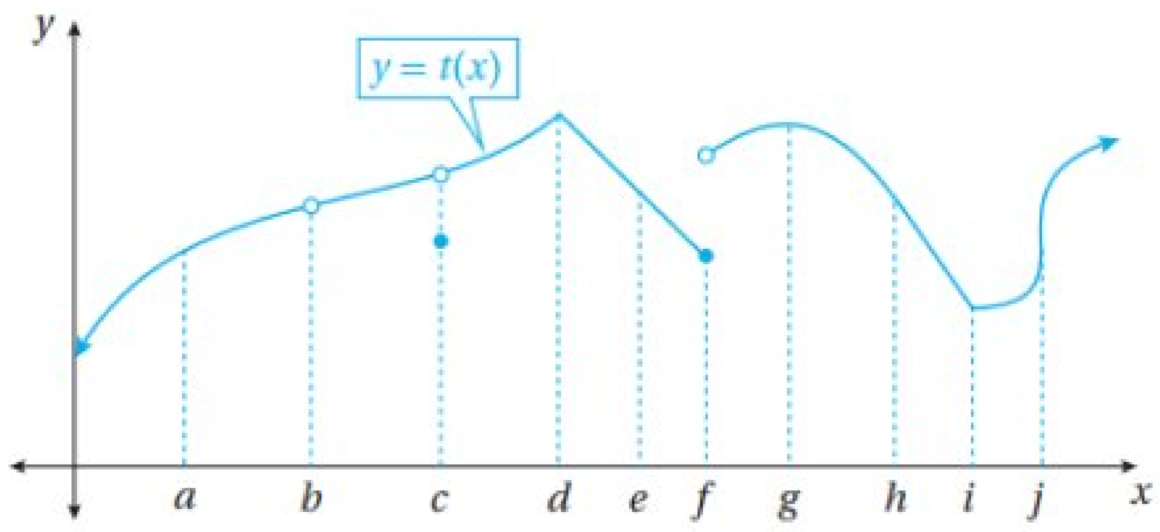
كتاب الطالب

الدرس الأول – مشتقة اقترانات خاصة

مثال 1:

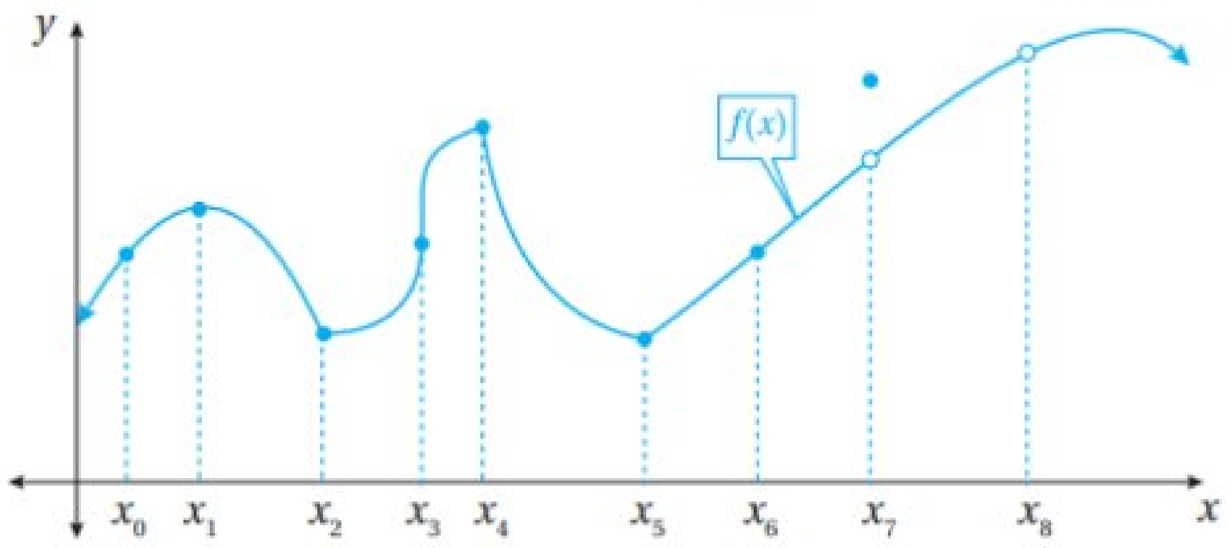
يُبين الشكل الآتي منحنى الاقتران $t(x)$. أُحدِّد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $t(x)$ غير قابل للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي.



الاقتران $t(x)$ غير قابل للاشتقاق عندما $x = b$، و $x = c$، و $x = f$؛ لأنه غير متصل عند هذه النقاط، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = i$، و $x = d$؛ نظرًا إلى وجود رأس حاد عند هاتين النقطتين، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = j$؛ نظرًا إلى وجود مماس رأسي عند هذه النقطة.

اتحقق من فهمي:

يُبين الشكل الآتي منحنى الاقتران $f(x)$. أُحدد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق، مُبرِّرًا إجابتي.



الاقتران f غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_5$، $x = x_4$، $x = x_2$ لأن لمنحناه رأس حاد أو زاوية عند هذه النقاط، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_8$، $x = x_7$ لأنه غير متصل عندهما، وغير قابل للاشتقاق عند $x = x_3$ نظرًا لوجود مماس رأسي عند هذه النقطة.

مثال 2:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 3e^x$

الاقتران المعطى	$f(x) = 3e^x$
قاعدتا مشتقة مضاعفات الاقتران، ومشتقة الاقتران الأُسي الطبيعي	$f'(x) = 3e^x$

2) $f(x) = x^2 + e^x$

الاقتران المعطى	$f(x) = x^2 + e^x$
قواعد مشتقات اقتران القوة، والمجموع، والاقتران الأُسي الطبيعي	$f'(x) = 2x + e^x$

3) $y = \frac{\sqrt[3]{x} - 2xe^x}{x}$

بتوزيع المقام على البسط
$$y = \frac{\sqrt[3]{x} - 2xe^x}{x} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} - \frac{2xe^x}{x}$$

بكتابة الاقتران في صورة أُسية
$$= \frac{x^{1/3}}{x} - \frac{2xe^x}{x}$$

بالتبسيط
$$= x^{-2/3} - 2e^x$$

قواعد مشتقات اقتران القوة، والاقتران الأُسي الطبيعي، ومضاعفات الاقتران
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}x^{-5/3} - 2e^x$$

تعريف الأُس السالب، والصورة الجذرية
$$= -\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} - 2e^x$$

اتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

Ⓐ $f(x) = 5e^x + 3$

$$f(x) = 5e^x + 3$$
$$f'(x) = 5e^x$$

Ⓑ $f(x) = \sqrt{x} - 4e^x$

$$f(x) = \sqrt{x} - 4e^x = x^{\frac{1}{2}} - 4e^x$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 4e^x = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4e^x$$

Ⓒ $y = 8e^x + \frac{4}{\sqrt[5]{x}}$

$$y = 8e^x + \frac{4}{\sqrt[5]{x}} = 8e^x + 4x^{-\frac{1}{5}}$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = 8e^x - \frac{4}{5}x^{-\frac{6}{5}} = 8e^x - \frac{4}{5\sqrt[5]{x^6}}$$

مثال 3:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \ln(x^4)$

الاقتران المعطى
$$f(x) = \ln(x^4)$$

قانون القوة في اللوغاريتمات
$$= 4\ln x$$

قاعدتا مشتقة مضاعفات الاقتران، ومشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي
$$f'(x) = \frac{4}{x}$$

2) $f(x) = \ln(xe^x) + \ln(7x)$

$f(x) = \ln(xe^x) + \ln(7x)$ الاقتران المعطى

$= \ln x + \ln e^x + \ln 7 + \ln x$ قانون الضرب في اللوغاريتمات

$= 2\ln x + x + \ln 7$ بالتبسيط، واستعمال الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$f'(x) = \frac{2}{x} + 1$ قواعد اشتقاق اللوغاريتمي الطبيعي، واقتران القوة والثابت

اتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

Ⓐ $f(x) = \sqrt{x} + \ln(4x)$

$$f(x) = \sqrt{x} + \ln(4x) = x^{\frac{1}{2}} + \ln 4 + \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$

Ⓑ $f(x) = \ln(2x^3)$

$$f(x) = \ln(2x^3) = \ln 2 + 3\ln x$$

$$f'(x) = \frac{3}{x}$$

مثال 4:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 3\sin x + 4$

$f(x) = 3\sin x + 4$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 3\cos x$ قواعد مشتقات اقتران الجيب، ومضاعفات الاقتران، والثابت، والمجموع

2) $y = \frac{1}{2}e^x - 7\cos x$

$y = \frac{1}{2}e^x - 7\cos x$ الاقتران المعطى

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}e^x + 7\sin x$ قواعد مشتقات الاقتران الأُسي الطبيعي، ومضاعفات الاقتران، واقتران جيب التمام، والمجموع

اتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

Ⓐ $y = \frac{\sin x}{2} + 3\cos x$

$$y = \frac{\sin x}{2} + 3\cos x = \frac{1}{2}\sin x + 3\cos x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cos x - 3\sin x$$

Ⓑ $f(x) = x^2 + \cos x + \sin\frac{\pi}{2}$

$$f(x) = x^2 + \cos x + \sin\frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = 2x - \sin x + 0 = 2x - \sin x$$

مثال 5:

إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln(\frac{x}{e})$، فاستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي:

1) معادلة المماس عند النقطة (1 , -1).

الخطوة1: أجد ميل المماس عند النقطة (1, -1).

الاقتران المعطى	$f(x) = \ln(\frac{x}{e})$
قانون القسمة في اللوغاريتمات	$= \ln x - \ln e$
الخصائص الأساسية في اللوغاريتمات	$= \ln x - 1$
قواعد مشتقات الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، والثابت، والفرق	$f'(x) = \frac{1}{x}$
بتعويض $x = 1$	$f'(1) = \frac{1}{1} = 1$

إذن، ميل المماس هو 1.

الخطوة2: أجد معادلة المماس.

معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة	$y - y_1 = m(x - x_1)$
بتعويض: $x_1 = 1, y_1 = -1, m = 1$	$y - (-1) = 1(x - 1)$
بالتبسيط	$y = x - 2$

إذن، معادلة المماس هي: $y = x - 2$.

2) معادلة العمودي على المماس عند النقطة (1, -1)

بما أن ميل المماس عند النقطة (1, -1) هو 1، فإن ميل العمودي على المماس هو -1.

ومنه، فإن معادلة العمودي على المماس عند النقطة (1, -1)هي:

$$y-(-1)=-1(x-1)$$

$$y=-x$$

اتحقق من فهمي:

إذا كان الاقتران: $f(x)=\ln\sqrt{x}$، فاستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي:

Ⓐ معادلة المماس عند النقطة $(e,\ \frac{1}{2})$.

$$f(x)=\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{2x}$$

ميل المماس عند النقطة $(e,\ \frac{1}{2})$ هو:

$$f'(e)=\frac{1}{2e}$$

معادلة المماس عند النقطة $(e,\ \frac{1}{2})$ هي:

$$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2e}(x-e)$$

$$y=\frac{1}{2e}x$$

Ⓑ معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(e,\ \frac{1}{2})$.

