نسخة الطالب
....

التفوق في الرياضيات

الوحدة الأولى
المنهاج الجديد

التفاضل

(2024)

قواعـــــد الاشــــتقاق

قاعــــــــــدة 1

اذا كان $f(x) = c$ فان $f'(x) = 0$

مثال: جد $f'(x)$ للاقترانات التالية

1. $f(x) = 3 \rightarrow f'(x) = 0$
2. $f(x) = 1/3 \rightarrow f'(x) = 0$
3. $f(x) = \pi \rightarrow f'(x) = 0$
4. $f(x) = e \rightarrow f'(x) = 0$

قاعــــــــــدة 2

اذا كان

$f(x) = x^n$ فان $f'(x) = n\,x^{n-1}$

مثال: جد $f'(-2)$ للاقترانات التالية

1. $f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(-2) = 12$
2. $f(x) = x^4 \rightarrow f'(x) = 4x^3 \rightarrow f'(-2) = -32$
3. $f(x) = x \rightarrow f(x) = 1 \rightarrow f(-2) = 1$

قاعــــــــــدة 3

اذا كان $h(x)$ اقتران قابل للاشتقاق عند x وكان c عدد ثابت وكان $f(x) = c\,h(x)$ فان الاقتران $f(x)$ قابل للاشتقاق عند x وان

$f'(x) = c * h'(x)$

مثال: جد $f'(-2)$ للاقترانات التالية

1. $f(x) = 2x^3 \rightarrow f'(x) = 6x^2 \rightarrow f'(-2) = 24$
2. $f(x) = \frac{x^4}{4} \rightarrow f'(x) = x^3 \rightarrow f'(-2) = -8$
3. $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1 \rightarrow f'(-2) = 1$

قاعــــــــــدة 4

إذا كان كل من الاقترانيين $h(x)$ ، $L(x)$ قابلا للاشتقاق عند x، وكان $f(x) = L(x) \pm h(x)$

فان $f'(x) = L'(x) \pm h'(x)$

مثال: جد فان $f'(x)$ للاقتران التالي

$f(x) = x^3 - 2x + 5$

$\rightarrow$ فان $f'(x) = 3x^2 - 2$

قاعـــــــــــدة 5

مـــشتقة الجـــــــذور

مـشتقة الجـذر التربيعـي

$$f(x) = \sqrt{h(x)}\,, \quad h(x) \geq 0$$

فان

$$f'(x) = \frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}} \quad h(x) > 0$$

مثال:

اوجد $f'(x)$ للاقتران على مجاله

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2x+3}} \; : \; x^2 + 2x + 3 > 0$$

بشـــــكل عـــــام

اذا كان

$$f(x) = \sqrt[n]{h(x)}$$

فان

$$f'(x) = \frac{h'(x)}{n\sqrt[n]{(h(x))^{n-1}}}$$

مثال :

اذا كان $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 5}$ اوجد $f'(x)$

الحل :

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+5)^2}}$$

فان $f'(x) = 3x^2 - 2$

قاعـــــــــــدة 6

$$f(x) = (h(x))^n \rightarrow f'(x)$$
$$= n(h(x))^{n-1} * h'(x)$$

مثال :

اوجد $f'(x)$

$$f(x) = (5x^2 - 2x + 5)^{100}$$

الحل :

$$f'(x) = 100(5x^2 - 2x + 5)^{99} * (10x - 2)$$

ملاحظة :

يمكن استخدام القاعدة لإيجاد مشتقة أي جذر

مثال:

اذا كان $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ جد $f'(x)$

الحل :

$$f(x) = (x^2 + 2x + 3)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 3)^{\frac{-1}{2}} * (2x + 2)$$

=

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}} \; : x^2 + 2x + 3 > 0$$

للاستفسار ت (0788241724)

الاتصال

يكون f(x) متصل عند x= a اذا تحقق الشروط التالية

1. $f(a) =$ موجودة
2. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

الاتصال والاشتقاق

- الاتصال والاشتقاق -الاقتران-
  - قابل للاشتقاق
    - متصل
  - غير قابل للاشتقاق
    - متصل
    - غير متصل

- الاتصال والاشتقاق -الاقتران-
  - متصل
    - قابل للاشتقاق
    - غير قابل للاشتقاق
  - غير متصل
    - غير قابل للاشتقاق

نظرية (1)

إذا كان f(x) غير متصل عند النقطة x = a، فانه يكون غير قابل للاشتقاق عند تلك النقطة

نظرية (2)

إذا كان f(x) قابلاً للاشتقاق عند x=a، فانه يكون متصلاً عند تلك النقطة

التعريف العام للمشتقة

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

2.يكون $f'(a)$ موجودة اذا كان

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

الاقتران المتشعب

$$f(x) = \begin{cases} d(x), & x < a \\ h(x), & x \ge a \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} d'(x), & x < a \\ h'(x), & x > a \end{cases}$$

- الاقتران المتشعب عند نقطة x=a
  - غير متصل
    - غير قابل للاشتقاق $f'_+(a) = f'_-(a)$
  - متصل
    - قابل للاشتقاق
    - غير قابل للاشتقاق $f'_+(a) \neq f'_-(a)$

مثال :

اذا كان $f(x) = \begin{cases} 4x, & x < 4 \\ x^2, & x \ge 4 \end{cases}$

اوجد $f'(4)$

الحل :

*مثال : اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \le 1 \\ x^2 - 2x & , \quad x > 1 \end{cases}$$

اوجد $f'(1)$

الحل :

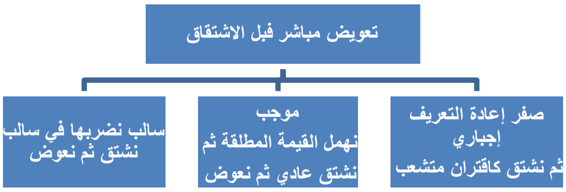
*مثال : اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \le 2 \\ a\,x + b & , \quad x > 2 \end{cases}$$

اوجد قيمة a , b اللتين تجعلان f قابلا للاشتقاق عند جميع قيم x الحقيقية

الحل :

القيمـــــــة المطلقـــــة



*مثال :

إذا كان $f(x)= x|x|$ ، اثبت ان $f'(0)=0$

الحل :

f(x) متصل على R لانها قيمة مطلقة داخلها كثير حدود مضروبه في كثير حدود

مثال :

إذا كان $f(x)= |4 - x|$، اوجد $f'(4)$

الحل :

$f(x)$ متصل عند $x = 4$

القيمة المطلقة دائما متصل اذا كان ما داخله متصل واذا كان داخلة كثير حدود يكون غير قابل للاشتقاق عند اصفار القيمة المطلقة

قابلية الاشتقاق من الرسم

من رسمة $f(x)$ غير قابل للاشتقاق

- **عند اطراف الفترة**
- **عند نقاط عدم الاتصال**
- **الرؤوس المدببة (حاد)**
- **المماس الراسي**

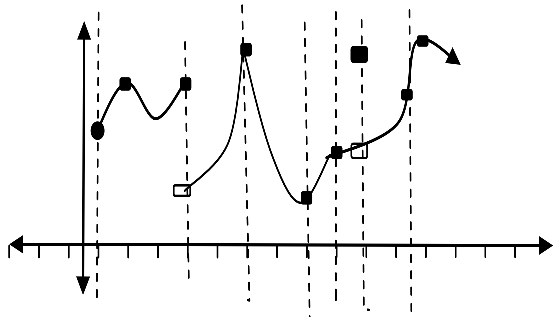
ملاحظة : لايجاد المشتقة من رسمة $f(x)$

- **اطراف الفترة المعرف عندها الاقتران غير قابلة للاشتقاق**
- **القمة والقاع المماس افقي المشتقة تساوي صفر**
- **المستقيم الافقي عند أي نقطة المشتقة تساوي صفر باستثناء الاطراف**
- **المسقيم المائل ناخذ أي نقطتين عليه وتكون المشتقة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$**
- **اذا اعطي مماس عند نقطة وصنع المماس زاوية مع محور x الموجب والمماس فتكون المشتقة**

$f'(x)= \tan \theta$

مثال :

اذا كان الشكل السابق مثل منحنى الاقتران $f(x)$ المعرف على $[1,\infty)$ جد جميع القيم في مجال $f(x)$ والتي تكون عندها $f'(x)$ غير موجودة

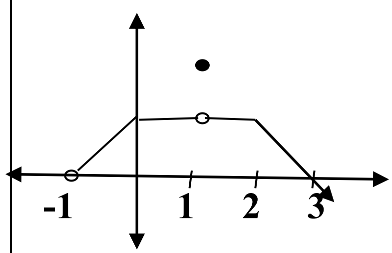


الحل ***$f(x)$ غير قابل للاشتقاق***

- $x=1$ لانه طرف فترة
- $x=4$ لانه غير متصل
- $x=6$ لانه راس مدبب
- $x=8$ لانها راس مدبب
- $x=9$ لانها راس مدبب
- $x=10$ لانه غير متصل رغم النهاية موجودة
- $x=11.5$ لانه مماس راسي

ص2011)

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران f(x) المعرف على $(-1,\infty)$ فان مجموعة جميع القيم في مجال f(x) والتي تكون عندها $f'(x)$ غير موجودة لان المشتقة من اليمين لا تساوي المشتقة من اليسار

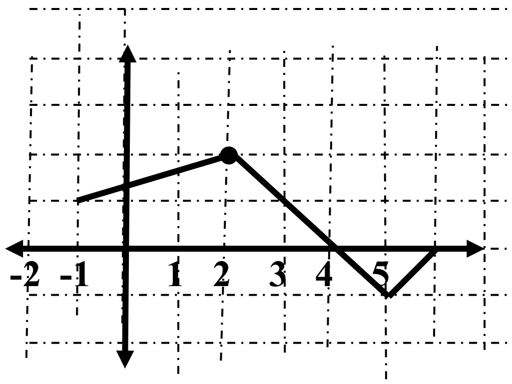


$A)\ \{-1\}$ B) $\{0\}$

$\surd$ C) $\{0,2\}$ D) $\{-1,1\}$

(ش 2018)

بالاعتماد على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى الاقتران $f(x)$ المعرف على الفترة $[-1 ، 6]$ ، فان $f'(0)$



$A)\ 0$ B) D. N. E

$\surd$ C) -1 D)4

تمـــــــرين عـــــــــام

①

اذا كان $f(x)=\begin{cases}4x+3, & x\le -1\\ x^2+1, & x>-1\end{cases}$

$f(x)=\begin{cases}5-3x^2, & x\le -1\\ 2x+1, & x>-1\end{cases}$

وكان $L(x) = f(x) + h(x)$ اوجد $L'(-1)$

② اذا كان

$$f(x)=\begin{cases}\left(a+\sqrt{x}\right)^2, & x\ge 9\\ \frac{x^2}{27}+b, & x<9\end{cases}$$

وكان $f(x)$ قابل للاشتقاق عند $x=9$ اوجد قيمة a, b

الحل: $b=1$ $a=-1$,

مــشتقة الاقترانــات الدائريــة

.1 قاعـــــــــــــــدة

$f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$

بشـــــــكل عــــــــام

$f(x) = \sin(h(x)) \rightarrow f'(x) = \cos(h(x))\, h'(x)$

بشـــــــكل أعــــــــم

$(f(x) = \sin^n(h(x))$

$\rightarrow f'(x) = n(\sin(h(x))^{n-1} \cos(h(x))\, h'(x)$

ملاحظة : ماينطبق على sinx ينطبق على جميع الاقترانات الدائرية

ملاحـــــظة - يا بنــــــي

البرهان مطلوب للجميع ...سنتعلمه سابقا

.2 قاعـــــــــــــــدة

$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$

.3 قاعـــــــــــــــدة

$f(x) = \tan x \rightarrow f'(x) = \sec^2 x$

.4 بشـــــــكل عــــــــام

$f(x) = \cot x \rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$

.5 قاعـــــــــــــــدة

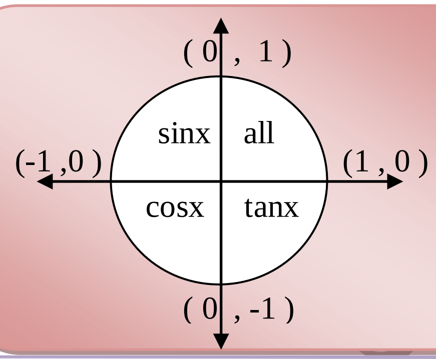
$f(x) = \sec x \rightarrow f(x) = \sec x \tan x$

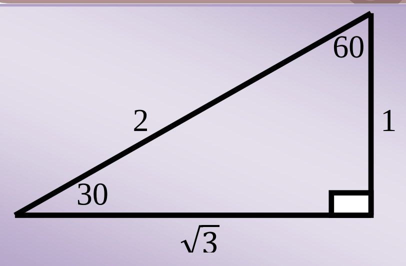
.6 قاعـــــــــــــــدة

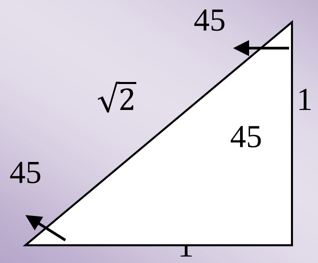
$f(x) = \csc x \rightarrow f(x) = -\csc x \cot x$

للاستفسار ت (0788241724)

تـــــــــــــــــــــــــــذكر







تـــــــــــــــــــــــــــذكر

1. $sinx = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$
2. $cosx = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$
3. $tanx = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$
4. $cotx = \frac{\text{المجاور}}{\text{لمقابل}} = \frac{1}{tanx}$
5. $secx = \frac{1}{cosx}$
6. $cscx = \frac{1}{sinx}$
7. $sin(-x) = -sinx$
8. $cos(-x) = -cosx$

متطابقـــــــــــات مهمـــــــــــة

1. $sin^2x + cos^2x = 1$
2. $sin(-x) = -sinx$
3. $cos(-x) = -cosx$
4. $sin(2x) = 2sinxcosx$
5. $cos(2x) = 1 - 2sin^2x$
 $= 2cos^2x - 1$
 $= cos^2x - sin^2x$
6. $cos(x \pm y) = cosxcosy \mp sinxsiny$
7. $sin(x \pm y) = sinxcosy \pm cosxsiny$
8. $sec^2x = tan^2x + 1$
9. $csc^2x = cot^2x + 1$
10. $sinx = cos(\frac{\pi}{2} - x)$
11. $cosx = sin(\frac{\pi}{2} - x)$
12. $sinx = sin(\pi - x)$
13. $sinx - siny = 2cos\frac{x+y}{2}sin\frac{x+y}{2}$
14. $cosx - cosy = -2sin\frac{x+y}{2}sin\frac{x-y}{2}$
15. $sinx + siny = 2sin\frac{x+y}{2}cos\frac{x-y}{2}$
16. $cosx + cosy = 2cos\frac{x+y}{2}cos\frac{x-y}{2}$
17. $tan(x \pm y) = \frac{tanx \pm tany}{1 \mp tanxtany}$

مثال :

اذا كان $f(x)=sin(-x)$ جد $f'(x)$

الحل :

$f'(x) = -cos(-x) = -cosx$

ويمكن حله

$f'(x) = sin(-x) = -sinx$

ت (0788241724)

مثال :

اذا كان $f(x)=sin^2x$ جد $f'(x)$

الحل :

$f'(x) = 2sinx\ cosx$

لكن :

$Sin2x=2sinxcosx$

$f'(x) = 2sinx\ cosx=sin2x$

مثال :

اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} sinx & , 0 \le x < \frac{2\pi}{3} \\ ax + b & , \frac{2\pi}{3} \le x \le 2\pi \end{cases}$$

قابلاً للاشتقاق عند $x = \frac{2\pi}{3}$ فجد قيم a ، b

الحل :

اذن $a = \frac{-1}{2}$, ومنها ????? b=

مثال :

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للاقترانات التالية

1. y= -4sinx +2cotx
2. y= sinx° (x بالدرجات)

الحل :

1. $\frac{dy}{dx} = -4cosx - 2csc2x$
2. نحول الدرجات الى راد

$$y = sin\frac{\pi}{180}x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{180} cos\frac{\pi}{180}x$$

مثال :

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران

$y = sin^3 4x$ عندما $x = \frac{\pi}{12}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 12cos4xsin^2 4x\ |_{\frac{\pi}{12}} = \frac{9}{2}$$

مثال :

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران

$y = sec^3 2x$ عندما $x = \frac{\pi}{6}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 6sec2xtan2xsec^2 2x\ |_{\frac{\pi}{6}}$$

$$= 6tan2xsec^3 2x\ |_{\frac{\pi}{6}} =$$

للاستفسار ت (0788241724)

ص 2019)

إذا كان $f(x) = \tan x \ , x \in (0, 2\pi)$ جد $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

A) 8　　√ B) − 8　　C) − 2　　D)2

مثال :

جد قيم x في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$ التي تحقق المعادلة $f'(x)= zero$ لكل مما ياتي.

