ي د غ ل

إدارة الامتحانات والاختبارات

قســـم الامتحانات العامّة

امتحان شهادة الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠٢٣

(وثيقة محمية/محدود)

المبحـث: الرياضيات (الورقة الأولى، ف١)	رقم المبحث: 211	مدّة الامتحـان: ٣٠ : ٢ (د س)

الفـــرع: العلمي+الصناعي جامعات	رقم النموذج: (١)	اليوم والتاريخ: الإثنين ٢٠٢٣/٠٧/١٠

اسم الطالب:	رقــم الجلوس:

٤ ۲

السؤال الأول: اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل فترة مما يأتي: (100 علامة)

1) إذا كان : $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$ ، فإن $\acute{f}(x)$ هي :

$$f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$$

$$\acute{f}(x) = e^{\sqrt[3]{x}} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

a) $2\sqrt[3]{x}e^{\sqrt[3]{x}}$	b) $\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}e^{\sqrt[3]{x}}$	c) $3\sqrt[3]{x}e^{\sqrt[3]{x}}$	d) $\boxed{\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}e^{\sqrt[3]{x}}}$

2) إذا كان : $f(x) = (x-1)\cos x$ ، فإن $\acute{f}(x)$ هي :

$$f(x) = (x-1)\cos x$$

$$\acute{f}(x) = (x-1)(-\sin x) + (\cos x)(1) \Rightarrow \acute{f}(x) = (1-x)(\sin x) + (\cos x)$$

a) $\boxed{\cos x + (1-x)\sin x}$	b) $\cos x(x-1) + \sin x$

c) $\cos x(1-x) + \sin x$	d) $\cos x + (x-1)\sin x$

3) يمثل الاقتران : $s(t) = t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t\ , t \geq 0$ ، موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني ، ما قيم t بالثواني التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي ؟

يكون الجسم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$

$$s(t) = t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t$$

$$\acute{s}(t) = v(t) = 3t^2 - (2)\frac{9}{2}t + 6 \implies = 3t^2 - 9t + 6$$

$$3t^2 - 9t + 6 = 0 \implies t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\implies (t-2)(t-1) = 0$$

$$\implies t - 2 = 0 \rightarrow \boxed{t = 2} \quad \Leftrightarrow \quad t - 1 = 0 \rightarrow \boxed{t = 1}$$

a) $1\ , \frac{3}{2}$ b) $\boxed{1\ , 2}$ c) $\frac{3}{2}\ , 2$ d) $1\ , 3$

4) إذا كان: $y = \frac{\sqrt{2}}{\sin x}$ ، فإن $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}$ هي:

$$y = \frac{\sqrt{2}}{\sin x} \quad \implies \quad y = \sqrt{2}(\sin x)^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = (-1)\sqrt{2}(\sin x)^{-2}(\cos x) \quad \implies \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{2}\cos x}{\sin^2 x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}}{\sin^2\frac{\pi}{4}} \implies = \frac{-\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \implies = \frac{-1}{\frac{1}{2}} \implies \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = -2$$

a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) $-\sqrt{2}$ d) $\boxed{-2}$

5) يمثل الاقتران: $f'(x) = \frac{2(x^3-1)}{x^3}$, $x \neq 0$ ، فإن $f^{(3)}(x)$ هي:

$$f'(x) = \frac{2(x^3-1)}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{(x^3)2(3x^2) - 2(x^3-1)(3x^2)}{(x^3)^2} \Longrightarrow = \frac{6x^5 - (6x^5 - 6x^2)}{x^6}$$

$$\Longrightarrow = \frac{6x^5 - 6x^5 + 6x^2}{x^6} \Longrightarrow = \frac{6x^2}{x^6} \Longrightarrow = \frac{6}{x^4} \Longrightarrow f''(x) = 6x^{-4}$$

$$f^{(3)}(x) = (-4)6x^{-5} \Longrightarrow f^{(3)}(x) = -\frac{24}{x^5}$$

a) $-120x^6$ b) $\frac{6}{x^4}$ c) $\boxed{-24x^5}$ d) $-\frac{24}{x^5}$

6) إذا كان: $x > 0$, $f(x) = \sqrt{\ln x}$ ، فإن $f'(x)$ هي :

$$f(x) = \sqrt{\ln x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}} \Longrightarrow = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} \Longrightarrow \boxed{= \frac{1}{2xf(x)}}$$

a) $\frac{2f(x)}{x}$ b) $\frac{x}{f(x)}$ c) $\boxed{\frac{1}{2xf(x)}}$ d) $\frac{x}{2f(x)}$

7) إذا كان: $f(x) = 3^{(x^2+1)}$ ، فإن قيمة x التي يكون للاقتران عندها مماس أفقي هي:

