كتاب الطالب

الدرس الأول – قاعدة السلسلة

مثال 1:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $y = (x^2+1)^3$

الخطوة 1: أجد مشتقة الاقتران الداخلي ومشتقة الاقتران الخارجي للاقتران المركب.

الاقتران الداخلي للاقتران المركب: $u = x^2 + 1$، والاقتران الخارجي له: $y = u^3$.

مشتقة الاقتران الداخلي $\frac{du}{dx} = 2x$

مشتقة الاقتران الخارجي $\frac{dy}{du} = 3u^2$

الخطوة 2: أجد مشتقة الاقتران المركب باستعمال قاعدة السلسلة.

قاعدة السلسلة $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

بتعويض $\frac{dy}{du} = 3u^2$, $\frac{du}{dx} = 2x$ $= 3u^2 \times 2x$

بتعويض $u = x^2 + 1$ $= 6x(x^2+1)^2$

2) $y = \sqrt{4-3x}$

الخطوة 1: أكتب الاقتران بالصورة الأسية.

الاقتران المعطى $y = \sqrt{4-3x}$

الصورة الأسية $= (4-3x)^{\frac{1}{2}}$

الخطوة 2: أجد مشتقة الاقتران الداخلي ومشتقة الاقتران الخارجي للاقتران المركب.

الاقتران الداخلي للاقتران المركب: $u = 4 - 3x$، والاقتران الخارجي له: $y = u^{\frac{1}{2}}$

مشتقة الاقتران الداخلي $\frac{du}{dx} = -3$

مشتقة الاقتران الخارجي $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$

الخطوة 3: أجد مشتقة الاقتران المركب باستعمال قاعدة السلسلة.

قاعدة السلسلة $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

بتعويض $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}, \frac{du}{dx} = -3$ $= \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \times -3$

بتعويض $u = 4 - 3x$ $= -\frac{3}{2}(4 - 3x)^{-\frac{1}{2}}$

الصورة الجذرية $= -\frac{3}{2\sqrt{4-3x}}$

أتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $y = (x^2 - 2)^4$

$u = x^2 - 2, y = u^4$

$\frac{du}{dx} = 2x, \frac{dy}{du} = 4u^3$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

$= 4u^3 \times 2x$

$= 8xu^3$

$8x(x^2 - 2)^3$

b) $y = \sqrt{x^3 + 4x} = (x^3 + 4x)^{\frac{1}{2}}$

$u = x^3 + 4x \quad , \quad y = u^{\frac{1}{2}}$

$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 4, \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

$= \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \times (3x^2 + 4)$

$= \frac{3x^2 + 4}{2\sqrt{x^3 + 4x}}$

مثال 2:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $f(x) = (2x^4 - x)^3, x = 1$

الاقتران المعطى	$f(x) = (2x^4 - x)^3$
قاعدة سلسلة القوّة	$f'(x) = 3(2x^4 - x)^2 \times \frac{d}{dx}(2x^4 - x)$
باشتقاق $2x^4 - x$	$= 3(2x^4 - x)^2 \times (8x - 1)$
بتعويض $x = 1$	$f'(1) = 21$

2) $f(x) = \sqrt{1 + x^3}, x = 2$

الصورة الأُسّية	$f(x) = \sqrt{1 + x^3} = (1 + x^3)^{\frac{1}{2}}$
قاعدة سلسلة القوّة	$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + x^3)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{d}{dx}(1 + x^3)$
باشتقاق $1 + x^3$	$= \frac{1}{2}(1 + x^3)^{-\frac{1}{2}} \times (3x^2)$
الصورة الجذرية	$= \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$
بتعويض $x = 2$	$f'(2) = 2$

3) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}, x = -2$

الصورة الأُسّية	$y = (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$
قاعدة سلسلة القوّة	$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \times \frac{d}{dx}(x^2 - 1)$
باشتقاق $x^2 - 1$	$= \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \times 2x$
الصورة الجذرية	$= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$
بتعويض $x = -2$	$\frac{dy}{dx}\Big\vert_{x=-2} = \frac{-8}{3\sqrt[3]{3}}$

أتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = (x^4+1)^5,\ x=1$

$f'(x) = 5(x^4+1)^4(4x^3)$

$= 20x^3(x^4+1)^4$

$f'(1) = 20(1)^3((1)^4+1)^4 = 20 \times 16 = 320$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+3x+2},\ x=2$

$f(x) = \sqrt{x^2+3x+2}$

$f'(x) = \dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+2}}$

$f'(x) = \dfrac{2(2)+3}{2\sqrt{2^2+3\times 2+2}} = \dfrac{7}{2\sqrt{12}}$

c) $y = \sqrt[4]{(2x^2-7)^5},\ x=4$

$f(x) = \sqrt[4]{(2x^2-7)^5} = (2x^2-7)^{\frac{5}{4}}$

$f'(x) = \dfrac{5}{4}(2x^2-7)^{\frac{1}{4}}(4x)$

$= \dfrac{5}{4}(4x)(2x^2-7)^{\frac{1}{4}}$

$= 5x \times \sqrt[4]{2x^2-7}$

$f'(4) = 5 \times 4 \times \sqrt[4]{2(4)^2-7} = 20\sqrt[4]{25}$

مثال 3:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 5(1-x^2)^3 + 4x + 7$

الاقتران المعطى $f(x) = 5(1-x^2)^3 + 4x + 7$

قواعد سلسلة القوّة، ومضاعفات الاقتران، والمجموع، والثابت

$f'(x) = 15(1-x^2)^2 \times \frac{d}{dx}(1-x^2) + 4$

باشتقاق $1 - x^2$ $= 15(1-x^2)^2 \times \ -2x + 4$

بالتبسيط $= -30x(1-x^2)^2 + 4$

2) $f(x) = (2x+1)^3 - \sqrt{3x^2 - 2x}$

الاقتران المعطى $f(x) = (2x+1)^3 - \sqrt{3x^2 - 2x}$

قواعد سلسلة القوّة، ومشتقة الفرق $f'(x) = 3(2x+1)^2 \times \frac{d}{dx}(2x+1) - \frac{6x-2}{2\sqrt{3x^2-2x}}$

باشتقاق $2x + 1$ $= 3(2x+1)^2 \times 2 - \frac{6x-2}{2\sqrt{3x^2-2x}}$

بالتبسيط $= 6(2x+1)^2 - \frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x}}$

أتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = (1+x^3)^4 + x^8 + 2$

$f'(x) = 4(1+x^3)^3(3x^2) + 8x^7$

$= 12x^2(1+x^3)^3 + 8x^7$

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1} - (x-3)^3$

$f(x) = (2x-1)^{\frac{1}{3}} - (x-3)^3$

$f'(x) = \frac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}(2) - 3(x-3)^2(1)$

$= \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}} - 3(x-3)^2$

مثال 4: من الحياة

تلوُّث: توصَّلت دراسة بيئية إلى نمذجة مُتوسِّط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون في الهواء بإحدى القرى عن طريق الاقتران: $C(p) = 0.6\sqrt{0.5p^2 + 17}$، حيث p عدد السكان بالألف نسمة، علما بأنَّ C يقاس بأجزاء من المليون ($C = 5$ تعني 5 أجزاء من المليون مثلاً):

1) أجد مُعدل تغيُّر متوسط المستوى اليومي لغاز أول أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكان.

أجد $C'(p)$:

الاقتران المعطى $C(p) = 0.6\sqrt{0.5p^2 + 17}$

قاعدة السلسلة $C'(p) = \frac{0.6\,P}{2\sqrt{0.5p^2+17}}$

إذن مُعدل تغيُّر مُتوسط المستوى اليومي لغاز أول أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكان هو: $C'(p) = \frac{0.6\,P}{2\sqrt{0.5p^2+17}}$

2) أجد مُعدَّل تغيُّر متوسط المستوى اليومي لغاز أول أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكان عندما يكون عدد السكان 4 آلاف نسمة، مُفسِّرًا معنى الناتج.

أجد $C'(4)$:

مشتقة $C(t)$ $C'(p) = \frac{0.6\,P}{2\sqrt{0.5p^2+17}}$

بتعويض $p = 4$ $C'(4) = \frac{0.6\,(4)}{2\sqrt{0.5(4)^2+17}}$

بالتبسيط $= 0.24$

إذن، إذا كان عدد السكّان 4 آلاف نسمة، فإنَّ مُتوسط المستوى اليومي لغاز أوَّل أكسيد الكربون يزداد بمقدار 0.24 جزء من المليون لكل ألف نسمة.

أتحقق من فهمي:

صناعة: يُمثِّل الاقتران: $P(t) = \sqrt{10t^2 + t + 229}$ إجمالي الأرباح السنوية لإحدى الشركات الصناعية (بآلاف الدنانير)، حيث t عدد السنوات بعد عام 2015م:

a) أجد مُعدل تغيُّر إجمالي الأرباح السنوي للشركة بالنسبة إلى الزمن t.

$$P'(t) = \frac{20t + 1}{2\sqrt{10t^2 + t + 229}}$$

b) أجد مُعدل تغيُّر إجمالي الأرباح السنوي للشركة عام 2020 م، مُفسرًا معنى الناتج.

$$t = 2020 - 2015 = 5$$

$$P'(5) = \frac{20(5) + 1}{2\sqrt{250 + 5 + 229}} = \frac{101}{2\sqrt{484}} \approx 2.3$$

إذن، في سنة 2020 يزداد إجمالي الأرباح بمعدل 2300 دينار لكل سنة.

مثال 5:

إذا كان: $y = u^3 - 2u + 1$، حيث: $u = 2\sqrt{x}$، فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 4$.

بإيجاد مشتقة y بالنسبة إلى المُتغير u: $\frac{dy}{du} = 3u^2 - 2$

بإيجاد مشتقة u بالنسبة إلى المُتغير x: $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

باستعمال قاعدة السلسلة: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

بتعويض $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ، $\frac{dy}{du} = 3u^2 - 2$: $= (3u^2 - 2) \times \frac{1}{\sqrt{x}}$

بتعويض $u = 2\sqrt{x}$: $= \left(3\left(2\sqrt{x}\right)^2 - 2\right) \times \frac{1}{\sqrt{x}}$

بتعويض $x = 4$: $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=4} = (3(2\sqrt{4})^2 - 2) \times \frac{1}{\sqrt{4}}$

بالتبسيط: $= 23$

أتحقق من فهمي:

إذا كان: $y = u^5 + u^3$، حيث: $u = 3 - 4x$، فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 2$.

$$\frac{dy}{du} = 5u^4 + 3u^2$$

$$\frac{du}{dx} = -4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= (5u^4 + 3u^2) \times -4$$

$$= -4(5(3 - 4x)^4 + 3(3 - 4x)^2)$$

$$= -20(3 - 4x)^4 - 12(3 - 4x)^2$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=2} = -20(625) - 12(25) = -12800$$

أتدرب وأحل المسائل:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = (1+2x)^4$

$f'(x) = 4(1+2x)^3(2)$

$= 8(1+2x)^3$

2) $f(x) = (3-2x^2)^{-5}$

$f'(x) = -5(3-2x^2)^{-6}(-4x)$

$= 20x(3-2x^2)^{-6}$

$= \dfrac{20x}{(3-2x^2)^6}$

3) $f(x) = (x^2-7x+1)^{\frac{3}{2}}$

$f'(x) = \dfrac{3}{2}(x^2-7x+1)^{\frac{1}{2}}(2x-7)$

$= \dfrac{3}{2}(2x-7)\sqrt{x^2-7x+1}$

4) $f(x) = \sqrt{7-x}$

$f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{7-x}}$

5) $f(x) = 4(2+8x)^4$

$f'(x) = 16(2+8x)^3(8)$

$= 128(2+8x)^3$

6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{4x-8}}$

$f(x) = (4x-8)^{-\frac{1}{3}}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{3}(4x-8)^{-\frac{4}{3}}(4)$

$= -\dfrac{4}{3}(4x-8)^{-\frac{4}{3}}$

$= \dfrac{-4}{3\sqrt[3]{(4x-8)^4}}$

7) $f(x) = \sqrt{5+3x^3}$

$$f'(x) = \frac{9x^2}{2\sqrt{5+3x^3}}$$

8) $f(x) = \sqrt{x} + (x-3)^2$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2(x-3)$$