بما أن ميل المماس عند النقطة $(e,\ \frac{1}{2})$ هو $\frac{1}{2e}$ إذن ميل العمودي على المماس عندها هو -2e

معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(e,\ \frac{1}{2})$ هي:

$$y-\frac{1}{2}=-2e(x-e)$$

$$y=-2ex+2e^2+\frac{1}{2}$$

مثال 6:

يُمثل الاقتران: $s(t)=6t^2-t^3, t\geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

1) أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t=2$.

سرعة الجسم:

أجد مشتقة اقتران الموقع، ثم أعوض $t=2$ في المشتقة:

اقتران السرعة $v(t)=s'(t)=12t-3t^2$

بتعويض $t=2$: $v(2)=12(2)-3(2)^2$

بالتبسيط $=12$

تسارع الجسم:

أجد مشتقة اقتران السرعة، ثم أُعوض $t = 2$ في المشتقة:

اقتران التسارع $a(t) = v'(t) = s''(t) = 12 - 6t$

بتعويض $t = 2$ $\quad = 12 - 6(2)$

بالتبسيط $\quad = 0$

سرعة الجسم عندما $t = 2$ هي $12\ m/s$، وتسارعه $0\ m/s^2$

2) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كانت سرعته 0؛ أي عندما $v(t) = 0$:

بمساواة اقتران السرعة بالصفر $12t - 3t^2 = 0$

بإخراج $3t$ عاملاً مشتركاً $3t(4 - t) = 0$

بحل كل معادلة لـ t $\quad t = 0 \quad or \quad t = 4$

إذن، يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما $t = 0$، و $t = 4$.

3) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 5$؟

اقتران السرعة $v(t) = 12t - 3t^2$

بتعويض $t = 5$ $\quad v(5) = 12(5) - 3(5)^2$

بالتبسيط $\quad = -15$

بما أنَّ إشارة السرعة سالبة، فإنَّ الجسم يتحرك في الاتجاه السالب عندما $t = 5$.

4) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

يكون الجسم في موقعه الابتدائي أوَّل مرة عندما $t = 0$. ومنه، فإن: $s(0) = 0$.

لإيجاد الأوقات التي يعود فيها الجسم إلى هذه النقطة، أحُلُّ المعادلة: $s(t) = 0$:

بمساواة اقتران الموقع بالصفر $6t^2 - t^3 = 0$

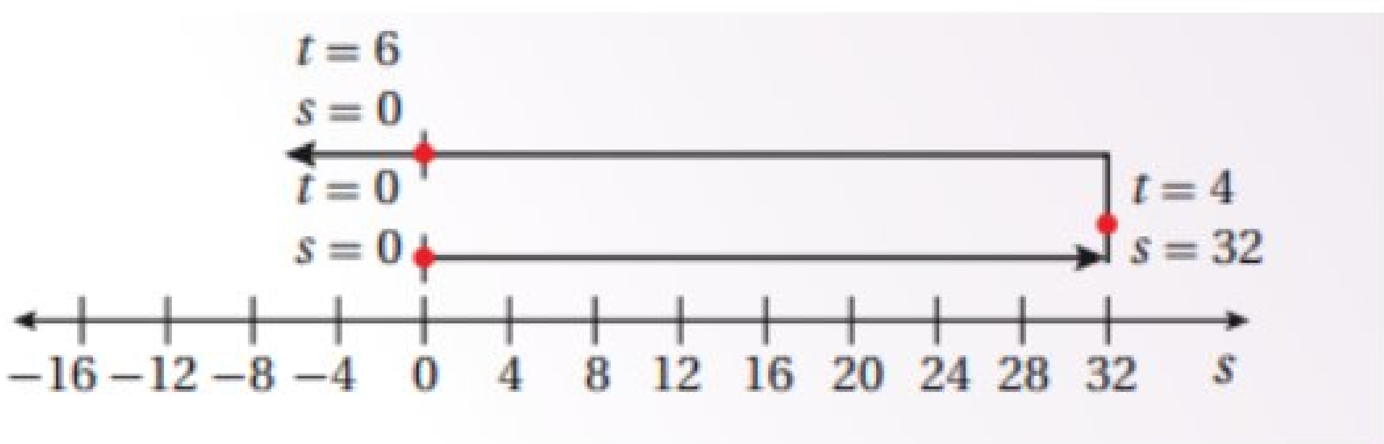
بإخراج t^2 عاملاً مشتركاً $t^2(6 - t) = 0$

بحل كل معادلة لـ t $\quad t = 0 \quad or \quad t = 6$

إذن، يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي بعد 6s.

<u>الدعم البياني:</u>

يُبين المخطط الآتي اتجاهات حركة الجسم في المسار المستقيم.



اتحقق من فهمي:

يُمثل الاقتران: $s(t) = t^2 - 7t + 8, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

Ⓐ أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 4$.

$$s(t) = t^2 - 7t + 8$$
$$v(t) = 2t - 7 \quad \Rightarrow \quad v(4) = 1\ m/s$$
$$a(t) = 2 \quad \Rightarrow \quad a(4) = 2\ m/s^2$$

Ⓑ أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

$$v(t) = 2t - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{7}{2}s$$

Ⓒ في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 2$؟

$$v(2) = -3\ m/s$$

بما أن إشارة السرعة سالبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب عندما $t = 2$

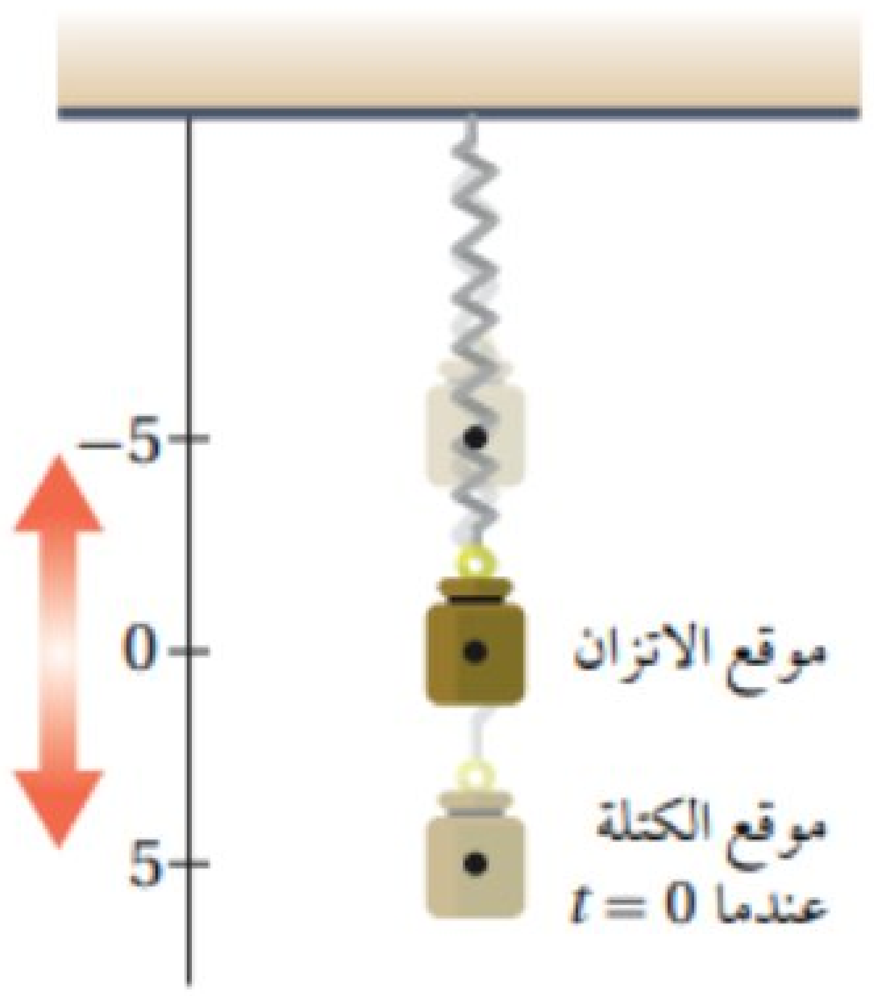
Ⓓ متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

الموقع الابتدائي للجسم: $s(0) = 8\ m$

$$s(t) = 8 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 7t + 8 = 8 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 7t = 0$$
$$t(t-7) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \quad or \quad t = 7$$

إذن يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي عندما $t = 7s$، أي بعد 7 ثوانٍ من بدء حركته.

مثال 7: من الحياة



زنبرك: يُبين الشكل المجاور جسما مُعلقاً بزنبرك،
شُدَّ 5 وحدات أسفل موقع الاتزان $(s = 0)$،
ثم تُرك عند الزمن $t = 0$ ليتحرك إلى الأعلى وإلى الأسفل.
ويُمثل الاقتران: $s(t) = 5\cos t$ موقع الجسم
عند أي زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني،
و s الموقع بالسنتيمترات:

1) أجد اقتراناً يُمثل سرعة الجسم، واقتراناً آخر يُمثل تسارعه عند أي لحظة.

اقتران السرعة $v(t) = s'(t) = -5\sin t$

اقتران التسارع $a(t) = v'(t) = -5\cos t$

2) أَصِف حركة الجسم.

- اعتماداً على الخصائص الجبرية لاقتران الموقع، فإن الجسم يتحرك بمرور الزمن بين الموقع $s = 5$ والموقع $s = -5$ على المحور s، والقيمة السالبة تعني أن الجسم فوق موقع الاتزان.

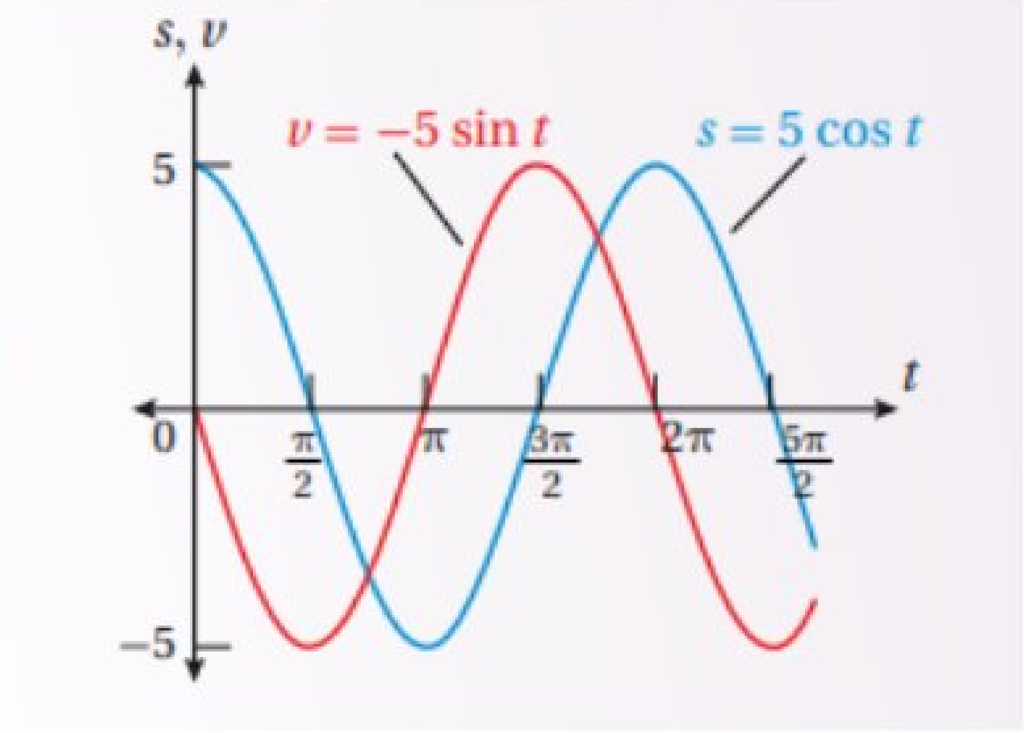
- أُلاحظ أن قيمة السرعة القياسية تكون أكبر ما يُمكن في كل من الاتجاه الموجب والاتجاه السالب عندما $|\sin t| = 1$. وفي هذه الحالة، فإنَّ $\cos t = 0$ (متطابقة فيثاغورس). وبالرجوع إلى اقتران الموقع، أُلاحظ أن قيمته تُصبح صفراً (موقع الاتزان) عندما $\cos t = 0$؛ ما يعني أن سرعة الجسم القياسية تكون أكبر ما يُمكن عندما يمرُّ الجسم بموقع الاتزان.

