البوصلة في الرياضيات

الوحدة الرابعة

التكامل

الفرع الأدبي

ا.محمد العلي

2007

البوصلة طريقك نحو التميز

الدرس الأول : التكامل غير المحدود

الاقتران الأصلي

(مفهوم أساسي)

إذا كان $F(x)$ اقترانـاً أصليًّا للاقتران المتصـل $f(x)$

فإنَّ أيَّ اقتران أصلي آخر للاقتران $f(x)$ يُكتَب في صورة:

$G(x) = F(x) + C$، حيث C ثابت:

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C]$$

مثال 1

أجد اقترانًا أصليًّا لكلٍّ من :

1) $f(x) = 6x^5$

2) $f(x) = -3x^{-4}$

3) $f(x) = 5x^4$

4) $f(x) = -9x^{-10}$

التكامل غير المحدود

(مفهوم أساسي)

إذا كان k عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

تكامل الثابت

1) $\int k\,dx = kx + C$

تكامل اقتران القوة

2) $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, n \neq -1$

مثال 2

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 9\,dx$

2) $\int x^{10}\,dx$

خصائص التكامل غير المحدود

(مفهوم أساسي)

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

1) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

تكامل المجموع أو الفرق

2) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

مثال 3

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

① $\int (6x^2 + 2x)\,dx$

② $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^5}\right)dx$

③ $\int \left(x^3 - 2x^{5/3}\right)dx$

③ $\int \frac{1}{x^3}\,dx$

④ $\int \sqrt{x}\,dx$

⑤ $\int 6\,dx$

⑥ $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

⑦ $\int x^8\,dx$

⑧ $\int \frac{1}{x^5}\,dx$

④ $\int \left(3x^{2} - \frac{6}{\sqrt[5]{x}}\right) dx$

⑤ $\int (x+2)(x-2)\ dx$

⑥ $\int \frac{8x^{3} + 5x}{x}\ dx$

⑦ $\int x\left(x^{2} + \frac{2}{x}\right)\ dx$

⑧ $\int \frac{x^{4} - 8x^{3}}{x^{2}}\ dx$

⑨ $\int x\,(x^{3} - 7)\ dx$

⑩ $\int (3x+2)(x-1)\ dx$

مثال 4

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

① $\int (4x+2)\, dx$

② $\int (3 - x - 2x^{5})\, dx$

③ $\int (3x^{-2} + 6x^{-1/2} + x - 4)\, dx$

④ $\int \left(8x^{3} + 6x - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$

⑤ $\int 2x^{-4}\, dx$

⑥ $\int \left(10x^{4} + 8x^{-3}\right) dx$

⑦ $\int \left(\frac{7}{x^{2}} + \sqrt[3]{x^{4}}\right) dx$

⑧ $\int (6x^{2} - 4x)\, dx$

⑨ $\int \left(3x^{2} - \frac{2}{x^{2}}\right) dx$

⑩ $\int \left(\frac{2}{x^{3}} - 3\sqrt{x}\right) dx$

⑪ $\int \left(x^{-2} + x^{5/2}\right) dx$

⑫ $\int \left(\frac{x^{2}}{3} + \frac{3}{x^{2}}\right) dx$

مثال 5

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

① $\int \frac{4 + 2\sqrt{x}}{x^{2}}\, dx$

② $\int x\sqrt{x}\, dx$

③ $\int (x+4)^{2}\, dx$

④ $\int x(x+1)^2\,dx$

⑤ $\int \frac{x^2-1}{x-1}\,dx$

⑥ $\int \frac{(x+3)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

⑦ $\int x^2(1-x^3)\,dx$

⑧ $\int (x-5)(x+5)\,dx$

⑨ $\int \frac{4-x^2}{2+x}\,dx$

⑩ $\int \frac{5-x}{x^5}\,dx$

⑪ $\int \frac{x^2-1}{x^2}\,dx$

⑫ $\int \frac{x^2+2x+1}{x+1}\,dx$

20 أكتشف الخطأ: أوجدت رنيم ناتج التكامل: $\int (2x+1)(x-1)\ dx$، وكان حَلُّها على النحو الآتي:

$$\int (2x+1)(x-1)\ dx = \int (2x+1)\ dx \times \int (x-1)\ dx$$
$$= (x^2+x)\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) + C$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ رنيم، ثم أُصحِّحه.

تحدٍّ: **أجد كل تكامل ممّا يأتي:**

21 $\int \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2 dx$

22 $\int (x-1)(x-3)(x+5)\ dx$

23 تبرير: إذا كان: $\int \left(\frac{P}{2x^2} + Q\right) dx = \frac{2}{x} + 10x + C$، فأجد قيمة كلٍّ من الثابت P، والثابت Q، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرس الثاني : الشرط الأولي

الشرط الأوَّلي، وإيجاد قاعدة الاقتران

مثال 1

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$ ومَرَّ منحناه بالنقطة $(2, 4)$.

مثال 2

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = 6x^2 + 5$ ومَرَّ منحناه بالنقطة $(1, 9)$.

مثال 3

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$ أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1) $f'(x) = 3x - 2; (-1, 2)$

2) $f'(x) = x^3 - \frac{2}{x^2} + 2; (1, 3)$

مثال 4

إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $f'(x) = \sqrt{x}$

فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$، علمًا بأنّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(9, 25)$.