9) $f(x) = \sqrt[3]{2x - x^5} + (4-x)^2$

$$f(x) = (2x - x^5)^{\frac{1}{3}} + (4-x)^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(2x - x^5)^{-\frac{2}{3}}(2 - 5x^4) + 2(4-x)(-1)$$

$$= \frac{2 - 5x^4}{3\sqrt[3]{(2x - x^5)^2}} - 8 + 2x$$

10) $f(x) = (\sqrt{x} + 5)^4$

$$f'(x) = 4(\sqrt{x} + 5)^3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x} + 5)^3}{\sqrt{x}}$$

11) $f(x) = \sqrt{(2x-5)^3}$

$$f'(x) = \frac{3(2x-5)^2(2)}{2\sqrt{(2x-5)^3}}$$

$$= \frac{3(2x-5)^2}{\sqrt{(2x-5)^3}} = 3\sqrt{2x-5}$$

12) $f(x) = (2x^3 - 3x^2 + 4x + 1)^5$

$$f'(x) = 5(2x^3 - 3x^2 + 4x + 1)^4(6x^2 - 6x + 4)$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

13) $f(x) = \frac{1}{(4x+1)^2}, x = \frac{1}{4}$

$$f(x) = (4x+1)^{-2}$$

$$f'(x) = -2(4x+1)^{-3}(4)$$

$$= -\frac{8}{(4x+1)^3}$$

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{8}{(4 \times \frac{1}{4} + 1)^3} = -1$$

14) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, x = 3$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$f'(3) = \frac{-3}{\sqrt{25 - (3)^2}} = -\frac{3}{4}$$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

15) $y = 5u^2 + 3u, u = x^3 + 1$

$$\frac{dy}{du} = 10u + 3$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= (10u + 3) \times 3x^2$$

$$= (10(x^3 + 1) + 3) \times 3x^2$$

$$= (10x^3 + 13) \times 3x^2$$

$$= 30x^5 + 39x^2$$

16) $y = \sqrt[3]{2u+5}, u = x^2 - x$

$$y = (2u+5)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{3}(2u+5)^{-\frac{2}{3}}(2) = \frac{2}{3}(2u+5)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2u+5)^2}}$$

$$\frac{du}{dx} = 2x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{(2u+5)^2}} \times (2x-1)$$

$$= \frac{2(2x-1)}{3\sqrt[3]{(2(x^2-x)+5)^2}}$$

$$= \frac{4x-2}{3\sqrt[3]{(2x^2-2x+5)^2}}$$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

17) $y = 3u^2 - 5u + 2, u = x^2 - 1, x = 2$

$$\frac{dy}{du} = 6u - 5$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= (6u-5) \times (2x)$$

$$= (6(x^2-1)-5) \times (2x)$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=2} = (6(4-1)-5) \times (4) = 52$$

18)$y = (1+u^2)^3, u = 2x-1, x = 1$

$$\frac{dy}{du} = 3(1+u^2)^2(2u) = 6u(1+u^2)^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= 6u(1+u^2)^2 \times (2)$$

$$= 12(2x-1)(1+(2x-1)^2)^2$$

$$\frac{dy}{dx}|_{x=1} = 12(2-1)(1+(2-1)^2)^2 = 48$$

صناعة: يمثل الاقتران: $C(x) = 1000\sqrt{x^2 = 0.1x}$ تكلفة إنتاج x قطعة من منتج معين (بآلاف الدنانير):

19)أجد معدل تغير تكلفة الإنتاج بالنسبة إلى عدد القطع المنتجة.

$$C'(x) = \frac{1000(2x-0.1)}{2\sqrt{x^2-0.1x}} = \frac{2000x-100}{2\sqrt{x^2-0.1x}} = \frac{1000x-50}{\sqrt{x^2-0.1x}}$$

20) أجد معدل تغير تكلفة الإنتاج بالنسبة إلى عدد القطع المنتجة عندما يكون عدد القطع المنتجة 20 قطعة.

$$C'(20) = \frac{1000(20-50}{\sqrt{(20)^2-0.1(20)}} = \frac{19950}{\sqrt{398}} \approx 1000$$

علوم: يمثل الاقتران: $N(t) = 400(1 - \frac{3}{(t^2+2)^2})$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t يوما في مجتمع بكتيري:

21)أجد معدل تغير N بالنسبة إلى t عندما $t = 1$.

$$N(t) = 400(1-3(t^2+2)^{-2})$$

$$N'(t) = 400(6(t^2+2)^{-3}(2t)) = \frac{4800t}{(t^2+2)^3}$$

$$N'(1) = \frac{4800}{(1+2)^3} \approx 178$$

22)أجد معدل تغير N بالنسبة إلى t عندما $t = 4$.

$$N'(4) = \frac{4800(4)}{(16+2)^3} \approx 3$$

إذا كان: $g(2) = -3, g'(2) = 6, h(3) = 2, h'(3) = -2$، فأجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عندما $x = 3$:

23)$f(x) = g(h(x))$

$f'(x) = g'(h(x)) \times h'(x)$

$f'(3) = g'(h(3)) \times h'(3)$

$= g'(2) \times -2$

$= 6 \times -2 = -12$

24)$f(x) = (h(x))^3$

$f'(x) = 3(h(x))^2 \times h'(x)$

$f'(3) = 3(h(3))^2 \times h'(3)$

$= 3(2)^2 \times -2 = -24$

مهارات التفكير العليا:

25) تبرير: إذا كان: $h(x) = f(g(x))$، حيث: $f(u) = u^2 - 1$، وكان: $g(2) = 3, g'(2) = -1$، فأجد $h'(2)$، مبررا إجابتي.

$h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$

$h'(2) = f'(g(2)) \times g'(2)$

$= f'(3) \times -1$

نجد مشتقة f ونحسب $f'(3)$

$f(u) = u^2 - 1 \rightarrow f'(u) = 2u \rightarrow f'(3) = 2 \times 36$

إذن،

$h'(2) = f'(3) \times -1$

$= 6 \times -1 = -6$

26) تبرير: أجد مشتقة الاقتران: $y = (x^2-4)^5$ عندما $y = 0$، مبررا إجابتي.

$y = (x^2-4)^5$

$0 = (x^2-4)^5 \to \; x^2-4 = 0 \to (x-2)(x+2) = 0$

$\to x = 2$ أو $x = -2$

$\frac{dy}{dx} = 5(x^2-4)^4(2x) = 10x(x^2-4)^4$

$\frac{dy}{dx}|_{x-2} = 10(2)(2^2-4)^4 = 0$

$\frac{dy}{dx}|_{x=-2} = 10(-2)((-2)^2-4)^4 = 0$

27)أكتشف المختلف: أي الاقترانات الآتية مختلف، مبررا إجابتي؟

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$	$h(x) = (x^2+1)^3$	$g(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$	$p(x) = x^2+1$

$p(x)$ هو الاقتران الوحيد الذي يمكن اشتقاقه بدون تطبيق قاعدة السلسلة.

28) تحد: أجد مشتقة الاقتران: $f(x) = \sqrt[3]{2x+(x^2+x)^2}$

$f(x) = (2x+(x^2+x)^4)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(2x+(x^2+x)^4)^{-\frac{2}{3}}(2+4(x^2+x)^3(2x+1))$

$= \frac{2+4(x^2+x)^3(2x+1)}{3\sqrt[3]{(2x+(x^2+x)^4)^2}}$

كتاب التمارين
الدرس الأول – قاعدة السلسلة

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \sqrt{4x-1}$

$f'(x) = \dfrac{4}{2\sqrt{4x-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x-1}}$

2) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3-x^2}}$

$f(x) = 3(3-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x) = -\dfrac{3}{2}(3-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = \dfrac{3x}{\sqrt{(3-x^2)^3}}$

3) $f(x) = (3+4x)^{\frac{5}{2}}$

$f'(x) = \dfrac{5}{2}(3+4x)^{\frac{3}{2}}(4) = 10(3+4x)^{\frac{3}{2}}$

4) $f(x) = (8-x)^{100}$

$f'(x) = 100(8-x)^{99}(-1) = -100(8-x)^{99}$

5) $f(x) = x^2 + (200-x)^2$

$f'(x) = 2x + 2(200-x)^1(-1) = 2x - 2(200-x)$

$= 2x - 400 + 2x$

$= 4x - 400$

6) $f(x) = (x+5)^7 + (2x+3)^6$

$f'(x) = 7(x+5)^6(1) + 6(2x+3)^5(2)$

$= 7(x+5)^6 + 12(2x+3)^5$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x^5 + 6x}$

$f(x) = (x^5 + 6x)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^5 + 6x)^{-\frac{2}{3}}(5x^4 + 6) = \frac{5x^4 + 6}{3\sqrt[3]{(5x^4 + 6x)^2}}$

8) $f(x) = \frac{1}{(x^2-3)^3}$

$f(x) = (x^2 - 3)^{-3}$

$f'(x) = -3(x^2 - 3)^{-4}(2x) = \frac{-6x}{(x^2 - 3)^4}$

9) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{16 - x^2}$

$f'(x) = x + \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = x - \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

10) $f(x) = 4x^3 + (x - 2)^4, x = 2$

$f'(x) = 12x^2 + 4(x - 2)^3$

$f'(2) = 12(4) + 4(2 - 2)^3 = 48$

11) $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x}, x = 8$

$f'(x) = \frac{2x + 8}{2\sqrt{x^2 + 8x}} = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x}}$

$f'(8) = \frac{8 + 4}{\sqrt{64 + 64}} = \frac{12}{\sqrt{128}} = \frac{12}{8\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

12) $y = u^3 - 7u^2, u = x^2 + 3$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 - 14u$$

$$\frac{dy}{du} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= (3u^2 - 14u) \times 2x$$

$$= 6x(x^2 + 3)^2 - 28x(x^2 + 3)$$

13) $y = \sqrt{7 - 3u}, u = x^2 - 9$

$$\frac{dy}{du} = \frac{-3}{2\sqrt{7 - 3u}}$$

$$\frac{dy}{du} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{-3}{2\sqrt{7 - 3u}} \times 2x$$

$$= \frac{-3x}{\sqrt{7 - 3(x^2 - 9)}} = \frac{-3x}{\sqrt{34 - 3x^2}}$$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

$14)\ f(x) = u^3 - 5(u^3 - 7u^2), u = \sqrt{x}, x = 4$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 - 10(u^3 - 7u)(3u^2 - 7)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

عندما $x = 4$ ، فإن $u = 2$

$$\frac{dy}{dx}|_{x=4} = \frac{dy}{du}|_{u=2} \times \frac{du}{dx}|_{x=4}$$

$$\frac{dy}{du}|_{u=2} = 3(4) - 10(8 - 14)(12 - 7) = 312$$

$$\frac{du}{dx}|_{x=4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{dy}{dx}|_{x=4} = 312 \times \frac{1}{4} = 78$$

$15)\ f(x) = 2u^3 + 3u^2, u = x + \sqrt{x}, x = 1$

$$\frac{dy}{du} = 6u^2 + 6u$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

عندما $x = 1$، فإن $\mathrm{u} = 2$

$$\frac{dy}{dx}|_{x=1} = \frac{dy}{du}|_{u=2} \times \frac{du}{dx}|_{x=1}$$

$$\frac{dy}{du}|_{u=2} = 6(4) + 6(2) = 36$$

$$\frac{du}{dx}|_{x=1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{dy}{dx}|_{x=1} = 36 \times \frac{3}{2} = 54$$

تلوث: توصلت دراسة بيئية إلى نمذجة مقدار التلوث في إحدى البحيرات باستعمال الاقتران: $P(t) = (t^{\frac{1}{4}} + 3)^3$، حيث t الزمن بالسنوات، علما بأن P يقاس بأجزاء من المليون:

16)أجد معدل تغير مقدار التلوث في ابحيرة بالنسبة إلى الزمن t.

$$P'(t) = 3(t^{\frac{1}{4}} + 3)^2 \times \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{4}} = \frac{3(t^{\frac{1}{4}} + 3)^2}{4t^{\frac{3}{4}}}$$

17) أجد معدل تغير مقدار التلوث في البحيرة بعد 16 عاما.

$$P'(16) = \frac{3(2+3)^2}{4(8)} = \frac{75}{32} \approx 2.34$$

إذا كان: $g(-2) = 8, g'(-2) = 4, h(5) = -2, h'(5) = 6$، فأجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عندما $x = 5$:

18)$f(x) = g(h(x))$

$f'(x) = g'(h(x)) \times h'(x)$

$f'(5) = g'(h(5)) \times h'(5)$

$= g'(-2) \times 6$

$= 4 \times 6 = 24$

19)$f(x) = 4(h(x))^2$

$f'(x) = 8(h(x)) \times h'(x)$

$f'(5) = 8(h(5)) \times h'(5)$

$= 8 \times -2 \times 6 = -96$

كتاب الطالب

الدرس الثاني – مشتقتا الضرب والقسمة

مثال 1:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = (2x+3)(x^2-5)$

الاقتران المعطى $f(x) = (2x+3)(x^2-5)$

قاعدة مشتقة الضرب $f'(x) = (2x+3)\frac{d}{dx}(x^2-5) + (x^2-5)\frac{d}{dx}(2x+3)$

قواعد مشتقة كثيرات الحدود، ومشتقة الجمع، ومشتقة الطرح $= (2x+3)(2x) + (x^2-5)(2)$

باستعمال خاصية التوزيع $= (4x^2+6x) + (2x^2-10)$

بالتبسيط $= 6x^2+6x-10$

2) $f(x) = (\sqrt{x}-1)(x^2+4)$

الاقتران المعطى $f(x) = (\sqrt{x}-1)(x^2+4)$

قاعدة مشتقة الضرب $f'(x) = (\sqrt{x}-1)\frac{d}{dx}(x^2+4) + (x^2+4)\frac{d}{dx}(\sqrt{x}-1)$

قواعد مشتقة اقتران القوّة، ومشتقة الجمع، ومشتقة الطرح $= (\sqrt{x}-1)(2x) + (x^2+4)(\frac{1}{2\sqrt{x}})$

باستعمال خاصية التوزيع $= (2x\sqrt{x}-2x) + \left(\frac{x^2+4}{2\sqrt{x}}\right)$

بالتبسيط $= 2x\sqrt{x}-2x+\frac{x^2+4}{2\sqrt{x}}$

أتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = (x^3+4)(7x^2-4x)$

$f'(x) = (x^3+4)(14x-4) + (7x^2-4x)(3x^2)$

$= 14x^4-4x^3+56x-16+21x^4-12x^3$

$= 35x^4-16x^3+56x-16$

b) $f(x) = (\sqrt{x}+1)(3x-2)$

$$f'(x) = (\sqrt{x}+1)(3) + (3x-2)(\frac{1}{2\sqrt{x}})$$

$$= 3\sqrt{x} + 3 + \frac{3x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= 3\sqrt{x} + 3 + \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{9}{2}\sqrt{x} + 3 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

مثال 2:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \frac{x}{2x+5}$

$f(x) = \frac{x}{2x+5}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = \frac{(2x+5)\frac{d}{dx}(x)-(x)\frac{d}{dx}(2x+5)}{(2x+5)^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \frac{(2x+5)(1)-(x)(2)}{(2x+5)^2}$ قواعد مشتقة كثيرات الحدود، ومشتقة الجمع

$= \frac{2x+5-2x}{(2x+5)^2}$ باستعمال خاصية التوزيع

$= \frac{5}{(2x+5)^2}$ بالتبسيط

2) $f(x) = \frac{1+x^{-5}}{x^3}$

$f(x) = \frac{1+x^{-5}}{x^3}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = \frac{(x^3)\frac{d}{dx}(1+x^{-5})-(1+x^{-5})\frac{d}{dx}(x^3)}{(x^3)^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \frac{(x^3)(-5x^{-6})-(1+x^{-5})(3x^2)}{(x^3)^2}$ قواعد مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة الجمع

$= \frac{-5x^{-3}-3x^2-3x^{-3}}{x^6}$ باستعمال خاصية التوزيع

$= \frac{-8x^{-3}-3x^2}{x^6}$ بالتبسيط

أتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

$$f'(x) = \frac{(x-2)(3) - (3x+1)(1)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{3x - 6 - 3x - 1}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{-7}{(x-2)^2}$$

b) $f(x) = \frac{x^{-3}}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(-3x^{-4}) - (x^{-3})(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-3x^{-2} - 3x^{-4} - 2x^{-2}}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-5x^{-2} - 3x^{-4}}{(x^2+1)^2}$$

مثال 3: من الحياة

دواء: يُمثِّل الاقتران: $C(t) = \frac{2t}{3t^2+16}$ تركيز مُسكِّن للألم في دم مريض بعد t ساعة من تناوله، حيث C مَقيسة بوحدة $\mu g/mL$:

1) أجد مُعدل تغيُّر تركيز المُسكِّن في دم المريض بالنسبة إلى الزمن t.

أجد $C'(t)$

الاقتران المعطى $C(t) = \frac{2t}{3t^2+16}$

قاعدة مشتقة القسمة $C'(t) = \frac{(3t^2+16)\frac{d}{dt}(2t) - (2t)\frac{d}{dt}(3t^2+16)}{(3t^2+16)^2}$

قواعد مشتقة كثيرات الحدود، ومشتقة الطرح، ومشتقة الجمع $= \frac{(3t^2+16)(2) - (2t)(6t)}{(3t^2+16)^2}$

باستعمال خاصية التوزيع $= \frac{6t^2+32-12t^2}{(3t^2+16)^2}$

بالتبسيط $= \frac{32-6t^2}{(3t^2+16)^2}$

إذن، مُعدَّل تغير تركيز المُسكِّن في دم المريض بالنسبة إلى الزمن t هو: $C'(t) = \frac{32-6t^2}{(3t^2+16)^2}$

2) أجد مُعدل تغيُّر تركيز المُسكِّن في دم المريض عندما $t = 1$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

أجد $C'(1)$

مشتقة $C(t)$ $\quad C'(t) = \frac{32-6t^2}{(3t^2+16)^2}$

بتعويض $t = 1$ $\quad C'(1) = \frac{32-6(1)^2}{(3(1)^2+16)^2}$

بالتبسيط $\quad \approx 0.072$

إذن، عندما يكون الزمن $1h$، فإنَّ تركيز المُسكِّن في دم المريض يزداد بمقدار $0.072 \mu g/mL$ لكل ساعة.

أتحقق من فهمي:

سكّان: يُمثل عدد سكّان بلدة صغيرة بالاقتران: $P(t) = \frac{5}{2t^2+9}$، حيث t الزمن بالسنوات منذ الآن، و P عدد السكّان بالآلاف:

a) أجد مُعدل تغيُّر عدد السكّان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t.

$$P'(t) = \frac{(2t^2+9)(0)-(5)(4t)}{(2t^2+9)^2}$$

$$= \frac{-20t}{(2t^2+9)^2}$$

b) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في البلدة عندما $t = 2$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

$$P'(2) = \frac{-40}{(8+9)^2} = -\frac{40}{289} \approx -0.14$$

يتناقص عدد السكان بمعدل 140 نسمة لكل سنة بعد سنتين من الآن.

مثال 4:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

الاقتران المعطى $\quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

قاعدة مشتقة المقلوب $\quad = \frac{-\frac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$

قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة الجمع $\quad = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

2) $f(x) = \frac{2}{3-4x}$

الاقتران المعطى $f(x) = \frac{2}{3-4x}$

قاعدة مشتقة المقلوب $= f'(x) = \frac{-2\frac{d}{dx}(3-4x)}{(3-4x)^2}$

قاعدتا مشتقة كثيرات الحدود، ومشتقة مضاعفات القوَّة $= \frac{-2(-4)}{(3-4x)^2}$

بالتبسيط $= \frac{8}{(3-4x)^2}$

أتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \frac{1}{1-x^3}$

$$f'(x) = \frac{-(1)(-3x^2)}{(1-x^3)^2} = \frac{3x^2}{(1-x^3)^2}$$

b) $f(x) = \frac{3}{2x+1}$

$$f'(x) = \frac{-(3)(2)}{(2x+1)^2} = \frac{-6}{(2x+1)^2}$$

مثال 5:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = (3x-5)^4(7-x)^{10}$

الاقتران المعطى $f(x) = (3x-5)^4(7-x)^{10}$

قاعدة مشتقة الضرب $f'(x) = (3x-5)^4\frac{d}{dx}(7-x)^{10} + (7-x)^{10}\frac{d}{dx}(3x-5)^4$

قاعدتا السلسلة، ومشتقة كثيرات الحدود

$$= (3x-5)^4 \times 10(7-x)^9 \times (-1) + (7-x)^{10} \times 4(3x-5)^3 \times 3$$

بالتبسيط $= -10(3x-5)^4(7-x)^9 + 12(7-x)^{10}(3x-5)^3$

2) $f(x) = \frac{4x+3}{(2x-1)^3}$

الاقتران المعطى
$$f(x) = \frac{4x+3}{(2x-1)^3}$$

قاعدة مشتقة القسمة
$$f'(x) = \frac{(2x-1)^3\frac{d}{dx}(4x+3)-(4x+3)\frac{d}{dx}(2x-1)^3}{((2x-1)^3)^2}$$

قاعدتا السلسلة، ومشتقة كثيرات الحدود
$$= \frac{4(2x-1)^3-(4x+3)(3(2x-1)^2(2))}{(2x-1)^6}$$

بالتبسيط
$$= \frac{4(2x-1)^3-6(4x+3)(2x-1)^2}{(2x-1)^6}$$

أتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = 20x(4x^3-1)^6$

$f'(x) = (20x) \times 6(4x^3-1)^5(12x^2) + (4x^3-1)^6(20)$

$= 1440x^3(4x^3-1)^5 + 20(4x^3-1)^6$

b) $f(x) = \frac{x^2-1}{(x+2)^4}$

$$f'(x) = \frac{(x+2)^4(2x) - (x^2-1) \times 4(x+2)^3 \times 1}{(x+2)^8}$$

$$= \frac{2x(x+2)^4 - 4(x-1)(x+2)^3}{(x+2)^8}$$

أتدرب وأحل المسائل:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = x(1+3x)^5$

$f'(x) = (4x-1)(2x) + (x^2-5)(4)$

$= 8x^2 - 2x + 4x^2 - 20$

$= 12x^2 - 2x - 20$

2) $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{(x+1)(1) - (x+3)(1)}{(x+1)^2} = \frac{-2}{(x+1)^2}$$

3) $f(x) = \frac{x^2+6}{2x-7}$

$$f'(x) = \frac{(2x-7)(2x) - (x^2+6)(2)}{(2x-7)^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 14x - 2x^2 - 12}{(2x-7)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 14x - 12}{(2x-7)^2}$$

4) $f(x) = \frac{3x^2}{(2x-1)^2}$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)^2(6x) - (3x^2) \times 2(2x-1)(2)}{(2x-1)^4}$$

$$= \frac{6x(2x-1)^2 - 12x^2(2x-1)}{(2x-1)^4}$$

5) $f(x) = \frac{6x}{\sqrt{5x+3}}$

$$f'(x) = \frac{\left(\sqrt{5x+3}\right)(6) - (6x)\left(\frac{5}{2\sqrt{5x+3}}\right)}{5x+3}$$

6) $f(x) = x(1+3x)^5$

$$f'(x) = x \times 5(1+3x)^4(3) + (1+3x)^5(1)$$

$$= 15x(1+3x)^4 + (1+3x)^5$$

7) $f(x) = (2x+1)^5(3x+2)^4$

$$f'(x) = (2x+1)^5 \times 4(3x+2)^3(3) + (3x+2)^4 \times 5(2x+1)^4 \times 2$$

$$= 12(2x+1)^5(3x+2)^3 + 10(3x+2)^4(2x+1)^4$$

8) $f(x) = \frac{1}{5+2x} - 2x^4$

$$f'(x) = \frac{-(1)(2)}{(5+2x)^2} - 8x^3$$

$$= \frac{-2}{(5+2x)^2} - 8x^3$$

9) $f(x) = (x+1)\sqrt{x-1}$

$$f'(x) = (x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + (\sqrt{x-1})(1)$$

$$= \frac{x+1}{2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-1}$$

10) $f(x) = \frac{8}{1+\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{-8\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{-\frac{4}{\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

11) $f(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$

$$f'(x) = \frac{(-5)(2)(x+2)(1)}{(x+2)^2} = \frac{-10}{(x+2)^3}$$

12) $f(x) = (x + \frac{2}{x})(x^2 - 3)$

$$f'(x) = \left(x + \frac{2}{x}\right)(2x) + (x^2 - 3)(1 - \frac{2}{x^2})$$

$$= 2x^2 + 4 + x^2 - 3 - 2 + \frac{6}{x^2}$$

$$= 3x^2 - 1 + \frac{6}{x^2}$$

13) $f(x) = (8x+\sqrt{x})(5x^2+3)$

$$f'(x) = (8x+\sqrt{x})(10x) + (5x^2+3)(8+\frac{1}{2\sqrt{x}})$$

14) $f(x) = 5x^{-3}(x^4 - 5x^3 + 10x - 2)$

$$f(x) = 5x - 25 + 50x^{-2} - 10x^{-3}$$

$$f'(x) = 5 - 100x^{-3} + 30x^{-4}$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