نشتق ثم نساوي بالصفر وذلك لأن عند المماس الأفقي يكون $f'(x) = 0$

$$f(x) = 3^{(x^2+1)} \Longrightarrow f'(x) = \left(3^{(x^2+1)}\right)(2x\ln 3)$$

$$\left(3^{(x^2+1)}\right)(2x\ln 3) = 0 \Longrightarrow \left(3^{(x^2+1)}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{2x\ln 3}{2\ln 3} = \frac{0}{2\ln 3} \Longrightarrow \boxed{x = 0}$$

a) $\boxed{0}$ b) 1 c) 2 d) 3

8) إذا كان : $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, $y = sec^2\, t$ ، $x = tan^2\, t$ ، فإن مشتقة المعادلة الوسيطية هي :

$$y = \sec^2 t \implies \frac{dy}{dt} = 2\sec t \sec t \tan t \implies \frac{dy}{dt} = 2\sec^2 t \tan t$$

$$x = \tan^2 t \implies \frac{dx}{dt} = 2\tan t \sec^2 t$$

$$\implies \frac{dy}{dx} = \frac{2\sec^2 t \tan t}{2\tan t \sec^2 t} \implies \boxed{\frac{dy}{dx} = 1}$$

a) $\tan t$ b) -1 c) $\tan t \sec t$ d) $\boxed{1}$

9) إذا كان: $y^2 = 2cos\,(\frac{\pi}{3}e^{ln\,x})$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة x عند النقطة $(1, 1)$ ، هو:

$$y^2 = 2cos\,(\frac{\pi}{3}e^{\ln x})$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2\sin(\frac{\pi}{3}e^{\ln x})\left(\left(\frac{\pi}{3}\right)(1)\right) \implies 2y\frac{dy}{dx} = -2\frac{\pi}{3}\sin(\frac{\pi}{3}e^{\ln x})$$

$$\implies \frac{2y}{2y}\frac{dy}{dx} = \frac{-2\frac{\pi}{3}\sin(\frac{\pi}{3}e^{\ln x})}{2y} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\pi}{3}\sin(\frac{\pi}{3}e^{\ln x})}{y}$$

$$\implies \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{-\frac{\pi}{3}\sin(\frac{\pi}{3}e^{\ln 1})}{y} \implies = \frac{-\frac{\pi}{3}\sin(\frac{\pi}{3}(1))}{y} \implies = \frac{-\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}}{y}$$

$$\implies = \frac{-\frac{\pi}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \implies = -\frac{\pi}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} \implies \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = -\frac{\pi\sqrt{3}}{6}}$$

a) $-\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\boxed{-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}}$ d) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

10) إذا كان : $x > 0$, $y = x^{x^2}$ ، فإن $\frac{d}{dx}(ln\, y)$ هي :

$$y = x^{x^2} \Rightarrow \ln y = x^2 \ln x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = (x^2 . \frac{1}{x}) + (\ln x . 2x) \Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln y) = x + 2x \ln x$$

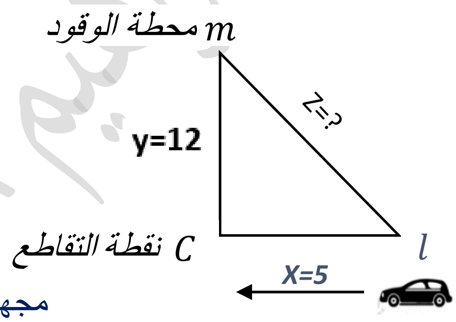
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln y) = x\,(1 + 2\ln x) \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}(\ln y) = x\,(1 + \ln x^2)}$$

a) $x(1 - \ln x^2)$ b) $x(1 + (\ln x)^2)$ c) $\boxed{x(1 + \ln x^2)}$ d) $x(1 - (\ln x)^2)$

11) l و m ، طريقان مستقيمان متعامدان في النقطة C تقع محطة وقود على الطريق m وتبعد $12\ km$ عن نقطة التقاطع C ، إذا تحركت سيارة على الطريق l بسرعة $26 km/h$ في اتجاه التقاطع C ، فما هو معدل تغير المسافة بين السيارة ومحطة الوقود عندما تكون السيارة على بعد $5\ km$ من نقطة التقاطع ؟

a) $-4\ km/h$ b) $\boxed{-10\ km/h}$

c) $10\ km/h$ d) $4\ km/h$



$x = 5 \Rightarrow y = 12 \Rightarrow z =$ مجهول

$\frac{dx}{dt} = -26 \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dz}{dt} =$ المطلوب

$$z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = \sqrt{5^2 + 12^2} \Rightarrow = \sqrt{25 + 144} \Rightarrow = \sqrt{169} \Rightarrow z = 13$$