مثال 5

إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^2}$

فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(2, 4)$.

3) $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}; (4, 5)$

4) $f'(x) = x + \sqrt{x}; (1, 2)$

5) $f'(x) = -x(x+1); (-1, 5)$

6) $f'(x) = -\frac{10}{x^2}; (1, 15)$

مثال 6

إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 8$$

ومَرَّ منحناهـا بنقطة الأصل، فأجد الإحداثي x لجميع

نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x، مُبرِّرًا إجابتي.

التكلفة الحدِّيـة

مثال 7

يُمثِّل الاقتـران: $C'(x) = 3x^2 - 60x + 400$

التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل طابعة مُلوَّنة تُنتِجها إحدى الشركات،

حيث x عدد الطابعات المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x طابعة

بالدينار. أجد اقتران التكلفة $C(x)$، علمًا بأنَّ تكلفة إنتاج طابعة

واحدة هي JD 583.

مثال 8

يُمثِّل الاقتران: $C'(x) = 0.3x^2 + 2x$

التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل قطعة تُنتَج في إحدى الشركات، حيث

x عدد القطع المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار.

أجد اقتران التكلفة $C(x)$، علمًا بأنَّ تكلفة إنتاج 10 قطع هي JD 2200.

يُمثِّل الاقتــران: $R'(x) = x^2 - 3$

الإيراد الحدِّي (بالدينار) لكلِّ قطعة تُبــاع من مُنتَجات إحدى

الشركات، حيث x عدد القطع المَبيعة، و $R(x)$ إيراد بيع x

قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$، علمًا بأنَّ $R(0) = 0$.

الشرط الأوَّلي: الحركة في مسار مستقيم

مثال 9

يتحرَّك جُسَــيْم في مسار مســتقيم، وتعطى ســرعته بالاقتران:

$v(t) = t + 2$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل

ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 11 m، فأجد موقع

الجُسَيْم بعد 8 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

مثال 10

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران:

$v(t) = 36t - 3t^2$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر

لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد

3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

مثال 11

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: t $a(t) = 6$، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو $4\ \mathrm{m}$، وكانت سرعته هي $1\ \mathrm{m/s}$ بعد ثانية واحدة من بَدْء حركته، فأجد موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

مثال 12

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 4t - 4$، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل بسرعة مقدارها $5\ \mathrm{m/s}$، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

مثال 13

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = 3t^2 - 12t + 11$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

مثال 14

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 6t - 30$ ، حيث t الزمن بالثواني، و a التسارع بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل بسرعة مقدارها 72 m/s، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

مهارات التفكير العليا

16 تبرير: تعطى مشـتقة الاقتران $f(x)$ بالقاعدة: $f'(x) = ax + b$، حيث a و b ثابتان. إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطـة $(-2, 8)$ هو 7، وقطع منحنى الاقتران المحور y عند النقطة $(0, 18)$، فأجد قاعدة هذا الاقتران، مُبرِّرًا إجابتي.

17 تحدٍّ: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $\left(4 - \frac{100}{x^2}\right)$، وكان للاقتران نقطة حرجة عند النقطة $(a, 10)$، حيث: $a > 0$، فأجد قاعدة هذا الاقتران.

الدرس الثالث : التكامل المحدود

التكامل المحدود

(مفهوم أساسي)

إذا كان الاقتــران $f(x)$ متصلًا علــى الفترة $[a, b]$

وكان $F(x)$ يُمثِّـل أيَّ اقتران أصلي للاقتران $f(x)$

فإنَّ التكامل المحدود للاقتران $f(x)$ من a إلى b هو:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

يُمكِن التعبير عن الفرق: $F(b) - F(a)$ باستعمال الرمز:

$$F(x) \Big|_a^b .$$

مثال 1

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

① $\int_0^1 (2x - 5)\ dx$

② $\int_{-4}^3 x(4 - 3x)\ dx$

③ $\int_1^4 (8x - \sqrt{x})\ dx$

④ $\int_{-1}^2 (1 - x)(1 + 3x)\ dx$

⑤ $\int_1^5 10x^{-2}\ dx$

⑥ $\int_1^2 (6x - \frac{12}{x^4} + 3)\ dx$

⑦ $\int_3^6 \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 dx$

⑧ $\int_1^2 \frac{x^2 + x^3}{x}\ dx$

⑨ $\int_0^2 (2x^3 - 4x + 5)\, dx$

⑩ $\int_0^7 |2x - 1|\, dx$

⑪ $\int_1^4 \frac{x^3 + 2x^2}{\sqrt{x}}\, dx$

⑫ $\int_0^5 (|x+3| - 5)\, dx$

⑬ $\int_0^6 x(6-x)\, dx$

⑭ $\int_3^4 (6x^2 - 4x)\, dx$

⑮ $\int_{-3}^4 |6 - 2x|\, dx$

⑯ $\int_{10}^{10} \frac{x+1}{x^2}\, dx$

مثال 2

إذا كان: $\int_1^k \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 3$، فأجد قيمة الثابت k.

مثال 3

إذا كان: $\int_0^k 6x^2\, dx = 2$، فأجد قيمة الثابت k.