- اعتماداً على الخصائص الجبرية لاقتران التسارع، فإن قيمة تسارع الجسم تكون دائمًا معكوس قيمة موقع الجسم؛ ذلك أنَّ مُحصلة القوى تسحب الجسم إلى الأسفل إذا كان أعلى موقع الاتزان، وأنَّ مُحصلة القوى تسحب الجسم إلى الأعلى إذا كان أسفل موقع الاتزان.

- تكون قيمة التسارع صفرًا فقط عند موقع الاتزان؛ لأن قوة الجاذبية وقوة الزنبرك تُلغي إحداهما الأُخرى عند هذه النقطة. ولكن، إذا كان الجسم عند أي موقع آخر، فإن هاتين القوتين لا تكونان متساويتين، والتسارع لا يساوي صفراً.

الدعم البياني:

أُلاحظ من التمثيل البياني الآتي لاقتراني الموقع والسرعة أن موقع الجسم يتراوح بين القيمتين: $s = 5\ cm$، و $s = -5\ cm$، وأن سرعته تتراوح بين القيمتين: $v = 5\ cm/s$ و $v = -5\ cm/s$.



أُلاحظ أيضاً أن السرعة القياسية تكون أكبر ما يُمكن عندما يقطع منحنى اقتران الموقع المحور x (موقع الاتزان).

اتحقق من فهمي:

يتحرك جسم مُعلق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُمثل الاقتران: $s(t) = 7 \sin t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

(A) أجد اقتراناً يُمثل سرعة الجسم، واقتراناً آخر يُمثل تسارعه عند أي لحظة.

$s(t) = 7 \sin t$

$v(t) = 7 \cos t$

$a(t) = -7 \sin t$

Ⓑ أصف حركة الجسم.

بالنظر لاقتران الموقع $s(t)$ فإن قيم s تنحصر بين $\pm 7m$ وهذا يعني أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعودا وهبوطا بين الموقعين $s = -7m, s = 7m$، ويمر بنقطة الاتزان $s = 0$ عند قيم t التي تحقق $s(t) = 0$ وهي $t = n\pi\ s$ حيث n أي عدد صحيح غير سالب.

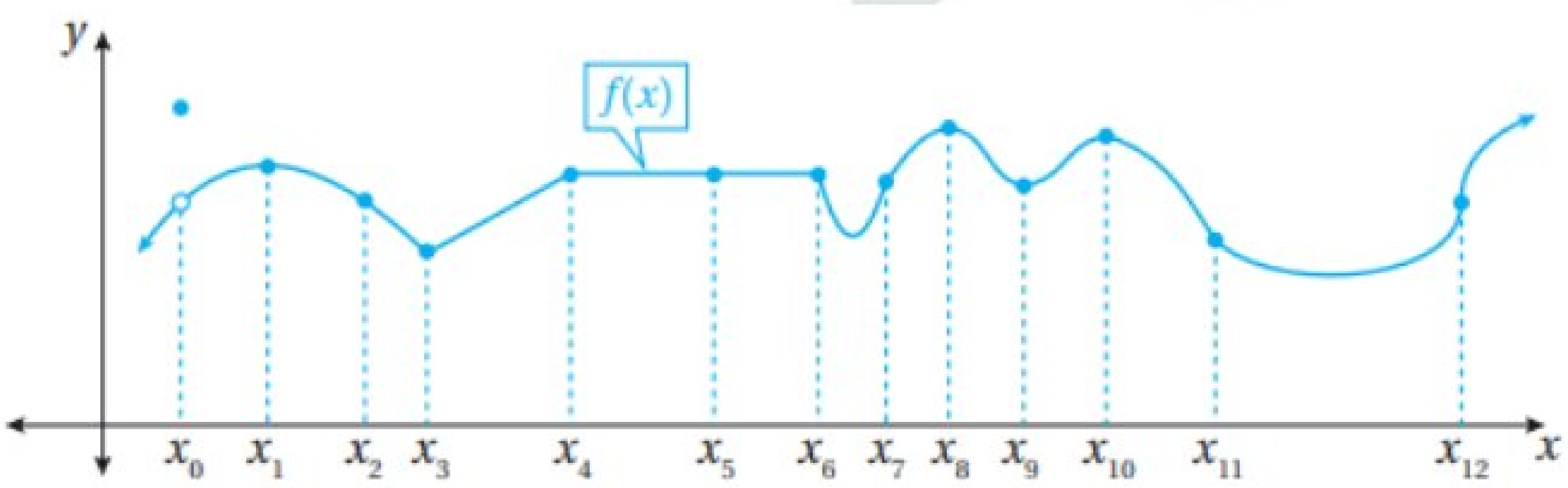
تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن وتتراوح بين القيمتين $\pm 7m/s$ ويكون مقدار سرعة الجسم القياسية أكبر ما يمكن $|7\cos t| = 7$ عندما $\cos t = \pm 1$ وذلك عندما $t = n\pi$ (نفسها لحظات مرور الجسم بنقطة الاتزان)، بينما تكون سرعة الجسم صفراً (يسكن لحظيا) عندما يكون الجسم في أقصى بعد له عن نقطة الاتزان $|s(t)| = 7 \to v(t) = 0$ (عندما $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n عدد فردي موجب)

نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة هي معكوس قيمة موقعه وأن التسارع ينعدم لحظة مرور الجسم بنقطة الاتزان، وهي اللحظة التي تكون محصلة القوى المؤثرة على الجسم فيها صفراً.

أتدرب وأحل المسائل

أحدد قيم x للنقاط التي لا يكون عندها كل اقتران مما يأتي قابلاً للاشتقاق، مُبررًا إجابتي:

1)

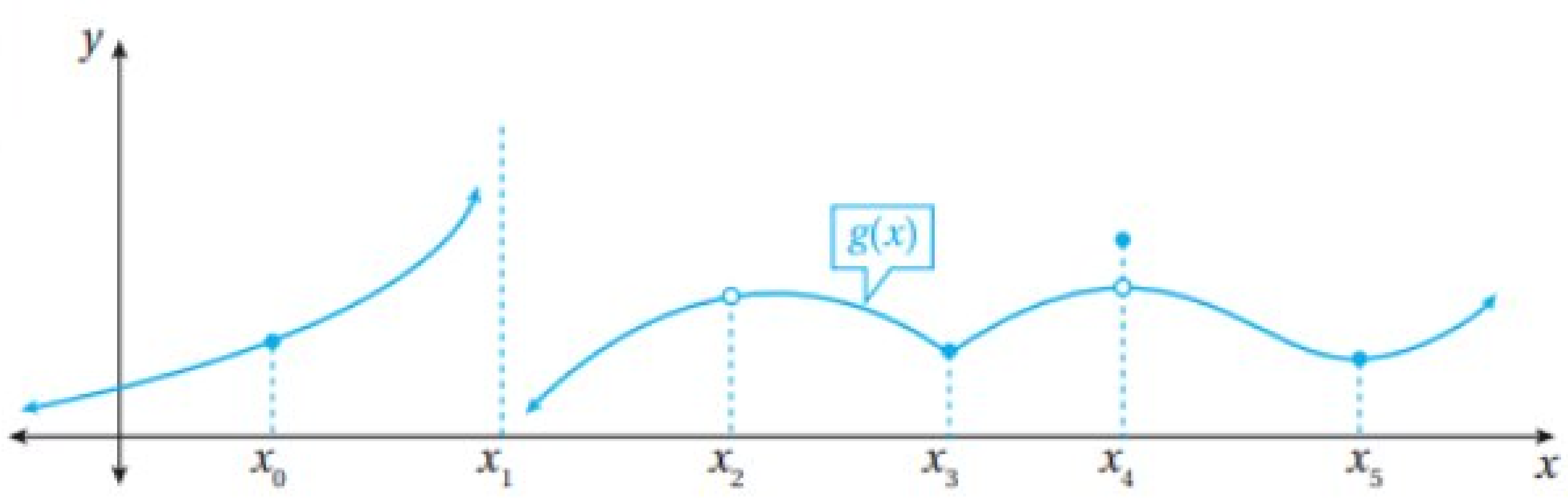


الاقتران f غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_3, x = x_4, x = x_6$ لأن لمنحناه رأس حاد أو زاوية عند هذه النقاط.

وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_0$ لأنه غير متصل عندها،

وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_{12}$ نظراً لوجود مماس رأسي عند هذه النقطة.

2)



الاقتران g غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_3$ لأن لمنحناه زاوية عند هذه النقطة، وهو غير قابل للاشتقاق عندما $x = x_1, x = x_2, x = x_4$ لأنه غير متصل عندها.

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

3) $f(x) = 2\sin x - e^x$

$$f'(x) = 2\cos x - e^x$$

4) $f(x) = \frac{\ln x}{4} - \pi\cos x$

$$f'(x) = \frac{1}{4x} + \pi\sin x$$

5) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) + x^4$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) + x^4$$

$$= \ln 1 - \ln x^3 + x^4$$

$$= -3\ln x + x^4$$

$$f'(x) = -\frac{3}{x} + 4x^3$$

6) $f(x) = e^{x+1} + 1$

$$f(x) = e^{x+1} + 1 = e \times e^x + 1$$

$$f'(x) = e \times e^x = e^{x+1}$$

7) $f(x) = e^x + x^e$

$$f'(x) = e^x + ex^{e-1}$$

8) $f(x) = \ln(\frac{10}{x^n})$

$$f(x) = \ln(\frac{10}{x^n})$$

$$= \ln 10 - \ln x^n = \ln 10 - n\ln x$$

$$f'(x) = 0 - n\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{n}{x}$$

إذا كان: $f(x) = sin\ x + \frac{1}{2}e^x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

9) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^\pi)$.

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{2}e^x$$

ميل المماس عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^\pi)$:

$$f'(\pi) = \cos\pi + \frac{1}{2}e^\pi = -1 + \frac{1}{2}e^\pi$$

معادلة المماس عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^\pi)$:

$$y - \frac{1}{2}e^\pi = \left(-1 + \frac{1}{2}e^\pi\right)(x - \pi)$$

$$y = \left(-1 + \frac{1}{2}e^\pi\right)x + \pi - \frac{\pi}{2}e^\pi + \frac{1}{2}e^\pi$$

10) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^\pi)$.