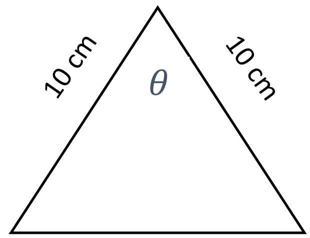
$$z^2 = x^2 + 12 \Rightarrow 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 0$$

$$\Rightarrow 2(13)\frac{dz}{dt} = 2(5)(-26) \Rightarrow \frac{26}{26}\frac{dz}{dt} = \frac{-260}{26} \Rightarrow \boxed{\frac{dz}{dt} = -10\ km/h}$$

12) مثلث متطابق الضلعين طول كل من ضلعيه المتطابقين $10\ cm$ ، وقياس الزاوية بينهما θ ، إذا تغيرت θ بمعدل $\frac{\pi}{60} rad/min$ ، فإن معدل تغير مساحة المثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$ هو :

a) $\frac{\pi}{3}\ cm^2/min$ b) $\frac{\pi}{6}\ cm^2/min$

c) $\boxed{\frac{5\pi}{12}\ cm^2/min}$ d) $\frac{\pi}{12}\ cm^2/min$



$$A = \frac{1}{2} a.b \sin\theta \implies A = \frac{1}{2}(10)(10)\sin\theta \implies A = 50\sin\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = 50\cos\theta \frac{d\theta}{dt} \implies = 50\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{60}\right) \implies = 50\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{60}\right)$$

$$\implies = 5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{6}\right) \implies \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{5\pi}{12}\ cm^2/min}$$

13) إذا كان : $x \neq 0$, $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{9}{x}$ ، فإن القيمة العظمى المطلقة للاقتران $f(x)$ في الفترة $[-6, -1]$ هي :

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 9x^{-1} \implies \acute{f}(x) = \frac{1}{3} - 9x^{-2} \implies = \frac{1}{3} - \frac{9}{x^2} \implies \boxed{\acute{f}(x) = \frac{x^2 - 27}{3x^2}}$$

$$\frac{x^2 - 27}{3x^2} = 0 \implies x^2 - 27 = 0 \implies x^2 = 27 \implies x = \pm 3\sqrt{3}$$

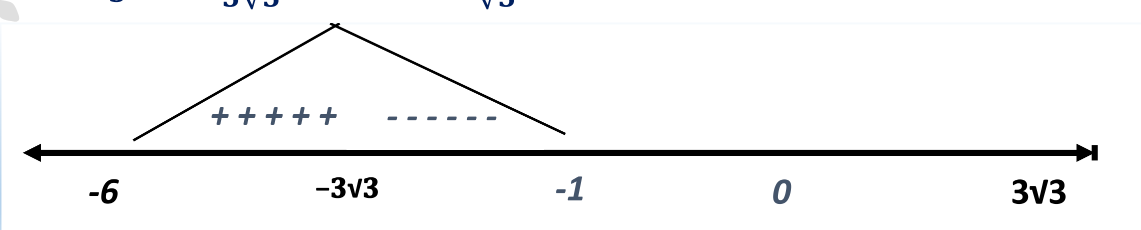
يوجد قيمة حرجة في الفترة $[-6, -1]$ هي : $x = -3\sqrt{3}$

نقارن قيم الاقتران عند النقط الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

$$f(-6) = \frac{-6}{3} + \frac{9}{-6} \implies = -2 - 1.5 \implies \boxed{f(-6) = -3.5}$$

$$f(-1) = \frac{-1}{3} + \frac{9}{-1} \implies = -0.33 - 9 \implies \boxed{f(-1) = -9.33}$$

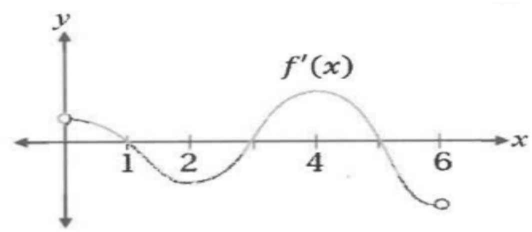
$$f(-3\sqrt{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{3} + \frac{9}{-3\sqrt{3}} \implies = -\sqrt{3} - \frac{3}{\sqrt{3}} \implies = -\sqrt{3} - \sqrt{3} \implies \boxed{f(-3\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}}$$



a) $-3\sqrt{3}$ b) $\boxed{-2\sqrt{3}}$ c) $-\frac{7}{2}$ d) $-\frac{7}{2}$

14) معتمداً الشكل الآتي الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ما الفترة (الفترات) التي يكون فيها منحنى الاقتران $f(x)$ مقعراً لأعلى ؟