خصائص التكامل المحدود

(مفهوم أساسي)

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين متصلين على الفترة $[a, b]$

وكان k ثابتًا، فإنَّ:

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

$$1)\ \int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$$

تكامل المجموع أو الفرق

$$2)\ \int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$$

التكامل عند نقطة

$$3)\ \int_a^a f(x)\, dx = 0$$

التبديل بين حدّي التكامل

$$4)\ \int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

تجزئة التكامل

$$5)\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

مثال 4

إذا كان: $\int_0^5 g(x)\, dx = -4, \int_0^5 f(x)\, dx = 10$

$\int_5^7 f(x)\, dx = 3$، فأجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

1) $\int_0^5 (4 f(x) + g(x))\ dx$

2) $\int_5^0 5g(x)\ dx$

3) $\int_0^7 f(x)\ dx$

مثال 5

إذا كان:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5, \int_{4}^{1} f(x)\,dx = 2, \int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 7$$

فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\int_{-1}^{1} (f(x) + 3h(x))\,dx$

2) $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$

3) $\int_{1}^{-1} 4h(x)\,dx$

مثال 6

إذا كان:

$$\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = 5, \int_{-3}^{1} f(x)\,dx = 4, \int_{-3}^{2} g(x)\,dx = -2$$

فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\int_{2}^{2} f(x)\,dx$

2) $\int_{2}^{-3} \left(g(x) + 2x\right)dx$

3) $\int_{1}^{2} (f(x) - 5)\,dx$

4) $\int_{2}^{-3} \left(f(x) + g(x)\right)dx$

5) $\int_{-3}^{2} \left(-2f(x)+5g(x)\right)dx$

6) $\int_{-3}^{2} \left(4f(x)-3g(x)\right)dx$

تكاملات الاقترانات المُتشعِّبة

مثال 7

إذا كان: $f(x)=\begin{cases}12 & , x<2\\ 3x^2 & , x\geq 2\end{cases}$، فأجد قيمة:

$\int_1^4 f(x)\, dx$.

مثال 8

إذا كان: $f(x)=|x-1|$، فأجد قيمة: $\int_0^5 f(x)\, dx$

مثال 9

إذا كان: $f(x)=\begin{cases}1+x & , x<1\\ 2x & , x\geq 1\end{cases}$، فأجد قيمة:

$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$.

مثال 10

إذا كان: $f(x)=\begin{cases}x^2 & , x<2\\ 8-x & , x\geq 2\end{cases}$، فأجد قيمة:

$\int_{-3}^{6} f(x)\, dx$.

التكامل المحدود، ومقدار التغيُّر

(مفهوم أساسي)

إذا كان $f'(x)$ متصلًا على الفترة $[a, b]$، فإنَّ مقدار التغيُّر في $f(x)$ عند تغيُّر x من: $x=a$ إلى $x=b$ هو:

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\, dx$$

مثال 11

يُمثِّـل الاقتـران: $P'(x) = 165 - 0.1x$ الربح الحدِّي الشـهري (بالدينار) لكل جهاز لوحي تبيعه إحدى الشركات، حيث x عدد الأجهزة اللوحية المَبيعة شهريًا، و $P(x)$ ربح بيع x قطعة شـهريًا بالدينار. أجد مقدار التغيُّر في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشـهرية إلى 1100 جهـاز، علمًا بأنَّ عدد الأجهـزة المَبيعة الآن هو 1000 جهاز.

مثال 12

مُعتمِدًا المعلومات الوارد ذكرها في المثال 11 أجد مقدار التغيُّر الشهري في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية إلى 1500 جهاز، علمًا بأنَّ عدد الأجهزة المَبيعة الآن هو 1400 جهاز.

مثال 13

أشارت دراسة إلى أنَّ عدد السكّان في إحدى القرى يتغيَّر شهريًّا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = 5 + 3t^{2/3}$، حيث t عدد الأشهر من الآن، و $P(t)$ عدد السكّان. أجد مقدار الزيادة في عدد سكّان القرية في الأشهر الثمانية القادمة.

مثال 14

إذا كان: $\int_2^3 (x^2 - a)\, dx = 5$، فأجد قيمة الثابت a.

27 أكتشف الخطأ: أوجد خالد ناتج التكامل: $\int_0^2 (x^2+x)\,dx$، وكان حَلُّه على النحو الآتي:

$$\int_0^2 (x^2+x)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^2$$
$$= \left(\frac{1}{3}(0)^3+\frac{1}{2}(0)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(2)^3+\frac{1}{2}(2)^2\right)$$
$$= -\frac{14}{3}$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ خالد، ثم أُصحِّحه.

28 تبرير: أُثبِت أنَّ: $\int_0^1 x^n(1-x)\,dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$، حيث $n > 0$، مُبرِّرًا إجابتي.

29 تحدٍّ: إذا كان: $\int_1^5 (2ax+7)\,dx = 4a^2$، فأجد قيمة الثابت a.

الدرس الرابع : المساحة

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، وتقع فوق هذا المحور

مثال 1

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 1$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و $x = 4$

مثال 2

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x + 3$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = 3$

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، وتقع أسفل هذا المحور

مثال 3

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 8x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 5$، و $x = 2$

مثال 4

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 4$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = 1$

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x ويقع أحد جزأيها فوق المحور x ويقع الجزء الآخر أسفل هذا المحور

مثال 5

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$f(x)=3x^2-12$، والمحور x، والمستقيمين: $x=1$، و $x=3$.