15) $f(x) = x^2(3x-1)^3, x = 1$

$$f'(x) = (x^2) \times 3(3x-1)^2 \times 3 + (3x-1)^3(2x)$$

$$f'(1) = (1)3(3-1)^2 \times 3 + (3(1)-1)^3(2(1)) = 36 + 16 = 52$$

16) $f(x) = 3x\sqrt{5-x}\ ,\ x = 4$

$$f'(x) = (3x)\left(\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}\right) + (\sqrt{5-x})(3)$$

$$f'(4) = \frac{(3\times 4)(-1)}{2\sqrt{5-4}} + (\sqrt{5-4})(3)$$

$$= \frac{-12}{2\times 1} + 1\times 3 = -6 + 3 = -3$$

17) $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}, x = 2$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(1) - (x-1)(2)}{(2x+1)^2}$$

$$f'(2) = \frac{(4+1)(1) - (2-1)(2)}{(4+1)^2} = \frac{3}{25}$$

18) $f(x) = \frac{9}{1-2x^3}, x = -1$

$$f'(x) = \frac{-9(-6x^2)}{(1-2x^3)^2}$$

$$f'(-1) = \frac{-9(-6)}{(1+2)^2} = \frac{54}{9} = 6$$

أعمال: يُمثل الاقتران: $S(t) = \frac{2000t}{4+0.3t}$ إجمالي المبيعات (بآلاف الدنانير) لشركة جواهر وحُلِي، حيث t عدد السنوات بعد عام 2020 م:

19) أجد مُعدل تغيُّر إجمالي المبيعات للشركة بالنسبة إلى الزمن t.

$$S'(t) = \frac{(4+.3t)(2000) - 2000t(0.3)}{(4+0.3t)^2}$$

$$= \frac{8000}{(4+0.3t)^2}$$

20) أجد مُعدل تغيُّر إجمالي المبيعات للشركة عام 2030 م، مُفسراً معنى الناتج.

$$t = 2030 - 2020 = 10$$

$$S'(10) = \frac{8000}{(4+3)^2} = \frac{8000}{49} \approx 163$$

يتزايد إجمالي المبيعات بمقدار 163 ألف دينار لكل سنة في عام 2030م.

سكّان: يُمثل عدد سكان بلدة صغيرة بالاقتران: $P(t) = 12(2t^2 + 100)(t+20)$، حيث t الزمن بالسنوات منذ الآن، وPعدد السكان بالآلاف:

21)أجد مُعدل تغيُّر عدد السكان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t.

$$P'(t) = 12(2t^2 + 100)(1) + (t+20) \times 12(4t)$$

$$= 12(2t^2 + 100) + 48t(t+20)$$

22) أجد مُعدل تغير عدد السكان في البلدة عندما $t = 6$، مُفسراً معنى الناتج.

$$P'(6) = 12(2(36) + 100) + 48(6)(6+20) = 9552$$

يتزايد عدد السكان بمعدل 9552 نسمة كل سنة بعد 6 سنوات من الآن.

تفاعلات: يُمكن نمذجة كتلة مُركب في أثناء تفاعل كميائي

باستعمال الاقتران $M(t)=\frac{5.8t}{t+1.9}$، حيث t الزمن بالثواني بعد بَدء التفاعل،

و M الكتلة بالغرام. أجد مُعدل تغير كتلة المُركب بعد 5 ثوانٍ من بَدء التفاعل.

$$M'(t)=\frac{(t+1.9)(5.8)-(5.8t)(1)}{(t+1.9)^2}$$

$$=\frac{11.02}{(t+1.9)^2}$$

$$M'(5)=\frac{11.02}{(5+1.9)^2}\approx 0.23$$

استعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

23) $y=u(u^2+3)^3, u=(x+3)^2, x=-2$

$$\frac{dy}{du}=u\times 3(u^2+3)^2(2u)+(u^2+3)^3(1)$$

$$=6u^2(u^2+3)^2+(u^2+3)^3$$

$$\frac{du}{dx}=2(x+3)(1)=2x+6$$

عندما $x=-2$ فإن $u=(-2+3)^2=1$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=-2}=\frac{dy}{du}\Big|_{u=1}\times\frac{du}{dx}\Big|_{x=-2}$$

$$\frac{dy}{du}\Big|_{u=1}=6(1+3)^2+(1+3)^3=96+64=160$$

$$\frac{du}{dx}\Big|_{x=-2}=2(-2)+6=2$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=-2}=160\times 2=320$$

24) $y = \frac{u^3}{u+1}, u = (x^2+1)^3, x = 1$

$$\frac{dy}{du} = \frac{(u+1)\times 3u^2 - u^3(1)}{(u+1)^2} = \frac{2u^3+3u^2}{(u+1)^2}$$

$$\frac{du}{dx} = 3(x^2+1)^2(2x) = 6x(x^2+1)^2$$

عندما $x = 1$، فإن $u = (1^2+3)^3 = 8$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = \frac{dy}{du}\Big|_{u=8} \times \frac{du}{dx}\Big|_{x=1}$$

$$\frac{dy}{du}\Big|_{u=8} = \frac{2(8^3)+3(8^2)}{(8+1)^2}$$

$$\frac{du}{dx}\Big|_{x=1} = 6(1)(1^2+1)^2 = 24$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = \frac{1216}{81} \times 24 = \frac{9728}{27}$$

إذا كان: $f(2) = 4, f'(2) = -1, g(2) = 3, g'(2) = 2$، فأوجد كُلاً مما يأتي:

25) $(fg)'(2)$

$$(fg)'(x) = (f \times g)'(x)$$

$$= f(x) \times g'(x) + g(x) \times f'(x)$$

$$(fg)'(2) = f(2) \times g'(2) + g(2) \times f'(2)$$

$$= 4 \times 2 + 3 \times -1 = 5$$

26) $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{g(2) \times f'(2) - f(2) \times g'(2)}{(g(2))^2} = \frac{3 \times -1 - 4 \times 2}{(3)^2} = -\frac{11}{9}$$

27) $(3f + fg)'(2)$

$$(3f + fg)'(x) = 3f'(x) + f(x) \times g'(x) + g(x) \times f'(x)$$

$$(3f + fg)'(2) = 3f'(2) + f(2) \times g'(2) + g(2) \times f'(2)$$

$$= 3 \times -1 + 4 \times 2 + 3 \times -1 = 2$$

مهارات التفكير العليا:

28) تحدٍّ: أجد مشتقة الاقتران: $f(x) = x(4x-3)^6(1-4x)^9$

$$f'(x) = (x(4x-3)^6) \times 9(1-4x)^8(-4) + (1-4x)^9 \times (x \times 6(4x-3)^5(4) + (4x-3)^6 \times (1))$$

$$f'(x) = -36x(4x-3)^6(1-4x)^8 + (1-4x)^9(24x(4x-3)^5 + (4x-3)^6$$

تبرير: إذا كان: $f(x) = \frac{2x}{x+5} + \frac{6x}{x^2+7x+10}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

29) أُثبِت أنَّ $f(x) = \frac{2x}{x+2}$، مُبررًا إجابتي.

$$f(x) = \frac{2x}{x+5} + \frac{6x}{x^2+7x+10}$$

$$= \frac{2x}{x+5} + \frac{6x}{(x+5)(x+2)}$$

$$= \frac{2x(x+2)}{(x+5)(x+2)} + \frac{6x}{(x+5)(x+2)}$$

$$= \frac{2x^2+10z}{(x+5)(x+2)}$$

$$= \frac{2x(x+5)}{(x+5)(x+2)} = \frac{2x}{x+2}$$

30) أجد $f'(3)$.

$$f'(x) = \frac{(x+2)(2)-(2x)(1)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$$

$$f'(3) = \frac{4}{(3+2)^2} = \frac{4}{25}$$

31)تبرير: إذا كان $f(x) = \frac{2x+8}{\sqrt{x}}$، فأجد قيمة x عندما $f'(x) = 0$، مُبرراً إجابتي.

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x})(2) = (2x+8)(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{x}$$

$$0 = \frac{(\sqrt{x})(2) = (2x+8)(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{x}$$

$$(\sqrt{x})(2) - (2x+8)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 0$$

$$2\sqrt{x} - \sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}}$$

$$x = 4$$

كتاب التمارين

الدرس الثاني – مشتقتا الضرب والقسمة

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 2x(1+3x^2)^3$

$f'(x) = (2x) \times 3(1+3x^2)^2(6x) + (1+3x^2)^3(2)$

$= 36x^2(1+3x^2)^2 + 2(1+3x^2)^3$

2) $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$

$$f'(x) = \frac{(x+2)(1) - (x-2)(1)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$$

3) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1} + 4x^3$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(3x^2) - (x^3-1)(2x)}{(x^2+1)^2} + 12x^2$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 + 2x}{(x^2+1)^2} + 12x^2$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^2+1)^2} + 12x^2$$

4) $f(x) = (1-x^2)^4(2x+6)^3$

$f'(x) = (1-x^2)^4 \times 3(2x+6)^2(2) + (2x+6)^3 \times 4(1-x^2)^3(-2x)$

$= 6(1-x^2)^4(2x+6)^2 - 8x(2x+6)^3(1-x^2)^3$

5) $f(x) = \frac{3x+5}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2(3) - (3x+5)(2)(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{3(x+1)^2 - 2(3x+5)(x+1)}{(x+1)^4}$$

6) $f(x) = (5x^2 + 4x - 3)(2x^2 - 3x + 1)$

$f'(x) = (5x^2 + 4x - 3)(4x - 3) + (2x^2 - 3x + 1)(10x + 4)$

$= 40x^3 - 21x^2 - 26x + 13$

7) $f(x) = (3x^5 - x^2)(x - \frac{5}{x})$

$f(x) = 3x^6 - 15x^4 - x^3 + 5x$ بفك الأقواس

$f'(x) = 18x^5 - 60x^3 - 3x^2 + 5$

أو بتطبيق قاعدة مشتقة ضرب اقترانين:

$$f'(x) = (3x^5 - x^2)(1 + \frac{5}{x^2}) + (x - \frac{5}{x})(15x^4 - 2x)$$

$= 18x^5 - 60x^3 - 3x^2 + 5$

8) $f(x) = \frac{5x^2-1}{2x^3+3}$

$$f'(x) = \frac{(2x^3 + 3)(10x) - (5x^2 - 1)(6x^2)}{(2x^3 + 3)^2} = \frac{-10x^4 + 6x^2 + 30x}{(2x^3 + 3)^2}$$

9) $f(x) = \frac{1}{x-4}$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x - 4)^2}$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

10) $f(x) = x^5\sqrt{10x + 6}, x = 1$

$$f'(x) = (x^5)(\frac{5}{\sqrt{10x + 6}}) + (\sqrt{10x + 6})(5x^4)$$

$$f'(1) = (1)(\frac{5}{\sqrt{10 + 6}}) + (\sqrt{10 + 6})(5) = \frac{85}{4} = 21.25$$

11) $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x+4}}, x = 12$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x+4})(1) - (x+3)(\frac{1}{2\sqrt{x+4}})}{x+4}$$

$$f'(12) = \frac{(\sqrt{12+4})(1) - (12+3)(\frac{1}{2\sqrt{12+4}})}{12+4} = \frac{17}{128}$$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

12) $y = 5u^2 + 3u - 1, u = \frac{18}{x^2+5}, x = 2$

$$\frac{du}{dx} = 10u + 3$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-36x}{(x^2+5)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= (10u + 3) \times \frac{-36x}{(x^2+5)^2}$$

$$= (\frac{180}{x^2+5} + 3) \times \frac{-36x}{(x^2+5)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}|_{x=2} = (\frac{180}{4+5} + 3) \times \frac{-72}{(4+5)^2} = -\frac{184}{9}$$

الأستاذ: عماد مسك 0795153669

13) $y = \frac{1}{u+1}, u = x^3 - 2x + 5, x = 0$

$$\frac{dy}{du} = \frac{-1}{(u+1)^2}$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{-1}{(u+1)^2} \times (3x^2 - 2)$$

$$= \frac{-1}{(x^3 - 2x + 6)^2} \times (3x^2 - 2)$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{-1}{(6)^2} \times (-2) = \frac{1}{18}$$

سكان: يمثل عدد سكان مدينة صغيرة بالاقتران: $P(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$، حيث t الزمن بالسنوات منذ الآن، و P عدد السكان بالآلاف:

14) أجد معدل نمو السكان في المدينة بالنسبة إلى الزمن t.

$$P'(t) = \frac{6}{(t+1)^2}$$

15) أجد معدل نمو السكان في المدينة عندما $t = 9$، مفسرا معنى الناتج.

$$P'(9) = \frac{6}{(9+1)^2} = 0.06$$

بعد 9 سنوات من الآن سيتزايد عدد السكان بمعدل 60 نسمة لكل سنة.

