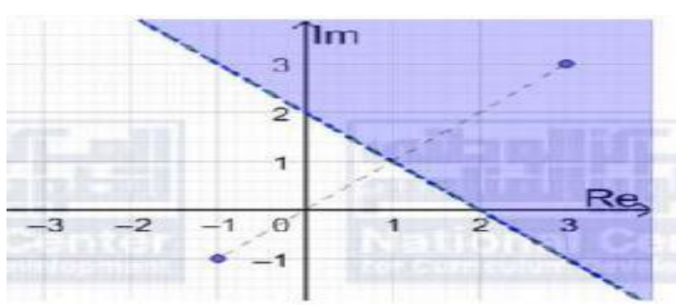
- المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z+1+i| = |z-3-3i|$ وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(3,3)$ و $(-1,-1)$.

- وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً.

- نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z=0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة .

$$|0+1+i| > |0-3-3i| \rightarrow \sqrt{2} > \sqrt{18} \quad \chi$$

- بما أن العدد $z=0$ لا يحقق المتباينة ، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي لا تحوي $z=0$



إذا مثلت النقطة M العدد : $z_1 = 1 - 8i$ ، ومثلت النقطة N العدد : $z_2 = 4 + 7i$ وكانت O هي نقطة الأصل ، فأجب عن الاسئلة الآتية تباعاً :

15) ابين أن المثلث OMN متطابق الضلعين .

$$NO = \sqrt{16+49} \implies NO = \sqrt{65} \implies MO = \sqrt{1+64} \implies MO = \sqrt{65}$$

إذن المثلث OMN متطابق الضلعين .

16) أبين أن جيب تمام الزاوية MON يساوي $-\frac{4}{5}$

باستخدام قانون جيوب التمام في المثلث OMN :

$$(NM)^2 = (NO)^2 + (MO)^2 - 2(NO)(MO)\cos\angle MON$$

$$\cos\angle MON = -\frac{234-130}{130} \implies \cos\angle MON = -\frac{4}{5}$$

17) أجد مساحة المثلث OMN .

$$A = \frac{1}{2}(NO)(MO)\sin\angle MON \implies A = \frac{1}{2} \times (65) \times \left(\frac{3}{5}\right) \implies A = \frac{39}{2}$$

18) أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة : $|z-8| > |z+2i|$ والمتباينة : $-\frac{\pi}{4} < Arg(z+3-6i) < \frac{\pi}{4}$.

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z-8| = |z+2i|$

وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(0,-2)$ و $(8,0)$.

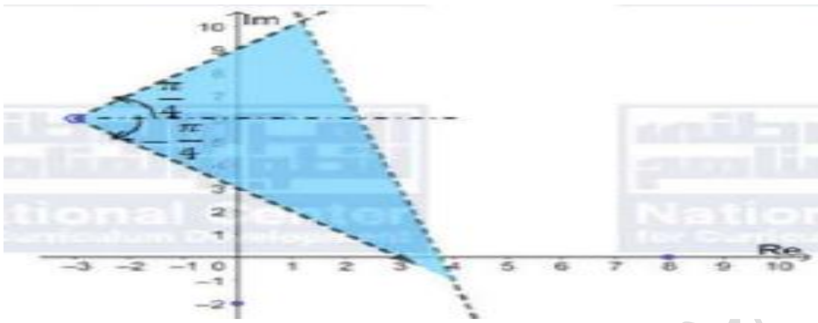
وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً .

$$-\frac{\pi}{4} < Arg(z+3-6i) < \frac{\pi}{4}$$

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z+3-6i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعاً (نرسمه متقطعاً بسبب عدم وجود المساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-3,6)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي .

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z+3-6i) = -\frac{\pi}{4}$ شعاعاً (نرسمه متقطعاً بسبب عدم وجود المساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(-3,6)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم موازٍ للمحور الحقيقي .

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه:



إذا كانت : $z = 5+2i$ فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

19) أبين أن : $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{1}{29}(21+20i)$

$z = 5+2i \quad \Rightarrow \bar{z} = 5-2i$

$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{5+2i}{5-2i} \times \frac{5+2i}{5+2i} \quad \Rightarrow = \frac{25+10i+10i-4}{(5)^2+(2)^2} \Rightarrow = \frac{21+20i}{29} \quad \Rightarrow = \frac{1}{29}(21+20i)$

20) من خلال البحث في سعة كل من الأعداد المركبة : z ، $\bar{z}$ ، $\frac{z}{\bar{z}}$ ، أبين أن :

$$2\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$$

$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$

$Arg(\bar{z}) = -\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$

$Arg(\frac{z}{\bar{z}}) = \tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$

$Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = Arg(z) - Arg(\bar{z})$

$\tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) - \left(-\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)\right) \Rightarrow = \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \Rightarrow = 2\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$

تمثل النقاط : A و B و C و D جذور المعادلة : $z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z + 680 = 0$

21) إذا كان العدد : $(-2+4i)$ هو أحد هذه الجذور ، فأجد الجذور الثلاثة الأخرى لهذه المعادلة .

بما ان العدد $-2+4i$ هو حل لهذه المعادلة ، إذن مرافقه $-2-4i$ يكون حلاً أيضاً لهذه المعادلة التربيعية التي لها هذان الجذران هي أحد عوامل كثير الحدود المرتبط بهذه المعادلة المعطاة.

نكون المعادلة التربيعية التي جذراها $(-2+4i)$ ، $(-2-4i)$

مجموع الجذرين $= (-2+4i) + (-2-4i) \implies = -2+4i-2-4i \implies = -4$

حاصل ضرب الجذرين $= (-2+4i) \times (-2-4i) \implies = 4+8i-8i+16 \implies = 20$

$$z^2 - (-4z) + 20 = 0 \implies z^2 + 4z + 20 = 0$$

ثم نقسم كثير الحدود $z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z + 680$ على $z^2 + 4z + 20$ فنجد أن :

$$z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 64z + 680 = 0 \implies (z^2 + 4z + 20)(z^2 - 10z + 34) = 0$$

لإيجاد جذور المعادلة $z^2 - 10z + 34 = 0$ نستخدم القانون العام لحل لهذه المعادلة التربيعية :

$$a = 1 \qquad b = -10 \qquad c = 34$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \implies x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(34)}}{2(1)}$$

$$\implies x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 136}}{2} \implies x = \frac{10 \pm \sqrt{-36}}{2} \implies x = \frac{10 \pm 6i}{2}$$

$$\implies x = \frac{10}{2} \pm \frac{6i}{2} \implies \boxed{x_2 = 5 + 3i} \iff \boxed{x_3 = 5 - 3i}$$

فتكون الجذور الثلاثة المطلوبة هي : $\{x_1 = -2 - 4i \quad , x_2 = 5 + 3i \quad , x_3 = 5 - 3i\}$

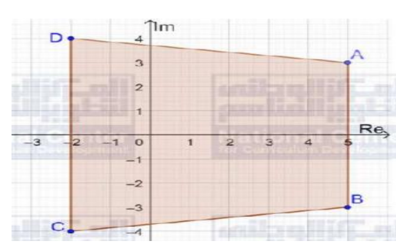
22) أمثل الجذور الأربعة في المستوى المركب ، ثم أجد مساحة الشكل الرباعي $ABCD$.

الشكل الرباعي $ABCD$ هو شبه منحرف مساحته بالوحدات المربعة تساوي :

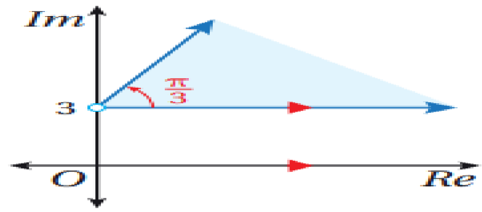
= نصف مجموع ضلعيه المتوازيين × الارتفاع المحصور بينهما

$$A = \frac{1}{2}(DC + AB)(h)$$

$$A = \frac{1}{2}(8+6)(7) \implies = \frac{1}{2}(14)(7) \implies = (7)(7) \implies = 49$$



23) اكتب (بدلالة z) متباينة تمثل المحل الهندسي المعطي في الشكل الآتي :



$$0 \leq Arg(z-3i) \leq \frac{\pi}{3}$$

إذا كان : $z^2+2z+10=0$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

24) أبين أن لجذري المعادلة المقياس نفسه.

$z^2+2z+10=0$

$a=1 \qquad b=2 \qquad c=10$

$\Delta = b^2-4ac \implies \Delta = (2)^2-4(1)(10) \implies \Delta = 4-40 \implies \Delta = -36$

مميز المعادلة التربيعية سالب، إذن لهذه المعادلة جذران مركبان مترافقان، وحسب النظرية فإن العددان المركبان المترافقان لهما المقياس نفسه.

25) أجد سعة كل جذر من جذري المعادلة.

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \implies z=\frac{-2\pm\sqrt{-36}}{2(1)} \implies z=\frac{-2\pm 6i}{2}$$

$$\implies z=\frac{-2}{2}\pm\frac{6i}{2} \implies \boxed{z_1=-1+3i} \implies Arg(z)=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{3}{1}\right)\approx 1.89$$

$$\boxed{z_2=-1-3i} \implies Arg(z)=-\left(\pi-\tan^{-1}\left(\frac{3}{1}\right)\right)\approx -1.89$$

26) يحقق العددان المركبان u و v المعادلة : $u+2v=2i$ والمعادلة : $iu+v=3$ ، أحل المعادلتين لإيجاد العدد u والعدد v .

$u+2v=2i$

$u=2i-2v \ldots\ldots.\ldots\ldots (1)$

$iu+v=3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$i(2i-2v)+v=3 \implies -2-2vi+v=3 \implies -2vi+v=5$

$$v(1-2i)=5 \implies v=\frac{5}{1-2i} \implies v=\frac{5}{1-2i}\times\frac{1+2i}{1+2i} \implies v=\frac{5+10i}{(1)^2-(2)^2}$$

$$\implies v=\frac{5+10i}{5} \implies v=\frac{5}{5}+\frac{10}{5}i \implies \boxed{v=1+2i}$$

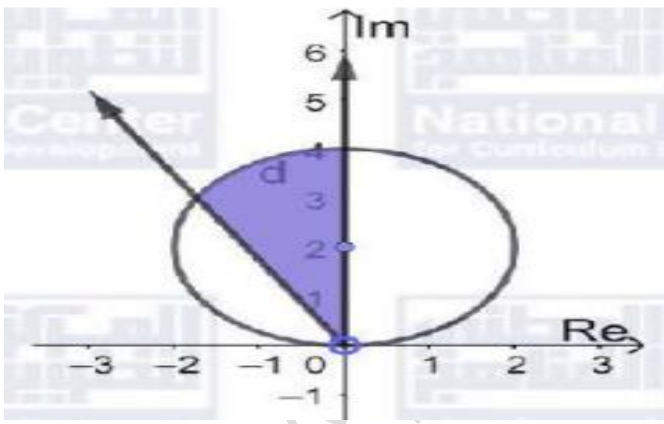
$u=2i-2v \implies u=2i-2(1+2i) \implies u=2i-2-4i \implies \boxed{u=-2-2i}$

27) أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة:

$\frac{2\pi}{3} \geq Argz \geq \frac{\pi}{2}$ ، والمتباينة : $|z-2i| \leq 2$.

المتباينة الأولى تمثلها المنطقة بين الشعاعين المنطلقين من نقطة الأصل يصنع أحدهما زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي الموجب ، ويصنع الآخر زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي الموجب .