مثال 6

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$f(x)=x^2+2x$، والمحور x، والمستقيمين: $x=-1$، و $x=-3$.

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، ولا تكون محدودة بمستقيمين

مثال 7

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$f(x)=x^2-3x$، والمحور x.

مثال 8

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$f(x)=x^3-x$، والمحور x.

مثال 9

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$f(x) = x^2 + 5x + 4$، والمحور x.

مثال 10

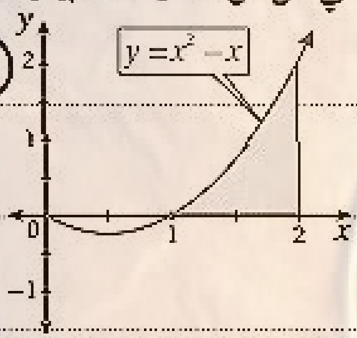
أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

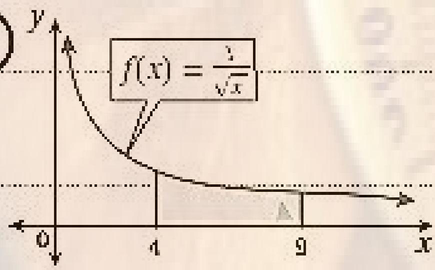
$f(x) = x^3 - 9x$، والمحور x.

مثال 11

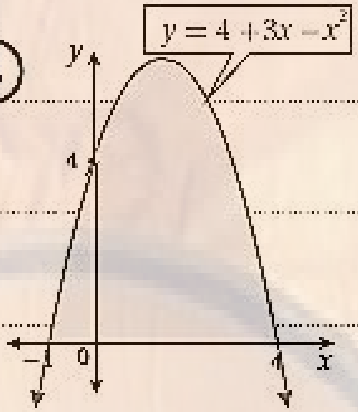
المساحة من الرسم

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

1) 

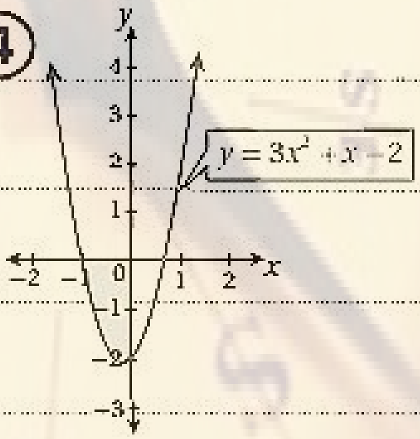
2) 

3



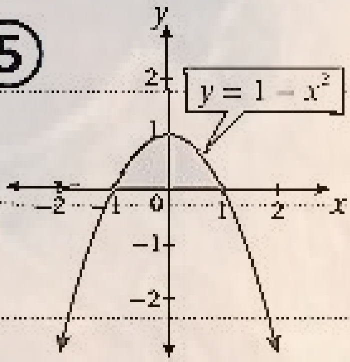
$y = 4 + 3x - x^2$
y
4
−1
0
4
x

4



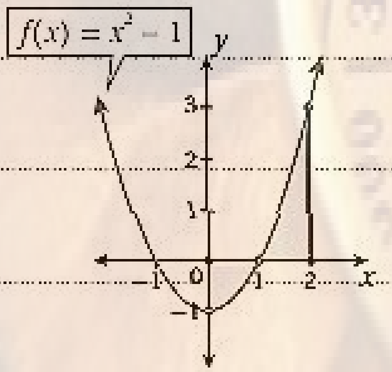
y
4
3
2
1
$y = 3x^2 + x - 2$
−2
−1
0
1
2
x
−1
−2
−3

5



y
2
$y = 1 - x^2$
1
−2
−1
0
1
2
x
−1
−2

6



$f(x) = x^2 - 1$
y
3
2
1
−1
0
1
2
x
−1

منوع

مثال 12

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$f(x) = 3x^2 - 3$، والمحور x.

مثال 13

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

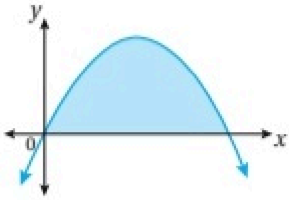
$f(x) = x^3 - 5x^2 - 6x$، والمحور x.

مثال 14

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

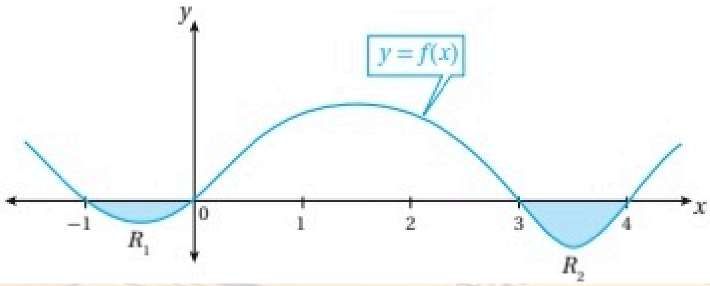
$f(x) = x^2 (2 - x)$، والمحور x.