الاقتران $f(x)$ مقعر للأعلى عندما $\acute{f}(x) > 0$ ويكون $f(x)$ متزايداً ، إذن الفترة هي $(2,4)$



a) $(0,1)(3,5)$ b) $(0,2)$

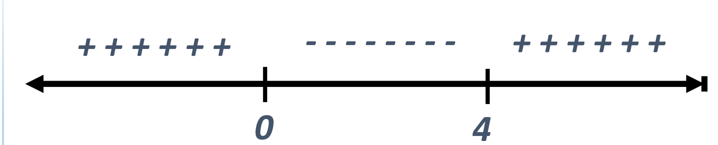
c) $(1,3)(5,6)$ d) $\boxed{(2,4)}$

15) يمثل الاقتران : $s(t) = t^3 - 6t^2 + 5, \quad t \geq 0$ ، موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار ، و t الزمن بالثواني ، ما الفترة الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب ؟

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 5 \quad \Rightarrow \quad v(t) = \acute{s}(t) = 3t^2 - 12t$$

$$\Rightarrow 3t^2 - 12t = 0 \quad \Rightarrow 3t(t-4) = 0$$

$$\Rightarrow 3t = 0 \quad \Rightarrow \boxed{t = 0} \quad \Leftrightarrow \quad t - 4 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{t = 4}$$



a) $(4,\infty)$ b) $\boxed{(0,4)}$

c) $(2,4)$ d) $(2,\infty)$

16) إذا كان : $R(x) = -50x^2 + 200(3x+160)$ ، يمثل اقتران الايراد الكلي بالدينار من بيع x صندوقاً ، فإن أعلى إيراد يمكن تحقيقه بالدينار هو :

$$R(x) = -50x^2 + 200(3x+160) \Rightarrow R(x) = -50x^2 + 600x + 32000$$

$$\acute{R}(x) = -100x + 600$$

$$-100x + 600 = 0 \quad \Rightarrow \quad 100x = 600 \quad \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

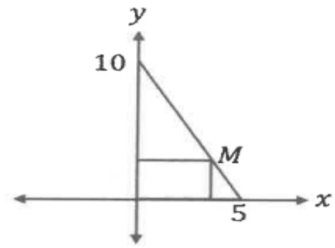
$$R(6) = -50(6)^2 + 200(3(6) + 160) \Rightarrow = -1800 + 35600 \Rightarrow \boxed{R(6) = 33800}$$

a) 35600 b) 11400 c) $\boxed{33800}$ d) 35300

17) معتمداً الشكل الآتي الذي يمثل مستطيلاً مرسوماً داخل مثلث قائم الزاوية، ما قيمة الإحداثي x للنقطة M التي تكون عندها مساحة المستطيل أكبر ما يمكن؟

نجد معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 0 = \frac{10 - 0}{0 - 5}(x - 5) \Rightarrow y = -2(x - 5) \Rightarrow y = -2x + 10$$



$$A = x \times y \Rightarrow A = x(-2x + 10) \Rightarrow A = -2x^2 + 10x$$

$$\acute{A} = -4x + 10 \Rightarrow -4x + 10 = 0 \Rightarrow 4x = 10 \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{2}}$$

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\boxed{\frac{5}{2}}$

18) إذا كان : $\sqrt{-1} = i$ ، فإن قيمة المقدار $i^{2021} \times \sqrt{-4}$ هي:

بقسمة اس i على 4 والباقي هو الاس الجديد $\frac{2021}{4}$ الباقي 1 وهو الاس الجديد لـ $i \Rightarrow i^1 \Rightarrow i^{2021}$

$$i^{2021} \times \sqrt{-4} = \Rightarrow i^1 \times \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = \Rightarrow i \times 2 \times i = \Rightarrow 2i^2 \Rightarrow 2 \times -1 = \boxed{-2}$$

a) 2 b) $\boxed{-2}$ c) $2i$ d) $-2i$

19) إذا كان : $3(x + y) + 4(3x - y)i = 43 + (32 - y)i$ ، فإن قيمة x الحقيقية التي تحقق المعادلة هي :

$$3(x + y) + 4(3x - y)i = 43 + (32 - y)i \Rightarrow 3x + 3y + 12xi - 4yi = 43 + (32 - y)i$$

$$\Rightarrow \boxed{3x + 3y = 43} \Rightarrow 12x - 4y = 32 - y \Rightarrow \boxed{12x - 3y = 32}$$

$$12x - 3y = 32$$

$$\underline{3x + 3y = 43}$$

$$15x = 75 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

a) -5 b) $\boxed{5}$ c) $-\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{5}$