1.f(x)= x + cosx

2. f(x)=secx

الحل :

1. $f(x)= 1 - \sin x \quad (-2\pi, 2\pi)$

$1-\sin x=0$

$\sin x=1 \rightarrow x=-3\pi/2 \ , \ \pi/2$

2. $f(x)=\sec x \tan x$

$\sec x \tan x = 0$

$\sec x \neq 0$

$\tan x=0 \rightarrow \sin x=0 \rightarrow x =-\pi \ , 0 \ , \pi$

ش2007)

اذا كان $y = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x$

اثبت $\frac{dy}{dx} = \sec^4 x$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \tan^2 x \sec^2 x$$

$$= \sec^2 x(1 + \tan^2 x)$$

$$= \sec^2 x(\sec^2 x)$$

$$= \sec^4 x$$

ص2009)

اذا كان $f(x) = \frac{\pi}{\sec x}$ فان $f'(\frac{\pi}{6})$

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$　　√ B) $\frac{-\pi}{2}$　　C) $\frac{\pi}{2}$　　D) $\frac{-\pi\sqrt{3}}{2}$

الحل :

$$f'(x) = \frac{-\pi \sec x \tan x}{\sec^2 x}$$

$$= \frac{-\pi \tan x}{\sec x}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{-\pi}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{-\pi}{2}$$

ص2009)

اذا كان

$y = a\sin x + b\cos x$: a, b ثوابت

$(y')^2 + y^2 = a^2 + b^2$

الحل :

ت (0788241724)

ش2009)

اذا كان $f(x) = \frac{1}{sinx}$ فان $f'(x)$

A) cotx cscx √ B) − cotx cscx
C)sinx cosx D) − cotx

الحل :

$$f(x) = \frac{1}{sinx} = cscx$$

$$f'(x) = -cscx\ cotx$$

ص2010)

اذا كان $f(x) = \frac{1+secx}{sinx}$ فان $f'(\frac{\pi}{4})$

الحل :

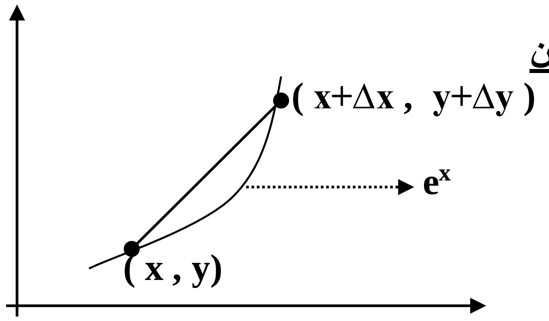
الاقتـــــــــــران الأســـــــــــي

نظرية

اذا كان $y = e^x$: $e \approx 2.71$ العدد النيبيري

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

البرهان



تـــــــذكر

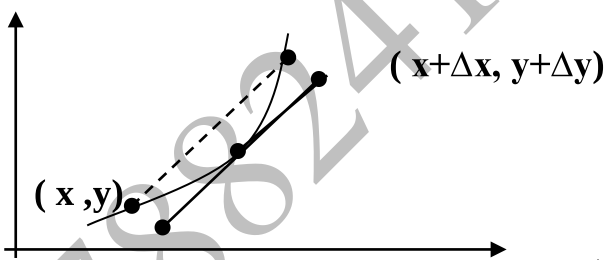
ميل المستقيم المار بالنقطتين (x_1, y_1) , (x_2, y_2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

فميل القاطع للاقتران $y = e^x$ هو ميل المستقيم المار بالنقطتين (x, y) , $(x+\Delta x, y+\Delta y)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

عندما تقترب x من x+Δx في النهاية يصبح القاطع مماس



فميل المماس يصبح

$$m = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \quad \text{لكن} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = 1$$

$$f'(x) = e^x$$

قيمتها 1 استخدم الجدول للتاكد

بشكـــــــــل عـــــــــام

اذا كان $e \approx 2.71$: العدد النيبيري $y = e^{f(x)}$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)e^{f(x)}$$

امثلة : جد المشتقة الاولى لكل من الاقترانات التالية

❶ $f(x) = 3e^x + 4x^2$

الحل:

$f'(x) = 3e^x + 8x$

---

❷ $f(x) = 3e^{3x+1} + 5x^{\frac{1}{2}}$

الحل:

$f'(x) = 9e^{3x+1} + \frac{5}{2}x^{\frac{-1}{2}}$

$f'(x) = 9e^{3x+1} + \frac{5}{2\sqrt{x}}$

---

❸ $f(x) = 3e^{\frac{1}{x}} + 5$

الحل:

$f'(x) = \frac{-3}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

$f'(x) = 9e^{3x+1} + \frac{5}{2\sqrt{x}}$

---

❹ $f(x) = \frac{x e^x - x^4}{x}$

الحل:

$= \frac{x e^x - x^4}{x} = e^x - x^3$

$f'(x) = e^x - 3x^2$

---

❺ $f(x) = 5e^x - \frac{1}{x^{\frac{1}{5}}}$

الحل:

$f(x) = 5e^x - x^{\frac{-1}{5}}$

$f'(x) = 5e^x + \frac{1}{5}x^{\frac{-6}{5}}$

$= 5e^x + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^6}}$

---

❻ $f(x) = e^{secx}$

الحل:

$f'(x) = secxtanx\, e^{secx}$

---

❼ $f(x) = sin(e^x)$

الحل:

$f'(x) = e^x cos(e^x)$

---

❽ $f(x) = e^{sinx}$

الحل:

$f'(x) = cosx\, e^{sinx}$

---

❾ $f(x) = e^x - x^e$

الحل:

$f'(x) = e^x - x^{e-1}$

سؤال $f(x) = e^{3lnsinx}$

الحل:؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟

للاستفسار ت (0788241724)

قاعـــــــــــــــــــــــــــــــــــــدة :

اذا كان $y = a^{f(x)}$: $a > 0$ فان

$$y' = f(x)a^{f(x)} \ln a$$

امثلة : جد المشتقة الاولى لكل من الاقترانات التالية

1. $f(x) = 4^x$

الحل:

$$f(x) = 4^x \ln 4$$

2. $f(x) = 4^{\tan x}$

الحل:

$$f'(x) = \sec^2 x \, 4^{\tan x} \ln 4$$

3. $f(x) = e^7$

الحل:

$$f'(x) = \text{zero}$$

4. $f(x) = 2^{3x}$

الحل:

$$f'(x) = 3 * 2^{3x} \ln 2$$

الاقتران اللوغاريتمي

تذكر: ⇔

$$y = \ln x \longleftrightarrow x = e^y \quad : \quad e \approx 2.71$$

قوانين اللوغاريتمات

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln e = 1$
3. $\ln(a * b) = \ln a + \ln b$
4. $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$
5. $\ln a^n = n \ln a$
6. $\ln e^{f(x)} = f(x)$
7. $\ln^{e^{f(x)}} = f(x)$

ملاحظات :

- هذه القواعد صحيحة لاى اساس ليس شرط للاساس e
- lnx تعني لوغاريتم x الطبيعي
- اللوغاريتم الطبيعي اساسه e
- e يسمى العدد النيبيري
- قيمة e هي العدد الحقيقي التي تجعل المساحة المحصورة بين منحنى ومحور السينات والمستقيم 1/x هي وحدة واحدة والتي هي e ≈ 2.72
- الاعداد الموجبة لها لوغاريتم اما السالبة والصفر ليس لها لوغاريتم

لتحويل اللوغاريتم من أي أساس إلى أي أساس e

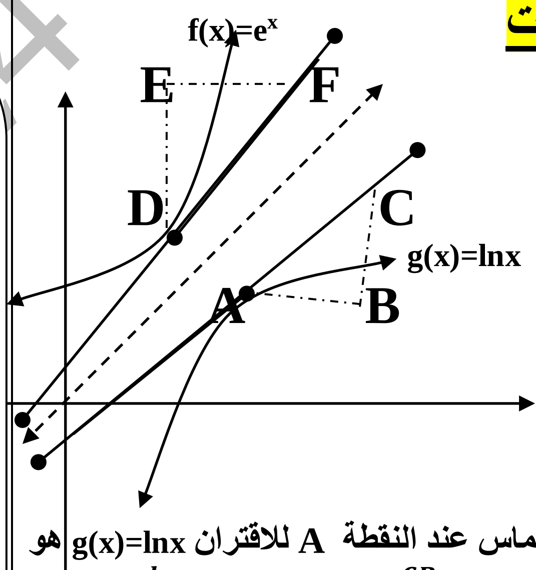
1. $\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$
2. $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$

نظريـــــــــــــــــــــــــــــــــــة

اذا كان $y = \ln x$: $x > 0$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

الاثبات



ميل المماس عند النقطة A للاقتران g(x)=lnx هو $\frac{CB}{AB}$ اذن $\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{CB}{AB}$

بما ان المثلث DEF هو انعكاس للمثلث ABC حول y=x فانهما متطابقان لذا فان

$$\frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE}$$

وبما ان $\frac{DE}{FE}$ ميل المماس عند النقطة D للاقتران f فان

$$f'(x) = \frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE} = \frac{1}{\frac{DE}{FE}}$$

بما ان ميل المماس عند أي نقطة تقع على منحنى الاقتران الاسي الطبيعي هو الاحداثي y لهذه النقطة ، فهذا يعني ان ميل المماس عند النقطة D وبسبب الانعكاس فان الاحداثي y للنقطة D هو الاحداثي x للنقطة A وبذلك

$$g'(x) = \frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE} = \frac{1}{\frac{DE}{FE}} = \frac{1}{x}$$

بشــــــــكل عــــــــــــــــام

اذا كان $y = \ln f(x) : f(x) > 0$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{fx)}$$

امثلة : جد المشتقة الاولى لكل من الاقترانات التالية

1. $f(x) = \ln (x^2+3)(x^3+5x)^{18}$

الحل:

$$f(x) = \ln (x^2+3) + 18\ln (x^3-5x)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+3} + \frac{18(3x^2-5)}{x^3-5x}$$

---

2. $f(x) = \log_{10} 2x$

الحل:

$$f(x) = \log_{10} 2x = \frac{\ln 2x}{\ln 10}$$

$$f'(x) = \frac{2}{2x\ln 10}$$

❸ $f(x) = \ln(x^3 + 3\cos 2x)^{\frac{1}{7}}$

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{7}\ln(x^3 + 3\cos 2x)$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 6\sin 2x}{7(x^3 + 3\cos 2x)}$$

---

❹ $f(x) = = \ln \dfrac{\cos^7 x}{(x^3 + 3x)^{\frac{1}{3}}}$

الحل:

$$f(x) = 7\ln\cos x - \frac{1}{3}\ln(x^3 + 3x)$$

$$f'(x) = \frac{-7\sin x}{\cos x} - \frac{3x^2 + 3}{3(x^3 + 3x)}$$

تذكـــــــــــــــر

① $\ln e^{f(x)} = f(x)$

② $\ln^{e^{f(x)}} = f(x)$

---

❺ $f(x) = \ln e^{\cot x}$

الحل:

$$f(x) = \cot x$$
$$f'(x) = -\csc^2 x$$

---

❻ $f(x) = \ln x^3 + e^{\tan x}$

الحل:

$$f(x) = 3\ln x + e^{\tan x}$$

$$f'(x) = \frac{3}{x} + \sec^2 x\, e^{\tan x}$$

---

❼ $f(x) = \ln e^x$

الحل:

$f'(x) = 1$????

❽ $f(x) = e^{\ln(\sin 2x + \cos x)}$

الحل:

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$
$$f'(x) = 2\cos 2x - \sin x$$

❾ $f(x) = e^7$

الحل:

$f'(x) =$ zero

❿ $f(x) = 2^{3x}$

الحل:

$$f'(x) = 3 * 2^{3x}\ln 2$$

⓫ $f(x) = \log_a x^3$

الحل:

$$f(x) = \frac{\ln a x^3}{\ln 10}$$

$$f'(x) = \frac{3a * x^2}{a x^3 \ln 10} = \frac{3}{x\ln 10}$$

ويمكن حله

$$f(x) = \frac{1}{\ln 10}(\ln a + 3\ln x)$$

$$f'(x) = \frac{3}{x\ln 10}$$

اسئلة وزارة

ص2008)   اذا كان

$a:\ y = ae^{2x} + \sin(\ln x)$ ثابت وكان

$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = e^3 + 1$ اوجد قيمة a .

الحل:

$f'(x) = 2ae^{2x} + \frac{1}{x}\cos(\ln x)_{|x=1} = e^3 + 1$

$2ae^2 + \cos 0 = e^3 + 1 \rightarrow a = \frac{e}{2}$

ش2010)   اذا كان

$f(x) = e^2 + \ln\cos x$ فان $f'(x)$

A) $2e - \tanx$ ✓ B) $-\tan x$

C) $\tan x + 2e$ D) $\tan x + e^2$

ص2010)   اوجد قيمة a اذا كان

$f(x) = e^{\frac{1}{x}} + a\ln\sqrt{x}$ وكان $f'(1) = e$

الحل:

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + \frac{a}{2\sqrt{x}}$

$f'(1) = -e + \frac{a}{2} = e \rightarrow a = 4e$

ش2010) اذا كان

$y = e^{a\cos x} + \ln\sin x$

وكان $\frac{dy}{dx} = -2$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$ فما قيمة a .