مهارات التفكير العليا



17 **تحدٍّ:** يُبيِّن الشــكل المجــاور منحنى الاقتــران: $y = kx(4-x)$. إذا كانت مســاحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتــران والمحور x هي 32 وحدة مربعة، فأجد قيمة الثابت k.

18 **تبرير:** يُبيِّن الشــكل التالي منحنى الاقتران $f(x)$. إذا كانت مســاحة المنطقة R_1 هي وحدتين مربعتين، ومســاحة المنطقة R_2 هي 3 وحدات مربعة، وكان: $\int_0^4 f(x)\,dx = 10$، فأجد $\int_{-1}^3 f(x)\,dx$، مُبرِّرًا إجابتي.



الدرس الخامس : تكامل اقترانات خاصة

تكامل الاقتران الأُسّي الطبيعي، واقتران الجيب، واقتران جيب التمام

(مفهوم أساسي)

إذا كان e هو العدد النيبيري، فإنَّ:

1) $\int e^x \, dx = e^x + C$

2) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

3) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

مثال 1

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int (e^x + 8) \, dx$

2 $\int (5\cos x + \sqrt{x}) \, dx$

3 $\int \left(4\sin x - \frac{1}{x^2}\right) dx$

4 $\int \left(9\cos x + \frac{4}{x^3}\right) dx$

5 $\int (5x^2 + 7e^x) \, dx$

6 $\int \left(\sqrt[3]{x} - \sin x\right) dx$

تكامل الاقتران: $\frac{1}{x}$

(مفهوم أساسي)

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C, \; x \neq 0$$

مثال 2

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \left(\frac{1}{x} + 6\sin x\right) dx$

تكامل اقترانات أساسية في صورة: $f(ax+b)$

(مفهوم أساسي)

إذا كان a, b عددين حقيقيين و $a \neq 0$، و e هو العدد النيبيري، فإنَّ:

1) $\int (ax+b)^n \, dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} + C \; ; \; n \neq -1$

2) $\int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$

3) $\int \sin(ax+b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$

4) $\int \cos(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$

5) $\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C, \; x \neq -\frac{b}{a}$

مثال 3

أجِد كُلًّا من التكاملات الآتية:

① $\int (2x+7)^5 \, dx$

② $\int \frac{1}{\sqrt{4x-2}} \, dx$

② $\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx$

③ $\int \frac{2x^5-4}{x} \, dx$

④ $\int \left(\frac{1}{x} + 8e^x\right) dx$

⑤ $\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right) dx$

⑥ $\int \frac{x^2-7x+2}{x^2} \, dx$

③ $\int 2e^{4x+3}\, dx$

④ $\int 2\sin(4x+3)\, dx$

⑤ $\int \left(5\cos(2x+3)+\sqrt[3]{x}\right) dx$

⑥ $\int \frac{1}{8x-1}\, dx$

⑦ $\int 4\cos(3x-7)\, dx$

⑧ $\int (\sin 5x + e^{2x})\, dx$

⑨ $\int (7x-5)^6\, dx$

⑩ $\int \sqrt{2x+1}\, dx$

⑪ $\int \frac{5}{3x+2}\, dx$

⑫ $\int (6x^2-3e^{7x+1})\, dx$

مثال 4

في دراسة أجرتها شركة نفطية، تبيّن أنّ مُعدّل إنتاج إحدى الآبار النفطية يُنمذج بالاقتران: $R'(t) = \frac{100}{t+1} + 5$، حيث $R(t)$ عدد البراميل المُنتَجة (بالآلاف) في السنة، و t عدد السنوات منذ بَدْء ضَخّ النفط من البئر. أجد عدد براميل النفط المُنتَجة بعد 9 سنوات من بَدْء عملية الضَّخّ من البئر، علمًا بأنّ $R(0) = 0$.

مثال 5

أشارت دراسة إلى أنّ عدد السكّان في إحدى القرى يتغيّر سنويًا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = 105e^{0.03t}$ حيث t عدد السنوات منذ عام 2010م، و $P(t)$ عدد السكّان. أجد عدد سكّان القرية عام 2020م، علمًا بأنّ عدد سكّانها عام 2010م هو 3500 شخص.

مثال 6

يُعالَج التلوُّث في بحيرة باستعمال مضاد للبكتيريا. إذا كان عـدد الخلايا البكتيرية الضارّة لكل ملّيلتر من الماء في البحيـرة يتغيّر بمُعدَّل: $N'(t) = -\frac{2000t}{1+t^2}$، حيث $N(t)$ عدد الخلايا البكتيرية لكل ملّيلتر من الماء بعد t يومًا من استعمال المضاد، فأجد $N(t)$، علمًا بأنَّ العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خلية لكل ملّيلتر.