والمتباينة الثانية تمثلها النقاط الواقعة على دائرة مركزها النقطة $(0,2)$ ، وطول نصف قطرها وحدتان مع النقاط الواقعة داخل الدائرة، فالمحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين هو الجزء المظلل في الرسم المجاوز.



كتاب التمارين

الوحدة الثالثة: الأعداد المركبة

استعد لدراسة الوحدة:

حل معادلات كثيرات الحدود:

أحل كلاً من المعادلتين الآتيتين:

1) $x^2 - 4x - 12 = 0$

$(x-6)(x+2) = 0$

$x - 6 = 0 \implies \boxed{x = 6}$

$x + 2 = 0 \implies \boxed{x = -2}$

2) $2x^3 - 6x^2 + 7x - 60 = 0$

الأصفار النسبية المحتملة $\frac{p}{q} = \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}}$:

لتحليل المعادلة من خلال تحليل العوامل ومن خلال التجربة:

$p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 30, \pm 60$

$q = \pm 1, \pm 2$

$\pm\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 30, \pm 60$

بالتعويض ، نجد أن العدد $x = 4$ يحقق هذه المعادلة :

$2(4)^3 - 6(4)^2 + 7(4) - 60 = 0$

$2(64) - 6(16) + 7(4) - 60 = 0$

$128 - 96 + 28 - 60 = 0$

$156 - 156 = 0$

إذن $\boxed{x = 4}$ هو أحد أصفار المعادلة، و $x - 4$ هو أحد عوامل المقدار: $2x^3 - 6x^2 + 7x - 60$

لإيجاد العامل الآخر ، أقسم هذا المقدار على $(x - 4)$:

	x^3	x^2	x	الثابت
4	2	-6	7	-60
	0	8	8	60
	2	2	15	0

بالتحليل وفق نتيجة القسمة:

$$(x-4)(2x^2+2x+15)=0$$

العبارة التربيعية $2x^2+2x+15$ مميزها سالب ، أي ليس لها جذور حقيقية .

الحل الوحيد لهذه المعادلة هو : $x=4$

$$b^2-4ac \implies 2^2-4(2)(15) \implies 2^2-4(2)(15) \implies 4-120=-116$$

مثال : أحل المعادلة $3x^3+7x^2-9x=5x+24$.

استعمل نظرية الأصفار النسبية لإيجاد أحد أصفار المعادلة على النحو الآتي:

$$3x^3+7x^2-9x=5x+24$$

$$3x^3+7x^2-9x-5x-24=0$$

$$3x^3+7x^2-14x-24=0$$

الأصفار النسبية المحتملة $= \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل الحد الرئيس}} : \frac{24}{1}$

لتحليل المعادلة من خلال تحليل عوامل العدد 24 وذلك من خلال التجربة $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6$

بالتعويض ، نجد أن العدد $x=2$ يحقق هذه المعادلة :

$$3(2)^3+7(2)^2-14(2)-24=0$$

$$24+28-28-24=0$$

إذن $\boxed{x=2}$ هو أحد أصفار المعادلة، و $x-2$ هو أحد عوامل المقدار: $3x^3+7x^2-14x-24$

لإيجاد العامل الآخر ، أقسم هذا المقدار على $(x-2)$:

	x^3	x^2	x	الثابت
2	3	7	-14	-24
	0	6	26	24
	3	13	12	0

بالتحليل وفق نتيجة القسمة:

$$(x-2)(3x^2+13x+12)=0$$

خاصية الضرب الصفري:

$$3x^2+13x+12=0 \qquad or \qquad x-2=0$$

نحلل المعادلة التربيعية الناتجة:

$$3x^2+13x+12=0 \implies (3x+4)(x+3)=0 \implies 3x+4=0$$

$$\implies 3x=-4 \implies \boxed{x=\frac{-4}{3}}$$

$$x+3=0 \implies \boxed{x=-3}$$

إذن يوجد للمعادلة 3 حلول (أصفار) هي : $\frac{-4}{3}, -3, 2$.

تمثيل المتجهات في المستوى الإحداثي والعمليات عليها:

3) إذا كانت $A(4,2)$ ، وكانت $B(2,6)$ ، فاكتب الصورة الإحداثية للمتجهة $\overrightarrow{AB}$ ، ثم أجد مقداره .

$$\overrightarrow{AB}=\langle x_B-x_A\,, y_B-y_A\rangle$$

بتعويض $A(4,2)$ و $B(2,6)$ ، والتبسيط :

$$\overrightarrow{AB}=\langle 2-4\,,6-2\rangle \implies \overrightarrow{AB}=\langle -2\,,4\rangle$$

صيغة مقدار المتجه $a=\langle a_1+a_2\rangle$

$$|a|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$$

بتعويض $\overrightarrow{AB}=a=\langle -2\,,4\rangle$

$$\overrightarrow{AB}=\sqrt{(-2)^2+4^2} \implies =\sqrt{4+16} \implies =\sqrt{20} \implies \overrightarrow{AB}=2\sqrt{5}$$

إذن ، $\overrightarrow{AB}=\langle -2\,,4\rangle$ ، ومقداره هو $2\sqrt{5}$.

4) إذا كانت $A(-2,3)$ ، وكانت $B(0,7)$ ، فاكتب الصورة الإحداثية للمتجهة $\overrightarrow{AB}$ ، ثم أجد مقداره .

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_B - x_A , y_B - y_A \rangle$$

بتعويض $A(-2,3)$ و $B(0,7)$ ، والتبسيط :

$$\overrightarrow{AB} = \langle 0-(-2) , 7-3 \rangle \implies \overrightarrow{AB} = \langle 2 , 4 \rangle$$

صيغة مقدار المتجه $a = \langle a_1 + a_2 \rangle$

$$|a| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

بتعويض $\overrightarrow{AB} = a = \langle 2 , 4 \rangle$

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{2^2 + 4^2} \implies = \sqrt{4+16} \implies = \sqrt{20} \implies \overrightarrow{AB} = 2\sqrt{5}$$

إذن ، $\overrightarrow{AB} = \langle 2 , 4 \rangle$ ، ومقداره هو $2\sqrt{5}$.

مثال: إذا كانت $A(-5,4)$ ، وكانت $B(2,7)$ ، فاكتب الصورة الإحداثية للمتجهة $\overrightarrow{AB}$ ، ثم أجد مقداره.

صيغة الصورة الإحداثية للمتجه:

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_B - x_A , y_B - y_A \rangle$$

بتعويض $A(-5,4)$ و $B(2,7)$ ، والتبسيط :

$$\overrightarrow{AB} = \langle 2-(-5) , 7-4 \rangle \implies \overrightarrow{AB} = \langle 7 , 3 \rangle$$

صيغة مقدار المتجه $a = \langle a_1 + a_2 \rangle$

$$|a| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

بتعويض $\overrightarrow{AB} = a = \langle 7 , 3 \rangle$

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{7^2 + 3^2} \implies = \sqrt{49+9} \implies \overrightarrow{AB} = \sqrt{58}$$

إذن ، $\overrightarrow{AB} = \langle 7 , 3 \rangle$ ، ومقداره هو $\sqrt{58}$.

معادلة الدائرة:

5) اكتب معادلة دائرة مركزها $(-1\,,8)$ ، وطول نصف قطرها 5 وحدات .

صيغة معادلة دائرة مركزها (h,k) ، ونصف قطرها r

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

بتعويض $(h\,,k)=(3\,,-4)$ ، و $r=5$

$$(x+1)^2+(y-8)^2=25$$

6) اكتب معادلة دائرة مركزها $(-7\,,13)$ ، وتمر بالنقطة $(5\,,4)$ وحدات .

أجد طول نصف القطر r ، وهو المسافة بين المركز ونقطة تمر بها الدائرة :

صيغة المسافة بين نقطتين:

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

بتعويض $(x_2,y_2)=(-7\,,13)$ ، $(x_1,y_1)=(5\,,4)$

$$r=\sqrt{(5+7)^2+(4-13)^2}\ \Rightarrow=\sqrt{144+81}\ \Rightarrow=\sqrt{225}\ \Rightarrow\ r=15$$

صيغة معادلة دائرة مركزها (h,k) ، ونصف قطرها r

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

بتعويض $(h\,,k)=(-7\,,13)$ ، و $r=15$

$$(x+7)^2+(y-13)^2=225$$

مثال : اكتب معادلة دائرة مركزها $(3\,,-4)$ ، وتمر بنقطة الأصل .

أجد طول نصف القطر r ، وهو المسافة بين المركز ونقطة تمر بها الدائرة :

صيغة المسافة بين نقطتين:

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

بتعويض $(x_2,y_2)=(3\,,-4)$ ، $(x_1,y_1)=(0\,,0)$

$$r=\sqrt{(3-0)^2+(-4-0)^2}\ \Rightarrow=\sqrt{9+16}\ \Rightarrow=\sqrt{25}\ \Rightarrow\ r=5$$

صيغة معادلة دائرة مركزها (h,k) ، ونصف قطرها r

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

بتعويض $(h\,,k)=(3\,,-4)$ ، و $r=5$

$$(x-3)^2+(y+4)^2=25$$

حل نظام متباينات خطية:

7) أمثل بيانياً منطقة حل نظام المتباينات الآتي، ثم اتحقق من صحة الحل:

$4x + 3y \leq 12$

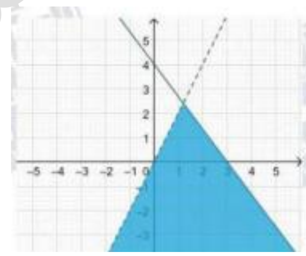
$y - 2x < 0$

نرسم المستقيم $4x + 3y \leq 12$ بخط متصل.

ونرسم المستقيم $y - 2x < 0$ بخط متقطع على المستوى الديكارتي نفسه .

ونظلل المنطقة التي تحوي النقاط التي تحقق كلا المتباينتين.

للتحقق من صحة الحل نعوض الزوج $(2, 0)$ في المتباينتين .



$4(2) + 3(0) \leq 12$

$8 \leq 12$ ✓ العبارة صحيحة

$(0) - 2(2) < 0$

$-4 < 0$ ✓ العبارة صحيحة

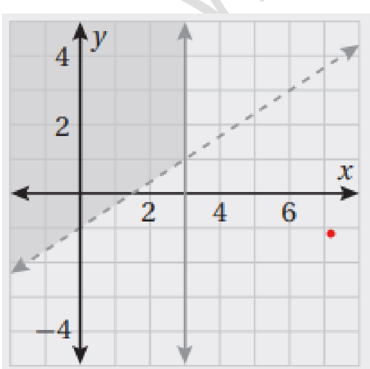
إذن الحل صحيح لأن الزوج $(2, 0)$ من منطقة الحل المظللة حقق المتباينتين معاً .

مثال: أمثل بيانياً منطقة حل نظام المتباينات الآتي، ثم اتحقق من صحة الحل:

$x \leq 3$

$y > \frac{2}{3}x - 1$

الخطوة الأولى: أمثل بيانياً المستقيمين الحدوديين.



- أمثل بيانياً المستقيمين الحدوديين : $x = 3$ و $y > \frac{2}{3}x - 1$ في المستوى $y = \frac{2}{3}x - 1$ في المستوى الإحداثي نفسه .

- وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة الثانية، فإنني أرسم المستقيم : $y = \frac{2}{3}x - 1$ متقطعاً .