الحل:

$\frac{dy}{dx} = -a\sin x\, e^{a\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}$

$-2 = -a(1)e^0 + 0 \rightarrow a =$ 2

ص2011) اذا كان $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x}$ فما قيمة $f'(0)$

A) 0 ✓ B) 1 C) 1 D) D.N.E

ش2012) اذا كان

$f(x) = e^{2x} + \ln(3x+1)$ فان $f'(x)$

A) 4 ✓ B) 5 C) 3 D) 2

ش2013)اذا كان

$f(x)= e^{\sin^2\frac{\pi}{2}}+\ln(1-\cos 2x)$ فان $f'(\frac{\pi}{4})$

A) $\sqrt{e}+2$ ✓ B) 2 C) $\sqrt{e}$ D) $\sqrt{2}$

الحل:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 + \frac{2\sin 2x}{1-\cos 2x}\Big|_{=\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{1} = 2$$

ش2013)

اذا كان $y = 4^{f(x)}$ وكان f(x) قابل للاشتقاق

اثبت ان $y' = f'(x)\,4^{f(x)}\ln 4$

الحل:

$\ln y = f(x)\ln 4$

$\frac{y'}{y} = f'(x)\ln 4$

$y' = y\, f'(x)\ln 4$

$y' = f'(x)\ 4^{f(x)}\ \ln 4$

ص2013) اذا كان $f(x) = \ln e^{x^2+1}$

فان $f'(2)$ تساوي

✓A) 4 B) 5 C) 1 D) 0

الحل:

$f(x) = x^2 + 1 \rightarrow f'(x) = 2x \rightarrow$

$f'(2) = 4$

ص 2013) اذا كان $f(x) = \sqrt{1+e^x}$ فما قيمة $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$

الحل:

$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$ $|_{x=0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

تعديل ش2013) اذا كان $(f(x) = e^{\sin^2\frac{2\pi}{2}} + \ln(1+\cos^2 x$ فأن $f'(\pi)$

A) $\sqrt{e}+2$ √ B)0 C)$\sqrt{e}$ D)$\sqrt{2}$

الحل:

$$f'(\pi) = 0 + \frac{2sinxcosx}{1+cos^2x}|_{=\pi} = \frac{0}{1} = 0$$

ش2017)اذا كان $y = \sqrt{e^{2x} + \ln(x+1)}$ جد $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}|_{x=0} = \frac{2e^{2x}+\frac{1}{x+1}}{2\sqrt{e^{2x}+\ln(x+1)}}|_{x=0} =$$

مثال :

إذا كان $f(x) = 3e^{4x} + \ln(2x^2+1)$

: $x > -\frac{1}{2}$ ، e العدد النيبري ، اوجد $f'(x)$

الحل:

$$f'(x) = 12e^{4x} + \frac{4x}{2x^2+1}, x > -\frac{1}{2}$$

مثال :

إذا كان $f(x) = \pi^{\pi x}$، اوجد $f'(x)$

الحل:

$$f'(x) = \pi(\pi)^{\pi x}$$

تطبيقـــــــــات هندسيـــــــــة :

معادلة المماس والعمودي عند نقطة

ميل المماس= f ′(x) عند نقطة التماس

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة العمودي على المماس

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

- ملاحظـــات مهمـــة - يـــا بنـــي

- كلمات لها معنى -

ملاحظة يمكن استخدام أي من قواعد الاشتقاق السابقة والاحقة (الضرب والقسمة والسلسلة والضمني) لايجاد الميل عند نقطة التماس

ملاحظة انتبه انتبه انتبه اقرأ الملاحظة بشكل جيد

في اي سؤال يوجد فيه كلمة عند هذه تعني ان النقطة هي نقطة تماس وهنا يكون ميل المماس=$f'(x)$ اما اذا كان في السؤال كلمة المماس يمر او من نقطة مثل (x , y) هذه على الاغلب تعني انها ليست نقطة تماس فالذلك نجد نقطة التماس وذلك بفرض نقطة تماس ولتكن

ثم تطبيق القاعدة اللاحقة لنجد الاحداثي السيني (x_1 , y_1)

$$f'(x) = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

ثم نجد الاحداثي y ثم نجد ميل المماس بتطبيق

ميل المماس= $f'(x)$

كلمة العمودي يمر بالنقطة او من نقطة مثل (x , y) هذه على الاغلب تعني انها ليست نقطة تماس فالذلك نجد نقطة التماس وذلك بفرض نقطة تماس ولتكن (x_1 , y_1) ثم نطبيق القاعدة اللاحقة لنجد الاحداثي السيني

$$f'(x) * \frac{y - y_1}{x - x_1} = -1$$

كلمات مفتاحية

1. ميل المماس عند نقطة هي المشتقة الأولى عند تلك النقطة
2. ميل المماس= $tan\theta$ التي يعينها المماس مع محور x الموجب
3. المستقيمان متوازيان.... ميل الاول = ميل الثاني
4. المستقيمان متعامدان.. ميل الاول * ميل الثاني= -1
5. المماس أفقي المشتقة = صفر
6. المماس يوازي محور x المشتقة = صفر
7. العمودي موازي لمحور y فان المماس موازي لمحور x أي المماس افقي
8. الاقترانين متقاطعين.. الاقتران الاول = الاقتران الثاني
9. الاقتران f(x) يمس h(x)
   أ) مشتقة الاول = مشتقة الثاني
   ب) الاقتران الاول = الاقتران الثاني
10. إذا كان f(x) يقطع محور x عند x=a فان f(a)=0 (يعني جذر)
11. نقطة تقاطع الاقتران مع المحور x او المقطع x لمنحنى الاقتران يعني y=0
12. نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y او المقطع y لمنحنى الاقتران يعني x=0

مثال :

اكتب معادلة المماس والعمودي لمنحنى الاقتران

$f(x) = 2x^3 - 3x$ عند $x = 1$

الحل :

ميل المماس $f'(1)$

$$f'(x) = 6x^2 - 3$$

$$f'(1) = 6 - 3 = 3 = m$$

عند $x_1 = 1$ فان $f(1) = -1 = y_1$

معادلة المماس $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y + 1 = 3(x - 1) \rightarrow y = 3x - 4$$

معادلة العمودي $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$

$$y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 1) \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

مثال* :

اكتب معادلة المماس والعمودي لمنحنى الاقتران

$f(x) = f(x) = \ln \sqrt{x}$ عند $x = e$

الحل :

ميل المماس $f'(e)$

$$f'(x) = \frac{1}{2x}$$

$$f'(e) = \frac{1}{2e} = m$$

عند $x_1 = e$ فان $f(e) = \frac{1}{2} = y_1$

معادلة المماس $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}(x - e) \rightarrow y = \frac{x}{2e}$$

معادلة العمودي $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$

$$y - \frac{1}{2} = -2e(x - e) \rightarrow y = -2ex + 2e^2 +$$

*مثال :

اثبت ان مماس منحنى الاقتران منحنى الاقتران

$f(x) = \ln x$ عند النقطة $(e, 1)$

يمر بنقطة الاصل

الحل :

ميل المماس $f'(e)$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(e) = \frac{1}{e} = m$$

معادلة المماس $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \rightarrow y = \frac{x}{e}$$

عندما $x = 0$ فان $y = 0$ يعني يمر بالنقطة

(0 , 0) بنقطة الاصل

مثال :

اذا كان المماس لمنحنى الاقتران

$f(x) = x^2 + 5x$ عندما $x = x_1$ يصنع

مع محور x الموجب زاوية قياسها 45° فجد

احداثيات نقطة التماس

الحل :

$$f'(x) = \tan\theta$$

$$\tan\frac{\pi}{4} = 2x_1 + 5$$

ومنها $1 = 2x_1 + 5$ ومنها $x_1 = -2$

عند $x_1 = -2$ فان

$$f(-2) = -6 = y_1$$

نقطة التماس (-2 , -6)

*مثال :

اثبت ان المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)=\ln x$ عند النقطة $(e, 1)$ هو $e + \frac{1}{e}$

الحل :

ميل المماس $f'(e)$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(e) = \frac{1}{e} = m$$

معادلة العمودي على المماس

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 1 = -e(x - e) \rightarrow y = ex + 1 + e^2$$

عندما $y = 0$ فان $x = 0$

$$0 = -ex + 1 + e^2 \rightarrow x = \frac{1 + e^2}{e} = e + \cdot$$

*مثال :

اكتب معادلة المماس والعمودي لمنحنى الاقتران

$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^x$ عندما $(\pi, \frac{1}{2}e^\pi)$

الحل :

ميل المماس $f'(\pi)$

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{2}e^x$$

$$f'(\pi) = \cos\pi + \frac{1}{2}e^\pi = m = -1 + \frac{1}{2}e^\pi$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2}e^\pi = (\frac{1}{2}e^\pi + -1)(x - \pi)$$

معادلة العمودي على المماس

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2}e^\pi = \frac{-1}{\frac{1}{2}e^\pi + -1}(x - \pi)$$

لاستفسار ت (0788241724)

مثال :
جد النقط التي يكون عندها المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = x^3 - 2x + 5$ ، يعامد المستقيم $h(x) = x + 1$

الحل :

$$f'(x).h'(x) = -1$$

$$(3x^2 - 2)(1) = -1$$

$$3x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

النقاط

$$(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}} + 1)$$

مثال :
جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = x^3 + x$ عند النقطة التي يكون ميل المماس عندها يساوي 4

الحل :

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$3x^2 + 1 = 4$$

$$3x^2 = 3 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

عندما $x = 1$ فان $f(1) = 2$

$$y - 2 = 4(x - 1) \rightarrow y = 4x - 2$$

عندما $x = -1$ فان $f(-1) = -2$

$$y + 2 = 4(x + 1) \rightarrow y = 4x + 2$$

مثال :
جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $y = sinx + cosx$ عند النقطة $(\pi, -1)$

الحل :

$$y' = cosx - sinx$$

$$y' = m_{x=\pi} = -1 - 0 = -1$$

معادلة المماس

$$y + 1 = -1(x - \pi)$$

$$y = -x + \pi - 1$$

***مثال :**
اذا كان $y = e^x - ax$ حيث a عدد حقيقي ، اوجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y

الحل :
عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y تكون $x=0$ ومنها $y=1$

$f'(0)$ ميل المماس

$$f'(x) = e^x - a$$

$$f'(0) = 1 - a = m$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = (1 + a)x \rightarrow y = ax + x + 1$$

*مثال :

اذا كان $y = ke^x$ حيث $k > 0$ وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة P ،

1 اوجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x

2 اذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحورxعند النقطة (100,0) فاوجد قيمة k

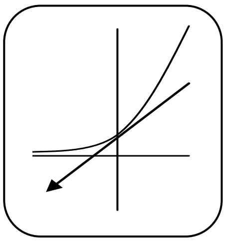
الحل :

ميل المماس = y' عند نقطة التماس

$$y' = ke^x$$

يقطع المحورy عند النقطة p

اي $p(0\,,k)$



$$y'|_{x=0} = ke^0 = k$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - k = k(x - 0) \to y = kx + k$$

1 يتقاطع مع المحور x عندما y=0 ومنها 0 =k(x+1) ومنها x=-1

2 معادلة العمودي

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - k = \frac{-1}{k}(x - 0) \to y = \frac{-1}{k}x + k$$

العمودي يقطع المحور x عند النقطة (100,0)

$$y = \frac{-1}{k}x + k \to 0 = \frac{-100}{k} + k$$

$$k = \frac{100}{k} \to k^2 = 100 \to k = \mp 10$$

-10 مرفوضة لان k>0 ومنها k = 10

*مثال :

اذا كان $f(x) = 2e^x + 3x + 5x^3$ ، اثبت عدم وجود مماس ميله يساوي 2

الحل :

$f'(x)$ ميل المماس

$$f'(x) = 15x^2 + 2e^x + 3$$

بما ان

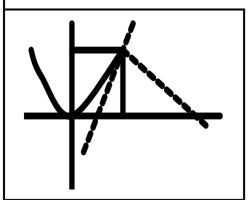
$$e^x > 0 \quad , \quad 15x^2 > 0$$

فان

$$15x^2 + 2e^x + 3 \neq 2$$

مثال :

اوجد مساحة المثلث الذي يتكون من المماس والعمودي لمنحنى الاقتران $f(x) = x^2$ عند النقطة (2 ، 4) مع محور السينات.



الحل :

النقطة (2 ، 4) نقطة تماس

$f'(2)$ ميل المماس

$$f'(x) = 2x \to f'(2) = 4$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = 4(x - 2) \to y = 4x - 4$$

عندما y=0 فان x=1

معادلة العمودي على المماس

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 4 = \frac{-1}{4}(x - 2) \to y = \frac{-1}{4}x + \frac{9}{2}$$

عندما y=0 فان x=18

طول القاعدة =18-1 =17 , الارتفاع =4

$$A_\Delta = \frac{1}{2} * 17 * 4 = 34$$

مثال :

جد معادلة المماس لمنحنى $y = \frac{1}{x}$ ، $x > 0$:

والذي يمر بالنقطة (1 ، 0)

الحل :

(0 , 1) ليست نقطة تماس ..

نفرض نقطة تماس (x , y)

$$y' = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\frac{-1}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 0}$$

$$-x = x - x^2 \rightarrow x^2 - 2x = 0$$

ومنها x = 2 او x = 0 مرفوضة why

عند x = 2 فان $y = \frac{1}{2}$

اصبحت نقطة التماس هي $(2 , \frac{1}{2})$

$$m = y' = \frac{-1}{x^2}\Big|_{x=2} = \frac{-1}{4}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{-1}{4}(x - 0)$$

$$\rightarrow y = \frac{-1}{4}x + 1$$

مثال :

إذا كان المماس لمنحنى $f(x) = ax^2 - 9$ يوازي المستقيم $h(x) = x + 3$ عندما x=1 فان قيمة a تساوي

√A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{-1}{2}$ C) 1 D) 2

الحل :

المماسين متوازين $f'(1) = h'(1)$

$$2ax|_{x=1} = 1$$

$$2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

مثال :

جد نقاط تعامد مماسي منحنيي الاقترانيين

$f(x)=x^2$, $h(x)=x^2+2x+1$

الحل :

المماسين متعامدين $f'(x) \times h'(x) = -1$

$$2x(2x + 2) = -1$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow (2x + 1)^2 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

فنقطة تعامد مماسي منحنيي الاقترانيين f ,h

$$(\frac{-1}{2} , \frac{1}{4})$$

مثال :

اوجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران

$f(x) = 2x + sinx$ عند النقطة (π , 2π)

الحل :

عند النقطة (π , 2π)

$$m = f'(\pi) = 2 + cosx|_{x=\pi} = 1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2\pi = 1(x - \pi) \rightarrow y = x + \pi$$

مثال :

إذا كان المماس لمنحنى الاقتران f(x) مماساً أفقياً عند النقطة (3 ، 1) اوجد معادلة المماس والعمودي على المماس عند تلك النقطة

الحل :

معادلة المماس y=3 why

معادلة العمودي x=1 why

مثال :

اوجد قيمة x التي يكون عندها المماس افقي لمنحنى الاقتران $f(x) = e^x - 2x$

الحل :

المماس افقي $f'(x) = 0$

$f'(x) == e^x - 2 = 0 \rightarrow e^x = 2$

$lne^x = ln2 \rightarrow x = ln2$

مثال :

اذا كان المستقيم y=3x-1 مماساً لمنحنى الاقتران f(x) عند النقطة (2 ، 5) اوجد $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-5}{h}$

الحل :

$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-5}{h} = f'(2) = m = y' = 3$

مثال :

اوجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران $f(x) = cosx + sinx$ عند النقطة $x = \pi$

الحل :

$f(\pi) = cos\pi + sin\pi = -1$

$f'(x) = -sinx + cosx$

ميل المماس $m = f'(\pi) = -1$

معادلة المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 1 = -1(x - \pi) \rightarrow y = -x + \pi - 1$

مثال :

اذا كان $y = secx$ فبين ان لمنحنى f(x) عند x=0 مماساً يوازي محور السينات

الحل : المطلوب ميل مماس y يساوي ميل محور x ؟؟

ميل مماس محور x يساوي 0

ميل مماس $y = secx$ هو

$y' = secx \; tanx|_{x=0} = \frac{0}{1} = 0$

اذن ميل مماس y عند x=0 يساوي محور x عند تلك النقطة

ص(2010)

جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى $f(x) = x^2 + |x - 4|$ عندما x=3.