بما أن ميل المماس عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^\pi)$ هو $-1 + \frac{1}{2}e^\pi$, فإن ميل العمودي على المماس هو

$$\frac{-1}{-1 + \frac{1}{2}e^\pi} = \frac{-2}{-2 + e^\pi} = \frac{2}{2 - e^\pi}$$

معادلة العمودي على المماس هي:

$$y - \frac{1}{2}e^\pi = \frac{2}{2 - e^\pi}(x - \pi) \Rightarrow y = \frac{2}{2 - e^\pi}x - \frac{2\pi}{2 - e^\pi} + \frac{1}{2}e^\pi$$

11) أجد قيمة x التي يكون عندها المماس أفقياً لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^x - 2x$

$$f(x) = e^x - 2x \Rightarrow f'(x) = e^x - 2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2 \approx 0.69$$

12) اختيار من مُتعدد: أي الآتية تُمثل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = sin\ x + cos\ x$ عندما $x = \pi$؟

Ⓐ $y = -x + \pi - 1$

Ⓑ $y = x - \pi - 1$

Ⓒ $y = x - \pi + 1$

Ⓓ $y = x + \pi + 1$

$$f(x) = \sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - \sin x$$

عندما $x = \pi$, فإن:

$$y = f(\pi) = \sin\pi + \cos\pi = -1$$

ميل المماس عند النقطة $(\pi, -1)$ هو: $f'(\pi) = cos\ \pi - sin\ \pi = -1$

بما أن ميل المماس هو -1- إذن ميل العمودي على المماس هو 1

معادلة العمودي على المماس:

$$y + 1 = 1(x - \pi) \Rightarrow y = x - \pi - 1$$

الإجابة الصحيحة هي b

13) إذا كان: $f(x) = \ln(kx)$، حيث k عدد حقيقي موجب، $x > 0$، فأُبين أن $f'(x) = \frac{1}{x}$.

إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

$$f(x) = \ln kx = \ln k + \ln x$$

$$f'(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

14) أُثبت أن مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ يمر بنقطة الأصل.

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

ميل المماس عند النقطة $(e , 1)$ هو : $f'(e) = \frac{1}{e}$

معادلة المماس هي:

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \Rightarrow y = \frac{1}{e}x$$

وهو مستقيم يمر بنقطة الأصل لأن النقطة $(0,0)$ تحقق معادلته.

15) أُثبت أن المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e , 1)$ هو $e + \frac{1}{e}$.

بما أن ميل المماس هو $\frac{1}{e}$، فإن ميل العمودي على المماس هو $-e$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - 1 = -e(x - e) \rightarrow y = -ex + e^2 + 1$$

لإيجاد المقطع x لهذا المستقيم نضع $y = 0$ في معادلته

$$0 = -ex + e^2 + 1$$

$$ex = e^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{e^2 + 1}{e} = e + \frac{1}{e}$$

يُمثل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

16) أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 5$.

$$s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$$

$$v(t) = 3t^2 - 8t + 5 \Rightarrow v(5) = 40\ m/s$$

$$a(t) = 6t - 8 \quad \Rightarrow a(5) = 22\ m/s^2$$

17) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

$$v(t) = 3t^2 - 8t + 5 = 0$$

$$(3t - 5)(t - 1) = 0$$

$$\rightarrow t = \frac{5}{3}s \quad or \quad t = 1s$$

18) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t=4$؟

$v(4) = 21\ m/s$

بما أن إشارة السرعة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب عندما $t=4$

19) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

الموقع الابتدائي للجسم: $s(0) = 0m$

$$s(t) = 0 \ \Rightarrow t^3 - 4t^2 + 5t = 0$$
$$\Rightarrow t(t^2 - 4t + 5) = 0$$
$$\Rightarrow t = 0$$

العبارة التربيعية $t^2 - 4t + 5$ مميزها سالب وبالتالي ليس لها جذور حقيقية.

إذن، لا يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي أبداً.

يُمثل الاقتران: $s(t) = e^t - 4t, t \geq 0$ موقع جُسيم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

20) أُحدد الموقع الابتدائي للجُسيم

الموقع الابتدائي للجسم: $s(0) = e^0 - 4(0) = 1m$

21) أجد تسارع الجُسيم عندما تكون سرعته صفراً.

$$v(t) = e^t - 4$$
$$v(t) = 0 \ \Rightarrow \ e^t = 4 \ \Rightarrow \ t = \ln 4$$
$$a(t) = e^t \ \Rightarrow \ a(\ln 4) = e^{\ln 4} = 4\ m/s^2$$

زنبرك: يتحرك جسم مُعلق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُحدد الاقتران: $s(t) = 4\cos t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

22) أجد اقتراناً يمثل سرعة الجسم، واقتراناً آخر يُمثل تسارعه عند أي لحظة.

$$s(t) = 4\cos t$$
$$v(t) = -4\sin t$$
$$a(t) = -4\cos t$$

23) أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\frac{\pi}{4} = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}m/s$$

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\cos\frac{\pi}{4} = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}\ m/s^2$$

24) أصف حركة الجسم.

من خصائص اقتران الموقع $s(t) = 4\cos t$ نعرف أن الجسم يتحرك بمرور الزمن صعوداً وهبوطاً بين الموقعين $s = 4\ m, s = -4\ m$ وأنه يمر بنقطة الاتزان $s = 0$ أثناء هذه الحركة عندما $t = \frac{n\pi}{2}$ حيث n أي عدد فردي موجب.

تتغير سرعة الجسم بمرور الزمن ونعرف من خصائص الاقتران $v(t) = -4\sin t$ أن قيم السرعة تتراوح بين $4\ m/s$، و $-4\ m/s$ ونلاحظ أن الجسم يصل إلى هذه السرعة عند اللحظات التي يمر فيها بنقطة الاتزان.

نلاحظ أن قيمة تسارع الجسم عند كل لحظة تساوي معكوس قيمة اقتران الموقع عند تلك اللحظة، وأن التسارع ينعدم عند مرور الجسم بنقطة الاتزان حيث تكون محصلة القوى المؤثرة في الجسم صفرا.

25) تبرير: إذا كان الاقتران: $y = e^x - ax$، حيث a عدد حقيقي، فأجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y، مبرراً إجابتي.

$$y = e^x - ax$$

$$x = 0 \Rightarrow y = e^0 - a(0) = 1$$

نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع محور y هي: $(0\ ,1)$

$$\frac{dy}{dx} = e^x - a$$

ميل المماس عند هذه النقطة هو: معادلة $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = e^0 - a = 1 - a$

معادلة المماس هي:

$$y - 1 = (1 - a)(x - 0) \rightarrow y = (1 - a)x + 1$$

26) تحدٍّ: أُثبت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران: $y = 2e^x + 3x + 5x^3$

ميل مماس المنحنى عند أي نقطة عليه هو $y' = 2e^x + 3 + 15x^2$

لكل x فإن $2e^x > 0$، ولكل x فإن $15x^2 \geq 0$

بالجمع نجد أنه لكل x فإن $2e^x + 15x^2 > 0$

بإضافة 3 للطرفين: لكل x فإن $2e^x + 15x^2 + 3 > 3$ أي أن $y' > 3$

إذن لا يمكن أن تكون قيمة y' تساوي 2 لأي قيمة حقيقية للمتغير x.

تبرير: إذا كان الاقتران: $y = ke^x$، حيث: $k = 0$، وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة P، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

27) أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x

الإحداثي x لنقطة تقاطع المنحنى $y = ke^x$ مع المحور y هو 0 وبالتعويض في معادلة الاقتران نجد أن $y = ke^0 = k$، أي أن إحداثيي P هما (0 , k)

$$\frac{dy}{dx} = ke^x \Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{x=0} = ke^0 = k$$

معادلة المماس هي:

$$y - k = k(x - 0) \Rightarrow y = kx + k$$

ولإيجاد نقطة تقاطعه مع المحور x نعوض $y = 0$

$$0 = kx + k \Rightarrow x = -1$$

إذن، نقطة تقاطع المماس عند P مع المحور x هي: (-1 , 0)

28) إذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة (100, 0)، فأوجد قيمة k.

ميل العمودي على المماس عند النقطة P هو $-\frac{1}{k}$

معادلة العمودي على المماس هي:

$$y - k = -\frac{1}{k}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{k}x + k$$

وبتعويض إحداثيي نقطة التقاطع نجد أن:

$$0 = -\frac{1}{k}(100) + k \Rightarrow k^2 = 100 \Rightarrow k = \mp 10$$

ولأن $k > 0$، فإن $k = 10$

تحد: إذا كان الاقتران: $y = \log x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

29) أُثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}$

$$y = \log x = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln 10}$$

30) مُعتمداً على النتيجة من السؤال السابق، أجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران: $y = \log ax^2$، حيث a عدد حقيقي موجب.

$$y = \log ax^2 = \log a + 2 \log x$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + 2 \times \frac{1}{x \ln 10} = \frac{2}{x \ln 10}$$

تبرير: يُمثل الاقتران: $s(t) = 4 - sin\, t, t \geq 0$ موقع جُسيم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

31) أجد سرعة الجُسيم وتسارعه بعد t ثانية

$$s(t) = 4 - \sin t$$

$$v(t) = -\cos t$$

$$a(t) = \sin t$$

32) أجد موقع الجُسيم عندما كان في حالة سكون لحظي أول مرة بعد انطلاقه.

$$v(t) = -\cos t = 0 \ \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}. \frac{5\pi}{2}, \dots \dots$$

يكون الجسم في حالة سكون لحظي لأول مرة بعد انطلاقه عنما $t = \frac{\pi}{2}$

ويكون موقعه عندما هو $s(\frac{\pi}{2})$

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - \sin \frac{\pi}{2} = 4 - 1 = 3\ m$$

33) أجد موقع الجُسيم عندما يكون تسارعه صفرًا، مُبررًا إجابتي.

$$a(t) = v'(t) = \sin t \Rightarrow a(t) = 0 \Rightarrow \sin t = 0$$

وبتعويض هذه النتيجة في اقتران الموقع نجد أن:

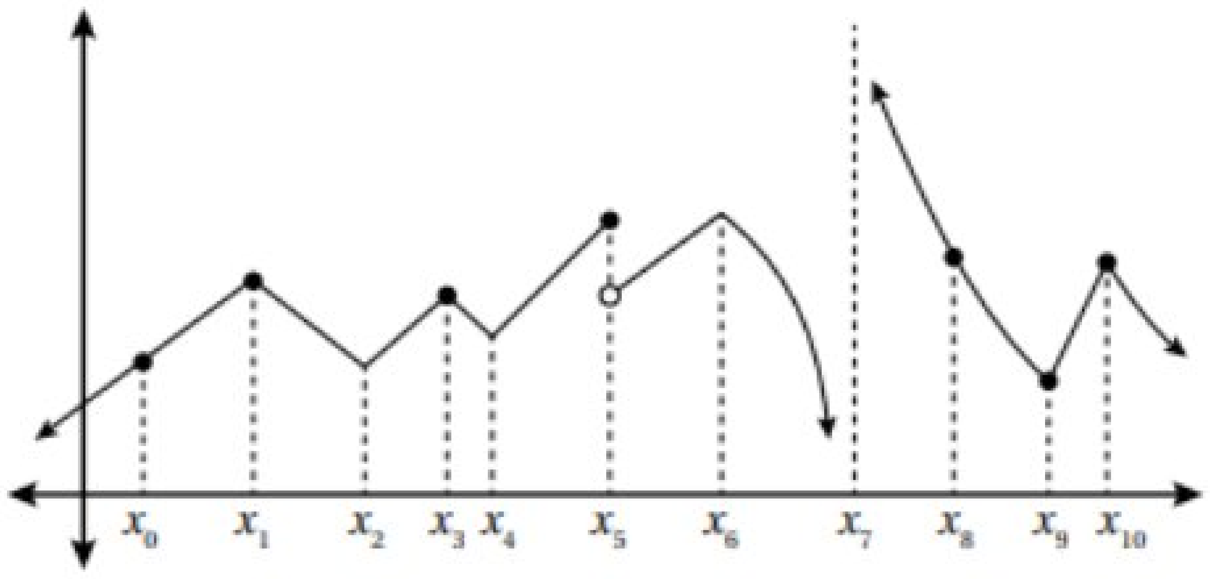
$$s(t) = 4 - \sin t = 4 - 0 = 4$$

أي أن الجسيم يكون $s = 4\ m$ عندما يكون تسارعه صفرًا.