16) نباتات هجينة: وجد فريق من الباحثين الزراعيين أنه يمكن التعبير عن ارتفاع نبته مهجنة من نبات تباع الشمس h (بالأمتار) باستعمال الاقتران: $h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد معدل تغير ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن t.

$$h'(t) = \frac{(4+t^2)(6t) - (3t^2)(2t)}{(4+t^2)^2} = \frac{24t}{(4+t^2)^2}$$

إذا كان: $f(0) = 5, f'(0) = -3, g(0) = -1, g'(0) = 2$، فأجد كلا مما يأتي:

17) $(fg)'(0)$

$$(fg)'(x) = f(x) \times g'(x) + g(x) \times f'(x)$$

$$(fg)'(0) = f(0) \times g'(0) + g(0) \times f'(0)$$

$$= 5 \times 2 - 1 \times -3 = 13$$

18) $(\frac{f}{g})'(0)$

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$(\frac{f}{g})'(0) = \frac{g(0) \times f'(0) - f(0) \times g'(0)}{(g(0))^2} = \frac{-1 \times -3 - 5 \times 2}{1} = -7$$

19) $(7f + 2fg)'(0)$

$$(7f + 2fg)'(x) = 7f'(x) + 2(f(x) \times g'(x) + g(x) \times f'(x))$$

$$(7f + 2fg)'(0) = 7f'(0) + 2(f(0) \times g'(0) + g(0) \times f'(0))$$

$$= 7 \times -3 + 2(5 \times 2 - 1 \times -3)$$

$$= -21 + 2 \times 13 = 5$$

كتاب الطالب

الدرس الثالث – مشتقتا الضرب والقسمة

مثال 1:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 5e^x$

$f(x) = 5e^x$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 5e^x$ قاعدة مشتقة مضاعفات الاقتران، ومشتقة الاقتران الأُسي الطبيعي.

2) $f(x) = 4x^2 - e^x$

$f(x) = 4x^2 - e^x$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 8x - e^x$ قاعدة مشتقة اقتران القوة، ومشتقة الفرق، ومشتقة الاقتران الأُسي الطبيعي

3) $y = \frac{e^x}{x+1}$

$y = \frac{e^x}{x+1}$ الاقتران المعطى

$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(e^x) - (e^x)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \frac{(x+1)(e^x) - (e^x)(1)}{(x+1)^2}$ قواعد مشتقة كثيرات الحدود، ومشتقة الاقتران الأُسي الطبيعي، ومشتقة الجمع

$= \frac{(x+1)(e^x) - e^x}{(x+1)^2}$ بالتبسيط

$= \frac{xe^x + e^x - e^x}{(x+1)^2}$ باستعمال خاصية التوزيع

$= \frac{xe^x}{(x+1)^2}$ بالتبسيط

أتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = 2e^x + 3$

$f'(x) = 2e^x$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} + e^x$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + e^x$

$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + e^x$

c) $y = xe^x$

$$\frac{dy}{dx} = xe^x + e^x$$

مثال 2:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = e^{4x}$

الاقتران المعطى $f(x) = e^{4x}$

مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = 4x$ $f'(x) = e^{4x} \times (4)$

بإعادة الترتيب $= 4e^{4x}$

2) $f(x) = e^{(x^2+1)}$

الاقتران المعطى $f(x) = e^{(x^2+1)}$

مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = x^2 + 1$ $f'^{(x)} = e^{(x^2+1)} \times (2x)$

بإعادة الترتيب $= 2xe^{(x^2+1)}$

3) $f(x) = 3e^{\frac{1}{x}}$

الاقتران المعطى $y = 3e^{\frac{1}{x}}$

مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = 3e^{\frac{1}{x}} \times (-\frac{1}{x^2})$

بإعادة الترتيب $= -\frac{3}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

أتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = e^{7x+1}$

$f'(x) = 7e^{7x+1}$

b) $f(x) = e^{x^3}$

$f'(x) = 3x^2e^{x^3}$

c) $f(x) = 5e^{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$

مثال 3: من الحياة

حرارة: تُمثل المعادلة: $T(t) = 18 + 12e^{0.002t}$ درجة حرارة الحسّاس في جهاز إلكتروني (بالسليسيوس $°C$) بعد t ساعة من بَدء تشغيل الجهاز:

1) أجد مُعدل تغيُّر درجة حرارة الحسّاس بالنسبة إلى الزمن t.

أجد $T'(t)$:

الاقتران المعطى $T(t) = 18 + 12e^{0.002t}$

مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = 0.002t$ $T'(t) = 12e^{0.002t} \times (0.002)$

بالتبسيط $= 0.024e^{0.002t}$

2) أجد مُعدل تغيُّر درجة حرارة الحساس بعد 5 ساعات من بَدء تشغيل الجهاز مُفسراً معنى الناتج.

أجد $T'(5)$:

مشتقة $T(t)$ $T'(t) = 0.024e^{0.002t}$

بتعويض $t = 5$ $T'(5) = 0.024e^{0.002(5)}$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 0.024

إذن، تزداد درجة حرارة الحساس بمقدار $0.024°C$ لكل ساعة بعد 5 ساعات من تشغيل الجهاز.

أتحقق من فهمي:

قمر صناعي: تُستعمل مادة مُشعة لتزويد قمر صناعي بالطاقة. ويُمكن نمذجة مقدار الطاقة المُتبقية في المادة المُشعة (بالواط) باستعمال الاقتران: $P(t) = 50e^{-0.004r}$، حيث t الزمن بالأيام.

أجد مُعدل تغيُّر الطاقة المُتبقية في القمر الصناعي بعد 500يوم، مُفسرا معنى الناتج.

$$P'(t) = 50(-0.004)e^{-0.004t} = -0.2e^{-0.004t}$$

$$P'(500) = -0.2e^{-0.004(500)} = -0.2e^{-2} \approx -0.03$$

تتناقص الطاقة المتبقية بمعدل 0.03 واط لكل يوم بعد 500 يوم.

مثال 4:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 7 \ln x$

الاقتران المعطى $f(x) = 7 \ln x$

قاعدتا مشتقة مضاعفات الاقتران، ومشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي $f'(x) = \frac{7}{x}$

2) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} + \ln x$

الاقتران المعطى $f(x) = x^{\frac{3}{2}} + \ln x$

قواعد مشتقة اقتران القوة، ومشتقة الجمع، ومشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي $f'(x) = \frac{2}{x} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{x}$

3) $y = x \ln x$

الاقتران المعطى $y = x \ln x$

قاعدة مشتقة الضرب $\frac{dy}{dx} = (x)\frac{d}{dx}(\ln x) + (\ln x)\frac{d}{dx}(x)$

قاعدتا مشتقة كثيرات الحدود، ومشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي $= (x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)$

بالتبسيط $= 1 + \ln x$

أتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = 4 \ln x$

$$f'(x) = \frac{4}{x}$$

b) $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$

c) $y = \frac{\ln x}{x}$

$$f'(x) = \frac{(x)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

مثال 5:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \ln(5x)$

الطريقة 1: استعمل قاعدة السلسلة.

الاقتران المعطى $f(x) = \ln(5x)$

مشتقة $\ln g(x)$، حيث: $g(x) = \frac{1}{x}$ $f'(x) = \frac{5}{5x}$

بالتبسيط $= \frac{1}{x}$

الطريقة 2: استعمل قوانين اللوغاريتمات.

الاقتران المعطى $f(x) = \ln(5x)$

قانون الضرب في اللوغاريتمات $= \ln 5 + \ln x$

قاعدتا مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، ومشتقة الثابت $= f'(x) = \frac{1}{x}$

2) $f(x) = \ln(x^3)$

الطريقة 1: استعمل قاعدة السلسلة.

الاقتران المعطى $f(x) = \ln(x^3)$

مشتقة $\ln g(x)$، حيث: $g(x) = x^3$ $f'(x) = \frac{3x^2}{x^3}$

بالتبسيط $= \frac{3}{x}$

الطريقة 2: استعمل قوانين اللوغاريتمات.

الاقتران المعطى $f(x) = \ln(x^3)$

قانون القوة في اللوغاريتمات $= 3\ln(x)$

قاعدتا مشتقة مضاعفات الاقتران، ومشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي $= f'(x) = \frac{3}{x}$

3) $f(x) = \ln(3x^2 - 2)$

الاقتران المعطى $f(x) = \ln(3x^2 - 2)$

مشتقة $\ln g(x)$، حيث: $g(x) = 3x^2 - 2$ $f'(x) = \frac{6x}{3x^2-2}$

أتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \ln(8x)$

$$f'(x) = \frac{8}{8x} = \frac{1}{x}$$

b) $f(x) = 2\ln(x^7)$

$$f'(x) = 2 \times \frac{7x^6}{x^7} = \frac{14}{x}$$

c) $f(x) = \ln(9x+2)$

$$f'(x) = \frac{9}{9x+2}$$

أتدرب وأحل المسائل:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 2e^x + 1$

$$f'(x) = 2e^x$$

2) $f(x) = e^{3x+9}$

$$f'(x) = 3e^{3x+9}$$

3) $f(x) = (x^2+3x-9)\,e^x$

$$f'(x) = (x^2+3x-9)(e^x) + (e^x)(2x+3)$$

4) $f(x) = \frac{e^x}{x^4}$

$$f'(x) = \frac{x^4\,e^x - e^x(4x^3)}{x^8}$$

$$= \frac{x^4\,e^x - 4x^3\,e^x}{x^8}$$

5) $f(x) = 6e^{\sqrt{x}}$

$$f'(x) = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$

6) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

$$f'(x) = \frac{(1+e^x)(e^x) - e^x(e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

7) $f(x) = (e^x + 2)(\, e^x - 1)$

$$f'(x) = (e^x + 2)(e^x) + (e^x - 1)(e^x) = 2e^{2x} + e^x$$

8) $f(x) = e^{-2x}(2x-1)^5$

$$f'(x) = (e^{-2x}) \times 5(2x-1)^4 \times 2 + (2x-1)^5(-2e^{-2x})$$

$$= 10e^{-2x}(2x-1)^4 - 2e^{-2x}(2x-1)^5$$

9) $f(x) = \; x^3 - 5e^{2x}$

$$f'(x) = 3x^2 - 5 \times 2e^{2x}$$

$$= 3x^2 - 10e^{2x}$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

10) $f(x) = 3\ln x$

$$f'(x) = \frac{3}{x}$$

11) $f(x) = \; x^3 \ln x$

$$f'(x) = (x^3)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(3x^2)$$

$$= x^2 + 3x^2 \ln x$$

12) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(2x)}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4}$$

13) $f(x) = \; x^2 \ln(4x)$

$$f'(x) = (x^2)\left(\frac{4}{4x}\right) + (\ln(4x))(2x) = x + 2x\ln(4x)$$

14) $f(x) = \ln(\frac{x+1}{x})$

$$f'(x) = \frac{\frac{(x)(1)-(x+1)(1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = -\frac{1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{x(x+1)}$$

15) $f(x) = \ln\sqrt{x^2-1}$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{x^2-1}$$

16) $f(x) = (\ln x)^4$

$$f'(x) = 4(\ln x)^3 \times \frac{1}{x} = \frac{4(\ln x)^3}{x}$$

17) $f(x) = \ln(x^2-5)$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-5}$$

18) $f(x) = x^4 \ln x - \frac{1}{2}e^x$

$$f'(x) = (x^4)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(4x^3) - \frac{1}{2}e^x = x^3 + 4x^3 \ln x - \frac{1}{2}e^x$$

19) $f(x) = e^{2x} \ln x$

$$f'(x) = (e^{2x})\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(2e^{2x})$$

$$= \frac{e^{2x}}{x} + 2e^{2x} \ln x$$

20) $f(x) = (\ln 3x)(\ln 7x)$

$$f'(x) = (\ln 3x)\left(\frac{7}{7x}\right) + (\ln 7x)\left(\frac{3}{3x}\right)$$

$$= \frac{\ln 3x + \ln 7x}{x}$$

21) $f(x) = \ln(e^x - 2)$

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

22) $f(x) = e^{2x-1}\ln(2x-1), x = 1$

$$f'(x) = (e^{2x-1})\left(\frac{2}{2x-1}\right) + (\ln(2x-1))(2e^{2x-1})$$

$$f'(1) = (e^{2-1})\left(\frac{2}{2-1}\right) + (\ln(2-1))(2e^{2-1}) = 2e + 0 = 2e$$

23) $f(x) = \frac{\ln x^2}{x}, x = 4$

$$f'(x) = \frac{x\left(\frac{2x}{x^2}\right) - (\ln x^2)(1)}{x^2} = \frac{2 - \ln x^2}{x^2}$$

$$f'(4) = \frac{2 - \ln 16}{16}$$

24) فيروسات: يُمكن نمذجة انتشار الإنفلونزا في إحدى المدارس باستعمال الاقتران $P(t) = \frac{100}{1+e^{3-t}}$، حيث $P(t)$ العدد الكلي للطلبة المصابين بعد t يوماً من ملاحظة الإنفلونزا أوَّل مرة في المدرسة.