الحل :

ش2013) اوجد مساحة المثلث القائم الزاوية الذي يتكون من المماس المرسوم لمنحنى العلاقة $y=\sqrt{x} : x>0$ عند النقطة (4 , 2) ومحور السينات والمستقيم x=4 .

الحل :

مساحة Δ = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع

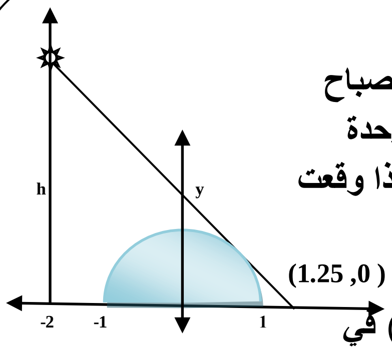
طول القاعدة = 4 – -4 = 8

الارتفاع y=2

مساحة Δ = $\frac{1}{2}$ × 8 × 2

مثال:

الشكل المجاور مصباح على ارتفاع h وحدة من المحور x ، اذا وقعت النقطة $(0\ ,\frac{5}{4})$ في نهاية الشعاع الصادر من المصباح ، الذي يمس منحنى العلاقة : $x^2+y^2=1$ فجد ارتفاع المصباح h



الحل :

تطبيقات فيزيـــــــــائية

ثلاث انواع من الاسئلة
- الحركة في مسار مستقيم
- الحركة التوافقية البسيطة
- المقذوفات

- السرعة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = s'(t) = v(t)$$

وفي هذه الحالة تسمى السرعة اللحظية

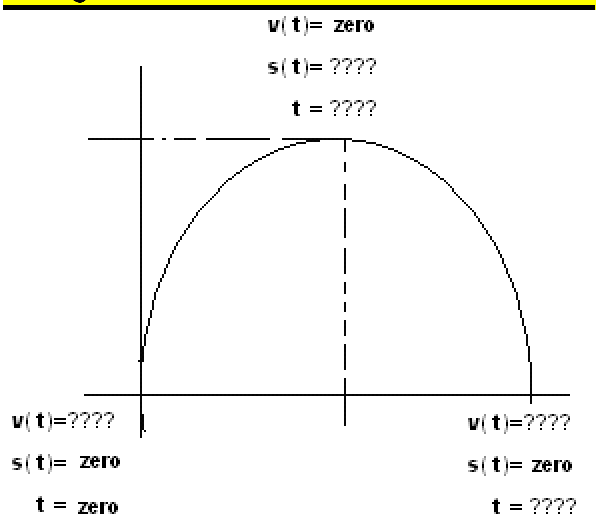
$$v(t) = s'(t)$$

واذا كان s(t) قابلاً للاشتقاق في t

فان $v'(t) = s''(t) = a(t)$

يسمى تسارع الجسيم في اللحظة t

المقـــــــــــــــــذوفات



الزمنt, المسافة s, السرعة v

ملاحظـــــــــــــــــــــــات

1) اذا كان مقذوف من اعلى بناية نضيف للعلاقة ارتفاع البناية اذا كانت غير مضافة
2) اذا كان المقذوف من عمق نطرح مقدار العمق اذا كانت غير مطروحة
3) زمن الصعود = $\frac{1}{2}$ (الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يعود الى سطح الارض)
4) اقصى ارتفاع = $s(t)|_{v=0}$
5) زمن الصعود= زمن الهبوط
6) السرعة نازل سالب صاعد موجب
7) هناك فرق بين السرعة اللحظية والسرعة المتوسطة, والسرعة المتجهه كما هو وارد في بداية التعريف وكذلك التسارع
8) عندما يكون s(t) سالب يكون موقعها يسار

مثال:

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق المعادلة

$$S(t) = t^3 - 3t^2 + 4$$

: s المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني

اوجد

1. سرعة و تسارع الجسيم عندما t=3
2. الفترة الزمنية التي تكون فيها سرعة الجسيم سالبة
3. جد قيمة t عندما يكون الجسم في حالة سكون لحظي
4. في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما t = 5
5. متى يعود الجسم الى موقعه الاصلي

الحل :

$$v(t) = 3t^2 - 6t$$

$$a(t) = 6t - 6$$

1. $v(t) = v(3) = 3(9) - 6(3) = 9m/s$

$$a(3) = 6(3) - 6 = 12m/s^2$$

2. $v(t) = 0$

$$3t^2 - 6t = 0 \to t(3t - 6) = 0 \to t = 0 , t = 2$$

للاستفسار ت (0788241724)

++++++----------------

+++++++++

0 2

السرعة سالبة بالفترة $(0, 2)$

3. $t = 0 \quad , \quad t = 2$

4. $v(5) = 3(5)^2 - 6(5)$

$= 75 - 30 = 45 m/s$

يتحرك باتجاه اليمين

5. $s(t) = s(0) \quad \rightarrow s(0) = 4$

$t^3 - 3t^2 = 0 \quad \rightarrow t^2\,(t-3) = 0$

$t = 0 \quad , \quad t = 3$

حتى يعود الجسم الى موقعه الاصلي عندما

مثال:

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان بعده

عن نقطة الاصل بالامتار بعد ن ثانية يساوي

$$s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + 5$$

s : المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني

اوجد بعد الجسيم عن نقطة الاصل وسرعته

عندما ينعدم تسارعه .

الحل :

$v(t) = s'(t) = t^2 - 4t$

$a(t) = v'(t) = 2t - 4$

عندما ينعدم التسارع

$a(t) = 0 \rightarrow 2t - 4 = 0 \rightarrow t = 2$

$s(2) = \frac{1}{3}(2)^3 - 2(2)^2 + 3(2) + 5$

$s(2) = \frac{8}{3} - 8 + 6 + 5 = \frac{17}{3} \ m$

مثال:

يتحرك جسيم على خط مسقيم وفق المعادلة

$S(t) = 1 - \cos t \,, t \in [0, 2\pi]$

المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني

اوجد

1. سرعة و تسارع الجسيم بعد t
2. الفترة الزمنية التي تكون فيها سرعة الجسيم سالبة
3. جد قيمة t عندما يكون الجسم في حالة سكون لحظي لاول مرة
4. في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = \frac{\pi}{3}$
5. متى يعود الجسم الى موقعه الاصلي اول مرة بعد الحركة
6. جد موقع الجسم عندما يصل الى اقصى سرعة.

الحل :

1. $v(t) = \sin t, t \in (0, 2\pi)$

$a(t) = \cos t \,, t \in (0, 2\pi)$

2. $v(t) = 0 \rightarrow \sin t = 0$

$\rightarrow t = 0, \pi, 2\pi$

++++++++++++--------------------

0 π 2π

السرعة v(t) سالبة بالفترة $(\pi, 2\pi)$

3. يكون في حالة سكون لحظي عندما يتغير اشارة السرعة $t=\pi$

4. $v(\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = +$

يتحرك باتجاه اليمين

5. $s(t) = s(0) \rightarrow 1 - \cos t = 0$

$\rightarrow \cos t = 1 \rightarrow t = 0, 2\pi$

$t = 0$ مرفوضة . لماذا ؟

6.

يصل الى اقصى سرعة عندما يكون التسارع صفر

$a(t) = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

مثال:

يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للمعادلة

$s(t) = e^t - 4t : t \ge 0$

المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني

اوجد الموقع الابتدائي للجسيم ثم تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها السرعة

الحل :

$v(t) = e^t - 4$

$a(t) = e^t$

الموقع الابتدائي

$s(0) = e^0 - 4(0) = 1$

عندما ينعدم السرعة v(t)=0 ومنها

$e^t - 4 = 0 \rightarrow e^t = 4 \rightarrow t = \ln 4$

التسارع عندما ينعدم السرعة

$a(\ln 4) = e^{\ln 4} = 4m/s^2$

ص2008)

يتحرك جسيم على خط مسقيم وفق لمعادلة

$S(t) = 2t^3 - 3t^2 + 12$

s المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني اوجد :

1. **تسارع الجسيم عندما تنعدم السرعة**
2. **الفترة الزمنية التي تكون فيها سرعة الجسيم سالبة**

الحل : $6m/s^2$, $(0, 1)$?????

ش2013)

يتحرك جسيم على خط الاعداد وفق المعادلة

$s(t) = t^2 - 7t - 8 : t \ge 0$

s المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني

1. **جد سرعة الجسيم وتسارعه عندما $t = 4$.**
2. **جد قيم tالتي يكون عندها الجسيم في حالة سكون لحظي**
3. **في أي اتجاه يتحرك الجسيم عندما $t = 2$**
4. **متى يعود الجسيم الى موقعه الابتدائي**

مثال

يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للمعادلة

$S(t) = 2t^3 - 17t^2 + 44t + 10$

s : المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني

جد السرعة والتسارع عندما s(t) =46m

الحل :

عندما s(t) =46m

$$2t^3 - 17t^2 + 44t + 10 = 46$$

$$2t^3 - 17t^2 + 44t - 36 = 0$$

تحلل بالقسمة التركيبية

$$(t-2)(2t^2 - 13t + 18) = 0$$

$$(t-2)(2t-9)(t-2) = 0 \rightarrow$$

$$t = 4\frac{1}{2} \quad , \quad 2$$

السرعة

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 34t + 44$$

$$v(2) = 24 - 68 + 44$$

$$v(4.5) = 6(4.5)^2 - 34(4.5) + 44$$

التسارع

$$a(t) = 12t - 34$$

$$a(2) = 24 - 34$$

$$a(4.5) = 12(4.5) - 34$$

مثال:

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن

المسافة $s(t) = 6t^2 - t^3$

فما المسافة التي يقطعها الجسيم حتى يصبح تسارعه صفر ؟

√A) 16   B)24   C)12   D)32

الحل :

السرعة

$$v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2$$

التسارع

$$a(t) = v'(t) = 12 - 6t$$

$$12 - 6t = 0 \rightarrow t = 2$$

$$s(t) = 6t^2 - t^3$$

$$s(2) = 24 - 8 = 16$$

ص(2014)

يتحرك جسيم حسب العلاقة

$$s(t) = \frac{1}{4}(t+2)^4 - 6t^2$$

v: السرعة ، س المسافة ، يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للمعادلة اوجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته 89 م / ث

الحل :

$$v(t) = s'(t) = (t+2)^3 - 12t$$

$$v(t) = 89 \rightarrow (t+2)^3 - 12t = 89$$

$$(t+2)^3 - 12t - 89 = 0$$

$$t^3 - 6t^2 - 81 = 0$$

بالقسمة التركيبية

$$(t-3)(t^2 + 9t + 27) = 0$$

ومنها t=3 فقط لان الجزء الاخر لا يحلل ؟؟؟؟

$$a(t) = v'(t) = 3(t+2)^2 - 12$$

$$a(3) = 3(3+2)^2 - 12 = 63m/s^2$$

ص2016)

يتحرك جسيم حسب العلاقة

$S(t) = 2sin^2\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}t \;:\; t\in[0,\frac{\pi}{2}]$

حيث sالمسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته $\sqrt{3}$m/t

الحل :

$V(t) = 2sin\left(\frac{1}{2}t\right)cos\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{3}{2}$

$V(t) = sint + \frac{3}{2} = \sqrt{3}$

$sint = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow sint = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{3}$

$a(t) = v'(t) = cost$

$a\left(\frac{\pi}{3}\right) = cost\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\ m/s^2$

مثال:

يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للمعادلة

$S(t) = t^3 - 3t^2 + 3t + 3$

: s المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني

اثبت ان الجسيم يتوقف مرة واحدة دون ان يغير من اتجاه حركته

الحل :

يتوقف الجسم عندما v(t)=0

$v(t) = 3t^2 - 6t + 3 = 0$

$(t-1)^2 = 0 \rightarrow t = 1$

++++++++++++++++++++++++++++

1

بما ان السرعة حافظة على اشارتها

اذن الجسم لا يغير اتجاه حركته

مثال

يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للمعادلة

$S(t) = t^3 - 7t^2 + 9t + 1$

: s المسافة بالامتار ، t الزمن بالثواني

اوجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته 1m/s

الحل :

السرعة

$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 14t + 9$

عندما تكون سرعته 1m/s

$3t^2 - 7t + 9 = 1$

$\rightarrow 3t^2 - 14t + 8 = 0$

$t = ?????$

التسارع

$a(t) = v'(t) = 6t - 14$

$a(???) = ?????$

مثال

قذف جسم رأسياً الى الأعلى من سطح الأرض حسب العلاقة

$S(t) = 4.9t^2 - 24.5t \;:\; t \geq 0$ ،جد

1. الزمن اللازم بالثواني حتى يعود الجسم الى سطح الارض
2. السرعة التي قذف بها
3. اللحظة التي يكون عندها سرعة الجسم14.7م/ ث
4. تسارع الجسم في كل لحظة.

الحل :

1. يعود الجسم على سطح الارض s(t)=0

t(4.9t-24.5)=0 ومنها t=0 ,t=5 مرفوضةχ

2. السرعة التي قذف بها v(0) =????

v(t)=9.8t-24.5

v(0)=9.8(0)-24.5=24.5

3. $t_{|v(t)=14.7}$=????

9.8t-24.5=14.7→t=4

4. $a(t)=v(t)=9.8m/s^2$

مثال :

يتحرك جسيم حسب العلاقة

$$S(t) = sin5t + cos5t$$

اثبت ان $a(t) + 25s(t) = 0$

الحل:

v(t)= S(t)=5cos 5t -5sin 5t

a(t)= v(t)=-25sin 5t -25 cos 5t

a(t)= -25(sin 5t + cos 5t)

a(t) +25s(t)=0

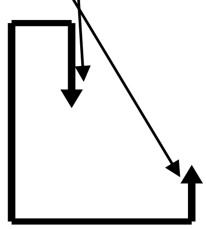
مثال:

. قذف جسم رأسياً الى الأعلى من سطح الأرض حسب العلاقة $s(t) = 36t - 8t^2$ ، ما الزمن اللازم بالثواني الذي يحتاجه الجسم وهو صاعد حتى تبلغ سرعته ثلث السرعة التي قذف بها ؟

مثال

اسقط جسم من ارتفاع (100) م عن سطح الارض : ف المسافة بالامتار ، ن الزمن بالثواني حسب العلاقة $s_1(t) = 5t^2$ وفي نفس الوقت اطلق جسم من سطح الارض للاعلى حيث المسافة التي يقطعها الجسم هي $s_2(t) = 50t - 5t^2$ جد سرعة كل من الجسمين عندما يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الارض

الحل :



$$s_1(t) + s_2(t) = 100$$

$$5t^2 + 50t - 5t^2 = 100$$

$$50t = 100 \rightarrow t = 2$$

$$v_1(t) = 10t \rightarrow \quad n/s$$

$$v_2(t) = 50 - 10t$$

$$\rightarrow v_2(t) = 50 - 20 = 30m/s$$

مثال

قذفت كرة رأسياً الى أعلى من قمة برج ارتفاعه 160 قدماً اذا كانت المسافة المقطوعة تتعين حسب العلاقة

$$S(t) = -16t^2 + 48t + 160 : t \geq 0$$

: ف المسافة بالاقدام ، ن الزمن بالثواني اوجد

1. اقصى ارتفاع تصل اليه الكرة
2. سرعة الكرة لحظة اصطدامها بالارض

الحل :

$$v(t) = -32t + 48$$

$$1.\ s(t)|_{v(t)=0} \ \dots v(t) = 0 \rightarrow t = 1.5$$

$$S(1.5) = -16(1.5)^2 + 48(1.5) + 160$$

$$= 196m$$

$$2.\ v(t)|_{s(t)=0} \ \dots s(t) = 0$$

$$\rightarrow t^2 - 3t - 10 = 0$$

$$(t-5)(t+2) = 0 \rightarrow t = 5$$

$$v(5) = -32(5) + 48 = -112m/s$$

تطبيقـات الحركـة التوافقيـة البسيطـة

يتحرك جسم معلق بزنبرك ، شد 5 وحدات اسفل الاتزان s = 0 ثم ترك عند الزمن t = 0 ليتحرك الى الاعلى والى الاسفل ، ويمثل الاقتران $s(t) = 5cost$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ، s الموقع بالسنتيمترات . اوجد