كتاب التمارين

الدرس الأول – مشتقة اقترانات خاصة

1) يُبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$. أُحدد قيم x للنقاط التي يكون عندها الاقتران $f(x)$ غير قابل للاشتقاق، مُبررًا إجابتي.



f غير قابل للاشتقاق عند القيم $x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_9, x_{10}$ بسبب وجود زاوية لمنحنى الاقتران عند كل منها رغم أنه متصل، و

f غير قابل للاشتقاق عند القيم x_5, x_7 وذلك لأنه غير متصل عندهما، والاتصال شرط ضروري.

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

2) $f(x) = 9e^x + \frac{1}{3\sqrt{x}}$

$$f(x) = 9e^x + \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 9e^x - \frac{1}{6}x^{-\frac{3}{2}} = 9e^x - \frac{1}{6\sqrt{x^3}}$$

3) $f(x) = 2e^x + \frac{1}{x^2}$

$$f(x) = 2e^x + x^{-2}$$

$$f'(x) = 2e^x - 2x^{-3} = 2e^x - \frac{2}{x^3}$$

4) $f(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - \cos x$

$$f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos x + \sin x$$

5) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = 2e^x + x$ عندما $x = 2$.

$$f(x) = 2e^x + x\,, x = 2$$

$$f(2) = 2e^2 + 2$$

$$f'(x) = 2e^x + 1$$

ميل المماس: $f'(2) = 2e^2 + 1$

معادلة المماس: $y - 2e^2 - 2 = (2e^2 + 1)(x - 2)$

$$y = (2e^2 + 1)x - 2e^2$$

6) أثبت عدم وجود مماس أفقي لمنحنى الاقتران: $f(x) = 3x + \sin x + 2$.

$f'(x) = 3 + \cos x$

عند المماس الأفقي يكون $f'(x) = 0$

$3 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -3$

وهذه المعادلة ليس لها حل لأن $-1 \le \cos x \le 1$

إذن، لا توجد مماسات أفقية لمنحنى f

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 3t^2 - t^3, t \ge 0$ موقع جُسيم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

7) أجد سرعة الجُسيم وتسارعه بعد t ثانية.

$s(t) = 3t^2 - t^3, t \ge 0$

السرعة: $v(t) = 6t - 3t^2$

التسارع: $a(t) = 6 - 6t$

8) أجد الموقع (المواقع) الذي يكون عنده الجُسيم في حالة سكون لحظي.

يكون الجسيم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$

$v(t) = 6t - 3t^2 = 0 \Rightarrow 3t(2 - t) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 2$

$s(0) = 0, \quad s(2) = 12 - 8 = 4$

إذن يكون الجسيم في حالة سكون لحظي عندما يكون في كل من الموقعين:

$s = 0\ m, s = 4m$

إذا كان: $f(x) = \ln x^2$ ، حيث: $x > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

9) أجد معادلة مماس منحنى الاقتران عندما $x = e^2$.

$f(x) - \ln x^2 - 2\ln x, \qquad x = e^2$

$f(e^2) = 2\ln e^2 = 4 \Rightarrow (e^2, 4)$

$f'(x) = \frac{2}{x}$

ميل المماس: $f'(e^2) = \frac{2}{e^2}$

معادلة المماس: $y - 4 = \frac{2}{e^2}(x - e^2) \rightarrow y = \frac{2}{e^2}x + 2$

10) أجد الإحداثي x للنقطة التي يكون المماس عندها موازياً للمستقيم $6x - 2y + 5 = 0$

ميل المستقيم الذي معادلته $6x - 2y + 5 = 0$ يساوي 3

$$f'(x) = \frac{2}{3} = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

إذا كان: $f(x) = 2\sin x - 4\cos x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

11) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$.

$$f'(x) = 2\cos x + 4\sin x$$

$$f'(0) = 2\cos 0 + 4\sin 0 = 2$$

12) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$.

نجد الإحداثي y عندما $x = \frac{\pi}{2}$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} - 4\cos\frac{\pi}{2} = 2$$

ميل المماس

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{\pi}{2} = 4$$

معادلة المماس:

$$y - 2 = 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = 4x - 2\pi + 2$$

الدرس 2 – مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

مثال 1

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$

$f(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$ الاقتران المعطى

$f'(x) = (3x - 2x^2)\frac{d}{dx}(5 + 4x) + (5 + 4x)\frac{d}{dx}(3x - 2x^2)$ قاعدة مشتقة الضرب

$= (3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x)$ قاعدتا مشتقة اقتران القوة، ومشتقة الطرح

$= (12x - 8x^2) + (15 - 8x - 16x^2)$ باستعمال خاصية التوزيع

$= -24x^2 + 4x + 15$ بالتبسيط

2) $f(x) = xe^x$

$f(x) = xe^x$ الاقتران المعطى

$f'(x) = x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x)$ قاعدة مشتقة الضرب

$= xe^x + e^x \times 1$ قاعدتا مشتقة اقتران القوة، ومشتقة الاقتران الأُسي الطبيعي

$= xe^x + e^x$ بالتبسيط

اتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

Ⓐ $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$

$f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$

$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(14x - 4) + (7x^2 - 4x)(3x^2 - 4x)$

$= 14x^4 - 4x^3 - 28x^3 + 8x^2 + 42x - 12 + 21x^4 - 28x^3 - 12x^3 + 16x^2$

$= 35x^4 - 72x^3 + 24x^2 + 42x - 12$

Ⓑ $f(x) = \ln x \cos x$

$f(x) = \ln x \cos x$

$f'(x) = (\ln x)(-\sin x) + (\cos x)\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \sin x + \frac{\cos x}{x}$

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

الاقتران المعطى $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

قاعدة مشتقة القسمة $f'(x) = \frac{(1+x^2)\frac{d}{dx}(1-x^2)-(1-x^2)\frac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$

قواعد مشتقات اقتران القوة، والطرح، والجمع $= \frac{(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}$

باستعمال خاصية التوزيع $= \frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{(1+x^2)^2}$

بالتبسيط $= \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$

2) $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$

الاقتران المعطى $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$

قاعدة مشتقة القسمة $f'(x) = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(\ln x)-(\ln x)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$

قواعد مشتقات اقتران القوة، والطرح، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي $= \frac{(x+1)\left(\frac{1}{x}\right)-(\ln x)(1)}{(x+1)^2}$

باستعمال خاصية التوزيع $= \frac{1+\frac{1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}$

بالتبسيط $= \frac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2}$

اتحقق من فهمي: أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

Ⓐ $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$

$$f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(1)-(x+1)(2)}{(2x+1)^2} = \frac{-1}{(2x+1)^2}$$

Ⓑ $f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$

$$f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(\cos x)-(\sin x)e^x}{e^{2x}}=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$$

مثال 3: من الحياة

مرض: تعطى درجة حرارة مريض في أثناء مرضه بالاقتران:

$T(t)=\frac{4t}{1+t^2}+98.6$، حيث t الزمن بالساعات بعد ظهور أعراض المرض،

و T درجة الحرارة بالفهرنهايت:

1) أجد مُعدل تغير درجة حرارة المريض بالنسبة إلى الزمن.

أجد $T'(t)$:

$$T(t)=\frac{4t}{1+t^2}+98.6$$ الاقتران المعطى

$$T'(t)=\frac{(1+t^2)\frac{d}{dt}(4t)-(4t)\frac{d}{dt}(1+t^2)}{(1+t^2)^2}$$ قاعدتا مشتقة القسمة، ومشتقة الثابت

$$=\frac{(1+t^2)(4)-(4t)(2t)}{(1+t^2)^2}$$ قاعدتا مشتقة اقتران القوة، ومشتقة المجموع

$$=\frac{4+4t^2-8t^2}{(1+t^2)^2}$$ باستعمال خاصية التوزيع

$$=\frac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$$ بالتبسيط

إذن، مُعدل تغير درجة حرارة المريض بالنسبة إلى الزمن هو: $T'(t)=\frac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$

2) أجد مُعدل تغير درجة حرارة المريض عندما $t=2$، مُفسراً معنى الناتج.

أجد $T'(2)$:

$$T'(t)=\frac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$$ مشتقة $T(t)$

$$T'(2)=\frac{4-4(2)^2}{(1+(2)^2)^2}$$ بتعويض $t=2$

$$=-0.48$$ بالتبسيط

إذن، عندما يكون الزمن 2h، فإنَّ درجة حرارة المريض تقل بمقدار 0.48 درجة فهرنهايتية لكل ساعة.