20) إذا كان : $z = \frac{3}{k} - 2\sqrt{2}\, i\ , k > o$ ، وكان $|z| = 3$ ، فإن قيمة الثابت k هي:

$$3 = \sqrt{\left(\frac{3}{k}\right)^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} \implies 3 = \sqrt{\frac{9}{k^2} - 8}$$

$$\implies 9 = \frac{9}{k^2} - 8 \implies 9 - 8 = \frac{9}{k^2} \implies 1 = \frac{9}{k^2} \implies k^2 = 9 \implies k = 3$$

a) 1 b) 2 c) $\boxed{3}$ d) 4

21) إذا كان : $\frac{a^2+b^2}{a+bi} = 2 + 3i\ , k > o$ ، حيث a و b عددان حقيقيان لا يساوي أي منهما الصفر فإن قيمة $a \times b$ هي:

$$\frac{a^2 + b^2}{a + bi} = 2 + 3i \implies \frac{a^2 - b^2 i^2}{a + bi} = 2 + 3i$$

$$\frac{(a + bi)(a - bi)}{a + bi} = 2 + 3i \implies a - bi = 2 + 3i$$

$$\implies \boxed{a = 2} \implies -b = 3 \implies \boxed{b = -3}$$

$$\implies a \times b \implies 2 \times -3 = \boxed{-6}$$

a) 1 b) -1 c) 6 d) $\boxed{-6}$

22) إذا كان : $z_2 = 3(cos\frac{7\pi}{18} + i\sin\frac{7\pi}{18})$ ، $z_1 = 6(cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$ فإن $\frac{z_1}{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)) \implies = \frac{6}{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6} + \frac{7\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6} + \frac{7\pi}{18}\right)\right)$$

$$\implies = 2\left(\cos\left(\frac{21\pi}{18} + \frac{7\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{21\pi}{18} + \frac{7\pi}{18}\right)\right) \implies = 2\left(cos\frac{14\pi}{18} + +i\sin\frac{14\pi}{18}\right)$$

$$\implies \frac{z_1}{z_2} = 2\left(cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right)$$

a) $2\left(cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ b) $\boxed{2(cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9})}$ c) $3\left(cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ d) $3(cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9})$

23) *إذا كان :* $a+4i$، وهو أحد الجذور التربيعية للعدد المركب $-7-24i$ ، فإن قيمة الثابت a هي:

$$\sqrt{-7-24i}=a+4i \implies \left(\sqrt{-7-24i}\right)^2=(a+4i)^2$$

$$-7-24i=a^2+8ai-16 \implies -7=a^2-16$$

$$\implies -7+16=a^2 \implies a^2=9 \implies a=\pm 3$$

$$-24=8a \implies \boxed{a=-3}$$

a) $\boxed{-3}$ b) 3 c) -4 d) 4

24) *ما القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة* z التي تحقق المعادلة: $\left|z+1-i\sqrt{3}\right|=1$ ؟

أكبر سعة للعدد المركب z تساوي قياس الزاوية المحصورة بين مماس الدائرة والمحور الحقيقي الموجب .

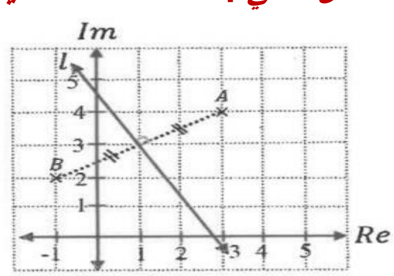
$$\left|z+1-i\sqrt{3}\right|=1 \implies \left|z-(-1+i\sqrt{3})\right|=1 \implies \left|z-(-1+i\sqrt{3})\right|=1$$

$$\implies =\tan^{-1}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3} \implies \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$$

القيمة العظمى لسعة الأعداد المركبة z التي تحقق المعادلة المعطاة هي $\frac{5\pi}{6}$

a) $\boxed{\frac{5\pi}{6}}$ b) $\frac{7\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{3}$

25) *معتمداً الشكل الآتي* : ما معادلة المستقيم l (بدلالة z) الممثل بيانياً ؟



a) $\boxed{|z+1-2i|=|z-3-4i|}$
b) $|z-1+2i|=|z+3+4i|$
c) $|z+1-2i|=|z+3+4i|$
d) $|z-1+2i|=|z-3-4i|$

أطراف القطعة المستقيمة هي : $(3,4)$ و $(-1,2)$

$$|z-(-1+2i|=|z-(3+4)i|$$

$$|z+1-2i| = |z-3-4i|$$

السؤال الثاني: (22 علامة)

a) ابحث قابلية الاقتران: $f(x) = (2x-6)^{\frac{1}{3}} + 4$ للاشتقاق عندما $x = 3$ (10 علامات)