1. السرعة المتجه وتسارعه عند أي لحظة
2. صف حركة الجسم

الحل :

.1

السرعة المتجهه

$$v(t) = s'(t) = -5sint$$

التسارع

$$a(t) = v'(t) = -5cost$$

.2

- $-5 \leq s(t) \leq 5$ القيمة السالبة فوق موقع الاتزان
- السرعة المتجهه يكون اكبر ما يمكن في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب عندما يمر في موقع الاتزان وهنا يكون $s(t) = 0 \rightarrow cost = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$$v(\frac{\pi}{2}) = -5sin\frac{\pi}{2} = -5$$

$$v(\frac{3\pi}{2}) = -5sin\frac{3\pi}{2} = 5$$

- التسارع معكوس موقع قيمة موقع الجسم v(t)=0 , s(t) يكون اكبر تسارع ...السبب.. محصلة القوى تسحب الجسم الى الاسفل اذا كان اعلى موقع الاتزان و.. محصلة القوى تسحب الجسم الى الاعلى اذا كان اسفل موقع الاتزان
- التسارع يكون صفر عند موقع الاتزان ...السبب ..لان قوة الجاذبية وقوة الزنبرك تلغي بعض

مثال :

يتحرك جسم معلق بزنبرك ، للاعلى وللاسفل ويمثل الاقتران $s(t) = 7sint$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ،و s الموقع بالسنتيمترات . اوجد

1. السرعة المتجه وتسارعه عند أي لحظة
2. صف حركة الجسم

قواعد الاشتقاق

مشتقة الضرب

قاعدة

إذا كان كل من الاقترانيين $g(x)$، $f(x)$ قابلا للاشتقاق عند x، وكان $A(x) = f(x) \times g(x)$ ، فان

$$A'(x) = f(x) \times g'(x) + g(x) \times f'(x)$$

اي مشتقة حاصل ضرب اقترانين

= الاول × مشتقة الثاني+ الثاني × مشتقة الاول

الاثبات :

$$A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

طرح واضافة $f(x)g(x+h)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h}$$

نجزء

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

نخرج عامل مشترك

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)(f(x+h) - f(x))}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h}$$

نختصر ونعوض

$$A'(x) = f(x) \times g'(x) + g(x) \times f'(x)$$

بشكل عام

$$(fgh)'(x) = (f'gh)(x) + (fg'h)(x) + (fgh')(x)$$

مثال :

جد $f'(x)$ للاقترانات التالية

1. $f(x) = (1-2x)(3x^2+6)$

2. $f(x) = x(x^2+2)(1-2x^2)$

الحل :

1. $f'(x) = (1-2x)(6x) + (3x^2+6)(-$
$= 6x - 12x^2 - 6x^2 2 - 12$
$= -12x^2 + 6x - 12$

2. $f(x) = (x^3+2x)(1-2x^2)$
$f'(x) = (x^3+2x)(-4x) + (1 - 2x^2)(3x^2+2)$
$= -4x^4 - 8x^2 + 3x^2 - 6x^4 + 2 - 4x^2$
$= -10x^4 - 9x^2 + 2$

مثال :

اذا كان $L(x) * h(x) = a$: a ثابت وكان

$h'(2) = 3, h(2) = -2\sqrt{a}$ جد

$L'(2)$

الحل :

$$\frac{d}{dx}(L(x) * h(x)) = \frac{d}{dx}(a)$$

$$L(x) * h'(x) + h(x) * L'(x) = 0$$

$$L(2) * h'(2) + h(2) * L'(2) = 0$$

$$L'(2) = \frac{-\frac{a}{-2\sqrt{a}} * 3}{-2\sqrt{a}}$$

$$L'(2) = \frac{3a}{2\sqrt{a}} * \frac{1}{-2\sqrt{a}}$$

$$L'(2) = \frac{-3}{4}$$

للاستفسار ت (0788241724)

مثال :

جد $f'(1)$ للاقتران التالي

$$f(x) = |x-1|(x^2+2x+1)$$

الحل :

$(1-x)(x^2+2x+1)$ $\quad$ $(x-1)(x^2+2x+1)$

---------------- ++++++++++

1

$f(x)$ متصل عند $x=1$ لان

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 0$$

$$f'_+(1) = (x-1)(2x+2) + (x^2+2x+1)(1)|_{x=1}$$

$$= 0 \quad + \quad 4 \quad = 4$$

$$f'_-(1) = (1-x)(2x+2) + (x^2+2x+1)(-1)|_{x=1}$$

$$= 0 \quad + \quad -4$$

مثال :

اذا كان $f(1) = -3$, $f'(1) = 2$,
جد

$$(\sqrt{x}\, f(x))'(1)$$

الحل :

$$\left(\sqrt{x}\, f(x)\right)'(1)$$

$$= \sqrt{x}\, f'(x) + \frac{f(x)}{2\sqrt{x}}|_{x=1}$$

$$= \sqrt{1}\, f'(1) + \frac{f(1)}{2\sqrt{1}}$$

$$= 2 + \frac{-3}{\ } = \frac{1}{\ }$$

مثال : واجب

اذا كان $L(2)=-1$, $L'(2) = 4$, $h'(2)=1$, $h(2)=-5$ جد $f'(2)$ للاقترانات

1. $f(x) = L(x)\, h(x)$
2. $f(x) = h(x)\sqrt{x^2+1}$

الحل :

1

$$f'(x) = L(x) * h'(x) + h(x) * L'(x)$$

$$f'(2) = L(2) * h'(2) + h(2) * L'(2)$$

$$= (-1) * (1) + (-5) * (4)$$

$$= -21$$

2

$$f'(x) = h(x)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + h'(x)\sqrt{x^2+1}$$

$$f'(2) = h(2)\frac{2}{\sqrt{5}} + h'(2)\sqrt{5}$$

$$= \frac{-10}{\sqrt{5}} + \sqrt{5}$$

$$= \frac{-5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$$

مثال :

اذا كان $f(x) = e^{x^2}\ln x$ اوجد $f'(x)$

الحل :

$$f'(x) = \frac{e^{x^2}}{x} + 2xe^{x^2}\ln x$$

مثال :

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$f(x) = (x-1)e^x + 3lnx + 2$

عند النقطة $(1 , 2)$

الحل :

النقطة $(1 ، 2)$ نقطة تماس

$f'(1)$ ميل المماس

$$f'(x) = (x-1)e^x + e^x + \frac{3}{x}$$

$$f'(1) = e + 3$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = (e+3)(x-1)$$

$$\rightarrow y = (e+3)(x-1) + 2$$

$$\rightarrow y = (e+3)x - e - 1$$

مثال :

اذا كان $f(x) = ln(x^2+3)(x^3+5x)^{18}$

اوجد $f'(x)$

الحل :

$$f(x) = ln(x^2+3) + 18ln(x^3+5x)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+3} + \frac{18(3x^2+5)}{x^3+5x}$$

$$= \frac{2x}{x^2+3} + \frac{54x^2+90}{x^3+5x}$$

ش(2007)

إذا كان

$(1+x^2)f(x) + 12 = 4x^3$ فان $f'(-1) =$

$\sqrt{A}) -2$		B)14		C) −6		D)0

مثال :

إذا كان $f(x)=(x-a)L(x)$ حيث $L(x)$ اقتران متصل عند $x=a$ فبين ان $f'(a)=L(a)$ حيث a ثابت

ش2008)

إذا كان $f(x)$ قابل للاشتقاق لجميع قيم x

وكان $L(x) = x^2 f(x)$ جد $L'(x)$

ص2013)

اذا كان $f(x) = xf(x) + 1$ فان $f'(2)$

√A) 1 B) -1 C) 0 D) 2

ص2015)

إذا كان $f(x) = x\sqrt{x+1}$

جد $f'(3)$

ش2015)

ليكن $x \in [0, 2\pi]$, $f(x) = x|\sin x|$

اوجد $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

الحل : $f(x)$ متصل عند $x = \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = x\sin x$$
$$f'(x) = x\cos x + \sin x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$$

ص2015)

إذا كان $L(x)$, $h(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق ،

وكان $L(x)*h^2(x)=a$ حيث a ثابت , $a\neq 0$,

وكان $h'(2) = 3\sqrt{a}$, $h(2) = -2\sqrt{a}$

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $L(x)$ عند $x=2$.

الحل :

$$L(x) = \frac{a}{h^2(x)} \rightarrow L(2) = \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}$$

$$L'(x) = \frac{-2ah(x)h'(x)}{h^4(x)}$$

$$L'(2) = \frac{-2ah(2)h'(2)}{h^4(2)}$$

$$= \frac{12a^2}{16a^2} = \frac{3}{4}$$

معادلة المماس

$$y - \frac{1}{4} = \frac{4}{3}(x-2)$$

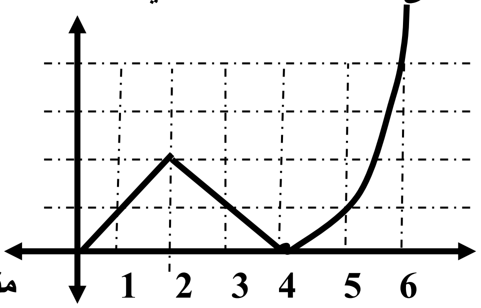
ش2017)

إذا كان $f'(2) = 2$, $f(2) = \frac{1}{2}$ *اثبت*

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x-4f(x)}{(x-2)f(x)} = -6$$

ش2017)

بالاعتماد على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى



الاقتران ق المتصل على الفترة [6 ، 0]، جد

$$\frac{d}{dx} = \sqrt{3x + f(x)}|_{x=3}$$

$$= \frac{3+f'(x)}{2\sqrt{3x+f(x)}}|_{x=3} = \frac{3-1}{2\sqrt{9+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

ش2017)

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

المرسوم من النقطة $f(x) = (x+3)^2$

(0 ، 0)

الحل :

ص 2018)

اوجـــــــــــــــــد $f'(3)$ للاقتران

$x \in (-1, 4] : f(x) = |(x-3)(x+1)|$

الحل :

$-x^2+2x+3$ x^2-2x-3

--------------- +++++ +++

-1   3   4

$$f'(x) = \begin{cases} -2x+2 & , -1 < x < 3 \\ 2x-2 & , 3 < x < 4 \\ D.N.E & , x = 4 \\ D.N.E & , x = 3 \end{cases}$$

$f(x)$ متصل عند $x = 3$

$f_+'(x) = 4$, $f_-'(x) = -4$

$f'(3)$ غير قابل للاشتقاق لان

$f_+'(3) \neq f_-'(3)$

ش 2019)

اوجـــــــــــــــــد $f'(3)$ للاقتران

$f(x) = x|x-4|$

الحل :

x^2-4x $4x - x^2$

--------------- +++++ +++

4

$f(x)$ متصل عند $x = 4$

$f_+'(x) = 2x - 4|_{x=4} = 4$

, $f_-'(x) = 4 - 2x|_{x=4} = -4$

$f'(4)$ غير قابل للاشتقاق لان

$f_+'(4) \neq f_-'(4)$

مثال :

اوجـــــــــــــــــد $f'(x)$ للاقتران

1. $f(x) = x^2 cscx$

2. $f(x) = xtanx$

3. $f(x) = e^x(tanx - x)$

4. $f(x) = \sqrt[3]{x}\,(\sqrt{x} + 3)$

5. $f(x) = (x^3 - x)(x - 1)(x^2 + x + 1)$

*مثال :

اكتب معادلة المماس والعمودي لمنحنى الاقتران $f(x)=e^{x}\cos x + \sin x$ عند $(0 , 1)$

الحل :

النقطة $(0 ، 1)$ نقطة تماس

$f'(0)$ ميل المماس

$$f'(x) = -e^{x}\sin x + e^{x}\cos x + \cos x$$

$$f'(0) = 0 + 1 + 1 = 2$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 2(x - 0) \rightarrow y = 2x + 1$$

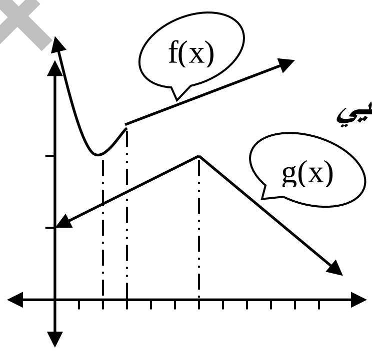
معادلة العمودي

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{-1}{2}(x - 0) \rightarrow y = \frac{-1}{2}x + 1$$

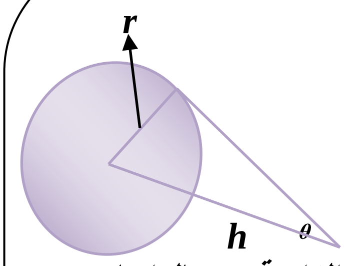
*مثال :

الرسم المجاور يمثل منحنيي الاقترانيين $f(x) , g(x)$ وكان $P(x)=f(x)g(x)$ اوجد $P'(2)$



*مثال :

عندما ترصد الاقمار الصناعية الارض ، فانه يمكنها مسح جزء فقط من سطح الارض وبعض الاقمار الصناعية تحوي مستشعرات لقياس الزاوية θ بالراديان المبينة في الشكل المجاور اذا كان h يمثل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الارض بالكيلومترات ، r يمثل نصف قطر الارض بالكيلومتر ، فاجب عن السؤالين التالين



1. اثبت ان $h=r(\csc - 1)$
2. جد معدل h بالنسبة الى θ عندما $r= 6371km$: $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad

الحل :

*مثال :

اكتب معادلة المماس والعمودي لمنحنى الاقتران $f(x) = (2x+1)^5(x^3-x+1)^4$ عند $(1, f(1))$

الحل :

قاعـــــــــــدة مـــــــــشتقة القـــــــــسمة

اذا كان L ، h اقترانين قابلين للاشتقاق عند x وكان $L(x) \neq 0$، وكان

$$f(x) = \frac{h(x)}{L(x)} \quad , L(x) \neq 0$$

f(x) قابل للاشتقاق عند x فان:

$$f'(x) = \frac{L(x)h'(x) - h(x)L'(x)}{L^2(x)} \quad , L(x) \neq 0$$

مشتقة القسمة = (المقام × مشتقة البسط − البسط × مشتقة المقام) / $(\text{المقام})^2$

نتيجـــــــــــــــة

اذا كان h اقتران قابل للاشتقاق عند x , a ثابت وكان

$$f(x) = \frac{a}{h(x)} \quad , h(x) \neq 0$$

f(x) قابل للاشتقاق عند x فان:

$$f'(x) = \frac{-a * h'(x)}{h^2(x)} \quad , h(x) \neq 0$$

مشتقة ثابت على مقام = (− الثابت × مشتقة المقام) / $(\text{المقام})^2$

مثال :

اوجـــــــــــــــد $f'(x)$ للاقتران

1. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x}\ ,x\neq 0$

2. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\ ,x\neq 0$

الحل:

1.
$$f'(x)=\frac{(2x)(2x)-(x^2+1)(2)}{(2x)^2}\ ,x\neq 0$$
$$=\frac{4x^2-2x^2-2}{(2x)^2}$$
$$=\frac{2x^2-2}{4x^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}$$