أجد سرعة انتشار الإنفلونزا في المدرسة بعد 3 أيام.

$$P'(t) = \frac{-100 \times -e^{3-t}}{(1+e^{3-t})^2} = \frac{100e^{3-t}}{(1+e^{3-t})^2}$$

$$P'(3) = \frac{100e^{3-t}}{(1+e^{3-t})^2} = \frac{100}{4} = 25$$

25) ذاكرة: يُستعمل الاقتران: $m(t) = t\ln t + 1, 0 < t \leq 4$ لقياس قدرة الأطفال على التذكُّر، حيث m مقياس من 1 إلى 7، و t عمر الطفل بالسنوات.

أجد مُعدل تغير قدرة الأطفال على التذكُّر بالنسبة إلى عمر الطفل t.

$$m'(t) = (t)\left(\frac{1}{t}\right) + (\ln t)(1)$$

$$= 1 + \ln t$$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

26) $y = e^{2u} + 3, u = x^2 + 1$

$$\frac{dy}{du} = 2e^{2u}$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= 2e^{2u} \times 2x$$

$$= 4xe^{2u}$$

$$= 4xe^{2u}(x^2 + 1)$$

27) $y = \ln(u + 1), u = e^x$

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u + 1}$$

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{u + 1} \times e^x$$

$$= \frac{e^x}{e^x + 1}$$

مهارات التفكير العليا:

28) اكتشف الخطأ: أكتشف الخطأ في الحَلِّ الآتي، ثم أُصحِّحه:

$$y = \ln kx$$

$$\frac{dy}{dx} = k \ln kx$$

✗

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{kx} = \frac{1}{x}$$

29) **تبرير: إذا كان: $y = \frac{7\ln x - x^3}{e^{3x}}$، فأثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{7}{e^3}$ عندما $x = 1$.**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{3x})\left(7 \times \frac{1}{x} - 3x^2\right) - (7\ln x - x^3)(3e^{3x})}{(e^{3x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = \frac{(e^3)(7 \times 1 - 3) - (7\ln 1 - 1)(3e^3)}{(e^3)^2}$$

$$= \frac{4e^3 + 3e^3}{(e^3)^2} = \frac{7e^3}{(e^3)^2} = \frac{7}{e^3}$$

كتاب التمارين

الدرس الثالث – مشتقتا الاقتران الأسي الطبيعي والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = x^{10}e^{x}$

$f'(x) = (x^{10})(e^{x}) + (e^{x})(10x^{9})$

$= e^{x}x^{10} + 10e^{x}x^{9}$

2) $f(x) = 3e^{2x-1}$

$f'(x) = 3 \times 2e^{2x-1}$

$= 6e^{2x-1}$

3) $f(x) = 3e^{x} - 2e^{4x}$

$f'(x) = 3e^{x} - 2 \times 4e^{4x}$

$= 3e^{x} - 8e^{4x}$

4) $f(x) = (9x - 2)e^{3x}$

$f'(x) = (9x - 1)(3e^{3x}) + (e^{3x})(9)$

$= 27xe^{3x} - 3e^{3x} + 9e^{3x}$

$= 27xe^{3x} + 6e^{3x}$

5) $f(x) = \frac{(e^x+2)^3}{x}$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x+1})(-2e^{-2x}) - (e^{-2x})(\frac{1}{2\sqrt{x+1}})}{x+1}$$

$$= \frac{-2e^{-2x}\sqrt{x+1} - \frac{e^{-2x}}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$

$$= \frac{\frac{-2e^{-2x}(x+1)}{2\sqrt{x+1}} - \frac{e^{-2x}}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$

$$= \frac{\frac{-2e^{-2x}(x+1) - e^{-2x}}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$

$$= \frac{-2e^{-2x}(x+1) - e^{-2x}}{x+1\sqrt{x+1}}$$

6) $f(x) = \frac{(e^x+2)^3}{x}$

$$f'(x) = \frac{(x)(3(e^x+2)^2(e^x) - (e^x+2)^3(1)}{x^2}$$

$$= \frac{3xe^x(e^x+2)^2 - (e^x+2)^3}{x^2}$$

7) $f(x) = e^{x^2+7}$

$f'(x) = (2x+7)e^{x^2+7x}$

8) $f(x) = (2e^{3x} - 1)^2$

$f'(x) = 2(2e^{3x} - 1)(6e^{3x}) = 12e^{3x}(2e^{3x} - 1) = 24e^{6x} - 12e^{3x}$

9) $f(x) = \sqrt{e^x + 1}$

$$f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

10) $f(x) = \frac{\ln x}{x+2}$

$$f'(x) = \frac{(x+2)(\frac{1}{x}) - (\ln x)(1)}{(x+2)^2}$$

11) $f(x) = \ln(x^2+1)$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

12) $f(x) = e^x \ln x^2$

$$f'(x) = (e^x)(\frac{2x}{x^2}) + (\ln x^2)(e^x) = \frac{2e^x}{x} + e^x \ln x^2$$

13) $f(x) = (3+x)\ln x$

$$f'(x) = (3+x)(\frac{1}{x}) + (\ln x)(1) = \frac{3}{x} + 1 + \ln x$$

14) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} \times \frac{x}{1} = -\frac{1}{x}$$

حل آخر: $f(x) = \ln 1 - \ln x \rightarrow f'(x) = 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}$

15) $f(x) = x^5 \ln(3x)$

$$f'(x) = (x^5)(\frac{3}{3x}) + (\ln(3x))(5x^4) = x^4 + 5x^4 \ln(3x)$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

16) $f(x) = x^2 e^{-1}, x = -1$

$$f'(x) = e^{-1} \times 2x$$

$$f'(-1) = e^{-1} \times -2 = -\frac{2}{e}$$

17) $f(x) = \ln(x^2+1), x = 3$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$f'(3) = \frac{6}{9+1} = \frac{3}{5}$$

بكتيريا: يمثل الاقتران: $N(t) = 1000(30 + e^{-\frac{t}{30}})$ عدد الخلايا البكتيريا بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:

18)أجد العدد الأولي للخلايا البكتيرية في المجتمع.

$$N(t) = 1000(30 + e^{-\frac{t}{30}})$$

$$N(0) = 1000(30 + e^{-\frac{0}{30}}) = 1000 \times 31 = 31000$$

19) أجد معدل تغير عدد الخلايا البكتيرية بالنسبة إلى الزمن.

$$N'(t) = 1000(-\frac{1}{30}e^{-\frac{t}{30}}) = -\frac{100}{3}e^{-\frac{t}{30}}$$

20) أجد معدل تغير الخلايا البكتيرية بعد 20 ساعة.

$$N'(20) = -\frac{100}{3}e^{-\frac{20}{30}} \approx -17.11$$

إعلانات: يمكن نمذجة درجة استجابة المستهلكين لمنتج ما عن طريق الإعلانات باستعمال الاقتران:

$N(a) = 2000 + 500 \ln a, a \geq 1$ الذي يمثل عدد الوحدات المبيعة من المنتج، حيث a المبلغ الذي أنفق على الإعلانات بآلاف الدنانير:

21)أجد معدل تغير عدد الوحدات المبيعة بالنسبة إلى المبلغ a الذي أنفق على الإعلانات بآلاف الدنانير.

$$N'(\mathrm{a}) = 500 \times \frac{1}{\mathrm{a}} = \frac{500}{\mathrm{a}}$$

22)أجد معدل تغير عدد الوحدات المبيعة عندما $a = 10$.

$$N'(10) = \frac{500}{10} = 50$$

كتاب الطالب

الدرس الرابع – مشتقتا اقتران الجيب واقتران جيب التمام

مثال 1:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 2\sin x$

الاقتران المعطى $f(x) = 2\sin x$

قاعدتا مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة مضاعفات الاقتران $f'(x) = 2\cos x$

2) $f(x) = x^2 + \cos x$

الاقتران المعطى $f(x) = x^2 + \cos x$

قاعدتا مشتقة اقتران جيب التمام، ومشتقة اقتران القوة، ومشتقة المجموع $f'(x) = 2x - \sin x$

3) $f(x) = \frac{\sin x}{2} + 3\cos x$

الاقتران المعطى $f(x) = \frac{\sin x}{2} + 3\cos x$

بإعادة كتابة الاقتران $= \frac{1}{2}\sin x + 3\cos x$

قواعد مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة جيب التمام، ومشتقة مضاعفات الاقتران، ومشتقة المجموع

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos x - 3\sin x$$

أتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = 7 + \sin x$

$f'(x) = \cos x$

b) $f(x) = 3x - \cos x$

$f'(x) = 3 + \sin x$

c) $f(x) = 3\sin x + 2\cos x$

$f'(x) 3\cos x - 2\sin x$

مثال 2:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = x^2 \sin x$

الاقتران المعطى $f(x) = x^2 \sin x$

قاعدة مشتقة الضرب $f'(x) = x^2 \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \frac{d}{dx}(x^2)$

قاعدتا مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران القوة $= x^2 \cos x + 2x \sin x$

2) $f(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x}$

الاقتران المعطى $f(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x}$

قاعدة مشتقة القسمة $f'(x) = \frac{(\cos x)\frac{d}{dx}(1+\sin x)-(1+\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x)}{(\cos x)^2}$

قواعد مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام، ومشتقة المجموع

$$= \frac{(\cos x)(\cos x) - (1 + \sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

باستعمال خاصية التوزيع $= \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{(\cos x)^2}$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $= \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$

أتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = e^x \cos x$

$$f'(x) = (e^x)(-\sin x) + (\cos x)(e^x) = -e^x \sin x + e^x \cos x$$

b) $f(x) = \frac{x + \cos x}{\sin x}$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)(1 - \sin x) - (x + \cos x)(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x - \sin^2 x - x\cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x) - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - 1 - x\cos x}{\sin^2 x}$$

مثال 3:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \sin 4x$

الاقتران المعطى: $f(x) = \sin 4x$

مشتقة $sin\ u$، حيث: $u = 4x$: $f'(x) = \frac{d}{dx}(\sin 4x) = \cos 4x \times 4$

بالتبسيط: $= 4\cos 4x$

2) $f(x) = \cos^3 x$

إعادة كتابة الاقتران المعطى: $f(x) = \cos^3 x = (\cos x)^3$

قاعدة سلسلة القوة: $= f'(x) = 3(\cos x)^2 \times \frac{d}{dx}(\cos x)$

باشتقاق $\cos x$: $= 3\cos^2 x \times (-\sin x)$

بإعادة الترتيب: $-3\cos^2 x \sin x$

3) $f(x) = e^{\sin 2x}$

الاقتران المعطى: $f(x) = e^{\sin 2x}$

مشتقة e^u، حيث: $u = \sin 2x$: $f'(x) = e^{\sin 2x} \times \frac{d}{dx}(\sin 2x)$

مشتقة $\sin u$، حيث: $u = 2x$: $= e^{\sin 2x} \times \cos 2x \times 2$

بإعادة الترتيب: $= e^{\sin 2x} \cos 2x$

أتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

a) $f(x) = \cos\ 5x$

$f'(x) = -5\ sin\ 5x$

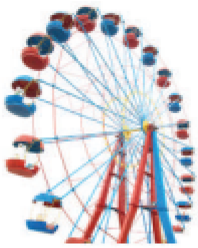
b) $f(x) = \sqrt{\sin x}$

$$f'(x) = \frac{cos\ x}{2\sqrt{sin\ x}}$$

c) $f(x) = \ln(\cos 3x)$

$$f'(x) = \frac{-3\ sin\ 3x}{cos\ 3x}$$

مثال 4: من الحياة:



عجلة دوّارة: يُمثل الاقتران: $h(t) = 85 \sin \frac{\pi}{20}(t - 10) + 90$

الارتفاع (بالأقدام) لشخص يركب في عجلة دوّارة، حيث t الزمن بالثواني.