ملغي حسب المنهاج المعدل لجيل 2006

b) جد مشتقة الاقتران : $f(x) = \left(cot\left(tan^2\sqrt{2x^3+1}\right)\right)^5$ (12 علامات)

$$f(x) = \left(\cot\left(\tan^2\sqrt{2x^3+1}\right)\right)^5$$

$$f'(x) = 5\left(\cot\left(\tan^2\sqrt{2x^3+1}\right)\right)^4 \times -\csc^2\left(\tan^2\sqrt{2x^3+1}\right) \times 2\left(\tan\sqrt{2x^3+1}\right) \times \left(\sec^2\sqrt{2x^3+1}\right) \times \left(\frac{6x^2}{2\sqrt{2x^3+1}}\right)$$

$$f'(x) = 5\left(\cot\left(\tan^2\sqrt{2x^3+1}\right)\right)^4 \times -\csc^2\left(\tan^2\sqrt{2x^3+1}\right) \times 2\left(\tan\sqrt{2x^3+1}\right) \times \left(\sec^2\sqrt{2x^3+1}\right) \times \left(3\frac{x^2}{\sqrt{2x^3+1}}\right)$$

$$f'(x) = -30\left(\cot\left(\tan^2\sqrt{2x^3+1}\right)\right)^4 \times -\csc^2\left(\tan^2\sqrt{2x^3+1}\right) \times \left(\tan\sqrt{2x^3+1}\right) \times \left(\sec^2\sqrt{2x^3+1}\right) \times \left(\frac{x^2}{\sqrt{2x^3+1}}\right)$$

السؤال الثالث: (28 علامة)

a) إذا كان: $3y^2 = 4x^2 + xy$ ، فأثبت أن $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-a,a)} = -1$ حيث a عدد حقيقي لا يساوي الصفر. (12 علامات)

$$3y^2 = 4x^2 + xy$$

$$6y\frac{dy}{dx} = 8x + (x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(1) \Rightarrow 6y\frac{dy}{dx} = 8x + x\frac{dy}{dx} + y$$

$$\Rightarrow 6y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} = 8x + y \Rightarrow \frac{dy}{dx}(6y-x) = 8x + y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\frac{(6y-x)}{6y-x} = \frac{8x+y}{6y-x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{8x+y}{6y-x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-a,a)} = \frac{8(-a)+a}{6(a)-(-a)} \Rightarrow = \frac{-8a+a}{6a+a} \Rightarrow = \frac{-7a}{7a} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-a,a)} = -1}$$

b) جد: $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = 1$: (8 علامات)

$$x = t^3 - 3t^2 + 1 \quad , \quad y = t^2 + 2$$

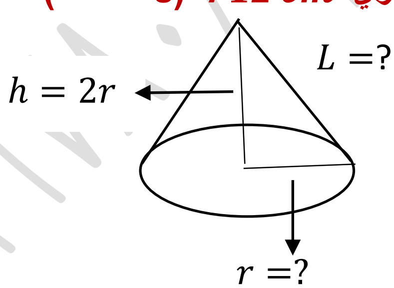
$$\boxed{\frac{dy}{dt} = 2t} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Rightarrow = \frac{2t}{3t^2 - 6t} \Rightarrow \frac{2}{3t - 6} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = 2(3t - 6)^{-1}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2(3t - 6)^{-2}(3) \Rightarrow = \frac{(-2)(3)}{(3t - 6)^2} \Rightarrow = \frac{\frac{-6}{(3t - 6)^2}}{3t^2 - 6t} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{-6}{(3t - 6)^2}}{3t^2 - 6t}}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{\frac{-6}{(3(1) - 6)^2}}{3(1)^2 - 6(1)} \Rightarrow = \frac{\frac{-6}{(3 - 6)^2}}{3 - 6} \Rightarrow = \frac{\frac{-6}{9}}{-3} \Rightarrow = \frac{-6}{-27} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{2}{9}}$$

c) يتساقط الرمل من شاحنة متوقفة على أرض مستوية بمعدل $2\ cm^3/s$ فيتشكل منه مخروط قائم ارتفاعه مساو لطول قطر قاعدته ، جد معدل التغير في مساحة السطح الجانبية للمخروط المتشكل في اللحظة التي يكون فيها ارتفاع المخروط يساوي $12\ cm$. (8 علامات)



المعطيات :

$$\frac{dv}{dt} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad r =? \quad \Leftrightarrow \quad h = 2r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dh}{dt} = 12$$

المطلوب : $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{h=12} =?$

$$L^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow = (2r)^2 + r^2 \Rightarrow = 4r^2 + r^2 \Rightarrow$$

$$L^2 = 5r^2 \implies L = \sqrt{5r^2} \implies \boxed{L = \sqrt{5}r}$$

المساحة الجانبية للمخروط = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × طول المولد

$$A = \frac{1}{2}2\pi rL \implies A = \pi rL \implies = \pi r\sqrt{5}r \implies \boxed{A = \pi\sqrt{5}r^2}$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = 2\pi\sqrt{5}x\frac{dr}{dt}}$$

$$x^2\frac{dx}{dt} = -12\pi x^2 \implies \boxed{\frac{dx}{dt} = -6\pi}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi\sqrt{5}r\frac{dr}{dt} \implies$$ عدد المجاهيل ثلاثة