2.
$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2)^2}\ ,x\neq 0$$
$$=\frac{-2}{x^3}$$

مثال :

اوجـــــــــــــــد $f'(x)$ للاقتران

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x} & ,\ x\le 1\\ \sqrt{x^2+1} & ,\ x>1\end{cases}$$

الحل:

$f(x)$ متصل على $R-\{0,1\}$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{x^2} & ,\ x<1\\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} & ,\ x>1\\ D.N.E & ,\ x=1, x=0\end{cases}$$

(ص2009)

اذا كان $f(x)=\dfrac{\pi}{\sec x}$ فان $f'(\frac{\pi}{6})$

A) $\dfrac{\pi}{2}$　　B) $\dfrac{-\sqrt{3}\pi}{2}$

C) $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}$　　√ D) $\dfrac{-\pi}{2}$

(ص2011)

اذا كان $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x}$ فان $f'(0)$

A) 0　　B) 1

√ C) -1　　D) $D.N.E$

(ش 2019)

اذا كان $f(x), h(x)$ قابلين للاشتقاق وكان

وكان $f(x)=h(x)-\dfrac{1}{h(x)}$

$h'(2)=-1\ , h(2)=\dfrac{1}{2}$ فان $f'(0)$

A) 3　　B) -3

C) 5　　√ D) -5

مثال:

اذا كان $h'(-2)=2\ , h(-2)=-1$ جد $f'(-2)$ للاقتران $f(x)$

1. $f(x)=\dfrac{x^2-x}{h^2(x)}\ ,h(x)\neq 0$

2. $f(x)=\dfrac{h(x)}{x}\ ,x\neq 0$

الحل: واجب

مثال:

اذا كان $h'(2)=1$, $L(2)=-1$, $L'(2)=4$

$h(2)=-5$ جد $f'(2)$ للاقتران $f(x)$

❶ $f(x)=\dfrac{L(x)}{h(x)}$, $h(x)\neq 0$

❷ $f(x)=\dfrac{L(x)}{h(x)+3}$, $h(x)\neq -3$

الحل:

❶

$$f'(x)=\frac{h(x)\times L'(x)-L(x)\times h'(x)}{(h(x))^2}$$

$$f'(2)=\frac{h(2)\times L'(2)-L(2)\times h'(2)}{(h(2))^2}$$

$$=\frac{(-5)\,(4)-\ (-1)\,(1)}{25}=\frac{-19}{25}$$

❷

$$f'(x)=\frac{(h(x)+3)\times L'(x)-L(x)\times h'(x)}{(h(x))^2}$$

$$f'(x)=\frac{(h(2)+3)\times L'(2)-L(2)\times h'(2)}{(h(2))^2}$$

$$=\frac{(-2)\,(4)-\ (-1)\,(1)}{4}=\frac{-7}{4}$$

*مثال:

اذا كان $f(x)=\dfrac{sinx}{e^x}$ جد $f'(x)$

الحل: واجب

مثال: واجب

اذا كان $h(x)$, $g(x)$ قابلين للاشتقاق

عند $x=-2$ وكان , $h'(-2)=5$, $h(-2)=-3$

$g'(-2)=2$,$g(-2)=-1$ جد

❶ $(\mathbf{hg})(-2)$

❷ $\left(\dfrac{h}{g}\right)'(-2)$

❸ $(5\mathbf{h}-3\mathbf{hg})(-2)$

الحل:

مثال: واجب

اذا كان العلاقة $\frac{1}{f}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ ربط بين البعد البؤري (f) لعدسة محدبة . x ، y تمثلان بعد جسم موضوع امام العدسة ، وبعد الصورة المتكونة له عن مركز العدسة على الترتيب .اذا كانت $f = 2$ جد :

صيغة عامة لايجاد معدل تغير y بالنسبة الى x

معدل تغير y بالنسبة الى x عندما تكون $x = 12$

الحل:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\rightarrow\frac{1}{y}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{y}=\frac{2-x}{2x}\rightarrow y=\frac{2x}{2-x}$$

$$y'=\frac{(2-x)(2)-(2x)(-1)}{(2-x)^2}$$

$$y'=\frac{-4}{(2-x)^2}$$

$$y'|_{x=12}=\frac{-4}{(2-12)^2}=\frac{-4}{100}=\frac{-1}{25}$$

واجب حل المسألة في بداية درس مشتقتا الضرب والقسمة ص28

مناقشة مثال 3 من درس القسمة ص33 سطوع العين

***مثال: واجب**

يعطى عدد سكان مدينة صغيرة بالاقتران

$p(t)=\frac{500t}{2t+}$: t :الزمن بالسنوات عدد P عدد السكان بالالاف

1. جد معدل تغير عدد السكان في المدينة بالنسبة الى الزمن
2. جد معدل تغير عدد السكان في المدينة عندما t=12 فسر معنى الناتج

للاستفسار ت (0788241724)

ش2010) اذا كان $f(x) = \frac{2-\cos\frac{\pi}{2}}{\cos x}$

فان $f'(x)$

A) $\sec x \tan x$ B) zero

C) $-2\sec x \tan x$ √ D) $2\sec x \tan x$

ص2010) اذا كان $f(x) = \frac{x+\sec x}{\sin x}$

اوجد $f'(\frac{\pi}{4})$

A) $\sec x \tan x$ B) zero

C) $-2\sec x \tan x$ √ D) $2\sec x \tan x$

ص2014)اذا كان $f(x) = \frac{l(x)}{xh(x)}$

$f'(2)= L(2)=-3$, $h(2)= L'(2)= 1$,

جد $h'(2)$

الحل:

$$Lnf(x) = lnL(x) - (\ln h(x) + lnx)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{L'(x)}{L(x)} - \frac{h'(x)}{h(x)} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{f'(2)}{f(2)} = \frac{L'(2)}{L(2)} - \frac{h'(2)}{h(2)} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{-3}{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{-3} - \frac{h'(1)}{1} - \frac{1}{2}$$

$h'(2)$ =??????

يمكن حله :

$$h(x) = \frac{l(x)}{xf(x)}$$

مثال:

اذا كان $f(x) = \frac{h(x)}{l(x)(x^2+1)}$

$h(1)= -2$, $h'(1)= L(1)=-1$, $f'(1) = 3$

جد $L'(1)$

الحل:

$$f'(x) = \frac{l(x)(x^2+1)h'(x) - h(x)((L(x)(2x) + (x^2+1)L'(x))}{(L(x)(x^2+1))^2}$$

$$f'(1) = \frac{l(1)(1^2+1)h'(1) - h(1)((L(1)(2*1) + (1^2+1)L'(1)}{(L(1)(1^2+1))^2}$$

$$3 = \frac{(-1)(2)(-1) - (-2)((-1)(2) + (2L'(1))}{((-1)(2))^2}$$

$$3 = \frac{2 - ((-4) + 2L'(1))}{4}$$

$12=2+4+ 2L'(1)$

$$L'(1) = 3$$

يمكن حله :

$$l(x) = \frac{h(x)}{f(x)(x^2+1)}$$

$$l'(x) = \frac{f(x)(x^2+1)h'(x) - h(x)((f(x)(2x) + (x^2+1)f'(x))}{(f(x)(x^2+1))^2}$$

يمكن حله :

$$Lnf(x) = lnh(x) - (\ln L(x) + ln(x^2+1))$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{h'(x)}{h(x)} - \frac{L'(x)}{L(x)} - \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{h'(1)}{h(1)} - \frac{L'(1)}{L(1)} - \frac{2}{2}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{-2}{-2} - \frac{L'(1)}{-1} - \frac{2}{2}$$

$$L'(1) = 3$$

ص2010)

اذا كان $f(x) = \frac{x+\sec x}{\sin x}$ فان $f'(\frac{\pi}{4})$

الحل :

ص2015) اوجـــــــــــــــد $\frac{dy}{dx}$

$$y = \frac{|x^2 - 5x + 4x|}{x(x-1)} \quad , \quad x \in (1, 5]$$

ص2011)

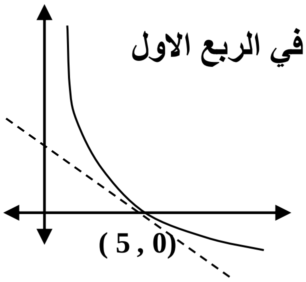
$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x} \quad , \quad x \neq \frac{-3}{a}$

فما قيمة $f'(0)$

$A)0 \qquad B)1 \quad C)-1 \quad \surd\, D)D.N.E$

ش2015)

جد مساحة المثلث الواقع في الربع الاول والمحصور بين محوري x وy ومماس منحنى العلاقة :



$y = \frac{5}{x} - \frac{x}{5} \quad , x \neq 0$ عند النقطة(5 , 0)

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$$

مثال :

جد معادلة المماس للاقترانات التالية عند النقطة المعطاه

❶ $f(x)=\dfrac{1+x}{1+e^{x}}\ ,\quad (0,\dfrac{1}{2})$

❷ $f(x)=e^{x}\cos x+\sin x\ ,(0,\dfrac{1}{2})$

(ص2018)

جد $f'(4)$ للاقتران $f(x)$

$$f(x)=\begin{cases}4 & ,\ 1\le x<4\\ \dfrac{16}{2x-4} & ,\ 4\le x<6\end{cases}$$

الحل: $f(x)$ متصل على $x=4$

$$f'(x)=\begin{cases}zero & ,\ 1\le x<4\\ \dfrac{-32}{(2x-4)^2} & ,\ 4\le x<6\end{cases}$$

$$f'_{+}(x)=-2\ ,f'_{-}(x)=zero$$

$f'(4)\quad D.N.E$

تمرين عام

1

ابحث قابلية ق للاشتقاق عند x = 4

$$f(x)=\begin{cases}4 & , x=4\\ \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} & , x\neq 4\end{cases}$$

2 $f(x)=\frac{1}{3+ax}$, $x\neq\frac{-3}{a}$

وكانت $f'(1)=2$ فما قيمة a

3 $f(x)=\frac{cscx}{1+tanx}$,

اوجد $f'(x)$

4

بدأ شخص بنفخ بالون على شكل كرة ، جد قاعدة عامة لحساب معدل تغير حجم البالون بالنسبة الى نصف قطره ، ثم جد معدل تغير الحجم عندما نق = 10 سم

5

اذا كان $f(x)=ax^2+3x$ حيث a ثابت وكان $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=9$ فما قيمة a

6

اذا كان $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx-6 & , x<2\\ 5x+2b & , x\geq 2\end{cases}$

وكان f (x) قابل للاشتقاق عند x=2 اوجد قيمة a , b

b = -11 , a= 4

7

مخروط من الثلج ارتفاعه ثلاثة أمثال نصف قطر قاعدته r، اخذ المخروط بالذوبان بحيث يحافظ على شكله، جد معدل تغير حجم المخروط v بالنسبة لارتفاعه (h) عندما يكون نصف قطر قاعدته 10m

$$\frac{dv}{dh}=100\pi$$

8

جد f ′(x) للاقترانات التالية

1. $f(x)=(1-4x^2)(7x^3+x)$
2. $(3x^2+6)(1/4-2x)$
3. $f(x)=|x-1|(x^2+2x+1)$

9

اذا كان f(x)= | x-1 | - | x | حدد فيما اذا كان هذا الاقتران قابل للاشتقاق عند النقطة (0 , 1)

10

اذا كان f(x)= | x+1 | - | x-1 | حدد فيما اذا كان هذا الاقتران قابل للاشتقاق عند النقطة x=-1 ام لا ؟

11

اذا كان $f(x)=\begin{cases}ax+2 & , x<3\\ x^2+b & , x\geq 3\end{cases}$

وكان f (x) قابل للاشتقاق عند x=3 اوجد قيمة a , b

12

$$f(x)=\frac{L(x)}{h(x)} \quad , \quad h(x)\neq 0$$

وكان L(x) , h(x) قابلا للاشتقاق عند x= a

وكان f′(x) = 0 اثبت ان

$$f(x)=\frac{L'(x)}{h'(x)} \quad , \quad h(x)\neq 0$$

13

صفيحة معدنية مستطيلة الشكل تتمدد بانتظام بحيث يبقى طولها يساوي ثلاثة امثال عرضها اوجد معل التغير في مساحة هذه الصفيحة بالنسبة الى طولها عندما يكون طولها 15 سم

14

جد معدل تغير مساحة المربع بالنسبة الى محيطه عندما يكون محيطه (24) سم .

15

اذا كان $f(x)*h(x)= 1$ وكان $h'(1)=3$ ، $h(1)=5$ فما قيمة $f'(1)$.

16

اذا كان $f(x) =$

$$\begin{cases} |1-x^2| + 14x & , \quad x < 1 \\ xh^2(x) + 10 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

وكان $h(x)$ قابل للاشتقاق حيث $h'(1)=h(1) =2$ ابحث في قابلية الاشتقاق عند $x=1$.

17

$$f(x) = \frac{L(x)}{h(x)} \quad , \quad h(x) \neq 0$$

وكان $L(x) , h(x)$ قابلا للاشتقاق عند $x= a$

وكان $f'(x) = 0$ اثبت ان

$$f(x) = \frac{L'(x)}{h'(x)} \quad , \quad h(x) \neq 0$$

المـــــــشتقات العليـــــــــا

- اذا كان $y = f(x)$ قابل للاشتقاق

المشتقة الاولى $y' = f'(x)$

- اذا كان $y' = f'(x)$ قابل للاشتقاق

المشتقة الاولى للاقتران السابق $y' = f'(x)$

وهو المشتقة الثانية $y'' = f''(x)$

- اذا كان $y'' = f''(x)$ قابل للاشتقاق

المشتقة الاولى للاقتران السابق $y'' = f''(x)$

وهو المشتقة الاولى $y'' = f''(x)$ وهو

المشتقة الثالثة $f^{(3)}(x) = y^{(3)}$

ويرمز للمشتقة الاولى $f'(x)$

ويرمز للمشتقة الثانية $f''(x)$

ويرمز للمشتقة الثالثة $f^{(3)}(x)$

ويرمز للمشتقة ارابعة $f^{(4)}(x)$

مثال:

اذا كان $f(x)=x^3-4x+5$ جد $f''(1), f'(1)$

الحل :

$f'(x)=3x^2-4 \rightarrow f'(1)=-1$

$f''(x)=6x \rightarrow f''(1)=6$

مثال:

اذا كان $y = e^{ax}$ فجد قيمة a التي تحقق

$y''-5y'+6y=0$

الحل :

$y' = ae^{ax}$

$y'' = a^2e^{ax}$

$y''-5y'+6y=0$

$a^2e^{ax} - 5ae^{ax} + 6e^{ax} = 0$

$e^{ax}(a^2 - 5a + 6) = 0$

$e^{ax}(a-3)(a-2) = 0 \rightarrow a = 2, 3$

مثال:

اذا كان $y=ae^{bx}$, $a,b\in R$ وكان $y'' = y$ فما قيمة b

الحل : ج: $b= \pm 1$, $a\in R-\{0\}$

مثال:

جد اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة

حيث $f'(-1)=0$, $f''(-1)=3$, $f(-1)=-2$,

$f^{(3)}(-1)=6$

الحل :

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

لكن $f^{(1)}(-1)=3$

$3=3a -2b +c$ ……….(1)

$f^{(2)}(x)=6ax +2b$

لكن $f^{(2)}(-1)=-2$

$-2=-6a +2b$ …….(2)

$f^{(3)}(x)=6a$

لكن $f^{(3)}(-1)=6$

$6=6a \rightarrow a=1$

نعوض في (2) فتكون $b=2$

نعوض في (1) فتكون $c=4$

بالتعويض في المعادلة الاصلية $c=3$

اذن $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$

لا تـــنسى ذكـــــر الله أولاً

ملاحظة - يا بني - مهمـــــة جــــداً

لا تنسى عند ايجاد المشتقات العليا الفحص المتتالي لقابلية الاشتقاق سواء للاقتران الاصلي او للمشتقات المتعاقبة

مثال :

اذا كان $L\,,\,L'\,,\,L''$ قابلا للاشتقاق عند x ، وكان $f(x) = xL(x)$ فجد

$f^{(3)}(x) \quad , \quad f^{(2)}(x) \quad , \quad f^{(1)}(x)$

الحل :

$L(x)$ قابل للاشتقاق

$$f'(x) = xL'(x) + L(x)$$

$L'(x)$ قابل للاشتقاق

$$f''(x) = xL''(x) + L'(x) + L'(x)$$
$$= xL''(x) + 2L'(x)$$

$L''(x)$ قابل للاشتقاق

$$f'''(x) = xL'''(x) + L''(x) + 2L''(x)$$
$$= xL'''(x) + 3L''(x)$$

***مثال :**

بين ان $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ اذا كان $y = \frac{x+1}{x-1} : x \neq 1$

الحل :

مثال :

اذا كان $f(x)=|x|$ فجد $f''(x),\ x \in R$

الحل :

-x   x

<---------------- | ++++++++++ -->

0

$f(x)$ متصل على R

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < 0 \\ -1 & , \quad x > 0 \\ \text{D.N.E} & , x = 0 \quad \text{why} \end{cases}$$

عندما $x = 0$, $f(x)$ متصل وغيرقابل للاشتقاق لان

$$f'_{+}(0) \neq f'_{-}(0)$$

لايجاد المشتقة الثانية للاقتران $f(x)$ نبحث في اتصال المشتقة الاولى.....