- أما المستقيم : $x = 3$ ، فأرسمه متصلاً ، نظراً إلى وجود مساواة في رمز المتباينة الأولى كما في الشكل المجاور.

الخطوة الثانية: أحدد منطقة التقاطع بين حلي المتباينتين.

أظلل منطقة الحل لكل متباينة، ومن ثم تكون المنطقة المشتركة بين منطقتي حل المتباينتين هي حل نظام المتباينات كما في الشكل المجاور.

الخطوة الثالثة: أتحقق من صحة الحل.

أتحقق من صحة الحل باختيار زوج مرتب يقع في منطقة حل النظام ، مثل $(0,2)$ ، ثم أعوضه في متباينات النظام جميعها:

المتباينة الأولى:

$x \leq 3$

بالتعويض:

$0 \leq 3$ ✓ العبارة صحيحة

المتباينة الثانية:

$$y > \frac{2}{3}x - 1$$

بالتعويض:

$$2 > \frac{2}{3}(0) - 1$$

$2 > -1$ ✓ العبارة صحيحة

الدرس الأول

الأعداد المركبة

أجد قيمة الجذر الرئيس في كل مما يأتي بدلالة i :

1) $\sqrt{-128}$

$= \sqrt{-1 \times 2 \times 64} \quad \Longrightarrow \quad = 8\, i\sqrt{2}$

2) $\sqrt{-14}$

$= \sqrt{-1 \times 14} \quad \Longrightarrow \quad = i\sqrt{14}$

3) $\sqrt{-81}$

$= \sqrt{-1 \times 81} \quad \Longrightarrow \quad = 9i$

4) $\sqrt{-125}$

$= \sqrt{-1 \times 5 \times 25} \quad \Longrightarrow \quad = 5i\sqrt{5}$

5) $3\sqrt{-32}$

$= 3\sqrt{-1 \times 2 \times 16} \quad \Longrightarrow = 12i\sqrt{2}$

6) $\sqrt{\frac{-28}{9}}$

$= \sqrt{-1 \times \frac{7 \times 4}{9}} \quad \Longrightarrow = \frac{2i\sqrt{7}}{3}$

أجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة مفترضاً أن $i = \sqrt{-1}$:

7) i^7

$= i^6 \times i \implies = (i^2)^3 \times i \implies = (-1)^3 \times i \implies = -i$

8) i^{12}

$= (i^2)^6 \implies (-1)^6 \times i \implies = -i$

$= 1$

9) i^{98}

$= (i^2)^{49} \implies (-1)^{49} \implies = -1$

10) i^{121}

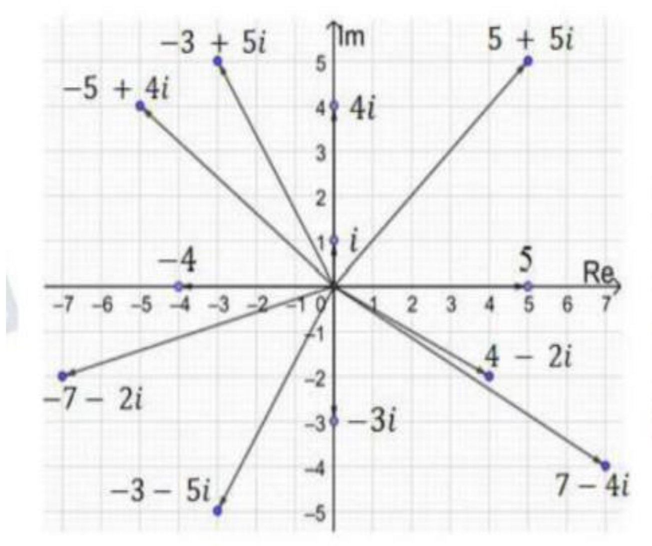
$= i^{120} \times i \implies (i^2)^{60} \times i \implies (-1)^{60} \times i \implies = i$

أملأ الفراغ بما هو مناسب في الجدول الآتي:

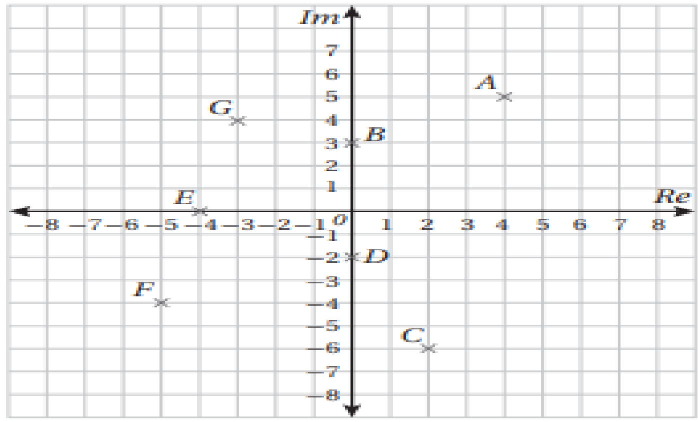
z	$Re(z)$	$Im(z)$
$-4+6i$	-4	6
-3	-3	0
$8i$	0	8
$-8+3i$	-8	3

أمثل كلا من الأعداد المركبة الآتية في المستوى المركب المجاور:

12) 5
13) -4
14) $4i$
15) $-3i$
16) $4-2i$
17) $-3+5i$
18) $-3-5i$
19) i
20) $7-4i$
21) $-5+4i$
22) $-7-2i$
23) $5+5i$



24) أكتب كلا من الأعداد المركبة الممثلة بيانياً في المستوى المركب المجاور بالصورة القياسية، ثم أجد مقياسه وسعته .



$A = 4 + 5i$

$|A| = \sqrt{16 + 25}$

$|A| = \sqrt{41}$

$Arg(A) = \tan^{-1}\dfrac{5}{4}$

$Arg(A) \approx 0.90$

$B = 3i \quad \Longrightarrow \quad |B| = \sqrt{9} \quad \Longrightarrow \quad |B| = 3 \quad \Longrightarrow \quad Arg(B) = \dfrac{\pi}{2}$

$C = 2 - 6i \quad \Longrightarrow \quad |C| = \sqrt{4 + 36} \quad \Longrightarrow \quad |C| = 2\sqrt{10}$

$Arg(C) = \tan^{-1} 3 \quad \Longrightarrow \quad Arg(C) \approx -1.25$

$E = -4 \quad \Longrightarrow \quad |E| = \sqrt{16} \quad \Longrightarrow \quad |E| = 4 \quad \Longrightarrow \quad Arg(E) = \pi$

$F = -5 - 4i \quad \Longrightarrow \quad |F| = \sqrt{25 + 16} \quad \Longrightarrow \quad |F| = \sqrt{41}$

$Arg(F) = -\left(\pi - \tan^{-1}\dfrac{5}{4}\right) \quad \Longrightarrow \quad Arg(F) \approx -2.47$

$G = -3 - 4i \quad \Longrightarrow \quad |G| = \sqrt{9 + 16} \quad \Longrightarrow \quad |G| = \sqrt{25} \quad \Longrightarrow \quad |G| = 5$

$Arg(G) = \pi - \tan^{-1}\dfrac{4}{3} \quad \Longrightarrow \quad Arg(G) \approx 2.21$

أجد قيمة x ، وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان كل معادلة مما يأتي صحيحة :

25) $(2x + 1) + 4i = 7 - i(y - 3)$

$2x + 1 = 7 \Rightarrow 2x = 7 - 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = 3}$

$4 = -(y - 3) \Rightarrow 4 = -y + 3 \quad \Longrightarrow \quad y = 3 - 4 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = -1}$

26) $i(2x-4y)+x+3y=26-32i$

$i(2x-4y)+x=26-3y-32i$

$x=26-3y$

$2x-4y=32$

$2(26-3y)-4y=32 \quad \Longrightarrow \quad 52-6y-4y=32$

$\Longrightarrow \quad 52-10y=32 \quad \Longrightarrow \quad 10y=52-32 \quad \Longrightarrow \quad 10y=20 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y=2}$

$x=26-3y \quad \Longrightarrow \quad x=26-3(2) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x=20}$

اكتب كلاً من الأعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية:

27) 6

$|z|=6 \quad \Longrightarrow \quad Arg(z)=\tan^{-1}\frac{0}{6}=0 \quad \Longrightarrow \quad z=6(\cos 0+i\sin 0)$

28) $-5i$

$|z|=5 \quad \Longrightarrow \quad Arg(z)=-\frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad z=5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

29) $-2\sqrt{3}-2i$

$|z|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+(2)^2} \quad \Longrightarrow \quad |z|=\sqrt{12+4} \quad \Longrightarrow \quad |z|=4$

$Arg(z)=-\left(\pi-\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{5\pi}{6} \quad \Longrightarrow \quad z=4\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

30) $-1+i$

$|z|=\sqrt{(1)^2+(1)^2} \quad \Longrightarrow \quad |z|=\sqrt{2}$

$Arg(z)=\pi-\tan^{-1}1=\frac{3\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

31) $4-2i$

$|z|=\sqrt{(4)^2+(2)^2} \implies |z|=\sqrt{16+4} \implies |z|=\sqrt{20} \implies |z|=2\sqrt{5}$

$Arg(z)=-\tan^{-1}\frac{1}{2}\approx -0.46 \implies z=2\sqrt{5}(\cos(-0.46)+i\sin(-0.46))$

32) $2+8i$

$|z|=\sqrt{(2)^2+(8)^2} \implies |z|=\sqrt{4+64} \implies |z|=\sqrt{68} \implies |z|=2\sqrt{17}$

$Arg(z)=\tan^{-1}4\approx 1.33 \implies z=2\sqrt{17}(\cos(1.33)+i\sin(1.33))$

اكتب كلاً من الأعداد المركبة الآتية بالصورة القياسية:

33) $6(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

$=6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) \implies =3\sqrt{3}+3i$

34) $12(\cos\pi+i\sin\pi)$

$=12\big(-1+i(0)\big) \implies =-12$

35) $8(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$

$=8(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$=-4+4i\sqrt{3}$

36) $3(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4})$

$=3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \implies =\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}i$

أجد مرافق كل من الأعداد المركبة الآتية، ثم أمثلها جميعاً في المستوى المركب نفسه:

37) $-1 - i\sqrt{5}$

$\bar{z} = -1 + i\sqrt{5}$

38) $9 - i$

$\bar{z} = 9 + i$

39) $2 - 8i$

$\bar{z} = 2 + 8i$

40) $-9i$

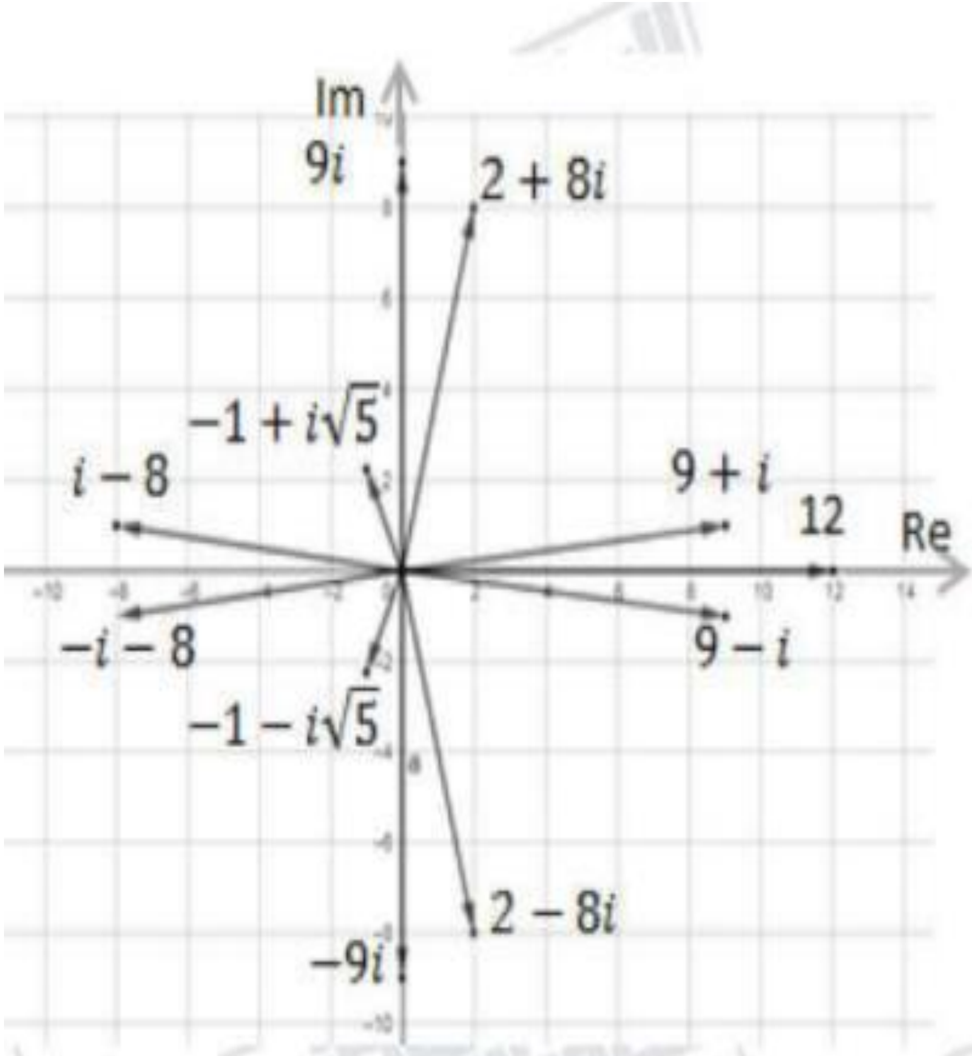
$\bar{z} = 9i$

41) 12

$\bar{z} = 12$

42) $i - 8$

$\bar{z} = -i - 8$



الدرس الثاني

العمليات على الأعداد المركبة

1) $(6+8i)+(3-5i)$

$= (6+3)+(8-5)i \quad \Longrightarrow \quad = 9+3i$

2) $(-6-3i)-(-8+2i)$

$= -6-3i+8-2i \quad \Longrightarrow \quad = 2-5i$

3) $4\mathrm{i}(7-3\mathrm{i})$

$= 28i-12i^2 \quad \Longrightarrow \quad = 28i+12 \quad \Longrightarrow \quad = 12+28i$

4) $(8-6i)(8+6i)$

$= (8\times 8)+(8\times 6i)+(-6i\times 8)+(-6i\times 6i) \quad \Longrightarrow = 64+48i-48i-36i^2$

$\Longrightarrow = 64+48i-48i+36 \quad \Longrightarrow = 64+36 \quad \Longrightarrow \quad = 100$

5) $(-2+2i\sqrt{3})^3$

$= \left(-2+2i\sqrt{3}\right)^2\left(-2+2i\sqrt{3}\right) \quad \Longrightarrow = (4-8i\sqrt{3}+12i^2)(-2+2i\sqrt{3})$

$\Longrightarrow = \left(4-8i\sqrt{3}-12\right)\left(-2+2i\sqrt{3}\right) \quad \Longrightarrow = (-8-8i\sqrt{3})(-2+2i\sqrt{3})$

$\Longrightarrow = \left(-8\times -2\right)+\left(-8\times 2i\sqrt{3}\right)+\left(-8i\sqrt{3}\times -2\right)+\left(-8i\sqrt{3}\times 2i\sqrt{3}\right)$

$\Longrightarrow = \left(16\right)+\left(-16i\sqrt{3}\right)+\left(16i\sqrt{3}\right)+\left(-48i^2\right)$

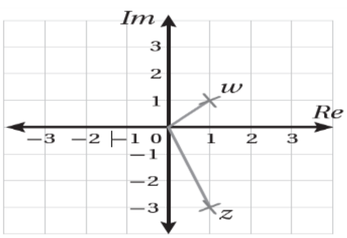
$\Longrightarrow = \left(16\right)+\left(-16i\sqrt{3}\right)+\left(16i\sqrt{3}\right)+\left(48\right) \quad \Longrightarrow \quad = 16+48 \quad \Longrightarrow \quad = 64$

6) $\frac{(2+i)(1-i)}{4-3i}$

$$= \frac{2-2i+i-i^2}{4-3i} \Longrightarrow = \frac{2-2i+i+1}{4-3i} \Longrightarrow = \frac{3-i}{4-3i}$$

$$\Longrightarrow = \frac{3-i}{4-3i} \cdot \frac{4+3i}{4+3i} \Longrightarrow = \frac{12+9i-4i-3i^2}{(4)^2+(3)^2} \Longrightarrow = \frac{12+5i+3}{16+9}$$

$$\Longrightarrow = \frac{15+5i}{25} \Longrightarrow = \frac{15}{25} + \frac{5}{25}i \Longrightarrow = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$$



معتمداً المستوى المركب المجاور الذي يبين العددين المركبين z و w ،
أجيب عن الاسئلة الثلاثة الأتية تباعاً .

7) أكتب كلا من العددين z و w بالصورة القياسية .

$z = 1 - 3i$

$w = 1 + i$

8) أجد السعة والمقياس لكل من العددين المركبين wz و $\frac{w}{z}$.

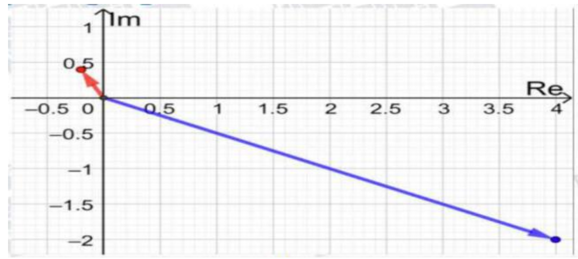
$$wz = (1-3i)(1+i) \Longrightarrow wz = 1 + i - 3i - 3i^2$$
$$\Longrightarrow wz = 1 + i - 3i + 3 \Longrightarrow wz = 4 - 2i$$
$$|wz| = \sqrt{(4)^2+(2)^2} \Longrightarrow |wz| = \sqrt{16+4} \Longrightarrow |wz| = \sqrt{20} \Longrightarrow |wz| = 2\sqrt{5}$$
$$Arg(wz) = -\tan^{-1}\frac{1}{2} \approx -0.46$$
$$\frac{w}{z} = \frac{(1+i)}{(1-3i)} \cdot \frac{(1+3i)}{(1+3i)} \Longrightarrow = \frac{1+3i+i+3i^2}{(1)^2+(3)^2} \Longrightarrow = \frac{1+4i-3}{10}$$
$$\Longrightarrow = \frac{-2+4i}{10} \Longrightarrow = \frac{-2}{10} + \frac{4}{10}i \Longrightarrow \frac{w}{z} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

$$\left|\frac{w}{z}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} \Longrightarrow = \sqrt{\frac{1}{25}+\frac{4}{25}} \Longrightarrow = \sqrt{\frac{5}{25}} \Longrightarrow = \sqrt{\frac{1}{5}} \Longrightarrow = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$Arg\left(\frac{w}{z}\right) = \pi - \tan^{-1} 2 \approx 2.03$$

9) أمثل العددين wz و $\frac{w}{z}$ في المستوى المركب .

$$wz = 4 - 2i$$

$$\frac{w}{z} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$



إذا كان : $z = -3 + 3i\sqrt{3}$ ، وكان : $|w| = 18, Arg\,(w) = -\frac{\pi}{6}$ ، فأجد ناتج كل مما يأتي :

10) $Arg(z)$

$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \; = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

11) $|z|$

$$|z| = \sqrt{(3)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} \quad \Longrightarrow \; = \sqrt{9 + 27} \quad \Longrightarrow \; = \sqrt{36} \quad \Longrightarrow \; |z| = 6$$

12) $Arg(zw)$

$$Arg(zw) = Arg(z) + Arg(w) \quad \Longrightarrow \; = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$Arg(zw) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \quad \Longrightarrow \; = \frac{4\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \quad \Longrightarrow \; = \frac{3\pi}{6} \quad \Longrightarrow \; Arg(zw) = \frac{\pi}{2}$$

13) $|zw|$

$$|zw| = |z| \times |w| \quad \Longrightarrow \; = 6 \times 18 = 108$$

أجد الجذرين التربيعين لكل عدد مركب مما يأتي:

14) $-15 + 8i$

$$\sqrt{-15 + 8i} = x + yi$$

$$-15 + 8i = (x + yi)^2$$

$-15+8i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$x^2 - y^2 = -15$

$\frac{2xy}{2x} = \frac{8}{2x} \quad \Longrightarrow \boxed{y = \frac{4}{x}}$

$x^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 = -15 \quad \Longrightarrow x^2 - \frac{16}{x^2} = -15$

$\left[x^2 - \frac{16}{x^2} = -15\right] \times x^2 \quad \Longrightarrow x^4 - 16 = -15x^2 \quad \Longrightarrow x^4 + 15x^2 - 16 = 0$

$\Longrightarrow (x^2+16)(x^2-1) = 0 \quad \Longrightarrow x^2 = 1 \quad \Longrightarrow \boxed{x = \pm 1}$

$y = \frac{4}{1} \quad \Longrightarrow \boxed{y = 4} \quad \Longrightarrow y = \frac{4}{-1} \quad \Longrightarrow \boxed{y = -4}$

$\sqrt{-15+8i} = \pm(1+4i)$

15) $-7-24i$

$\sqrt{-7-24i} = x + yi$

$-7-24i = (x+yi)^2$

$-7-24i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$x^2 - y^2 = -7$

$\frac{2xy}{2x} = \frac{-24}{2x} \quad \Longrightarrow \boxed{y = -\frac{12}{x}}$

$x^2 - \left(-\frac{12}{x}\right)^2 = -7 \quad \Longrightarrow x^2 - \frac{144}{x^2} = -7 \quad \Longrightarrow \left[x^2 - \frac{144}{x^2} = -7\right] \times x^2$

$\Longrightarrow x^4 - 144 = -7x^2 \quad \Longrightarrow x^4 - 7x^2 - 144 = 0$

$\Longrightarrow (x^2+16)(x^2-9) = 0 \quad \Longrightarrow x^2 = 9 \quad \Longrightarrow x = \pm 3$

$y = \frac{-12}{-3} \quad \Longrightarrow \boxed{y = 4}$

$y = \frac{-12}{3} \quad \Longrightarrow \boxed{y = -4}$

$\sqrt{-7-24i} = \pm(3-4i)$

16) $105 + 88i$

$105 + 88i = x + yi$

$105 + 88i = (x + yi)^2$

$105 + 88i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 105$

$\frac{2xy}{2x} = \frac{88}{2x} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = \frac{44}{x}}$

$x^2 - \left(\frac{44}{x}\right)^2 = 105 \quad \Longrightarrow x^2 - \frac{1936}{x^2} = 105 \quad \Longrightarrow \left[x^2 - \frac{1936}{x^2} = 105\right] \times x^2$

$\Longrightarrow x^4 - 1936 = 105x^2 \quad \Longrightarrow x^4 - 105x^2 - 1936 = 0$

$\Longrightarrow (x^2 + 16)(x^2 - 121) = 0 \quad \Longrightarrow x^2 = 121 \quad \Longrightarrow \boxed{x = \pm 11}$

$y = \frac{44}{x} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{44}{11} \quad \Longrightarrow \boxed{y = 4} \quad \Longrightarrow y = \frac{44}{-11} \quad \Longrightarrow \boxed{y = -4}$

$\sqrt{105 + 88i} = \pm(11 + 4i)$

17) إذا كان : $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، فأكتبه بالصورة المثلثية ، مبيناً أن $\omega^3 = 1$.