تكامل اقترانات في صورة: $k\frac{f'(x)}{f(x)}$

(مفهوم أساسي)

إذا كان $f(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، حيث $f(x) \neq 0$ فإنَّ:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C$$

مثال 7

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{3x^2}{x^3+5}\, dx$

2) $\int \frac{6x}{x^2+9}\, dx$

3) $\int \frac{x-1}{x^2-2x+2}\, dx$

4) $\int \frac{e^x}{e^x-1}\, dx$

⑤ $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx$

⑥ $\int \frac{9x^2}{x^3+8}\,dx$

⑦ $\int \frac{x+1}{4x^2+8x}\,dx$

⑧ $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,dx$

مثال 8 منوع

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

① $\int \frac{1-x^2}{5x}\,dx$

② $\int (\sin 2x - \cos 2x)\,dx$

③ $\int \frac{1}{\frac{1}{3}x-2}\,dx$

④ $\int (3x+2)^5\,dx$

⑤ $\int \left(\sin(2x+3)+\cos(3x+2)\right)dx$

⑥ $\int (5e^x+4)\,dx$

⑦ $\int \frac{3}{2x \quad 1}\,dx$

⑧ $\int \left(2x - 1 + \frac{8}{5x+4}\right) dx$

⑨ $\int \left(1 - e^{2x-3}\right) dx$

⑩ $\int \left(5 - \sin(5 - 5x)\right) dx$

⑪ $\int \left(3\cos x + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}\right) dx$

⑫ $\int \left(e^{2x} - \frac{1}{2}\sin(2x-1)\right) dx$

⑬ $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx$

⑭ $\int \frac{x+1}{x^2 + 2x + 5}\, dx$

⑮ $\int \left(\frac{1}{8} x^{3/2} - \frac{4}{x}\right) dx$

التكاملات المحدودة للاقترانات الخاصة

مثال 9

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

① $\int_0^1 (6e^{-3x} + 12x^3)\, dx$

② $\int_{-1}^2 (x+1)^3\, dx$

③ $\int_2^3 \frac{1}{7-2x}\, dx$

④ $\int_0^2 (4e^{2x}+7)\ dx$

⑤ $\int_0^4 \frac{8x}{x^2+1}\ dx$

⑥ $\int_1^3 \left(1+\frac{1}{x}\right) dx$

⑦ $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6x+1}}\ dx$

⑧ $\int_0^1 \sqrt{1+7x}\ dx$

⑨ $\int_0^1 e^x(4-e^x)\ dx$

مثال 10

إذا كان ميـل المماس لمنحنى العلاقة y هو:

$$\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} + 2e^{-x}$$

فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 2)$.

مثال 11

في كلٍّ ممّا يأتي المشـتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

① $f'(x) = e^{-x};\ (0, 3)$

2) $f'(x) = \frac{3}{x} - 4 \,;\, (1,0)$

3) $f'(x) = 4e^{x} - 2 \,;\, (0,1)$

مثال 12

أُحدِّد أوجه الاختلاف بين التكاملين الآتيين من دون إيجاد التكامل:

$\int (3 \sin 3x + 1)\, dx$

$\int \big(3 \sin (3x + 1)\big)\, dx$

مهارات التفكير العليا

34 أكتشف الخطأ: أوجد أحمد ناتج التكامل: $\int \frac{1}{2x}\, dx$، وكان حَلُّه على النحو المجاور.

أكتشف الخطأ في حَلِّ أحمد، ثم أصحِّحه.

$$\int \frac{1}{2x}\, dx = \int \frac{2 \times 1}{2x}\, dx$$

$$= \int \frac{2}{2x}\, dx$$

$$= \ln |2x| + C$$

✗

تحدٍّ: أجد كل تكامل ممّا يأتي:

37 $\int (x^2 + 2x + 1)^5\, dx$

36 $\int \frac{\cos x}{3 + 2\sin x}\, dx$

35 $\int \sqrt{e^x}\, dx$

38 أكتشف المُختلِف: أيُّ التكاملات الآتية مُختلِف، مُبرِّرًا إجابتي؟

$\int (x-1)^3\, dx$	$\int \frac{1}{x+1}\, dx$	$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx$	$\int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx$

الدرس السادس : التكامل بالتعويض

التكامل بالتعويض للتكاملات غير المحدودة

(مفهوم أساسي)

إذا كان: $u = g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، ومداه الفترة I، وكان f اقترانًا متصلًا على I، فإنَّ:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\; dx = \int f(u)\; du$$

خطوات حلِّ التكامل بالتعويض

(مفهوم أساسي)

الخطوة 1: أحدِّد التعويض u الذي يُمكِن به تبسيط المُكامَل

الخطوة 2: أُعبِّر عن المُكامَل بدلالة u و du، وأحذف مُتغيِّر التكامل الأصلي ومشتقته حذفًا كاملًا، ثم أكتب المُكامَل الجديد في أبسط صورة.

الخطوة 3: أجد التكامل الجديد.

الخطوة 4: أُعبِّر عن الاقتران الأصلي الذي أوجدته في الخطوة السابقة باستعمال المُتغيِّر الأصلي، عن طريق التعويض.