$f'(x)$ متصل على $R-\{0\}$

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x > 0 \\ \text{D.N.E} & , x = 0 \quad \text{why} \end{cases}$$

عندما $x = 0$, $f''(x)$ غيرقابل للاشتقاق لان

$f'(x)$ غير متصل عندما $x = 0$

مثال :

اذا كان $f(x) = \cos 2x$

اوجد $f''(x) + 6f(x)$

الحل :

مثال :

اذا كان $f(x) = 3sin2x + 5cos2x$
اوجد $f^{(4)}(x)$

$f'(x) = 6cos2x - 10sin2x$

$f^{(2)}(x) = -12sin2x - 20cos2x$

$f^{(3)}(x) = -24cos2x + 40sin2x$

$f^{(4)}(x) = 48sin2x + 80cos2x$

مثال :

اذا كان $f(x) = 7x^3 - 5x^2 + x$ جد $f''(-2)$

الحل :

$f'(x) = 21x^2 - 10x + 1$

$f''(x) = 42x - 10$

$f''(-2) = 42(-2) - 10 = 94$

مثال :

اذا كانت $f(x) = 3x^n$ وكان $f^{(4)}(x) = ax^3$ ، فجد قيمة a

الحل :

$f'(x) = 3nx^{n-1}$

$f''(x) = 3n(n-1)x^{n-2}$

$f^{(3)}(x) = 3n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

$f^{(4)}(x) = 3n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$

$ax^3 = 3n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$

$3 = n - 4 \rightarrow n = 7$

$a = 3n(n-1)(n-2)(n-3)$

$a = 3(7)(6)(5)(4) = 2520$

مثال :

اذا كانت $f(x) = 3x^n$ وكان $f^{(3)}(x) = a$ ، فجد قيمة a

الحل :

$f'(x) = 3nx^{n-1}$

$f''(x) = 3n(n-1)x^{n-2}$

$f^{(3)}(x) = 3n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

$ax^0 = 3n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

$0 = n - 3 \rightarrow n = 3$

$a = 3n(n-1)(n-2)$

$a = 3(3)(2)(1) = 18$

مثال :

اذا كان $y = 1 + \frac{1}{x}$ فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ ثم $\frac{d^{100}y}{dx^{100}}$

الحل :

$y' = \frac{-1}{x^2} : x \neq 0$

$y'' = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} : x \neq 0$

مثال :

اذا كان $y=(x^2+3x)|x|$ فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

الحل :

مثال : اذا كان

$f(x)=(3x^2+2)(x^3-2x+1)$

اثبت ان $f''(1)f'(1)=210$

الحل :

مثال :

اذا كان $f(x)=\frac{2}{x}$ اثبت ان

$f''(1)=-4f'(2)$

الحل :

$f'(x)=\frac{-2}{x^2}\to f'(1)=-2$

$f''(x)=\frac{4}{x^3}\to f''(2)=\frac{1}{2}$

$-4f''(2)=(-4)\left(\frac{1}{2}\right)=-2=f'(2)$

ش2007)

اذا كان $f(x)=x^n,\ n\in N$ وكان $f^{(3)}(x)=210x^{n-3}$ فما قيمة n .

A)12   B)10   √C)7   D)5

ش2008)

اذا كان $f(x)=(2x+1)^3$ فان $f^{(2)}(-1)$

A) − 6   B)6   √C) − 24   D) − 12

ش2013)

اذا كان $f(x)=\cos 4x$ فان $f^{(2)}(\frac{\pi}{4})$

A) − 8   B)0   √C16   D) − 16

ص 2016)

اذا كانت $f(x)=0.25x^n,\ n\in R$ وكان $f^{(4)}(x)=(a+1)x^3$ أجد قيمة a .

الحل:

n=7 ,a=2019

ص 2016)

اذا كان $f(x)$ ، $L'(x)$

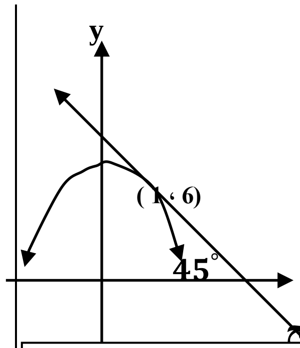
اقترانين قابلين للاشتقاق بحيث ان

$f(x) = (x+2)L'(2x)$

وكان $m(x)$ مماساً للاقتران $f(x)$

عند النقطة (6 ، 1) كما هو موضح

في الشكل المجاور فجد $L''(2)$



$L''(2) = L''(2x)$
$2x = 2$
$x = 1$

الحل :

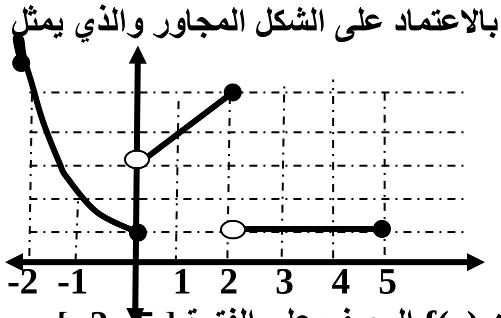
$$L'(2x) = \frac{f(x)}{x+2}$$

$$2L''(2x) = \frac{(x+2)f'(x) - f(x)}{(x+2)^2}$$

$$L''(2) = \frac{(1+2)f'(1) - f(1)}{2(1+2)^2}$$

$$L''(2) = \frac{(1+2)\tan(135^{\circ}) - 6}{18} = \frac{-3-6}{18} = -\frac{1}{2}$$

ص2017) بالاعتماد على الشكل المجاور والذي يمثل



منحنى الاقتران $f(x)$ المعرف على الفترة [5 , 2-]،

جد $(f' * f)'(1)$

الحل :

$$(f' * f)'(x) = f''(x) * f'(x) + f(x)f''(x)$$

$$(f' * f)'(1) = f'(1) * f'(1) + f(1)f''(1)$$

$$(f' * f)'(1) = \left(\frac{f(2) - f(1)}{2-1}\right)^2 + (4)(0)$$

$$(f' * f)'(1) = \left(\frac{5-4}{2-1}\right)^2 + (4)(0) = 1$$

مثال

كان $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n-1}}$ المشتقة النونية

فان $f^{(5)}(x)$

الحل :

مثال:

اذا كان $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

1. اوجد ميل المماس عند نقطة الاصل
2. بين عدم وجود مماس افقي للاقتران $f(x)$

الحل :

قاعـــــــــدة السلـــــــسلة

قاعـــــــــــــــدة (1)

$$(foh)'(x)=\frac{d}{dx}(f(h(x))$$
$$=f'(h(x))*h'(x)$$

قاعـــــــــــــــدة (2)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}*\frac{du}{dx}$$

قاعـــــــــــــــدة (3)

اذا كان h(x) قابلاً للاشتقاق عند x ،

وكان $y=(h(x))^n : n\in z$ فان

$$y'=n(h(x))^{n-1}*h'(x) : n\in z$$

الاثبات :

نفرض ان $u=h(x) , y=u^n$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}*\frac{du}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx}=nu^{n-1}*h'(x)$$
$$\frac{dy}{dx}=n(h(x))^{n-1}*h'(x)$$

ملاحظة ـ يا بني

يمكن اشتقاق جميع الجذور بنفس القاعدة الثالثة بعد تحويلة الى شكل اسس

لا تنســـــــى

اذا كان $e\approx 2.71$: $y=e^{f(x)}$ العدد النيبيري

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)e^{f(x)}$$

اذا كان $y=a^{f(x)}$ فان

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)a^{f(x)}lna$$

مثال

اذا كان f(x) , h(x) اقترانين قابلين للاشتقاق بحيث أن $f'(x)=h(x), h'(x)=-f(x)$ فان $f^{(4)}(x)$ تساوي

A) h(x)   B) – f(x)   √C) – f(x)   D) $-h(x)$

مثال

اذا كان $y=e^x\sin x$ اثبت ان $y''=2y'-2y$

مـشتقة الاقترانـــات الدائريـة

قاعـــــــــــــــــــدة

$f(x) = sinx \rightarrow f'(x) = cosx$

بشـــــــكل عـــــــام

$f(x) = sin(h(x)) \rightarrow$

$f'(x) = cos(h(x))h'(x)$

بشـــــــكل أعـــــم

$f(x) = sin^n(h(x)) \rightarrow$

$f'(x) = n\, sin^{n-1}(h(x))cos(h(x))h'(x)$

قاعـــــــــــــــــــدة

اذا كان $y = \ln(f(x)) : f(x) > 0$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

تذكـــــــر

1. $\ln e^{f(x)} = f(x)$
2. $e^{\ln f(x)} = f(x)$

مثال :

اذا كان $f(x) = x^2 + 5 , h(x) = \frac{1}{x}$ جد $(foh)'(x)$

الحل : ج $\frac{-2}{x^3}$

مثال :

إذا كان $f(x) = sinx , h(x) = 2x$. فان قيمة $(hof)''(\frac{\pi}{6})$ يساوي

$A)\sqrt{3}$ B)1   √C)−1   D)$\frac{2}{9}$

ملاحظة :

حل السؤال مرة أخرى لو كان المطلوب $(hof)'(\frac{\pi}{6})$

مثال :

إذا كان $f(x) = x^3 - 2$ ، فما قيمة $(f'of)'(1)$ تساوي

$A)18$ B) − 18   C)−9   D)9

مثال :

اذا كان h(x) كثير حدود وكان $h'(1)=5 , h(1)=-1$

اوجد $(h^2)'(1)$

مثال :

اذا كان $f(x) = sinx^2 , y = f(\frac{2x-1}{x+1})$

اوجد y'

الحل :

مثال :

اذا كان $h(x) = ax^3 , f(x) = \sqrt{x+1}$ وكان $(hof)'(3) = 12$ فما قيمة a .

الحل : a=4

مثال :

اذا كان $y = 3u^2 - 2u + 1 , u = 2x + 3$

اوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما x= 0

مثال :

جد بدلالة $f'(x)$

1. $\frac{d}{dx}(f(x^2+1) = f'(x^2+1)(2x)$
2. $\frac{d}{dx}((f(x))^2 + 3) = 2f(x)f'(x)$

المعـــــــــــادلات الوسيطيـــــــــة

مثال :

اذا كان $x=\sin t , y=\cos 2t$, اوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل: ج : -4x

مثال :

اذا كان $y = \tan x$ اثبت ان

$$y^{(3)} = 6\sec^4 x - 4\sec^2 x$$

الحل :

مثال :

اذا كان $y = u^2 + 1 , u = 3x + 5$, $x = 2L + 7$ اوجد $\frac{dy}{dL}$ عندما L =1 ,

الحل: :

مثال :

اوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي

1. $y = \sqrt[3]{(u^2 - 10u + 1)^2} \ , u = x^3 + 1$
2. $y = \sin(\tan^2 x)$
3. $y = \sqrt[3]{(3u+2)^5} \ , u = \frac{8}{x^2+3}$
4. $y = \tan t \ , t = 12x, x = \pi/6$

مثال :

جد ميل المماس عند x=1 لمنحنى الاقتران

$f(x) = (2x+1)^5(x^3 - x + 1)^4$

مثال :

جد ميل العمودي لمنحنى الاقتران

$f(x) = \frac{\cos 2x}{e^{2x}}$ عند $x = \frac{\pi}{2}$

مثال : اوجد y''

1. $y = \sqrt{x^2 - 3x} - \frac{x}{1-x}$
2. $y = \sec^3(\tan x) + 1$

مثال :

اذا كان f(x) قابلاً للاشتقاق وكان

$f(\sin 2x) = \csc 2x : x \in (0, \pi]$ جد $f'(\frac{1}{2})$

الحل :

ملاحظة : ؟ ؟ ؟ حددت الفترة ج = 4-

مثال :

اذا كان $f(x^2) = 4x^2 + 2ax , a < 0$ *، وكانت*

$f'(9)=2$ *، اوجد قيمة a .*

الحل: a=6 :

مثال

اذا كان $h(x)=x^2 , f'(x) = \sqrt{x}$ اوجد $(f\ o\ h)'(4)$

الحل: ج 1

مثال:

إذا كان $\frac{dt}{dx} = 2$, $y = cot(t)$ واوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $t = \frac{\pi}{6}$

$A)\frac{3}{4}$ B)8 C)48 √D) − 8

مثال :

إذا كان $f(x)$ اقتران معرفاً على R ، وكان $h(x) = x^2 - 3$, $(h\ o\ f)'(1) = 24, f(1) = 4$, فان قيمة $f'(1)$

$A)24$ B)12 C)8 √D)3

مثال :

إذا كان $f(x) = x(|x|)^7$ وكان $h'(1) = 3$, $h(1) = 1$ فما قيمة $(foh)'(1)$.

$A) - 24$ B) − 10 C)7 √D)24

ملاحظة :

حل السؤال مرة أخرى عندما $h(1)=-1$

مثال :

اذا كان $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 , f'(\frac{1}{2}) = 8$ فجد

$$\lim_{h\to 6}\frac{f\left(\sin(\frac{\pi}{x})\right) - 2}{x - 6}$$

مثال :

إذا كان $f(x) = x^2 , h(1)==3 , h''(1)=5 , h'(1)=-2$

فان $(foh)''(1)$ يساوي

$A)26$ B)4 C)3 √D)38

وزارة

اذا كان $f(\frac{1}{2}x) = (|x|)^3$، فجد $f'(-1)$

مثال :

إذا كان $h'(4) = 8$, $(f\ o\ h)'(4) = 16$, $f(x) = x^2 + 8$ فان قيمة $h(4)$

$A)0$ B)6 C)3 √D)1

مثال :

إذا كان $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ وكان $h(x) = 2x^3 - x$، فان قيمة $(foh)'(1)$ يساوي

$A)1$ B)5 C) − 1 √D) − 5

وزارة

. إذا كان $f(x) = 2\tan x\ ,\quad h(x) = \frac{a}{2x+1}$

وكان، $(h\,o\,f)'(\frac{\pi}{4}) = \frac{8}{25}$ فما قيمة a .