اتحقق من فهمي:

سكّان: يعطي عدد سكان مدينة صغيرة بالاقتران: $p(t)=\frac{500t^2}{2t+9}$، حيث t الزمن بالسنوات و P عدد السكان بالآلاف:

Ⓐ أجد مُعدل تغير عدد السكان في المدينة بالنسبة إلى الزمن.

$$P(t)=\frac{500t^2}{2t+9}$$

$$P'(t)=\frac{(2t+9)(1000t)-(500t^2)(2)}{(2t+9)^2}=\frac{9000t+1000t^2}{(2t+9)^2}$$

Ⓑ أجد مُعدل تغير عدد السكان في المدينة عندما $t=12$، مُفسراً معنى الناتج.

$$P'(12)=\frac{9000(12)+1000(12)^2}{(24+9)^2}\approx 231.405$$

إذن في السنة 12 يتزايد عدد سكان هذه المدينة بمعدل 231 ألف نسمة سنوياً تقريباً

مثال 4

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ الاقتران المعطى

$f'(x)=\frac{-\frac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$ قاعدة مشتقة المقلوب

$=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ قاعدتا مشتقة اقتران القوة، ومشتقة الجمع

2) $f(x)=\frac{1}{t+\frac{1}{t}}$

$f(x)=\frac{1}{t+\frac{1}{t}}$ الاقتران المعطى

$f'(x)=\frac{-\frac{d}{dt}(t+\frac{1}{t})}{(t+\frac{1}{t})^2}$ قاعدة مشتقة المقلوب

$=\frac{-1+\frac{1}{t^2}}{(t+\frac{1}{t})^2}$ قاعدتا مشتقة اقتران القوة، ومشتقة المقلوب

$=\frac{1-t^2}{t^2(t+\frac{1}{t})^2}$ بالتبسيط

اتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

Ⓐ $f(x) = \frac{1}{5x-x^2}$

$$f(x) = \frac{1}{5x - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(5-2x)}{(5x-x^2)^2} = \frac{2x-5}{(5x-x^2)^2}$$

Ⓑ $f(x) = \frac{1}{e^x+\sqrt{x}}$

$$f(x) = \frac{1}{e^x + \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{-(e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}})}{(e^x+\sqrt{x})^2} = -\frac{2\sqrt{x}e^x + 1}{2\sqrt{x}(e^x+\sqrt{x})^2}$$

مثال 5

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = x^2 \sec x$

$f(x) = x^2 \sec x$ الاقتران المعطى

$f'(x) = x^2 \frac{d}{dx}(\sec x) + \sec x \frac{d}{dx}(x^2)$ قاعدة مشتقة الضرب

$= x^2 \sec x \tan x + 2x \sec x$ قاعدتا مشتقة اقتران القاطع، ومشتقة اقتران القوة

2) $f(x) = \frac{\csc x}{1+\tan x}$

$f(x) = \frac{\csc x}{1+\tan x}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = \frac{(1+\tan x)\frac{d}{dx}(\csc x) - (\csc x)\frac{d}{dx}(1+\tan x)}{(1+\tan x)^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \frac{(1+\tan x)(-\csc x \cot x) - (\csc x)(\sec^2 x)}{(1+\tan x)^2}$ قواعد مشتقات اقتران الظل، والمجموع، وقاطع التمام

$= \frac{-\csc x \cot x - \csc x \cot x \tan x - \csc x \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$ باستعمال خاصية التوزيع

$= \frac{-\csc x \cot x - \csc x - \csc x \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$ بالتبسيط

اتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

Ⓐ $f(x) = x\ \cot x$

$f(x) = x\ \cot x$

$f'(x) = (x)(-\csc^2 x) + (\cot x)(1) = -x\csc^2 x + \cot x$

Ⓑ $f(x) = \frac{\tan x}{1+\sin x}$

$$f(x) = \frac{\tan x}{1+\sin x}$$

$$f'(x) = \frac{(1+\sin x)(\sec^2 x) - (\tan x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{\sec^2 x + \sin x \sec^2 x - \sin x}{(1+\sin x)^2}$$

مثال 6

أجد المشتقات الأربع الأولى للاقتران: $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$:

المشتقة الأولى: $f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

المشتقة الثانية: $f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$

المشتقة الثالثة: $f'''(x) = \frac{6}{x^4}$

المشتقة الرابعة: $f^{(4)}x = -\frac{24}{x^5}$

اتحقق من فهمي:

أجد المشتقات الثلاث الأولى للاقتران: $f(x) = x\ \sin x$:

$f(x) = x \sin x$

$f'(x) = x\cos x + \sin x$

$f''(x) = -x\sin x + \cos x + \cos x$

$= 2\cos x - x\sin x$

$f'''(x) = -2\sin x - (x\cos x + \sin x)$

$= -3\ \text{sinx} = x\cos x$

أتدرب وأحل المسائل

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \frac{x^3}{2x-1}$

$$f(x) = \frac{x^3}{2x-1}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(3x^2) - (x^3)(2)}{(2x-1)^2} = \frac{4x^3 - 3x^2}{(2x-1)^2}$$ $f(x) = x^3 \sec x$

$$f(x) = x^3 \sec x$$

$$f'(x) = (x^3)(\sec x \tan x) + (\sec x)(3x^2)$$

$$= x^3 \sec x \tan x + 3x^2 \sec x$$

2) $f(x) = \frac{x+1}{\cos x}$

$$f(x) = \frac{x+1}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(1) - (x+1)(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x + x\sin x + \sin x}{\cos^2 x}$$

3) $f(x) = e^x(\tan x - x)$

$$f(x) = e^x(\tan x - x)$$

$$f'(x) = (e^x)(\sec^2 x - 1) + (\tan x - x)(e^x)$$

$$= e^x \tan^2 x + e^x \tan x - xe^x$$

4) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)(e^x)}{(e^x)^2} = \frac{-2\sin x}{e^x}$$

5) $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$

$$f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$$

$$f'(x) = (x^3)(\cos x) + (\sin x)(3x^2) + (x^2)(-\sin x) + (\cos x)(2x)$$

$$= x^3 \cos x + 2x^2 \sin x + 2x \cos x$$

6) $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3)$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3) = x^{\frac{5}{6}} + 3x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{2}{3}} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

7) $f(x) = \frac{1+\sec x}{1-\sec x}$

$$f(x) = \frac{1 + \sec x}{1 - \sec x}$$

$$f'(x) = \frac{(1 - \sec x)(\sec x \tan x) - (1 + \sec x)(-\sec x \tan x)}{(1 - \sec x)^2}$$

$$= \frac{2\sec x \tan x}{(1 - \sec x)^2}$$

8) $f(x) = \frac{2-\frac{1}{x}}{x-3}$

$$f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x}}{x - 3} = \frac{2x - 1}{x^2 - 3x}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 3x)(2) - (2x - 1)(2x - 3)}{(x^2 - 3x)^2} = \frac{-2x^2 + 2x - 3}{(x^2 - 3x)^2}$$

9) $f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$

$$f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$$

$$f'(x) = (x^3 - x)\big((x^2 + 2)(2x + 1) + (x^2 + x + 1)(2x)\big) + (x^2 + 2)(x^2 + x + 1)(3x^2 - 1)$$

$$= (x^3 - x)(x^2 + 2)(2x + 1) + (x^3 - x)(x^2 + x + 1)(2x) + (x^2 + 2)(x^2 + x + 1)(3x^2 - 1)$$

10) $f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1}$

$$f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1} = \frac{1}{\csc x + \cot x}$$

$$f'(x) = \frac{-1(-\csc x \cot x - \csc^2 x)}{(\csc x + \cot x)^2}$$

$$= \frac{\csc x \cot x + \csc^2 x}{(\csc x + \cot x)^2}$$

$$= \frac{\csc x\,(\cot x + \csc x)}{(\csc x + \cot x)^2}$$

$$= \frac{\csc x}{\cot x + \csc x}$$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 0$، وكان $g'(0) = 2$، $g(0) = -1$، $f'(0) = -3$، $f(0) = 5$، فأجد كُلا مما يأتي:

11) $(fg)'(0)$

$$(fg)'(0) = f(0)g'(0) + g(0)f'(0)$$
$$= 5 \times 2 - 1 \times -3 = 13$$

12) $(\frac{f}{g})'(0)$

$$(\frac{f}{g})'(0) = \frac{g(0)f'(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)} = \frac{-1 \times -3 - 5 \times 2}{(-1)^2} = -7$$

13) $(7f - 2fg)'(0)$

$$(7f - 2fg)'(0) = 7f'(0) - 2(fg)'(0) = 7(-3) - 2(13) = -47$$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

14) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}, x = -2$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$$
$$f'(x) = \frac{(x^2+4)(2x) - (x^2-4)(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{16x}{(x^2+4)^2}$$
$$f''(x) = \frac{(x^2+4)^2(16) - (16x)(2)(x^2+4)^1(2x)}{(x^2+4)^4}$$
$$= \frac{(16)(x^2+4) - (16x)(2)(2x)}{(x^2+4)^3}$$
$$f''(-2) = \frac{(16)(8) - (-32)(2)(-4)}{(8)^3} = -\frac{1}{4}$$

15) $f(x) = \frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}, x = 8$

$$f(x) = \frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}} = \frac{(1+\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{1+\sqrt[3]{x}} = 1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} - \frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

$$f''(8) = \frac{2}{9\sqrt[3]{8^5}} - \frac{2}{9\sqrt[3]{8^4}} = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{16}\right) = -\frac{1}{144}$$

16) $f(x) = \frac{1-x}{1+\sqrt{x}}, x = 4$

$$f(x) = \frac{1-x}{1+\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{-1(1+\sqrt{x}) - (1-x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{-2\sqrt{x}(1+\sqrt{x}) - (1-x)}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-2\sqrt{x}-2x-1+x}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} = -\frac{x+2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x) = -\frac{(1+\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$f''(4) = \frac{1}{4\sqrt{4^3}} = \frac{1}{32}$$

طريقة ثانية:

يمكن تبسيط $f(x) = \frac{1-x}{1+\sqrt{x}}$ بتحليل بسطه في صورة فرق بين مربعين واختصار العامل المشترك.

$$f(x) = \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}} = 1-\sqrt{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$f''(4) = \frac{1}{4\sqrt{4^3}} = \frac{1}{32}$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة:

17) $f(x) = \frac{1+x}{1+e^x}, (0, \frac{1}{2})$

$$f(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$$

$$f'(x) = \frac{(1+e^x)(1) - (1+x)(e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2}$$

ميل المماس عند النقطة $(0, \frac{1}{2})$ هو: $f'(0) = \frac{1}{4}$

معادلة المماس هي: $y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x-0) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

18) $f(x) = e^x \cos x + \sin x, (0, 1)$

$$f(x) = e^x \cos x + \sin x$$

$$f'(x) = (e^x)(-\sin x) + (\cos x)(e^x) + \cos x$$

ميل المماس عند النقطة $(0\ ,\ 1)$ هو:

$$f'(0) = (1)(0) + (1)(1) + 1 = 2$$

معادلة المماس هي:

$$y - 1 = 2(x-0) \Rightarrow y = 2x + 1$$

أثبت صحة كل مما يأتي مُعتمداً أن $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$, $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$:

19) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{(\sin x)(-\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

20) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

21) $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{-(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x \cot x$$

ألاحظ المشتقة المعطاة في كل مما يأتي، ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة:

22) $f''(x) = 2 - \frac{2}{x}, f'''(x)$

$$f''(x) = 2 - \frac{2}{x}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^2}$$

23) $f'''(x) = 2\sqrt{x}, f^{(4)}(x)$

$$f'''(x) = 2\sqrt{x}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

24) $f^{(4)}(x) = 2x + 1, f^{(6)}(x)$

$$f^{(4)}(x) = 2x + 1$$

$$f^{(5)}(x) = 2$$

$$f^{(6)}(x) = 0$$

25) نباتات هجينة: وجد فريق بحث زراعي أنه يُمكن التعبير عن ارتفاع نبتة مُهجنة من نبات تبّاع الشمس h بالأمتار، باستعمال الاقتران: $h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور.