مثال 1

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

① $\int 3x^2 (x^3+1)^7 \; dx$

② $\int 2x\sqrt{x^2+6} \; dx$

③ $\int \cos x\, e^{\sin x} \; dx$

④ $\int \frac{\ln x}{x} \; dx$

5. $\int x^4 \sin(x^5 - 8)\, dx$

6. $\int \sin^3 x \cos x\, dx$

7. $\int 6x^2 (2x^3 - 3)^4\, dx$

8. $\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}}\, dx$

9. $\int x^3 \cos(x^4 - 5)\, dx$

10. $\int x e^{x^2+1}\, dx$

11. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$

12. $\int \cos^4 x \sin x\, dx$

13. $\int x\sqrt{x^2+3}\, dx$

14. $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\, dx$

15. $\int x^4 e^{x^5+2}\, dx$

16. $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\, dx$

⑰ $\int (x+1)(x^2+2x+5)^4\, dx$

⑱ $\int \sin x \sqrt{1+3\cos x}\, dx$

مثال 2

يُمثِّل الاقتران $p(x)$ سعر حذاء رياضي بالدينار، حيث x عدد الأحذية المَبيعة بالمئات. إذا كان: $p'(x) = \frac{-136x}{\sqrt{9+x^2}}$ هو مُعدَّل التغيُّر في سعر الحذاء، فأجد $p(x)$، علمًا بأنَّ سعر الحذاء الواحد JD 30 عندما يكون عدد الأحذية المَبيعة 400 حذاء.

مثال 3

يُمثِّل الاقتران $p(x)$ سعر القطعة الواحدة (بالدينار) من مُنتَج مُعيَّن، حيث x عدد القطع المبيعة (بالمئات) من المُنتَج. إذا كان: $p'(x) = \frac{-300x}{\sqrt{(36+x^2)^3}}$ هو مُعدَّل التغيُّر في سعر القطعة الواحدة من المُنتَج، فأجد $p(x)$ علمًا بأنَّ سعر القطعة الواحدة JD 75 عندما يكون عدد القطع المَبيعة 800 قطعة.

التكامل بالتعويض للتكاملات المحدودة

(مفهوم أساسي)

إذا كان g متصلًا على $[a, b]$، وكان f متصلًا على مدى $u = g(x)$، فإنَّ:
$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

مثال 4

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

① $\int_{1}^{2} 4x(x^2+1)^3 \, dx$

② $\int_{0}^{1} (x+1)\sqrt{x^2+2x} \, dx$

③ $\int_{-1}^{3} 8x e^{x^2} \, dx$

④ $\int_{0}^{1} x^2 (x^3-1)^4 \, dx$

⑤ $\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{(2-x^4)^7} \, dx$

⑥ $\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x} \, dx$

⑦ $\int_{0}^{1} x\sqrt{3x^2+2} \, dx$

⑧ $\int_{0}^{1} (x+1)(x^2+2x)^5 \, dx$

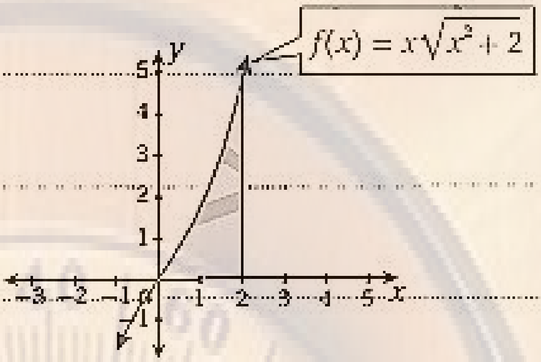
⑨ $\int_{1}^{2} \frac{x^2}{(x^3+1)^2} \, dx$

⑩ $\int_{e}^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x} \, dx$

مثال 5

منوع

أجد مساحة المنطقة المُظلّلة في التمثيل البياني المجاور.



مثال 6

يُمثِّل الاقتـــران: $R'(x) = 50 + 3.5xe^{-0.1x^2}$ الإيراد الحدّي (بالدينــار) لكل قطعة تباع من إنتاج إحدى الشـــركات، حيث x عدد القطع المَبيعـــة، و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتـــران الإيراد $R(x)$، علمًا بأنَّ $R(0) = 0$.

مثال 7

يُمثِّل الاقتران $f'(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ المارِّ بالنقطة المعطاة. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1) $f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2 ; (2, 10)$

2) $f'(x) = x^2 e^{-0.2x^3}, \left(0, \frac{3}{2}\right)$

مثال 8

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

مهارات التفكير العليا

29 أكتشف المُختلِف: أيُّ التكاملات الآتية مُختلِف، مُبرِّرًا إجابتي؟

$\int x(x^3+1)\,dx$	$\int x\cos x^2\,dx$	$\int 3x^2 e^{1+x^3}\,dx$	$\int \frac{2x+3}{(x^2+3x)^2}\,dx$

30 أكتشف الخطأ: أوجدت سعاد ناتج التكامل: $\int_0^1 8x(x^2+1)^3\,dx$، وكان حَلُّها على النحو الآتي:

$$\begin{aligned}\int_0^1 8x(x^2+1)^3\,dx &= \int_0^1 8x \times u^3 \times \frac{du}{2x}\\ &= \int_0^1 4u^3\,du\\ &= u^4 \Big|_0^1\\ &= 1\end{aligned}$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ سعاد، ثم أُصحِّحه.