أجد مُعدل تغير ارتفاع الشخص بالنسبة إلى الزمن t.

مُعدل تغيُّر ارتفاع الشخص بالنسبة إلى الزمن t هو $h'(t)$:

الاقتران المعطى $\quad h(t) = 85\ \sin \frac{\pi}{20}(t - 10) + 90$

مشتقة $\sin u$، حيث: $u = \frac{\pi}{20}(t - 10)$ $\quad h'(t) = 85\ \cos \frac{\pi}{20}(t - 10) \times \frac{\pi}{20}$

بإعادة كتابة المشتقة $\quad = \frac{85\pi}{20} \cos \frac{\pi}{20}(t - 10)$

أتحقق من فهمي:

ميناء: يُمثل الاقتران: $h(t) = 10 + 4 \sin \frac{\pi}{6} t$ ارتفاع الماء (بالأقدام) عند رصيف أحد الموانيء بعد t ساعة تلي الساعة 6 a. m. أجد مُعدل تغيُّر ارتفاع الماء عند الرصيف بالنسبة إلى الزمن t.

$$h'(x) = 4 \times \frac{\pi}{6}\ cos\ \frac{\pi}{6} t = \frac{2\pi}{3} cos\ \frac{\pi}{6} t$$

أتدرب وأحل المسائل:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 2 \cos x + \sin x$

$f'(x) = -2\ sin\ x + cos\ x$

2) $f(x) = 5 + \cos x$

$f'(x) = -sin\ x$

3) $f(x) = \sin x - \cos x$

$f'(x) = cos\ x + sin\ x$

4) $f(x) = x \sin x$

$f'(x) = (x)(cos\ x) + (sin\ x)(1)$

$= x\ cos\ x + sin\ x$

5) $f(x) = \sin x \cos x$

$f'(x) = (\sin x)(-\sin x) + (\cos x)(\cos x)$

$= -\sin^2 x + \cos^2 x$

6) $f(x) = e^x \sin x$

$f'(x) = (e^x)(\cos x) + (\sin x)(e^x)$

$= e^x \cos x + e^x \sin x$

7) $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(e^x) - (e^x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{\cos^2 x}$$

8) $f(x) = \sin(x^2 + 1)$

$f'(x) = 2x \cos(x^2 + 1)$

9) $f(x) = \ln(\sin x)$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

10) $f(x) = \cos(5x - 2)$

$f'(x) = -5 \sin(5x - 2)$

11) $f(x) = \sin 3x + \cos 6x$

$f'(x) = 3 \cos 3x - 6 \sin 6x$

12) $f(x) = \cos(x^2 - 3x - 4)$

$f'(x) = -(2x - 3)\sin(x^2 - 3x - 4)$

13) $f(x) = e^{2x} \sin 10x$

$f'(x) = (e^{2x})(10 \cos 10x) + (\sin 10x)(2e^{2x})$

$= 10e^{2x} \cos 10x + 2e^{2x} \sin 10x$

14) $f(x) = (\cos x^2)(\ln x)$

$$f'(x) = (\cos x^2)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(-2x \sin x^2)$$

$$= \frac{1}{x}(\cos x^2) - 2x(\ln x)\sin x^2$$

15) $f(x) = \sqrt{x+1}\,\sin\frac{\pi x}{2}$

$$f'(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right) + (\sin\frac{\pi x}{2})(\frac{1}{2\sqrt{x+1}})$$

16) $f(x) = 4\sin^2 x$

$$f(x) = 4(\sin x)^2$$

$$f'(x) = 4 \times 2(\sin x)(\cos x) = 8\sin x\cos x$$

17) $f(x) = \cos^3 2x\cos x$

$$f(x) = (\cos 2x)^3(\cos x)$$

$$f'(x) = (\cos 2x)^3(-\sin x) + (\cos) \times 3(\cos 2x)^2 \times -2\sin 2x$$

$$= -(\cos 2x)^3(\sin x) - 6(\cos x)(\cos 2x)^2\sin 2x$$

18) $f(x) = 5\sin\sqrt{x}$

$$f'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} = \frac{5}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$$

19) $f(x) = (\cos 2x - \sin x)^2$

$$f'(x) = 2(\cos 2x - \sin x)(-2\sin 2x - \cos x)$$

20) $f(x) = \sin\sqrt{x} + \sqrt{\sin 2x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} + \frac{2\cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} + \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$$

21) $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{\sin x}$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)(2(\ln x)\times\frac{1}{x}) - (\ln x)^2(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{2\sin x\ \ln x - x\cos x\,(\ln x)^2}{x\sin^2 x}$$

22) غزلان: يُمثل الاقتران: $D(t) = 1500 + 400\ \sin 0.4t$

عدد الغزلان في إحدى الغابات بعد t سنة من بَدء دراسة لأحد الباحثين عليها.

أجد مُعدَّل تغيُّر عدد الغزلان في الغابة بالنسبة إلى الزمن t.

$$D'(t) = 400\times 0.4\cos 0.4t = 160\cos 0.4\,t$$

23) نهار: يُمكن إيجاد عدد ساعات النهار H في أيِّ يوم t من العام في إحدى المدن باستعمال الاقتران:

$H(t) = 12 + 2.4\ \sin(\frac{2\pi}{365}(t-80))$. أجد مُعدل تغيُّر عدد ساعات النهار بالنسبة إلى الزمن t في هذه المدينة.

$$H'(t) = 2.4\times\frac{2\pi}{365}\cos\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) = \frac{4.8\pi}{365}\cos\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right)$$

مهارات التفكير العليا:

24) تبرير: إذا كان: $y = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x)$، فأُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx} = \sin^2 x$، مُبرِّرًا إجابتي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(1 - ((\sin x)(-\sin x) + (\cos x)(\cos x))\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - (-\sin^2 x + \cos x))$$

$$= \frac{1}{2(1 + \sin^2 x - \cos^2 x)}$$

$$= \frac{1}{2}(\sin^2 x + 1 - \cos^2 x)$$

$$= \frac{1}{2(\sin^2 x + \sin x)}$$

$$= \frac{1}{2}(2\sin^2 x)$$

$$= \sin^2 x$$

25) تحد: أجد مشتقة الاقتران: $f(x) = e^x \sin^2 x \cos x$.

$$f(x) = (e^x \cos x)(\sin x)^2$$

$$f'(x) = (e^x \cos x)(2(\sin x)^1 \cos x) + (\sin x)^2((e^x)(-\sin x) + (\cos x)(e^x))$$

$$= 2e^x \sin x\, (\cos x)^2 - e^x(\sin x)^2 + e^x \cos x\, (\sin x)^2$$

26)أكتشف الخطأ: أكتشف الخطأ في الحل الآتي، ثم أصححه:

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad ✗$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

كتاب التمارين

الدرس الرابع – مشتقتا اقتران الجيب واقتران جيب التمام

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \sin^3(5x-1)$

$f(x) = (\sin(5x-1))^3$

$f'(x) = 3(\sin(5x-1))^2(5\cos(5x-1))$

$= 15(\sin(5x-1))^2\cos(5x-1)$

2) $f(x) = \sin(x^3-2x+4)$

$f'(x) = (3x^2-2)\cos(x^3-2x+4)$

3) $f(x) = 2\cos(-4x)$

$f'(x) = 2\times -4\times -\sin(-4x) = 8\sin(-4x)$

4) $f(x) = 3\sin(3x+7)$

$f'(x) = 3\times 3\cos(3x+7) = 9\cos(3x+7)$

5) $f(x) = 2x^3\sin x - 3x\cos x$

$f'(x) = (2x^3)(\cos x) + (\sin x)(6x^2) - ((3x)(-\sin x) + (\cos x)(3))$

$= 2x^3\cos x + 6x^2\sin x + 3x\sin x - 3\cos x$

6) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$f'(x) = 0$

7) $f(x) = \cos(\ln x)$

$f'(x) = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)$

8) $f(x) = e^x(\cos x + \sin x)$

$f'(x) = (e^x)(-\sin x + \cos x) + (\cos x + \sin x)(e^x)$

$= -e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x + e^x \sin x$

$= 2e^x \cos x$

9) $f(x) = \cos(1-2x)^2$

$f'(x) = 2(1-2x)(-2) \times -\sin(1-2x)^2 = (4-8x)\sin(1-2x)^2$

10) $f(x) = 4\sqrt{\cos x + \sin x}$

$$f'(x) = 4 \times \frac{-\sin x + \cos x}{2\sqrt{\cos x + \sin x}} = \frac{-2\sin x + 2\cos x}{\sqrt{\cos x + \sin x}}$$

11) $f(x) = (1 + \cos 2x)^3$

$f'(x) = 3(1+\cos 2x)^2(-2\sin 2x) = -6(\sin 2x)(1+\cos 2x)^2$

12) $f(x) = \sin^3 x \cos 4x$

$f(x) = (\sin x)^3(\cos 4x)$

$f'(x) = (\sin x)^3(-4\sin 4x) + (\cos 4x) \times 3(\sin x)^2 \cos x$

13) $f(x) = \sin\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$

$$f'(x) = \frac{(1+e^x)(e^x) - (e^x)(e^x)}{(1+e^x)^2} \cos\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$$

$$= \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \cos\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$$

14) $f(x) = \frac{\cos x^2}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{(e^x)(-2x\sin x^2) - (\cos x^2)(e^x)}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{-2x\sin x^2 - \cos x^2}{e^x}$$

15) $f(x) = \frac{\cos x}{1-\sin x}$

$$f'(x) = \frac{(1-\sin x)(-\sin x) - (\cos x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{1}{1-\sin x}$$

16) $f(x) = \frac{x\sin x}{1+x}$

$$f'(x) = \frac{(1+x)(x\cos x + \sin x) - (x\sin x)(1)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{x\cos x + x^2\cos x + \sin x + x\sin x - x\sin x}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{x^2\cos x + \sin x + x\cos x}{(1+x)^2}$$

17) $f(x) = \frac{x}{2-\cos x}$

$$f'(x) = \frac{(2-\cos x)(1) - (x)(\sin x)}{(2-\cos x)^2}$$

$$= \frac{2-\cos x - x\sin x}{(2-\cos x)^2}$$

18) $f(x) = \ln(\cos x - \sin x)$

$$f'(x) = \frac{-\sin x - \cos x}{\cos x - \sin x}$$

19) حيوانات مفترسة: يمثل الاقتران: $D(t) = 500 + 200\,sin\,(0.4(t-2))$ عدد الحيوانات المفترسة في إحدى الغابات بعد t سنة من بدء دراسة لأحد الباحثين عليها، أجد معدل تغير عدد الحيوانات المفترسة في الغابة بالنسبة إلى الزمن t

$$D'(t) = 200(0.4)\cos\,(0.4(t-2)) = 80\cos\,(0.4(t-2))$$

20) وقود: يمثل الاقتران: $C(t) = 30 + 21.6\,sin\,(\frac{2\pi t}{365} + 10.9)$ الاستهلاك اليومي من الوقود (باللترات) لإحدى السيارات، حيث t الزمن بالأيام. أجد معدل تغير استهلاك السيارة للوقود بالنسبة إلى الزمن t.

$$C'(t) = 21.6\left(\frac{2\pi}{365}\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{365} + 10.9\right)$$

21) أكتشف الخطأ/ أكتشف الخطأ في الحل الآتي، ثم أصححه:

$$f(x) = cos\,x\,sin\,x$$
$$f'(x) = cos\,x\,cos\,x + sin\,x\,(-sin\,x)$$
$$= cos^2 x - sin^2 x$$
$$= 1$$

$$f'(x) = (\cos\,x)(\cos\,x) + (\sin\,x)(-\sin\,x) = \cos^2\,x - \sin^2\,x$$

الخطأ في الحل هو اعتبار $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$ وهذا غير صحيح لأن $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