$Arg(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) \quad \Longrightarrow \quad = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

$|\omega| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \quad \Longrightarrow = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \quad \Longrightarrow = \sqrt{\frac{4}{4}} \quad \Longrightarrow \quad |\omega| = 1$

$\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$|\omega^3| = |\omega| \times |\omega| \times |\omega| \quad \Longrightarrow \quad |\omega^3| = 1 \times 1 \times 1 = 1$

$Arg(\omega^3) = Arg(\omega) + Arg(\omega) + Arg(\omega) \quad \Longrightarrow \quad Arg(\omega) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$

$\omega^3 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = 1$

إذا كان : $z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5})$ ، وكان : $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3})$ ، فأجد كلاً مما يأتي بالصورة المثلثية :

18) $z_1 z_2$

$$z_1 z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5}) \times 2(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3})$$

$$\Longrightarrow = 3 \times 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3}\right)\right) \Longrightarrow z_1 z_2 = 6\left(\cos\frac{8\pi}{15} + i\sin\frac{8\pi}{15}\right)$$

19) $z_1(\overline{z_1})$

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\overline{z_1} = 3\left(\cos\frac{-\pi}{5} + i\sin\frac{-\pi}{5}\right)$$

$$z_1\overline{z_1} = 3 \times 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right)\right)$$

$$z_1\overline{z_1} = 9(\cos 0 + i\sin 0) \quad \Longrightarrow z_1\overline{z_1} = 9(1+0) \quad \Longrightarrow z_1\overline{z_1} = 9$$

20) ${z_2}^3$

$${z_2}^3 = {z_2}^2 \times z_2 = 2^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right) \times z_2$$

$${z_2}^3 = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \times 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$${z_2}^3 = 8\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$${z_2}^3 = 8(\cos\pi + i\sin\pi) \quad \Longrightarrow = 8(-1+0) \quad \Longrightarrow {z_2}^3 = -8$$

21) $\frac{z_2}{z_1}$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\right)\right)\quad\Rightarrow=\frac{2}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{15}+i\sin\frac{2\pi}{15}\right)$$

22) إذا كان : $\left|\frac{u-9i}{3+i}\right|=5$ ، فما قيمة u ، علماً بأنها سالبة ؟

$$\left|\frac{u-9i}{3+i}\right|=5\quad\Rightarrow\quad\frac{|u-9i|}{|3+i|}=5\quad\Rightarrow\quad\frac{u^2+81}{9+1}=25$$

$$\frac{\sqrt{u^2+81}}{\sqrt{10}}=\sqrt{25}\quad\Rightarrow\quad\sqrt{u^2+81}=5\sqrt{10}\quad\Rightarrow\quad u^2+81=250$$

$$\Rightarrow\ u^2=250-81\quad\Rightarrow\quad u^2=169\quad\Rightarrow\quad u=\pm 13$$

وحسب المعطيات u سالبة ، إذن $u=-13$

23) إذا كان : $(1+4i)$ جذراً للمعادلة : $x^3+5x^2+ax+b=0$ ، فأجد قيمة كل من العددين الحقيقين a و b ، والجذريين الآخرين لهذه المعادلة .

$$(1+4i)^3+5(1+4i)^2+a(1+4i)+b=0$$

$$(1+4i)^2(1+4i)+5(1+4i)^2+a(1+4i)+b=0$$

$$(1+8i-16)(1+4i)+5(1+8i-16)+a(1+4i)+b=0$$

$$1+8i-16+4i-32-64i+5+40i-80+a+4ai+b=0$$

$$-122+a+b-12i+4ai=0$$

$$-122+a+b+(4a-12)i=0$$

$$-122+a+b=0\quad\Rightarrow\quad 4a-12=0\quad\Rightarrow\quad 4a=12\quad\Rightarrow\quad\boxed{a=3}$$

$$-122+3+b=0\quad\Rightarrow\quad -119+b=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{b=119}$$

$x^3+5x^2+3x+119=0$ المعادلة هي

بما أن $(1+4i)$ جذر للمعادلة، وحيث أن المعادلة ذات معاملات حقيقية فإن الجذر الثاني هو المرافق للجذر الأول أي : $(1-4i)$.

$$=\big(x-(1+4i)\big)\big(x-(1-4i)\big) \quad \Longrightarrow = (x-1-4i)(x-1+4i)$$

$$\Longrightarrow = x^2 - x + 4xi - x + 1 - 4i - 4xi + 4i - 16i^2 \quad \Longrightarrow = x^2 - 2x + 17$$

ثم نقسم كثير الحدود $x^3+5x^2+3x+119$ على $x^2-2x+17$ فنحصل على :

$$x^3+5x^2+3x+119 = (x^2-2x+17)(x+7)$$

24) أجد قيمتي الجذر التربيعي : $\sqrt{\frac{362-153i}{2-3i}}$

$$\frac{362-153i}{2-3i}$$ نبسط

$$=\frac{362-153i}{2-3i}\times\frac{2+3i}{2+3i} \quad \Longrightarrow \quad = \frac{362(2)-362(3i)-153i(2)-153i(3i)}{(2)^2+(3)^2}$$

$$\Longrightarrow = \frac{724-1086i-306i+459}{13} \quad \Longrightarrow = \frac{1183-780i}{13}$$

$$\Longrightarrow = \frac{1183}{13}-\frac{780}{13}i \quad \Longrightarrow \quad = 91-60i$$

$$\sqrt{91-60i} = x+yi \quad \Longrightarrow (\sqrt{91-60i})^2 = (x+yi)^2$$

$$\Longrightarrow 91-60i = x^2-y^2+2xyi \quad \Longrightarrow x^2-y^2=91 \quad \Longrightarrow \frac{2xy}{2x} = -\frac{60}{2x} \quad \Longrightarrow \boxed{y=-\frac{30}{x}}$$

$$x^2-\left(-\frac{30}{x}\right)^2 = 91 \quad \Longrightarrow x^2-\frac{900}{x^2}=91 \quad \Longrightarrow \left[x^2-\frac{900}{x^2}=91\right] \quad \times x^2$$

$$\Longrightarrow x^4-900=91x^2 \Longrightarrow x^4-91x^2-900=0 \Longrightarrow (x^2+9)(x^2-100)=0$$

$$\Longrightarrow x^2=100 \Longrightarrow \boxed{x=\pm 10}$$

$$y=\frac{30}{x} \quad \Longrightarrow y=\frac{30}{10} \quad \Longrightarrow \boxed{y=3} \quad \Longrightarrow y=\frac{30}{-10} \quad \Longrightarrow \boxed{y=-3}$$

$$\sqrt{\frac{362-153i}{2-3i}} = \pm(10-3i)$$

25) أثبت أن أحد الجذرين التربيعيين للعدد : $(7+24i)$ هو $(4+3i)$ ، ثم أجد الجذر التربيعي الآخر.

$(4+3i)=\sqrt{7+24i} \quad \Rightarrow (4+3i)^2=\left(\sqrt{7+24i}\right)^2$

$\Rightarrow (4+3i)^2=7+24i \quad \Rightarrow =(4+3i)^2 \quad \Rightarrow =16+24i-9 \quad \Rightarrow =7+24i$

إذن هو أحد جذري العدد $(7+24i)$ ويكون الجذر الآخر هو: $-4-3i$

26) أثبت أن سعة $(7+24i)$ تساوي ضعف سعة $(4+3i)$.

$\theta_1=Arg(7+24i)=\tan^{-1}\frac{24}{7}\approx 1.287$

$\theta_2=Arg(4+3i)=\tan^{-1}\frac{3}{4}\approx 0.6435$

$2\times\theta_2=2(0.6435)=1.287=\theta_1$

إذن ، $Arg(7+24i)=2Arg(4+3i)$

27) أثبت أن مقياس $(7+24i)$ يساوي مربع مقياس $(4+3i)$.

$|7+24i|=\sqrt{(7)^2+(24)^2}$

$|7+24i|=\sqrt{49+576}$

$|7+24i|=\sqrt{625}$

$\boxed{|7+24i|=25}$

$|4+3i|=\sqrt{(4)^2+(3)^2}$

$|4+3i|=\sqrt{16+9}$

$|4+3i|=\sqrt{25}$

$|4+3i|=5$

$\boxed{|4+3i|^2=25}$

$\boxed{|7+24i|=|4+3i|^2}$

28) إذا كان : $\frac{a}{3+i}+\frac{b}{1+2i}=1-i$ ، فأجد قيمة كل من العددين الحقيقين a و b .

$$\frac{a}{3+i}+\frac{b}{1+2i}=1-i$$

$$\left(\frac{a}{3+i}\times\frac{3-i}{3-i}\right)+\left(\frac{b}{1+2i}\times\frac{1-2i}{1-2i}\right)=1-i$$

$$\Rightarrow \frac{3a-ai}{(3)^2+(1)^2}+\frac{b-2bi}{(1)^2+(2)^2}=1-i \quad \Rightarrow \frac{3a-ai}{9+1}+\frac{b-2bi}{1+4}=1-i$$

$$\Rightarrow \frac{3a-ai}{10}+\frac{b-2bi}{5}=1-i \quad \Rightarrow \frac{3a}{10}+\frac{a}{10}i+\frac{b}{5}-\frac{2b}{5}i=1-i$$

$$\Rightarrow \frac{3a}{10}+\frac{b}{5}=1 \quad \Rightarrow \frac{3a}{10}+\frac{2b}{10}=1 \quad \Rightarrow \boxed{3a+2b=10}$$

$$\frac{a}{10}+\frac{2b}{5}=1 \quad \Rightarrow \frac{a}{10}+\frac{4b}{10}=1 \quad \Rightarrow \frac{a+4b}{10}=1$$

$$\Rightarrow a+4b=10 \quad \Rightarrow \boxed{a=10-4b}$$

$$3(10-4b)+2b=10 \quad \Rightarrow 30-12b+2b=10$$

$$\Rightarrow 30-10b=10 \quad \Rightarrow 10b=30-10 \quad \Rightarrow \boxed{b=2}$$

$$a=10-4(2) \quad \Rightarrow \quad a=10-8 \quad \Rightarrow \boxed{a=2}$$

أحل كل معادلة مما يأتي:

29) $2z^3=8z^2+13z-87$

الأصفار النسبية المحتملة هي : $\pm1, \pm3, \pm29, \ldots$

بالتعويض، نجد أن العدد $z=-3$ يحقق المعادلة :

$$2z^3-8z^2-13z+87=0$$

$$2(-3)^3-8(-3)^2-13(-3)+87=0$$

$$-54-72+39+87=0$$

$$-126+126=0$$

إذن $z+3$ هو أحد العوامل ، نجري القسمة فنجد أن :

	z^3	z^2	z	الثابت
-3	2	-8	-13	87
	0	-6	42	-87
	2	-14	29	0

$$2z^3-8z^2-13z+87=(z+3)(2z^2-14z+29)$$

$$(z+3)=0 \quad \Rightarrow \quad z=-3$$

$$2z^2-14z+29=0 \quad \Rightarrow \quad a=2\ ,b=-14\ ,c=29$$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \Rightarrow z=\frac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4\times2\times29}}{2(2)}$$

$$\Rightarrow z=\frac{14\pm\sqrt{196-232}}{4} \quad \Rightarrow \quad z=\frac{14\pm\sqrt{-36}}{4}$$

$$\Rightarrow z=\frac{14\pm6i}{4} \quad \Rightarrow \quad z=\frac{7\pm3i}{2} \quad \Rightarrow \quad z=\frac{7}{2}\pm\frac{3}{2}i$$

إذن لهذه المعادلة 3 حلول هي : $\frac{7}{2}-\frac{3}{2}i$ ، $\frac{7}{2}+\frac{3}{2}i$ ، -3

30) $z^3+4z^2-10z+12=0$

الأصفار النسبية المحتملة هي : $\pm1 , \pm2 , \pm4 , \pm3 , \pm6 , \pm12$

بالتعويض، نجد أن العدد $z=-6$ يحقق المعادلة :

$$(-6)^3+4(-6)^2-10(-6)+12=0$$

$$-216+144+60+12=0$$

$$-216+216=0$$

إذن $z+6$ هو أحد العوامل ، نجري القسمة فنجد أن :

	z^3	z^2	z	الثابت
-6	1	4	-10	12
	0	-6	12	-12
	1	-2	2	0

$$(z+6)(z^2-2z+2)=0$$

$$z+6=0 \quad \Longrightarrow z=-6$$

$$z^2-2z+2=0 \quad \Longrightarrow a=1\ ,b=-2\ ,c=2$$

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \Longrightarrow z=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times2}}{2(1)}$$

$$\Longrightarrow z=\frac{2\pm\sqrt{4-6}}{2} \quad \Longrightarrow z=\frac{2\pm\sqrt{-2}}{2} \quad \Longrightarrow z=\frac{2\pm2i}{2}$$

$$\Longrightarrow z=\frac{2}{2}\pm\frac{2}{2}i \quad \Longrightarrow z=1\pm i$$

إذن لهذه المعادلة 3 حلول هي : $1-i$ ، $1+i$ ، -6

31) إذا كان : $-2+i$ هو أحد جذور المعادلة : $z^4+az^3+bz^2+10z+25=0$ ، فأجد قيمة a وقيمة b ، ثم أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلة .

$$(-2+i)^4+a(-2+i)^3+b(-2+i)^2+10(-2+i)+25=0$$

$$(-2+i)^2(-2+i)^2+a(-2+i)^2(-2+i)+b(-2+i)^2+10(-2+i)+25=0$$

$$(4-4i-1)(4-4i-1)+(4-4i-1)(-2+i)+b(4-4i-1)+10(-2+i)+25=0$$

$$(3-4i)(3-4i)+a(3-4i)(-2+i)+b(3-4i)+10(-2+i)+25=0$$

$$(9-12i-12i-16)+a(-6+3i+8i+4)+b(3-4i)-20+10i+25=0$$

$$(-7-24i)+a(-2+11i)+b(3-4i)+10i+5=0$$

$$-7-24i-2a+11ai+3b-4bi+10i+5=0$$

$-2-14i-2a+11ai+3b-4bi=0$

$-2-2a+3b-14i+11ai-4bi=0$

$-2-2a+3b=0 \quad \Rightarrow \; 2a=3b-2 \quad \Rightarrow \; a=\dfrac{3b}{2}-1$

$-14+11a-4b=0 \quad \Rightarrow \; 11a-4b=14$

$\Rightarrow \; 11\left(\dfrac{3b}{2}-1\right)-4b=14 \quad \Rightarrow \; \dfrac{33b}{2}-\dfrac{11}{2}-4b=14$

$\Rightarrow \; \dfrac{33b}{2}-\dfrac{8b}{2}-11=14 \quad \Rightarrow \; \dfrac{25b}{2}=25 \quad \Rightarrow \; 25b=50 \quad \Rightarrow \; \boxed{b=2}$

$11a-4(2)=14 \Rightarrow 11a-4(2)=14 \Rightarrow 11a-8=14 \Rightarrow 11a=22 \Rightarrow \boxed{a=2}$

المعادلة هي:

$z^4+2z^3+2z^2+10z+25=0$

بما أن $-2+i$ جذر لهذة المعادلة ومعاملاتها حقيقية ، فإن المرافق $-2-i$ الجذر الاخر لها .

نكون المعادلة كما يلي :

$z^2-(\text{مجموع الجذرين})z+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0 \Rightarrow z^2-(-2+i)z+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0$

$\text{مجموع الجذرين}=(-2+i)+(-2-i) \quad \Rightarrow =(-4)+(0) \Rightarrow \boxed{=-4}$

$\text{حاصل ضرب الجذرين}=(-2+i)\times(-2-i) \quad \Rightarrow \quad =4+2i-2i-i^2$

$\Rightarrow =4+2i-2i+1 \Rightarrow \boxed{=5}$

$z^2-(-4)z+(5)=0 \quad \Rightarrow \; z^2+4+5=0$

ثم نقسم $z^4+2z^3+2z^2+10z+25$ على z^2+4+5 فنحصل على :

$z^4+2z^3+2z^2+10z+25=(z^2+4+5)(z^2-2z+5)$

$a=1\;, b=-2\;, c=5$

$z=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \; z=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times5}}{2(1)} \Rightarrow z=\dfrac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}$

$\Rightarrow z=\dfrac{2\pm\sqrt{-16}}{2} \quad \Rightarrow \; z=\dfrac{2\pm 4i}{2} \quad \Rightarrow \; z=\dfrac{2}{2}\pm\dfrac{4}{2}i \quad \Rightarrow \; \boxed{z=1\pm 2i}$

جذور هذه المعادلة هي: $x_1 = -2 - i$ ، $x_2 = -2 + i$ ، $x_3 = 1 + 2i$ ، $x_4 = 1 - 2i$

الدرس الثالث

المحل الهندسي في المستوى المركب

أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، ثم أمثله في المستوى المركب، وأجد معادلته الديكارتيه :

1) $|z + 5i| - 3 = 1$

$|z + 5i| = 1 + 3$

$|z - (0 - 5i)| = 4$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0, -5)$ وطول نصف قطرها 4 وحدات .

المعادلة الديكارتية :

$|z + 5i| - 3 = 1$

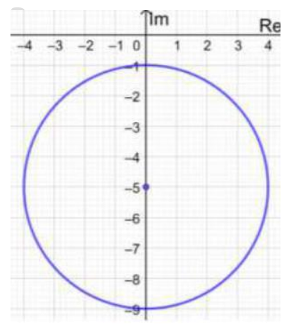
$|x + yi + 5i| = 4$

$|x + (y + 5)i| = 4$

$\sqrt{x^2 + (5 + y)^2} = 4$

$\left(\sqrt{x^2 + (5 + y)^2}\right)^2 = (4)^2$

$x^2 + (5 + y)^2 = 16$



2) $|z - 2 + 8i| = 13$

$|z - (2 - 8i)| = 13$

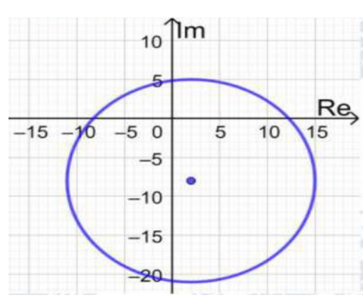
المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(2, -8)$ وطول نصف قطرها 13 وحدة .

المعادلة الديكارتية :

$|x + yi - 2 + 8i| = 13$

$|(x - 2) + (y + 8)i| = 13$

$\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 8)^2} = 13$



$(x-2)^2+(y+8)^2=169$

3) $|z+4-3i|=7$

$|z-(-4+3i)|=7$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(-4,3)$ وطول نصف قطرها 7 وحدات .

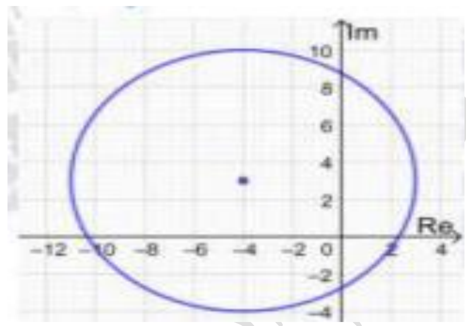
المعادلة الديكارتية:

$|x+yi+4-3i|=7$

$|(x+4)+(y-3)i|=7$

$\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}=7$

$(x+4)^2+(y-3)^2=49$



4) $|z+3+5i|=|z-i|$

$|z-(-3-5i)|=|z-(0+i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(-3,-5),(0,1)$

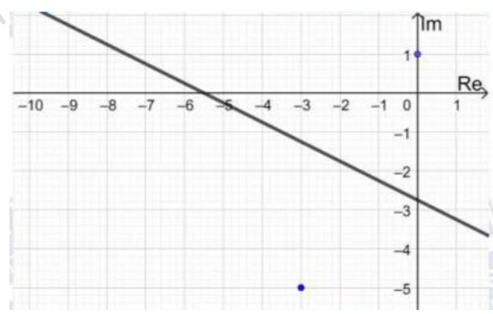
$|z+3+5i|=|z-i|$

$|x+yi+3+5i|=|x+yi-i|$

$|(x+3)+(y+5)i|=|x+(y-1)i|$

$\sqrt{(x+3)^2+(y+5)^2}=\sqrt{(x)^2+(y-1)^2}$

$(x+3)^2+(y+5)^2=(x)^2+(y-1)^2$



$x^2+6x+9+y^2+10y+25=x^2+y^2-2y+1$

$x^2+6x+9+y^2+10y+25=x^2+y^2-2y+1$

$6x+12y-33=0$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتيه هي :

$2x+4y-11=0$

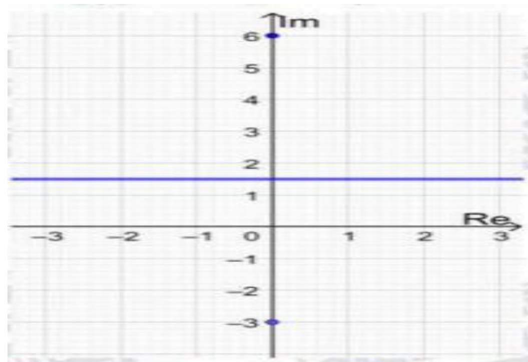
5) $\frac{|z+3i|}{|z-6i|} = 1$

$|z + 3i| = |z - 6i|$

$|z - (0 - 3i)| = |z - (0 + 6i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0, -3), (0, 6)$

$|z - (-3i)| = |z - (6i)|$



$|x + yi + 3i| = |x + yi - 6i|$

$\sqrt{(x)^2 + (y + 3)^2} = \sqrt{(x)^2 + (y - 6)^2}$

$(x)^2 + (y + 3)^2 = (x)^2 + (y - 6)^2$

$x^2 + y^2 + 6y + 9 = x^2 + y^2 - 12y + 36$

$18y - 27 = 0$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتيه هي:

$2y - 3 = 0$

$y = 1.5$

6) $|6 - 2i - z| = |z + 4i|$

$|-z + 6 - 2i| = |z + 4i|$

$|z - 6 + 2i| = |z + 4i|$

$|z - (6 - 2i)| = |z - (0 - 4i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(6, -2), (0, -4)$