- نحتاج علاقة ثانوية لإيجاد المجهول r :

$$h = 2r \implies 12 = 2r \implies \boxed{r = 6}$$

- نحتاج علاقة ثانوية لإيجاد المجهول $\frac{dr}{dt}$:

الحجم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2(2r) \implies V = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = (3)\frac{2}{3}\pi r^2\frac{dr}{dt} \implies 2 = (3)\frac{2}{3}\pi(6)^2\frac{dr}{dt} \implies 2 = 2\pi(36)\frac{dr}{dt}$$

$$\implies 2 = 72\pi\frac{dr}{dt} \implies \implies \frac{dr}{dt} = \frac{2}{72\pi} \implies \boxed{\frac{dr}{dt} = \frac{1}{36\pi}}$$

- نعوض القيم في العلاقة الرئيسة التي تم اشتقاقها لإيجاد المطلوب $\frac{dA}{dt}$:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi\sqrt{5}r\frac{dr}{dt} \implies \frac{dA}{dt} = 2\pi\sqrt{5}(6)\left(\frac{1}{36\pi}\right) \implies \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{5}}{3}}$$

السؤال الرابع: (22 علامة)

a) حدد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران $f(x)=\frac{x^3}{3}-8\,ln\,x$ (10 علامات)

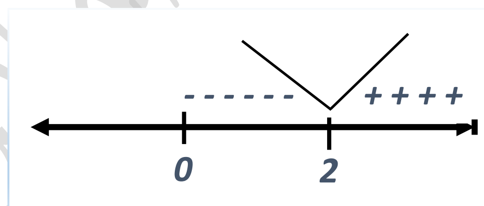
$$f(x)=\frac{x^3}{3}-8\ln x$$

$$\acute{f}(x)=3\frac{x^2}{3}-8\frac{1}{x}\Rightarrow=\frac{x^2}{1}-\frac{8}{x}\Rightarrow\boxed{\acute{f}(x)=\frac{x^3}{x}-\frac{8}{x}}$$

$$\acute{f}(x)=\frac{x^3-8}{x}\qquad\qquad x>0$$

$$x^3-8=0\Rightarrow x^3=8\Rightarrow\sqrt[3]{x^3}=\sqrt[3]{8}\Rightarrow\boxed{x=2}$$

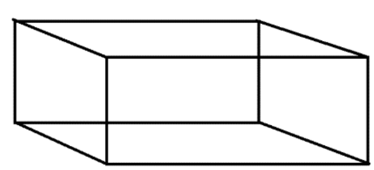
$$f(2)=\frac{(2)^3}{3}-8\ln 2\Rightarrow\boxed{f(2)=\frac{8}{3}-8\ln 2}$$



- للاقتران قيمة صغرى محلية ومطلقة عند : $x=2$ وهي $f(2)=\frac{8}{3}-8\ln 2$

- الاقتران f متزايد على الفترة $[2,\infty)$ ومتناقص على الفترة $(0,2]$

b) ترغب شركة في تصميم صندوق مفتوح من الأعلى طول قاعدته يساوي مثلي عرضها ، ومساحة سطحية الكلية تساوي $2400\ cm^2$ ، جد أبعاد الصندوق التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن. (12 علامة)



محيط القاعدة = 2 × (الطول + العرض)

$$P=2(2x+x)\Rightarrow P=4x+2x\Rightarrow\boxed{P=6x}$$

مساحة القاعدة = الطول × العرض

$$A = 2x \times x \implies \boxed{A = 2x^2}$$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

$$SA = 6x \times y \implies \boxed{SA = 6xy}$$

المساحة السطحية (متوازي سطوح مستطيلة مفتوح من الأعلى) = المساحة الجانبية +مساحة القاعدة

$$TA = 6xy + 2x^2 \implies \frac{2400}{6x} = \frac{6xy}{6x} + \frac{2x^2}{6x}$$

$$\implies \frac{400}{x} = y + \frac{x}{3} \implies \boxed{y = \frac{400}{x} - \frac{x}{3}}$$

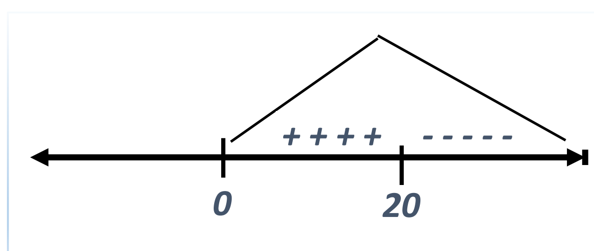
الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = 2x^2 \times y \implies = 2x^2\left(\frac{400}{x} - \frac{x}{3}\right) \implies = \left(\frac{800x^2}{x} - \frac{2x^2}{3}\right) \implies \boxed{V = 800x - \frac{2x^3}{3}}$$

$$\acute{V} = 800 - (3)\frac{2}{3}x^2 \implies \acute{V} = 800 - 2x^2$$

$$800 - 2x^2 = 0 \implies 2x^2 = 800 \implies x^2 = 400 \implies \boxed{x = 20 \quad \text{العرض}}$$