ويمكن التعبير عن النتيجة $(\cos^2 x - \sin^2 x)$ بالصورة $(1 - 2\sin^2 x)$ أو $(2\cos^2 x - 1)$

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) إذا كان: $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$، فإن $f'(-1)$

a) 3 b) -3 c) 4 $\boxed{\text{d) -4}}$

2) إذا كان: $y = uv$، وكان: $u(1) = 2, u'(1) = 3, v(1) = -1, v'(1) = 1$ فإنَّ $y'(1)$ تساوي:

a) -4 $\boxed{\text{b) -1}}$ c) 1 d) 4

3) إذا كان: $f(x) = x - \frac{1}{x}$، فإنَّ $f'(x)$ هي:

$\boxed{\text{a) } 1 + \frac{1}{x^2}}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$ c) $1 + \frac{1}{x}$ d) $1 - \frac{1}{x}$

4) إذا كان: $y = \sin 4t$، فإنَّ $\frac{dy}{dt}$ هي:

a) $\cos 4t$ b) $-\cos 4t$ $\boxed{\text{c) } 4\cos 4t}$ d) $-4\cos 4t$

5) إذا كان: $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$، فإنَّ $f'(x)$ هي:

a) $\frac{2}{(x-1)^2}$ b) $\frac{1}{(x-1)^2}$ $\boxed{\text{c) } -\frac{2}{(x-1)^2}}$ d) $-\frac{1}{(x-1)^2}$

6) إذا كان: $f(x) = x \cos x$، فإنَّ $f'(x)$ هي:

$\boxed{\text{a) } \cos x - x \sin x}$ b) $\cos x + x \sin x$ c) $\sin x - x \cos x$ d) $\sin x$

7) إذا كان: $f(x) = \sin^4 3x$، فإنَّ $f'(x)$ هي:

a) $4\sin^3 3x \cos 3x$ $\boxed{\text{b) } 12\sin^3 3x \cos 3x}$ c) $12 \sin 3x \cos 3x$ d) $2\cos^3 3x$

إذا كان: $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 2$، وكان: $g(2) = 1$ ، $g'(2) = 2$ ، $f'(2) = -4$، $f(2) = 3$ فأوجد كُلاً مما يأتي:

8) $(fg)'(2)$

$$(fg)'(x) = (f(x))(g'(x)) + (g(x))(f'(x))$$
$$(fg)'(2) = (f(2))(g'(2)) + (g(2))(f'(2))$$
$$= (3)(2) + (1)(-4) = 2$$

9) $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(g(x))(f'(x)) - (f(x))(g'(x))}{(g(x))^2}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{(g(2))(f'(2)) - (f(2))(g'(2))}{(g(2))^2}$$
$$= \frac{(1)(-4) - (3)(2)}{(1)^2} = -10$$

10) $(3f - 4fg)'(2)$

$$(3f - 4fg)'(x) = 3f'(x) - 4\Big((f(x))(g'(x)) + (g(x))(f'(x))\Big)$$
$$(3f - 4fg)'(2) = 3f'(2) - 4\Big((f(2))(g'(2)) + (g(2))(f'(2))\Big)$$
$$= 3(-4) - 4\big((3)(2) + (1)(-4)\big)$$
$$= -12 - 4(2)$$
$$= -20$$

أنهار: يمثل الاقتران: $h(t) = 0.12\, e^{0.1t}$ ارتفاع نهر (بالسنتيمتر) فوق مستواه الطبيعي، حيث t الزمن بالساعات بعد بداية هطل المطر:

11) أجد معدل تغير ارتفاع النهر بالنسبة إلى الزمن t.

$$h'(t) = 0.12 \times 0.1\, e^{0.1t} = 0.012\, e^{0.1t}$$

12) أجد معدل تغير ارتفاع النهر بعد 3 ساعات من بدء هطل المطر.

$$h'(3) = 0.012 e^{0.1(3)} \approx 0.016$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

13) $f(x) = \frac{x}{3x+1}, x = 1$

$$f'(x) = \frac{(3x+1)(1) - (x)(3)}{(3x+1)^2} = \frac{1}{(3x+1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{1}{(3(1)+1)^2} = \frac{1}{16}$$

14) $f(x) = (x^2+2)(x+\sqrt{x}), x = 4$

$$f'(x) = (x^2+2)\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (x+\sqrt{x})(2x)$$

$$f'(4) = (4^2+2)\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{4}}\right) + (4+\sqrt{4})(2\times 4) = 18\left(1+\frac{1}{4}\right) + 6(8) = 70.5$$

15) $f(x) = e^{3x} + e^{-3x}, x = 1$

$$f'(x) = 3e^{3x} - 3e^{-3x}$$

$$f'(1) = 3e^{3} - 3e^{-x}$$

16) $f(x) = e^{0.5} - x^2, x = 20$

$$f'(x) = -2x$$

$$f'(20) = -2(20) = -40$$

17) $f(x) = x^2(3x-1)^3, x = 1$

$$f'(x) = (x^2)(3)(3x-1)^2(3) + (3x-1)^3(2x)$$

$$f'(1) = (1)(3)(3-1)^2(3) + (3-1)^3(2)$$

$$= 36 + 16 = 52$$

18) $f(x) = (x+3)^2 e^{3x}, x = 2$

$$f'(x) = (x+3)^2(3e^{3x}) + (e^{3x})(2)(x+3)(1)$$

$$f'(2) = (2+3)^2(3e^{6}) + (e^{6})(2)(2+3)(1)$$

$$= 75e^{6} + 10e^{6}$$

$$= 85e^{6}$$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

19) $f(x) = 3\ \ln x + \frac{1}{x}, x = e$

$$f'(x) = 3 \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(e) = \frac{3}{e} - \frac{1}{e^2}$$

20) $f(x) = \sqrt{2x^4 + 7}$

$$f(x) = \frac{8x^3}{2\sqrt{2x^4 + 7}}$$

21) $f(x) = \frac{1}{(x^2+16)^5}$

$$f'(x) = \frac{-1 \times 5(x^2 + 16)^4(2x)}{(x^2 + 16)^{10}}$$

$$= \frac{-10x}{(x^2 + 16)^{10}}$$

22) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 5x + 2}$

$$f(x) = (x^2 - 5x + 2)^{\frac{1}{4}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 5x + 2)^{-\frac{3}{4}}(2x - 5)$$

$$= \frac{2x - 5}{4\sqrt[4]{(x^2 - 5x + 2)^3}}$$

23) $f(x) = (8x^2 - 6)^{-40}$

$$f'(x) = -40(8x^2 - 6)^{-41}(16x)$$

$$= -640x(8x^2 - 6)^{-41}$$

24) $f(x) = \frac{1}{3+2x}$

$$f'(x) = \frac{-1 \times 2}{(3 + 2x)^2} = \frac{-2}{(3 + 2x)^2}$$

25) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(3x^2) - (x^3)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}$$

26) $f(x) = (2x-8)^2(3x^2-4)$

$$f'(x) = (2x-8)^2(6x) + (3x^2-4)(2)(2x-8)^1(2)$$

$$= 6x(2x-8)^2 + 4(3x^2-4)(2x-8)$$

27) $f(x) = x^5(3x^2+4x-7)$

$$f'(x) = x^5(6x+4) + (3x^2+4x-7)(5x^4)$$

$$= 6x^6 + 4x^5 + 15x^6 + 20x^5 - 35x^4$$

$$= 21x^6 + 24x^5 - 35x^4$$

حل آخر:

بفك الأقواس

$$f(x) = 3x^7 + 4x^6 - 7x^5$$

$$f'(x) = 21x^6 + 24x^5 - 35x^4$$

28) $f(x) = x^3\,(2x+6)^4$

$$f'(x) = (x^3)(4)(2x+6)^3(2) + (2x+6)^4(3x^2)$$

$$= 8x^3(2x+6)^3 + 3x^2(2x+6)^4$$

29) $f(x) = (e^{-x} + e^x)^3$

$$f'(x) = 3(e^{-x} + e^x)^2(-e^{-x} + e^x)$$

30) $f(x) = 2x^3e^{-x}$

$$f'(x) = (2x^3)(-e^{-x}) + (e^{-x})(6x^2)$$

$$= -2x^3e^{-x} + 6x^2e^{-x}$$

31) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{(x+1)(e^x) - (e^x)(1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

32) $f(x) = 5\ \ln(5x-4)$

$$f'(x) = 5 \times \frac{5}{5x-4} = \frac{25}{5x-4}$$

33) $f(x) = \ln e^x$

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x} = 1$$

34) $f(x) = \ln(3x^2 + 2x - 1)$

$$f'(x) = \frac{6x+2}{3x^2+2x-1}$$

35) $f(x) = x^5 \sin 3x$

$$f'(x) = (x^5)(3 \cos 3x) + (\sin 3x)(5x^4)$$

$$= 3x^5 \cos 3x + 5x^4 \sin 3x$$

36) $f(x) = \cos^2 x + \sin x$

$$f(x) = (\cos x)^2 + \sin x$$

$$f'(x) = 2(\cos x)^1(-\sin x) + \cos x$$

$$= -2 \cos x \sin x + \cos x$$

37) $f(x) = \frac{\sqrt{\cos x}}{x}$

$$f'(x) = \frac{(x)\left(\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\right) - (\sqrt{\cos x})(1)}{x^2} = \frac{-\sin x}{2x\sqrt{\cos x}} - \frac{\sqrt{\cos x}}{x^2}$$

38) $f(x) = \sin(5x)\ln(\cos x)$

$$f'(x) = (\sin 5x)\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right) + (\ln(\cos x))(5\cos 5x)$$

39) $f(x) = \ln(\frac{1}{x^2+9})$

$$f'(x) = \frac{\frac{-1\times 2x}{(x^2+9)^2}}{\frac{1}{x^2+9}} = \frac{-1\times 2x}{(x^2+9)^2}\times\frac{x^2+9}{1} = \frac{-2x}{x^2+9}$$

40) $f(x) = e^{2x}\sin 2x$

$$f'(x) = (e^{2x})(2\cos 2x) + (\sin 2x)(2e^{2x})$$

$$= 2e^{2x}\cos 2x + 2e^{2x}\sin 2x$$

بكتريا: يُمثل الاقتران: $N(t) = 1000(1 - \frac{3}{t^2+50})$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t يوماً في مجتمع بكتيري:

41)أجد مُعدل تغيُّر N بالنسبة إلى الزمن t.

$$N'(t) = 1000\left(\frac{3\times 2t}{(t^2+50)^2}\right) = \frac{6000t}{(t^2+50)^2}$$

42)أجد مُعدل تغيُّر N بالنسبة إلى الزمن t عندما $t = 1$.

$$N'(1) = \frac{6000}{(1+50)^2} \approx 2.3$$

غزلان: يُمثل عدد الغزلان في غابة بالاقتران $P(t) = \frac{2000}{4t+80}$، حيث t الزمن بالأشهر منذ الآن:

43)أجد مُعدل تغيُّر عدد الغزلان في الغابة بالنسبة إلى الزمن t.

$$P'(t) = \frac{-2000\times 4}{(4t+80)^2} = \frac{-8000}{(4t+80)^2}$$

44)أجد مُعدل تغيُّر عدد الغزلان في الغابة عندما $t = 10$، مُفسرًا معنى الناتج.

$$P'(10) = \frac{-8000}{(40+80)^2} \approx -0.56$$

يتناقص عدد الغزلان بمعدل 0ز56 غزال كل شهر بعد 10 أشهر من الآن.

سكّان: يُمثل عدد سكان بلدة صغيرة بالاقتران $P(t) = \frac{700}{t^2+1}$، حيث t الزمن بالسنوات، و p عدد السكّان بالآلاف:

45)أجد مُعدل تغيُّر عدد السكان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t.

$$P'(t) = \frac{-700 \times 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{-1400\,t}{(t^2+1)^2}$$

46) أجد مُعدل تغيُّر عدد السكّان في البلدة عندما $t = 3$، مُفسرًا معنى الناتج.

$$P'(3) = \frac{-1400 \times 3}{(9+1)^2} = -42$$

يتناقص عدد السكان بمعدل 42 ألف شخص لكل سنة بعد 3 سنوات.