مثال :

. إذا كان $f(x) = x^2(|x|)^5$ وكان h(2)=4 ,

$h'(2) = -1$ فما قيمة $(foh)'(2)$

$\sqrt{A}) - 28 \qquad B)28 \qquad C)7 \qquad D) - 10$

مثال :

. إذا كان *f(x)* قابلاً للاشتقاق ، وكان $f(x^3 + 1) = x$

فان *f′(9)*

$\sqrt{A})\frac{1}{12} \qquad B)\frac{1}{6} \qquad C)1 \qquad D)2$

مثال :

اذا كان $f(2x + 1) = x^3 + 4x^2 - 3x + 5$

جد *f′(7)*

الحل : ج24

مثال :

اذا كان y=ln(ax+b) حيث a,b ثابتان موجبان ،

وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P هو 1 ،

اجب عن السؤالين التالية

1.اثبت ان الاحداثي x للنقطة P اقل من 1

2. جد احداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس 0.5

، علما بان P هي النقطة (0,2)

الحل :

مثال :

اذا كان $x = t^2$ ، $y = 2t$

1. جد معادلة العمودي على المماس عند $(t^2\ , 2t)$
2. اثبت ان مساحة المثلث المكون من العمودي على المماس ، والمحورين الاحداثين ، هي $\frac{1}{2}|t|(2 + t^2)^2$

تمرين عام

مثال

إذا كان $f(x) = sin^n(h(x))$ اثبت ان

$f'(x) = n\, sin^{n-1}(h(x)\, cos(h(x))\, h'(x)$

الحل :

مثال

اذا كان $e \approx 2.71$: $y = e^{f(x)}$ العدد النيبيري اثبت ان

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)\ e^{f(x)}$$

مثال

اذا كان $y = ln\, f(x) : f(x) > 0$ اثبت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

مثال

اذا كان $y = log\ 2x$ اوجد y'

الحل :

$$y = \frac{ln\ 2x}{ln10}$$

$$y = \frac{2}{xln10}$$

مثال

اذا كان $y = ln(x^3 + 3cos2x)^{\frac{1}{7}}$ اوجد y'

الحل :

$$y = \frac{1}{7}\, ln(x^3 + 3cos2x)$$

$$y' = \frac{3x^2 - 6sin2x}{7(x^3 + 3cos2x)}\ ln$$

مثال

اذا كان $L(x) = f(h(x))$ وكان $h(4)=4$

$L'(4)=2$, $f'(4)=-5$ جد $h'(4)$

الحل :

$$L'(x) = f'(h(x))h'(x)$$

$$L'(4) = f'(h(4))h'(4)$$

$$2 = f'(4)h'(4)$$

$$2 = -5h'(4)$$

$$h'(4) = \frac{-2}{5}$$

مثال

$y = tanu\ , u = 4x^3 + x$ اوجد $\frac{dy}{dx}$

مثال

$y = r^2 + 3r\ , r = x^3 - 4$ جد $\frac{dy}{dx}$

مثال

اذا كان $y = cos(x + \frac{\pi}{2})$ اثبت ان $y'' + y = 0$

مثال اوجد y''

❶ $y = sin(3x^2)$

❷ $y = \mathrm{x}\tan(\frac{1}{\mathrm{x}})$

الحل: :

مثال

اذا كان ق قابلاً للاشتقاق وكان

$f(sin2x) = csc2x , x\in(0 , \pi/3]$ جد $f'(\frac{1}{2})$

الحل :

ملاحظة : ؟ ؟ ؟ حددت الفترة

مثال

اذا كان , $y = f(x^2 + 2x)$ وكان $f'(3) = 5$

اوجد y' عند x=1

الحل:

$$y' = f'(x^2 + 2x)(2x + 2)$$

$$y'|_{x=1} = f'(1 + 2)(2 + 2)$$

$$y'|_{x=1} = 5(4) = 20$$

الاشتقاق الضمني

العلاقة نوعان

صريحة
يمكن فصل السينات عن الصادات بسهولة
(مثال)
$y=x^3-2y$

لا يمكن فصل السينات عن الصادات بسهولة
(مثال)
$x^3+4xy^2=5x+7y^3$

لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ او y'

نعامل كل حد من الحدود على انه اقتران مستقل

وعند اشتقاق الصادي نضربه بـ $\frac{dy}{dx}$ او y'

مثال :

أوجد $\frac{dy}{dx}$ للعلاقات التالية

1. $y = \sin(xy)$ عند النقطة $(\frac{\pi}{2}, 1)$

الحل :

2. $x + y^3 = xy$ عند النقطة $(8, 2)$

الحل : ج 0.25

---

3. $xy^2 - yx^2 = 2$ عند النقطة $(1, 2)$

الحل : ج 0

4. $f(y^2) = x$ وكان $f(1) = 3$ عند $y=1$

الحل : ج 1/6

(2015ش)

اذا كان $e^{xy} = x - y$ اثبت ان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - xy + 1}{x^2 - xy + 1}$$

الحل

وزارة

اذا كان $2 = \frac{x}{y} - \frac{3y}{x}$ ، عند $(3, 1)$

❺ $x = f(y^2+1)$ وكان $f'(5)=4$ عند $y=2$

الحل : ج 1/16

❻ $\sqrt{xy} = 1$ ، عند $x=2$

الحل: ج -1/4

❼ $2y = f(2x^2 - x), f'(6) = 4, x = 2$

الحل : ج 14

❽ $x + \tan(xy) = 0$

الحل :

❾ $x + y = xy$

❿ $3 + y^3 - 4xy = 64x$ عند $(4, 0)$

الحل: :

للاستفسار ت (0788241724)

11 اذا كان: $y = x^{\frac{m}{n}}$: $\frac{m}{n} \in Q$ نسبي اثبت ان

$y' = x^{\frac{m}{n}-1}$

12 $x^3 = f(y+1)$ وكان $f'(5) = 4$ وكان

f(5)=8 عند y=4

الحل : ج 3

14 $y^2 + 4x^2 = 4xy$ عند النقطة (3 , -1) ,

الحل: 2

15 $y^2 = 3yx^2 + x^3$

الحل :

16 $4y^2 + 8y + 3x^2 = 45$

17 $x = \tan y$ عند $x = 3$

18 $x^2 + 2x^2y^2 = 9$ عند $(1, 2)$

حل : 20/8-

ش2012)

اذا كان $x = tan3y$ اوجد $y^{(2)}$ عند x=π/4

الحل : 1/6-

19 $y = t^2 - \frac{1}{3}t , x = \frac{1}{2}t^2 - 2t$

اوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عند $t = 6$

وزارة

اذا كان $\sqrt{xy} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$ حيث x>0 , y>0 جد $\frac{dy}{dx}$

20 $y = t^3 - 3t , x = t^3 - 3t$

اوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عند $t = 1$

مثال:

اذا كان $y = \sqrt{h(x)}$ اثبت ان $y' = \frac{h'(x)}{\sqrt{h(x)}}$

مثال:

اذا كان $y = \sqrt[7]{x^3 + 3cos2x}$ اوجد y'

الحل : يمكن استخدام ln لايجاد مشتقة الجذور بالاضافة لقواعد الجذور الذي سبق وان تعلمناها

$$y = (x^3 + 3cos2x)^{1/7}$$

$$lny = \frac{1}{7} ln(x^3 + 3cos2x)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3x^2 - 6sin2x}{7(x^3 + 3cos2x)}$$

$$y' = \frac{3x^2 - 6sin2x}{7(x^3 + 3cos2x)} y$$

$$y' = \frac{3x^2 - 6sin2x}{7(x^3 + 3cos2x)} \sqrt[7]{x^3 + 3cos2x}$$

هل تستطيع تبسيط الناتج اكثر ؟

مثال. اذا كان $y = x^x$ ، اوجد y'

الحل :

$$\ln y = \ln x^x$$
$$\ln y = x\ln x$$
$$\frac{y'}{y} = x * \frac{1}{x} + \ln x$$
$$y' = (1 + \ln x)y$$
$$y' = (1 + \ln x)x^x$$

تمـــــــرين عــــــام

مثال

1 اذا كان $\sin y = x , y \in (0 , 2\pi)$

اثبت ان $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2 اذا كان $y = \cos 2t , x = \sin 2t$ جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عندما $t = \frac{\pi}{4}$

3 أوجد $\frac{dy}{dx}$ للعلاقات التالية

① $x^2 + y^2 = 10$

② $x^3 - y^3 = 6xy$

③ $\sin(x^2y^2) = x$

4 اوجد $y^{(2)}$ لكل مايلي

① $3x^2 - 4y^2 = 2$

② $x^3 y^3 = 5$

③ $x\cos y = y$

④ $\frac{1}{\sqrt{y}} \sin x = 1$

مثال اوجد $\frac{dy}{dx}$

1 $2xy + \pi \sin y = 2\pi , (1 , 2\pi)$

الحل : $-\pi/2$

2 $2x^3 - x^2y - y^3 - 1 = 0 , \quad (2 , -3)$

الحل : 23/36

3 $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 0 , (2 , 6)$

الحل : -3

مثال

جد النقطة على المنحنى العلاقة $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

التي تحقق العلاقة $y' = -2$

الحل: $x=1 \ , y=4$

مثال :

$y = \sqrt[3]{2x-5}$ جد y'

مثال

اذا كان $siny = x \ , y \in (0 \ , 2\pi)$ اثبت ان

$y^{(2)} = tanysec^2y$

مثال

اذا كان $xy = sinx$ اثبت ان

$xy'' + 2y' + xy = 0$

ويمكن ان يكون السؤال على صورة

اذا كان $y = \frac{sinx}{x} \ , x \neq 0$

الحل :

انتبه عندما $x \neq 0$ نستطيع ضرب تبادلي

تمـــــــــرين عـــــــــام

❶ اذا كان $y = xtanx$ اثبت ان

$y^{(2)} + 2ysec^2x = 2sec^2x$

الحل :

---

❷ اذا كان $y = (secx + tanx)^n$ اثبت ان

$y' = nysecx$

الحل :

---

❸ $y=sec2x$ اثبت $y'' - 8y^3 + y = 0$

---

❹ $siny = x \ : \ |x| < 1$ اثبت ان $y'' = tanysec^2y$

❺ $x + y = xy$ اثبت ان $y'' = \frac{2y^3}{x^3}$

الحل: :

انتبه انتبه امامك ....

6 اثبت ان $y = tan(xy)$

$$y' = \frac{y + y^3}{1 - x(1 + y^2)}$$

6 $e^{xy} = x - y$ (2015ش) اثبت ان

$$y' = \frac{y^2 - xy + 1}{x^2 - xy + 1)}$$

7 اثبت ان $y = sinx + cosx$

$$yy'' + 1 = -sin2x$$

الحل: :

8 اثبت ان $y = secx + tanx$

$$y'' = y^2 secx$$

9 $y = (sinx + cosx)^4$

اثبت ان $y'' + 4y = 12\cos^2 2x$

الحل :

---

10 اذا كان $siny = tanx$ ، فاثبت ان :

$$\frac{y}{tany} = \frac{y''}{2\sec^2 x + (y')^2}$$

11 اثبت أن y=cos2x

$$secx\, y' + 4sinx = 0$$

الحل :

12 اذا كان $y = \sqrt{x}$ اثبت ان

$$\frac{}{dx}(y * \frac{dy}{dx}) = 0$$

الحل: :

---

13 اثبت ان $y = sinx - cosx$

$$(y')^2 + y^2 = 2$$

---

14 اثبت ان $y = \sin^4 x$

$$y'' + 16y = 12\sin 2x$$

15 إذا كان f(x) اقتران قابل للاشتقاق عند x ، وكانت

$$y = cos^n\left(f^2(x)\right)$$

حيث $x \in z$ الاعداد الصحيحة ،اثبت أن

$$y' = -2ncos^{n-1}\left(f^2(x)\right)sin\left(f^2(x)\right)\left(f(x)\right)f'(x)$$

---

16 $tany = x$ اثبت أن

$$y''(1+x^2) = -sin2y$$

---

17 $y = sec2x$ اثبت ان

$$y'' - 8y^3 + 4y = 0$$

الحل :

18

اذا كان $f(x) = (3x^2+2)(x^3-2x+1)$

اثبت $f'(1) * f''(1) = 210$

الحل: :

---

19 اذا كان $f(x) = \frac{2}{x}$ اثبت ان

$$f'(1) = -4f''(2)$$

تمـــــــــرين عـــــــــــام

1 اذا كان L , L' , L'' قابلا للاشتقاق عند x ، وكان $f(x) = xL(x)$ اثبت ان

$$f^{(2)}(x) = xL^{(2)}(x) + 2L(x)$$

$$f^{(3)}(x) = xL^{(3)}(x) + 3L(x)$$

---

2 اذا كان $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ اثبت ان

$$y + y^{(2)} = 0$$

الحل :

20 اذا كان $f(x) = x^n$ وكان $f^{(3)}(x) = 60x^n - 3$ فما قيمة n.

الحل: ج n=5

3 اذا كان $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 7 = 0$
اثبت $y' = 0$

4 اذا كان $x^2 + y^2 = a^2$: a ثابت

فبين ان $\left| \frac{y}{(1+(y')^2)^3} \right| = \frac{1}{a}$

5 اذا كان $y = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$

اثبت ان $y' * 2\sqrt{1 + x^2} = y$

الحل:

6 ليكن $f(y)=\sin(h(y))$ و $h(1)=\pi/3$

$h^{(1)}(1)=0$, $h^{(2)}(1)=3$,اوجد $f^{(2)}(1)$ علما بان $f^{(1)}$,$f^{(2)}$قابلان للاشتقاق

الحل: $f^{(2)}(1)=3/2$

7
اوجد المشتقات المتتالية
$f(x)=x^{4/3}$ عند $x=0$

الحل: ج : $f^{(n)}(0)$ D.N.E

الحل: :

8 اذا كان $y=\cos(\sin(\tan\sqrt{x}))$
اوجد y'

9 اذا كان $y=\sin(xy)$ اوجد y' عند $(\frac{\pi}{2},1)$

الحل: :

---

10 ليكن $y^3=f(2x^2-x)$ وكان $f(6)=4, f'(6)=-4$

اوجد y' عندما $x=2$

الحل: :

11 اذا كان $h(x)$ اقتران قابل للاشتقاق عند $x=-2$

$h(-2)=1, h'(-2)=2$, فجد $f'(-2)$ في كل مما يلي

الحل :

1. $f(x) = h(x)\sqrt{x^2+1}$

2. $f(x) = \frac{x^2-x}{h^2(x)}$

3. $f(x) = h(x) - \frac{h(x)}{x}$

4. $f(x) = \tan(\pi h(x))$

12 اذا كان $h(x)= 3x^2$, $(x) =x^3+2x$ اوجد

1 . $(f' o\, h)'(1)$

2 . $(f' o\, h)''(1)$

ج 324 , 108

---

13 صفيحة معدنية مستطيلة الشكل تتمدد بانتظام بحيث يبقى طولها يساوي ثلاثة امثال عرضها اوجد معل التغير في مساحة هذه الصفيحة بالنسبة الى طولها عندما يكون طولها 15 سم

الحل:

14 ليكن $f(y)=\sin(h(y))$, $h(1)=\pi/3$, $h'(1)=$ 3=(1)$''$h , 0/ وجد $f''(1)$ علما بان f , f' قابلان للاشتقاق

الحل: :