31 تحدٍّ: إذا كان: $\int_0^k kx^2 e^{x^3}\,dx = \frac{2}{3}(e^8-1)$، فأجد قيمة الثابت k.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 قيمة: $\int \frac{x^3-1}{x^2}$ هي:

a) $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+C$ b) $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+C$

c) $x^2-\frac{1}{x}+C$ d) $x^2+\frac{1}{x}+C$

2 إذا كان: $\int_0^2 kx\ dx = 6$، فإنَّ قيمة الثابت k هي:

a) 1 b) 2

c) 3 d) 4

3 قيمة: $\int_0^3 (-x^2+3x)\ dx$ هي:

a) $3\frac{3}{4}$ b) $21\frac{1}{4}$

c) $4\frac{1}{2}$ d) $22\frac{1}{2}$

4 قيمة: $\int_0^2 e^{2x}\ dx$ هي:

a) e^4-1 b) e^4-2

c) $2e^4-2$ d) $\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}$

5 قيمة: $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$ هي:

a) -2 b) $-\frac{7}{16}$

c) $\frac{1}{2}$ d) 2

6 التكامل المحدود الذي قيمته تساوي مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x)=4x-x^2$، والمحور x هو:

a) $\int_4^0 (4x-x^2)\ dx$

b) $\int_0^4 (4x-x^2)\ dx$

c) $\int_1^0 (4x-x^2)\ dx$

d) $\int_0^1 (4x-x^2)\ dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

7 $\int 3x^{-1/2}\ dx$

8 $\int (8x-10x^2)\ dx$

9 $\int \frac{5}{x^3}\ dx$

10 $\int \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}}\ dx$

11 $\int (5x^2-2e^{7x})\ dx$

12 $\int (2x+3e^{4x+5})\ dx$

13 $\int \frac{x^2-6}{2x}\ dx$

14 $\int \frac{1}{(x-1)^3}\ dx$

15 $\int \frac{e^x}{e^x+4}\ dx$

16 $\int 2x\,e^{x^2-1}\ dx$

17 $\int 4e^{x}(3+e^{2x})\ dx$

18 $\int \frac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}\ dx$

19 $\int x\sin(3+x^2)\ dx$

20 $\int (3\sin 3x - 4\cos x)\ dx$

21 $\int \left(x - \sin(7x+2)\right)\ dx$

22 $\int (e^{3x} - e^{-3x})\ dx$

23 $\int \frac{2}{1-5x}\ dx$

24 إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 4x - 2$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 3)$.

25 الإيراد الحدِّي: يُمثِّل الاقتران: $R'(x) = 4x - 1.2x^2$ الإيراد الحدِّي (بالدينار) لكل قطعة تباع في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المَبيعة، و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$، علمًا بأنَّ $R(20) = 30000$.

26 يتحرَّك جُسَيْم من السكون، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = \cos(3t - \pi)$، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. أجد سرعة الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

إذا كان: $\int_{-5}^{-1} f(x)\ dx = 4, \int_{-5}^{5} f(x)\ dx = 10,$ $\int_{-5}^{-1} g(x)\ dx = 11$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

27 $\int_{-1}^{5} f(x)\ dx$

28 $\int_{-5}^{-1} 7f(x)\ dx$

29 $\int_{-1}^{-5} (3f(x) - g(x))\ dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

30 $\int_{-2}^{3} (3x^2 - 4x + 1)\ dx$

31 $\int_{1}^{3} \frac{x^3 + 2x^2}{x}\ dx$

32 $\int_{1}^{5} |3 - x|\ dx$

33 $\int_{1}^{4} \frac{20}{\sqrt{x}}\ dx$

34 $\int_{2}^{5} 3x(x+2)\ dx$

35 $\int_{2}^{3} 2xe^{-x^2}\ dx$

36 $\int_{0}^{2} \frac{3x^2}{(x^3+1)^5}\ dx$

37 $\int_{0}^{1} \frac{6x}{x^2+1}\ dx$

38 إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & , x < 0 \\ 4 - x & , x \geq 0 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-2}^{1} f(x)\ dx$.

39 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = 5 + e^{t-2}$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

40 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2; (0, 6)$

41 $f'(x) = \frac{\sqrt{20}}{x^2}; (1, 400)$

42 $f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}; (1, 1)$

43 $f'(x) = 5e^x - 4; (0, -1)$

44 $f'(x) = x\sqrt{x^2+5}; (2, 10)$

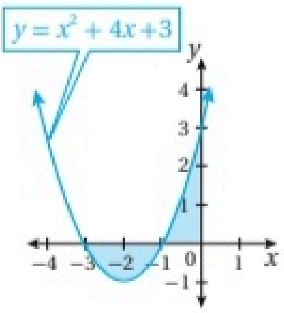
45 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - x - 2$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -2$، و $x = 1$.

46 طب: يُمثِّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من حقنه في جسم مريض، حيث C مَقيسة بالملّيغرام لكل ستيمتر مُكعَّب (mg/cm^3). إذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغيَّر بمُعدَّل: $C'(t) = \frac{3t}{\sqrt{(t^2+36)^3}}$، فأجد مقدار التغيُّر في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثماني الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

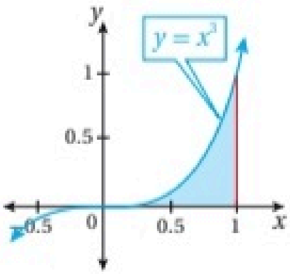
47 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 3x$، والمحور x.

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

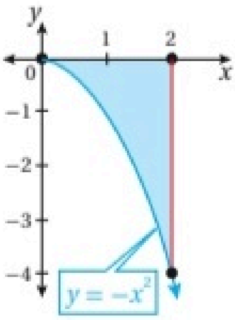
48



49



50



51