أجد مُعدل تغيُّر ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن.

$$h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$$

$$h'(t) = \frac{(4+t^2)(6t)-(3t^2)(2t)}{(4+t^2)^2} = \frac{24t}{(4+t^2)^2}$$

إذا كان الاقتران: $y = e^x \sin x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

26) أجد $\frac{dy}{dx}$، و $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$y = e^x \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = (e^x)(\cos x) + (\sin x)(e^x) = e^x(\cos x + \sin x)$$

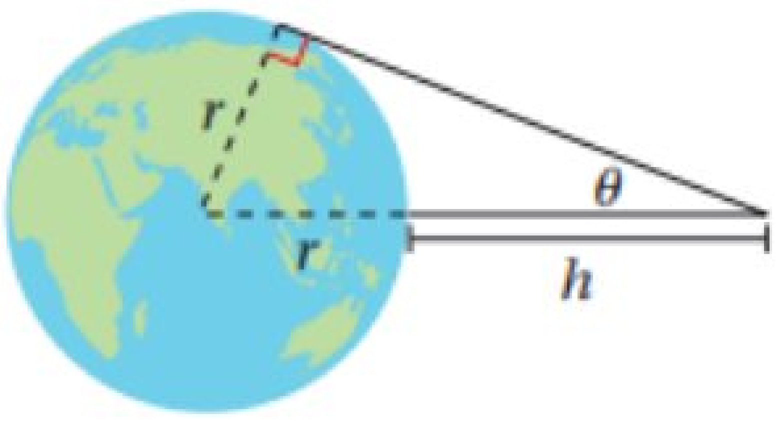
$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x(-\sin x + \cos x) + e^x(\cos x + \sin x) = 2e^x \cos x$$

27) أُثبت أن $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$

$$2\frac{dy}{dx} - 2y = 2e^x(\cos x + \sin x) - 2e^x \sin x$$
$$= 2e^x \cos x$$
$$= \frac{d^2y}{dx^2}$$

<u>أقمار صناعية</u>: عندما ترصد الأقمار الصناعية الأرض، فإنه يُمكنها مسح جزء فقط من سطح الأرض. وبعض الأقمار الصناعية تحوي مُستشعِرات لقياس الزاوية θ (بالراديان) المُبينة في الشكل المجاور.

إذا كان h يُمثل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومتر، و r يُمثل نصف قُطر الأرض بالكيلومتر، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:



28) أُثبت أنَّ $h = r(\cos\theta - 1)$

$$\cos\theta = \frac{r+h}{r} \Rightarrow r + h = r\csc\theta$$
$$\Rightarrow h = r(\cos\theta - 1)$$

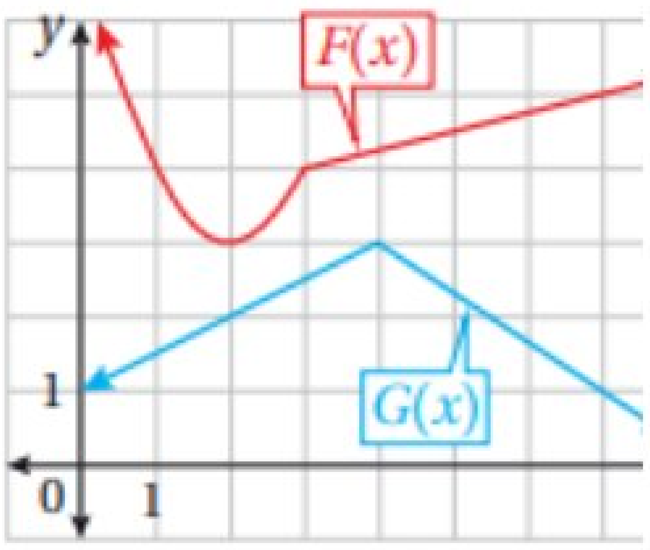
29) أجد مُعدل تغير h بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad (أفترض أنَّ $r = 6371\ km$)

$$\frac{dh}{d\theta} = r(-\csc\theta\cot\theta)$$
$$\frac{dh}{d\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 6371(-\csc\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{6})$$
$$= 6371(-2 \times \sqrt{3}) \approx -22070\ \text{km/rad}$$

30) إذا كان: $f(x) = 9\ \ln x + \frac{1}{2x^2}$، فأُثبِت أن $f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$.

$$f(x) = 9\ \ln x + \frac{1}{2x^2}$$
$$f'(x) = 9\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{-1(4x)}{4x^4}$$
$$= \frac{9}{x} - \frac{1}{x^3}$$
$$= \frac{9x^2 - 1}{x^3}$$
$$= \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$$

يُبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $F(x)$، و $G(x)$.



إذا كان: $P(x) = F(x)G(x)$، وكان: $Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$، فأجد كُلاً مما يأتي:

31) $P'(2)$

$$P'(2) = F(2)G'(2) + G(2)F'(2)$$

$G'(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2\,,2)$ و $(4\,,3)$ ويساوي $\frac{1}{2}$

$F'(2)$ ميل المماس الأفقي، ويساوي صفرًا

$$P'(2) = 3 \times \frac{1}{2} + 2 \times 0 = \frac{3}{2}$$

32) $Q'(7)$

$$Q'(7) = \frac{G(7)F'(7) - F(7)G'(7)}{G^2(7)} = \frac{1 \times \frac{1}{4} - 5 \times -\frac{2}{3}}{1} = \frac{43}{12}$$

<u>مهارات التفكير العليا:</u>

<u>تبرير</u>: إذا كان: $y = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

33) أجد ميل المماس عند نقطة الأصل.

$$y = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x + 1)(e^x) - (e^x - 1)(e^x)}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{2(1)}{(1 + 1)^2} = \frac{1}{2}$$

34) أُبين عدم وجود مماس أفقي للاقتران y، مُبررًا إجابتي.

إذا وجد مماس أفقي ميله يساوي صفراً، أي أنَّ: $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = 0$، وهذا لا يتحقق إلا إذا كان $e^x = 0$، ولكن $e^x > 0$ لجميع الأعداد الحقيقية x، ولذا لا يوجد لهذا المنحنى مماسات أفقية.

تحد: إذا كان: $y = \frac{x+1}{x-1}$، حيث: $x \neq 1$، فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

35) أجد $\frac{dy}{dx}$

$$y = \frac{x + 1}{x - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

36) أُعيد كتابة المعادلة بالنسبة إلى المُتغير x (x اقتران بالنسبة إلى y)، ثم أجد $\frac{dx}{dy}$.

$$y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow x+1 = y(x-1) \Rightarrow x(1-y) = -y-1$$

$$\Rightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2}$$

37) أبين أن $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2}$$

$$= \frac{-2}{(\frac{x+1}{x-1} - 1)^2}$$

$$= \frac{-2}{(\frac{2}{x-1})^2} = \frac{-2}{\frac{4}{(x-1)^2}} = \frac{(x-1)^2}{-2} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

<u>تبرير</u>: إذا كان: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

38) أُثبت أن $f''(x) = \frac{6\ \ln x - 5}{x^4}$، مُبررا إجابتي.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(2x)}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{x^3\left(-\frac{2}{x}\right) - (1 - 2\ln x)(3x^2)}{x^6}$$

$$= \frac{-5x^2 + 6x^2 \ln x}{x^6} = \frac{-5 + 6\ln x}{x^4}$$

39) أجد قيمة المقدار: $x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$

$$x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$$

$$= x^4 \times \frac{-5 + 6\ln x}{x^4} + 4x^3 \times \frac{1 - 2\ln x}{x^3} + 2x^2 \times \frac{\ln x}{x^2} + 1$$

$$= -5 + 6\ln x + 4 - 8\ln x + 2\ln x + 1 = 0$$

كتاب التمارين

الدرس الثاني – مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

2) $f(x) = -\csc x - \sin x$

$$f'(x) = \csc x \cot x - \cos x$$

3) $f(x) = \frac{x+c}{x+\frac{c}{x}}$

$$f(x) = \frac{x^2 + cx}{x^2 + c}, x \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{(2x+c)(x^2+c) - 2x(x^2+cx)}{(x^2+c)^2} = \frac{2cx - cx^2 + c^2}{(x^2+c)^2}, x \neq 0$$

4) $f(x) = x\cot x$

$$f'(x) = -x\csc^2 x + \cot x$$

5) $f(x) = 4x - x^2 \tan x$

$$f'(x) = 4 - x^2 \sec^2 x - 2x\tan x$$

6) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{-x^2 \sin x - 2x\cos x}{x^4} = \frac{-x\sin x - 2\cos x}{x^3}$$

7) $f(x) = x\left(1 - \frac{4}{x+3}\right)$

$$f(x) = x - \frac{4x}{x+3}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{4(x+3) - 4x}{(x+3)^2} = 1 - \frac{12}{(x+3)^2}$$

8) $f(x) = \frac{3(1-\sin x)}{2\cos x}$

$$f'(x) = \frac{-6\cos^2 x - (3 - 3\sin x)(-2\sin x)}{(2\cos x)^2} = \frac{-6 + 6\sin x}{4\cos^2 x}$$

9) $f(x) = (x+1)e^x$

$$f'(x) = (x+1)e^x + e^x = (x+2)e^x$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند النقطة المعطاة:

10) $f(x) = x^2 \cos x, \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$$f'(x) = -x^2 \sin x + 2x \cos x$$

ميل المماس: $f'(x) = -\frac{\pi^2}{4}$

معادلة المماس: $y - 0 = -\frac{\pi^2}{4}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = -\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^3}{8}$

11) $f(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x}, (\pi, -1)$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) + \sin x\,(1 + \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$$

ميل المماس: $f'(\pi) = \frac{1}{1} = 1$

معادلة المماس: $y + 1 = 1(x - \pi) \Rightarrow y = x - \pi - 1$

أجد إحداثيي النقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحنى كل اقتران مما يأتي مماس أفقي:

12) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x^2 + 2x}{x^4} = \frac{-2x + 2}{x^3} = 0 \Rightarrow \mathrm{x} = 1$$

النقطة المطلوبة هي: $(1, f(1)) = (1, 1)$

13) $h(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

$$h'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

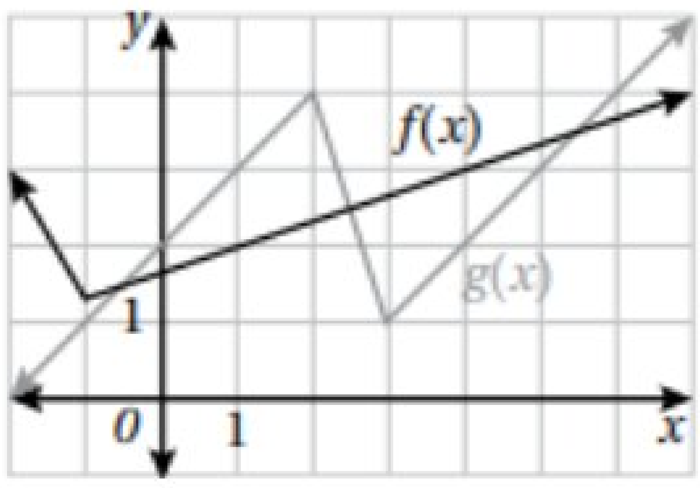
النقطة المطلوبة هي: $(0, h(0)) = (0, 0)$

14) $g(x) = \frac{8(x-2)}{e^x}$

$$g(x) = \frac{8(x-2)}{e^x}$$

$$g'(x) = \frac{8e^x - 8e^x(x-2)}{e^{2x}} = \frac{8e^x(3-x)}{e^{2x}} = \frac{8(3-x)}{e^x} = 0 \Rightarrow x = 3$$

النقطة المطلوبة هي: $(3, g(3)) = (3, \frac{8}{e^3})$



يُبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x)$، و $g(x)$.