$|x + yi - 6 + 2i| = |x + yi + 4i|$

$\sqrt{(x - 6)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{(x)^2 + (y + 4)^2}$

$(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = (x)^2 + (y + 4)^2$

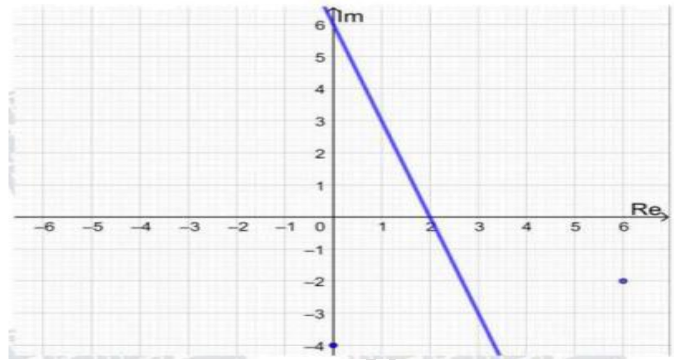
$x^2 - 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + y^2 + 8y + 16$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + y^2 + 8y + 16$$

$$-12x - 4y + 24 = 0$$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتيه هي :

$$3x + y - 6 = 0$$

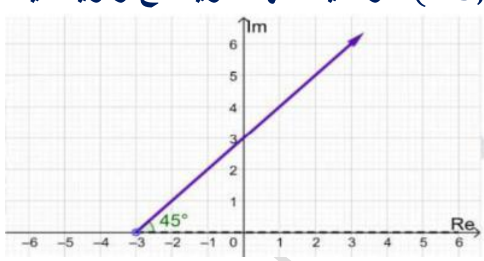


أجد المحل الهندسي الذي تمثله كل من المعادلات الآتية، ثم أمثله في المستوى المركب:

7) $Arg(z+3) = \frac{\pi}{4}$

$$Arg(z-(-3)) = \frac{\pi}{4}$$

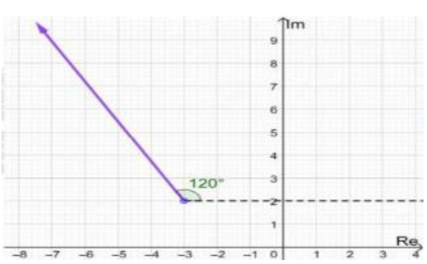
المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-3, 0)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي الموجب .



8) $Arg(z+3-2i) = \frac{2\pi}{3}$

$$Arg(z-(-3+2i)) = \frac{2\pi}{3}$$

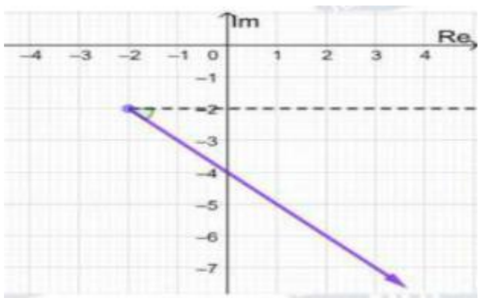
المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-3, 2)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب .



9) $Arg(z+2+2i)=-\frac{\pi}{4}$

$Arg(z-(-2-2i)=-\frac{\pi}{4}$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(-2,-2)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب .



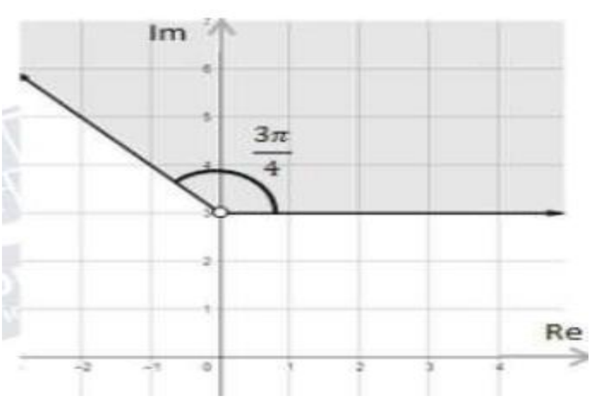
أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي الذي تمثله كل متباينة مما يأتي:

10) $0\le Arg(z-3i)\le\frac{3\pi}{4}$

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z-3i)=\frac{3\pi}{4}$ شعاعاً (نرسمه متصلاً بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,3)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب .

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z-3i)=0$ شعاعاً (نرسمه متصلاً بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0,3)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها 0 مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي الموجب .

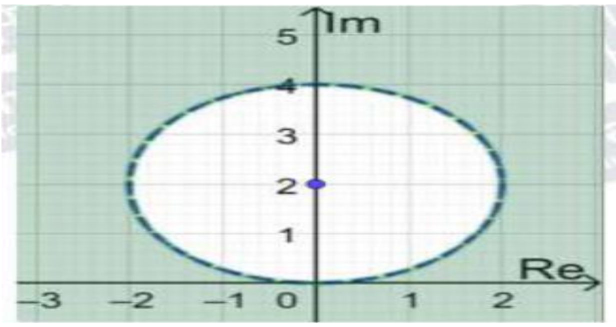
المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء المظلل من المستوى المركب كما في الشكل المجاور:



11) $|z - 2i| > 2$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z - 2i| = 2$ ، وهو دائرة مركزها $(0, 2)$ وطول نصف قطرها وحدتان .

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً ، أما منطقة المحل الهندسي فهي خارج الدائرة ، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة أكبر من طول نصف القطر .

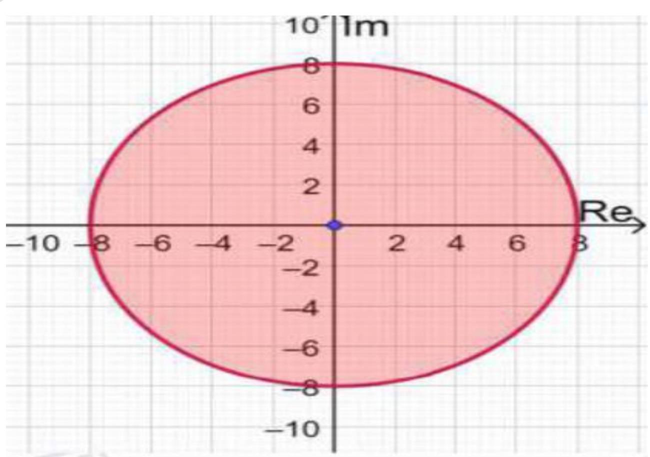


12) $|z| \leq 8$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z| = 8$ ، وهو دائرة مركزها $(0, 0)$ وطول نصف قطرها 8 وحدات .

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلاً .

أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر أو تساويها.



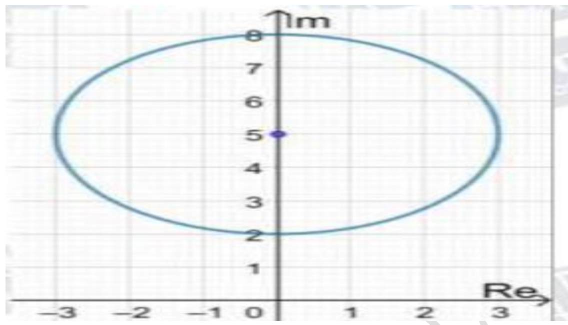
إذا كانت : $|z - 5i| = 3$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

13) ارسم المحل الهندسي الذي تمثله المعادلة في المستوى المركب.

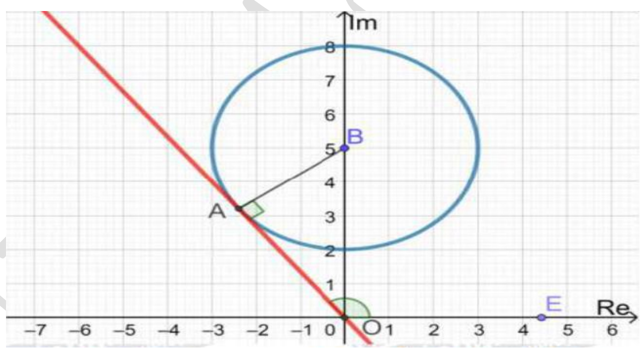
$|z - 5i| = 3$

$|z - (5i)| = 3$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0, 5)$ وطول نصف قطرها 3 وحدات .



14) أجد القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة z التي تحقق المعادلة .



أكبر سعة للعدد المركب z تساوي قياس الزاوية $\angle EOA$ المحصورة بين مماس الدائرة OA والمحور الحقيقي الموجب .

نصف قطر الدائرة AB عمودي على المماس OA في نقطة التماس A .

$OA = \sqrt{(OB)^2 - (AB)^2}$

$OA = \sqrt{25 - 9}$

$OA = \sqrt{16}$

$OA = 4$

$$\tan\angle BOA = \frac{3}{4}$$

$$\tan\angle BOA = \tan^{-1}\frac{3}{4} \approx 0.64$$

$$m\angle EOB \approx \frac{\pi}{2} + 0.64 \approx 2.21$$

القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة z التي تحقق المعادلة المعطاة هي 2.21

15) أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة : $|z - 1 + i| \leq 1$ ، والمتباينة : $-\frac{\pi}{3} < Arg(z) < 0$.

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z - 1 + i| = 1$ وهو دائرة (ترسم بخط متصل) مركزها $(1, -1)$ وطول نصف قطرها وحده واحده .

أما منطقة المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي تحقق هذه المتباينة فهي داخل الدائرة وعلى محيطها.

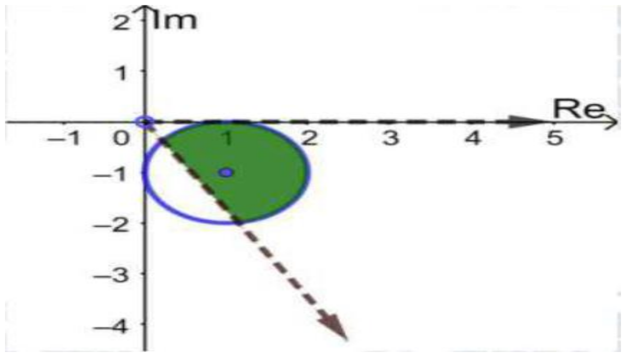
$$-\frac{\pi}{3} < Arg(z) < 0$$

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z) = -\frac{\pi}{3}$ شعاعاً (بخط متقطع) يبدأ من النقطة $(0, 0)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي الموجب .

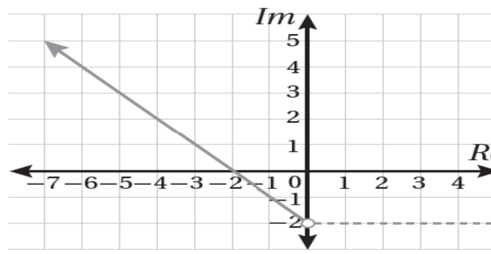
ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z) = 0$ شعاعاً نرسمه متقطعاً بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة $(0, 0)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها 0 مع المحور الحقيقي الموجب .

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق هذه المتباينة هو الجزء من المستوى المركب المحصور بين هذين الشعاعين.