للاقتران قيمة عظمى محلية عند : $x = 20$



$$2x = 20 \times 2 \implies \boxed{= 40 \quad \text{الطول}}$$

$$y = \frac{400}{20} - \frac{20}{3}$$

$$y = 20 - \frac{20}{3} \implies y = \frac{60}{3} - \frac{20}{3} \implies \boxed{y = \frac{40}{3} \quad \text{الارتفاع}}$$

السؤال الخامس: (28 علامة)

a) اكتب العدد المركب: $z=-2-i\sqrt{12}$ بالصورة المثلثية. (8 علامات)

$$r=|z|=\sqrt{(x)^2+(y)^2}\Rightarrow=\sqrt{(-2)^2+(-\sqrt{12})^2}$$

$$\Rightarrow=\sqrt{4+12}\quad\Rightarrow\quad=\sqrt{16}\Rightarrow\quad\boxed{r=|z|=4}$$

العدد المركب يقع في الربع الثالث لأن x اشارتها سالبة و y اشارتها سالبة .

$$\theta=-\left(\pi-\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right)\Rightarrow=-\left(\pi-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{12}}{2}\right)\right)\Rightarrow=\left(-\pi+\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow=\left(-\pi+\tan^{-1}(\sqrt{3})\right)\Rightarrow=\left(-\pi+\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\boxed{\theta=-\frac{2\pi}{3}}$$

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\Rightarrow\boxed{z=4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)}$$

b) جد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلة $z^3+3z^2=5z+39$. (10 علامات)

$$z^3+3z^2=5z+39$$

$$z^3+3z^2-5z-39=0$$

لتحليل المعادلة من خلال تحليل عوامل العدد 39 وذلك من خلال التجربة $\pm1,\pm3,\ \pm13,\pm39$

بالتعويض ، نجد أن العدد 3 يحقق هذه المعادلة :

إذن أحد الجذر هو $\boxed{z_1=3}$ ، لإيجاد باقي الجذور نقسم :

	z^3	z^2	z	الثابت
$\boxed{3}$	1	3	-5	-39
	0	3	18	39
	1	6	13	0

العامل الآخر هو

$$z^2+6z+13=0$$

نستخدم القانون العام لحل المعادلة:

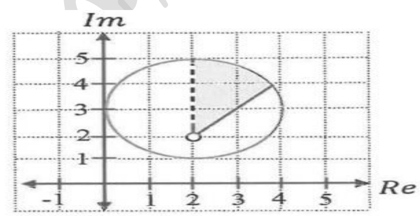
$$a = 1 \qquad b = 6 \qquad c = 13$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)} \Rightarrow = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2}$$

$$\Rightarrow z = \frac{-6 \pm 4i}{2} \Rightarrow = \frac{-6}{2} \pm \frac{4i}{2} \Rightarrow \boxed{z_2 = -3 + 2i} \Leftrightarrow \boxed{z_3 = -3 - 2i}$$

الجذور هي : $\{z_1 = 3 \quad , z_2 = -3 + 2i \quad , z_3 = -3 - 2i\}$

c) اكتب (بدلالة z) نظام متباينات يمثل المحل الهندسي الذي تمثله المنطقة المظللة في الشكل الآتي . (10 علامات)



مركز الدائرة : $(2, 3)$ ، نصف القطر : $r = 2$

$$|z - (2 + 3i)| = 2$$

- وكونها متصلة مما يدل على وجود مساواة في المتباينة و المحل الهندسي للنقاط التي تحقق هي المنطقة المظللة فتكون المتباينة هي : $|z - (2 + 3i)| \leq 2$

المنطقة المحصورة بين الشعاعين:

الشعاع الأول : نلاحظ أي نقطتين على الشعاع $(2, 2)$ و $(3, 3)$ بالتالي الميل هو :

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow m = \frac{3 - 2}{3 - 2} \Rightarrow m = 1 \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

وكون الخط متصل تكون الإشارة $\leq \frac{\pi}{4}$

الشعاع الثاني : خط عمودي على المحور الحقيقي بالتالي فأن ميله غير معرف ∞ أي أن :

$$\tan\theta = \infty \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

وكون الخط متقطع تكون الإشارة $< \frac{\pi}{2}$

- عندما اكتب المعادلة في صورة $|z - (a + ib)| = r$ فإن معادلة دائرة، مركزها $(2 + 3i)$ ، وطول نصف قطرها 2 وحدات .

$$\frac{\pi}{4} \leq Arg\,(z - (2 + 2i)) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{4} \leq Arg\,(z - 2 - 2i) < \frac{\pi}{2}}$$