أما المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معاً فهو كما في الشكل:



16) أكتب (بدلالة z) معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقاط الممثلة في المستوى المركب المجاور .



$$Arg(z+2i)=\frac{3\pi}{4}$$

17) إذا كانت: $u=-7+7i$ ، وكانت : $v=7+7i$ ، فأجد بصيغة : $|z-z_1|$ معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الأصل ، والنقطتين اللتين تمثلان العددين المركبين u و v .

$$u=-7+7i \quad , \qquad v=7+7i$$

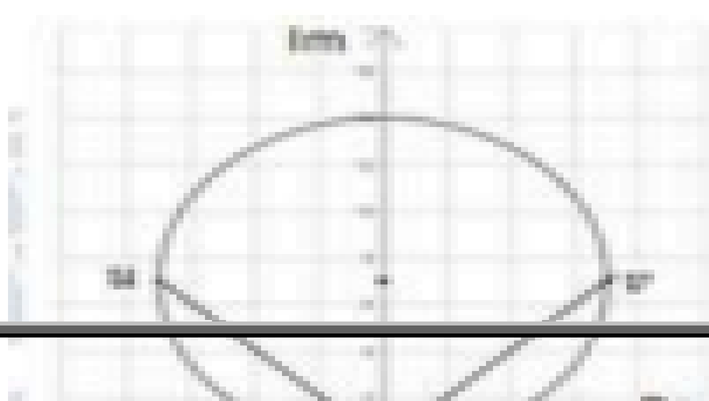
$$Arg(u)=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{7}{7}\right)=\pi-\tan^{-1}(1)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

$$Arg(v)=\tan^{-1}\left(\frac{7}{7}\right)=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$$

الزاوية بين u و v تساوي $\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}$ ، فالقطعة المستقيمة uv قطر لهذه الدائرة .

ومركزها هو نقطة منتصف هذه القطعة وهي $\left(\frac{-7+7}{2},\frac{7+7}{2}\right)$ أي $(0,7)$ ، وطول نصف قطرها يساوي $\sqrt{(7-0)^2-(7-7)^2}=7$

إذن معادلة الدائرة المطلوبة هي : $|z-7i|=7$



18) إذا كانت: $u = -1 + i$ ، فأجد u^2 ، ثم أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة : $|z| < 2$ ، والمتباينة : $|z - u| < |z - u^2|$.

$$u = -1 - i$$

$$u^2 = (1 + i)^2$$

$$u^2 = 2i$$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $u = -1$ ، وهو دائرة مركزها $(0, 0)$ وطول نصف قطرها وحدتان .

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة ، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً .

أما منطقة المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي تحقق هذه المتباينة فهي داخل الدائرة، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر.

$$z - u^2 < |z - u|$$

$$|z - 2i| < |z - (-1 - i)|$$

$$|z - 2i| = |z - (-1 - i)|$$

المنحنى الحدودي لهذه الدائرة معادلته $|z - 2i| = |z - (-1 - i)|$

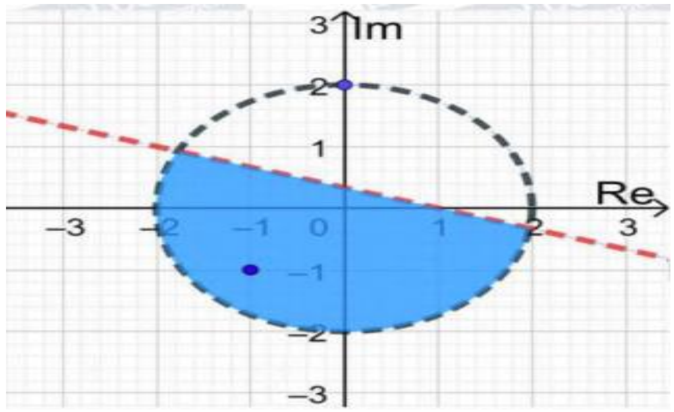
وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(-1، -1)$ و $(0،2)$

وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعاً.

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار $z = 0$ مثلاً وتعويضه في المتباينة .

$$|0 - 2i| < |0 + 1 - i)| \rightarrow 2 > \sqrt{2} \quad \checkmark$$

بما أن العدد 0 يحقق المتباينة ، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي $z = 0$ المظللة في الرسم أدناه .



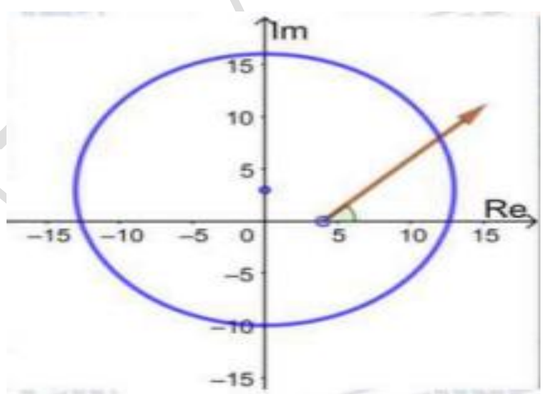
19) أمثل في المستوى المركب المعادلة : $|z-3i|=13$ ، والمعادلة : $Arg(z-4)=\frac{\pi}{4}$ ، ثم أجد العدد المركب z الذي يحققهما معاً .

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(0,3)$ وطول نصف قطرها 13 وحدة .

$$Arg(z-4)=\frac{\pi}{4}$$

المحل الهندسي لهذه المعادلة هو شعاع ينطلق من النقطة $(4,0)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي الموجب أي أن ميله يساوي 1 ومعادلته هي :

$y-0=1(x-4)$ أي $\rightarrow y=x-4$



لإيجاد الأعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معاً ، نجد نقاط تقاطع المنحنيين:

$y=x-4\,, y\geq 0, x\geq 0$ و $x^2+(y-3)^2=169$ بالتعويض :

$$x^2+(x-4-3)^2=169$$

$$2x^2-14x+49=169$$

$x^2 - 7x - 60 = 0$

$(x + 5)(x - 12) = 0$

$x - 12 = 0$

$x = 12 \quad \rightarrow \quad y = 8$

العدد المركب الذي يحقق المعادلتين معاً هو : $z = 12 + 8i$

20) أمثل في المستوى المركب المعادلة: $|z - 3 - 2i| = 5$ ، والمعادلة $|z - 6i| = |z - 7 + i| = 5$، اللذين يحققان المعادلتين معاً .

$|z - 3 - 2i| = 5$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(3, 2)$ وطول نصف قطرها 5 وحدة .

ومعادلتها : $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$

$|z - 6i| = |z - 7 + i| = 5$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(7, -1)$ ، $(0, 6)$ الذي يمر بالنقطة $(3.5, 2.5)$ وميله 1 ، ومعادلته هي :

$\rightarrow y - 2.5 = 1(x - 3.5)$ أي $y = x - 1$

لإيجاد الأعداد المركبة التي تحقق المعادلتين معاً، نجد نقاط تقاطع المنحنيين:

$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ و $y = x - 1$ بالتعويض :

$(x - 3)^2 + (x - 1 - 2)^2 = 25$

$(x - 3)^2 + (x - 3)^2 = 25$

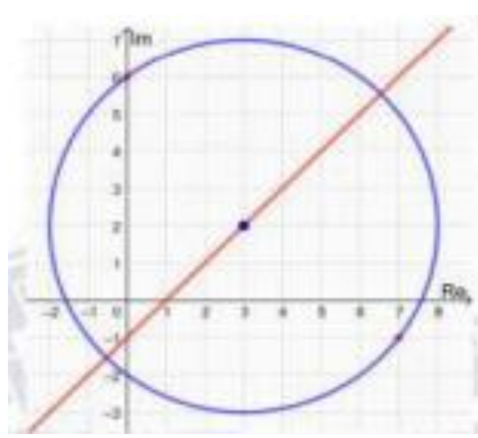
$(x^2 - 6x + 9) + (x^2 - 6x + 9) = 25$

$2x^2 - 12x + 18 = 25$

$2x^2 - 12x - 7 = 0$

$a = 2 \quad , b = -12 \quad , c = -7$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



$$x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \times 2 \times -7}}{2(2)}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 56}}{4}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{200}}{4}$$

$$x = \frac{12 \pm 10\sqrt{2}}{4}$$

$$x = \frac{6 \pm 5\sqrt{2}}{2}$$

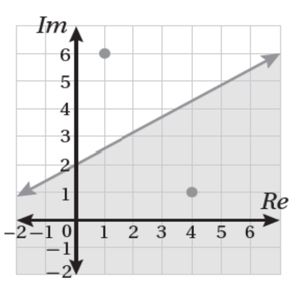
$$y = \frac{4 \pm 5\sqrt{2}}{2} i$$

العددان المركبان اللذان يحققان المعادلتين معاً هما:

$$z_1 = \frac{6 + 5\sqrt{2}}{2} + \frac{4 + 5\sqrt{2}}{2} i \quad , z_2 = \frac{6 - 5\sqrt{2}}{2} + \frac{4 - 5\sqrt{2}}{2} i$$

اكتب (بدلالة z) متباينة المحل الهندسي الذي تمثله المنطقة المظللة في كل مما يأتي :

21



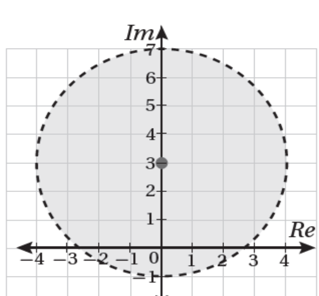
المنحنى الحدودي هنا هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(1,6)$ ، $(4,1)$ ومعادلته هي : $|z-4-i| = |z-1-6i|$

ولأن المنطقة المظللة تشمل النقاط الأقرب إلى النقطة $(4,1)$

والخط الحدودي متقطع، فإن المتباينة هي:

$$|z-4-i| < |z-1-6i|$$

22

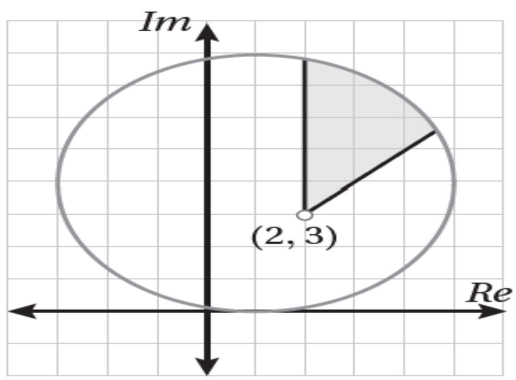


المنحنى الحدودي هنا هو دائرة مركزها (0,3) وطول نصف قطرها 4 وحدات ومعادلتها هي $|z-3i|=4$

ولأن المنطقة المظللة تشمل النقاط الواقعة داخل الدائرة، ولأن المنحنى الحدودي متقطع، فإن المتباينة هي:

$$|z-3i|<4$$

23) اكتب (بدلالة z) نظام متباينات يمثل المحل الهندسي الذي تمثله المنطقة المظللة في الشكل الآتي :



مركز الدائرة هو (1,4) ، وطول نصف قطرها 4 وحدات والتظليل داخلها وهي مرسومة متصلة فالمتباينة التي تصفها هي : $|z-1-4i| \leq 4$

ولدينا شعاعان متصلان منطلقان من النقطة (2,3) ، السفلي يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الخط الأفقي ، والعلوي يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع الخط الأفقي وتم تظليل المنطقة المحصورة بينهما ، فالمتباينة التي تصف هذه المنطقة هي $\frac{\pi}{4} \leq Arg(z-2-3i) \leq \frac{\pi}{2}$

إذن نظام المتباينات الذي تمثله المنطقة المظللة هو :

$$[z-1-4i] \leq 4 \qquad , \qquad \frac{\pi}{4} \leq Arg(z-2-3i) \leq \frac{\pi}{2}$$