إذا كان: $u(x) = f(x)g(x)$، وكان: $v(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$، فأجد كُلا مما يأتي:

15) $u'(1)$

$$u'(1) = f(1)g'(1) + g(1)f'(1) = 2 \times 1 + 3 \times \frac{1}{3} = 3$$

16) $v'(4)$

$$v'(4) = \frac{g(4)f'(4) - f(4)g'(4)}{(g(4))^2} = \frac{2 \times \frac{1}{3} - 3 \times 1}{(2)^2} = -\frac{7}{12}$$

17) إذا كان: $f(x) = x \sec x$، فأُثبت أن $f'(x) = \sec x\,(1 + x \tan x)$.

$$f'(x) = x \sec x \tan x + \sec x = \sec x\,(1 + x \tan x)$$

18) إذا كان: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$، حيث: $x > 0$، فأجد $f'(x)$، و $f''(x)$.

$$f'(x) = \frac{x \times \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{x^2 \times \frac{1}{x} - 2x \ln x}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$$

يُمثل الاقتران: $v(t) = \frac{10}{2t+15}$ سرعة سيارة بدأت الحركة في مسار مستقيم، حيث تقاس v بالقدم لكل ثانية.

19) أجد تسارع السيارة عندما $t = 5$

$$a(t) = \frac{-20}{(2t+15)^2}$$

$$a(5) = \frac{-20}{(10+15)^2} = -0.032 \text{ ft/s}^2$$

20) أجد تسارع السيارة عندما $t = 20$.

$$a(20) = \frac{-20}{(40+15)^2} \approx -0.007 \text{ ft/s}^2$$

21) يعطى طول مستطيل بالمقدار $6t + 5$، ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$، حيث t الزمن بالثواني، والأبعاد بالسنتيمترات. أجد مُعدل تغير مساحة المستطيل بالنسبة إلى الزمن.

$$A = \sqrt{t}(6t+5) = 6t^{\frac{3}{2}} + 5t^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dA}{dt} = 9t^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}t^{-\frac{1}{2}} = 9\sqrt{t} + \frac{5}{2\sqrt{t}} \text{ cm}^2/\text{s}$$

كتاب الطالب

الدرس الثالث – قاعدة السلسلة

مثال 1:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = cos\ 2x$

$f(x) = cos\ 2x$ الاقتران المعطى

$f'(x) = \frac{d}{dx}(cos\ 2x) = -sin\ 2x \times 2$ مشتقة $cos\ g(x)$ ، حيث: $g(x) = 2x$

$= -2\ sin\ 2x$ بالتبسيط

2) $f(x) = e^{(x+x^2)}$

$f(x) = e^{(x+x^2)}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{(x+x^2)}\right) = e^{(x+x^2)} \times (1+2x)$ مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = x + x^2$

3) $f(x) = \ln(\sin x)$

$f(x) = \ln(\sin x)$ الاقتران المعطى

$f'(x) = \frac{d}{dx}(\ln(\sin x)) = \frac{\cos x}{\sin x}$ مشتقة $\ln g(x)$، حيث: $g(x) = \sin x$

$= \cot x$ المتطابقات المثلثية النسبية

اتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

A) $f(x) = \tan 3x^2$

$f(x) = \tan 3x^2$

$f'(x) = 6x \sec^2(3x^2)$

B) $f(x) = e^{\ln x}$

$f(x) = e^{\ln x} = x$

$f'(x) = 1$

C) $f(x) = \ln(\cot x)$

$f(x) = \ln \cot x$

$$f'(x) = \frac{-\csc^2 x}{\cot x}$$

مثال 2:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

بكتابة الاقتران في صورة أُسية: $f(x) = (x^2-1)^{2/3}$

قاعدة سلسلة القوة: $f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \times \frac{d}{dx}(x^2-1)$

باشتقاق x^2-1: $= \frac{2}{3}(x^2-1)^{-1/3} \times 2x$

الصورة الجذرية: $= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$

2) $f(x) = \tan^4 x$

بإعادة كتابة الاقتران المعطى: $f(x) = \tan^4 x = (\tan x)^4$

قاعدة سلسلة القوة: $f'(x) = 4(\tan x)^3 \times \frac{d}{dx}(\tan x)$

باشتقاق $\tan x$: $= 4\tan^3 x \times \sec^2 x$

3) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

بكتابة الاقتران في صورة أُسية: $f(x) = \sqrt{\ln x} = (\ln x)^{1/2}$

قاعدة سلسلة القوة: $f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{d}{dx}(\ln x)$

باشتقاق $\ln x$: $= \frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{x}$

الصورة الجذرية: $= \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

اتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

A) $f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2}$

$$f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2} = (x^2-1)^{\frac{2}{5}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{5}(x^2-1)^{-\frac{3}{5}}(2x) = \frac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2-1)^3}}$$

B) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

$$f(x) = \sqrt{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$$

ⓒ $f(x) = (\ln x)^5$

$$f(x) = (\ln x)^5$$

$$f'(x) = 5(\ln x)^4(\frac{1}{x})$$

$$= \frac{5(\ln x)^4}{x}$$

مثال 3:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = e^{\csc 4x}$

الاقتران المعطى
$$f(x) = e^{\csc 4x}$$

مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = \csc 4x$
$$f'(x) = e^{\csc 4x} \times \frac{d}{dx}(\csc 4x)$$

مشتقة $\csc g(x)$، حيث: $g(x) = 4x$
$$= e^{\csc 4x} \times -\csc 4x \times \cot 4x \times \frac{d}{dx}(4x)$$

بالتبسيط
$$= -4e^{\csc 4x} \csc 4x \cot 4x$$

2) $f(x) = \sin(\tan\sqrt{3x^2+4})$

الاقتران المعطى
$$f(x) = \sin(\tan\sqrt{3x^2+4})$$

مشتقة $\sin g(x)$، حيث: $g(x) = \tan\sqrt{3x^2+4}$

$$f'(x) = \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \frac{d}{dx}(\tan\sqrt{3x^2+4})$$

مشتقة $\tan g(x)$، حيث: $g(x) = \sqrt{3x^2+4}$

$$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{d}{dx}(\sqrt{3x^2+4})$$

بكتابة $\sqrt{3x^2+4}$ في صورة أسية
$$= \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{d}{dx}(3x^2+4)^{\frac{1}{2}}$$

قاعدة سلسلة القوة
$$= \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{1}{2}(3x^2+4)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{d}{dx}(3x^2+4)$$

باشتقاق $3x^2+4$
$$= \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{1}{2}(3x^2+4)^{-\frac{1}{2}} \times 6x$$

الصورة الجذرية، والتبسيط

$$\frac{3x\cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4}}{\sqrt{3x^2+4}}$$

اتحقق من فهمي: أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

Ⓐ $f(x) = \cos^2(7x^3 + 6x - 1)$

$f(x) = \cos^2(7x^3 + 6x - 1) = (\cos(7x^3 + 6x - 1))^2$

$f'(x) = 2(\cos(7x^3 + 6x - 1))^1(-\sin(7x^3 + 6x - 1)(21x^2 + 6))$

$= -2(21x^2 + 6)\sin(7x^3 + 6x - 1)\cos(7x^3 + 6x - 1)$

$= -(21x^2 + 6)\sin 2(7x^3 + 6x - 1)$

Ⓑ $f(x) = (2 + (x^2 + 1)^4)^3$

$f(x) = (2 + (x^2 + 1)^4)^3$

$f'(x) = 3(2 + (x^2 + 1)^4)^2(4(x^2 + 1)^3(2x))$

$= 24x(x^2 + 1)^3(2 + (x^2 + 1)^4)^2$

مثال 4:

1) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$ عندما $x = \frac{\pi}{8}$.

الاقتران المعطى	$f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$
قاعدة مشتقة الضرب	$f'(x) = e^{-0.2x}\frac{d}{dx}(\sin 4x) + \sin 4x\frac{d}{dx}(e^{-0.2x})$
قاعدة السلسلة	$= e^{-0.2x} \times 4\cos 4x + \sin 4x \times -0.2e^{-0.2x}$
بإعادة كتابة الاقتران	$= 4e^{-0.2x}\cos 4x - 0.2e^{-0.2x}\sin 4x$
بتعويض $x = \frac{\pi}{8}$	$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4e^{-0.2(\frac{\pi}{8})}\cos 4\left(\frac{\pi}{8}\right) - 0.2e^{-0.2(\frac{\pi}{8})}\sin 4(\frac{\pi}{8})$
بالتبسيط	$= -0.2e^{-0.25\pi}$

2) أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = (\frac{3x-1}{x^2+3})^2$ عندما $x = 0$.

الاقتران المعطى	$f(x) = (\frac{3x-1}{x^2+3})^2$
قاعدة سلسلة القوة	$f'(x) = 2(\frac{3x-1}{x^2+3}) \times \frac{d}{dx}(\frac{3x-1}{x^2+3})$
قاعدة مشتقة القسمة	$= 2(\frac{3x-1}{x^2+3}) \times (\frac{(x^2+3)(3)-(3x-1)(2x)}{(x^2+3)^2}$
بالتبسيط	$= \frac{2(3x-1)(-3x^2+2x+9)}{(x^2+3)^3}$
بتعويض $x = 0$	$f'(0) = \frac{2(3(0)-1)(-3(0)^2+2(0)+9)}{((0)^2+3)^3}$
بالتبسيط	$= \frac{-18}{27} = \frac{-2}{3}$

إذن ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$ هو: $\frac{-2}{3}$. ومنه، فإن ميل العمودي على المماس عندما $x = 0$ هو: $\frac{3}{2}$

اتحقق من فهمي:

Ⓐ أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = (2x+1)^5(x^3-x+1)^4$ عندما $x = 1$.

$$f(x) = (2x+1)^5(x^3-x+1)^4$$

$$f'(x) = (2x+1)^5(4)(x^3-x+1)^3(3x^2-1) + (x^3-x+1)^4(5)(2x+1)^4(2)$$

$$f'(1) = (3)^5(4)(1)^3(2) + (1)^4(5)(3)^4(2) = 2754$$

Ⓑ أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = \frac{\cos^2 x}{e^{2x}}$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$.

$$f(x) = \frac{(\cos x)^2}{e^{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} \times 2(\cos x)^1(-\sin x) - (\cos x)^2 \times 2e^{2x}}{e^{4x}}$$

$$= \frac{-\sin 2x - 2(\cos x)^2}{e^{2x}}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\sin \pi - 2(\cos \frac{\pi}{2})^2}{e^{\pi}} = 0$$

ميل المماس يساوي صفرا أي أن المماس أفقي، ومنه يكون العمودي على المماس رأسياً وميلع غير معرف.

مثال 5: من الحياة

أعمال: طرحت إحدى الشركات مُنتجا جديداً في الأسواق، ثم رصدت عدد القطع المبيعة منذ طرحه.

إذا مثّل الاقتران: $N(t) = \frac{250000\, t^2}{(2t+1)^2}$ عدد القطع المبيعة منذ طرحة، حيث t الزمن بالأسابيع، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

1) أجد مُعدل تغير عدد القطع المبيعة بالنسبة إلى الزمن.

أجد $N'(t)$:

$N(t) = \frac{250000\, t^2}{(2t+1)^2}$	الاقتران المعطى
$N'(t) = \frac{(2t+1)^2 \frac{d}{dt}(250000\, t^2) - (250000\, t^2)\frac{d}{dt}(2t+1)^2}{((2t+1)^2)^2}$	قاعدة مشتقة القسمة
$= \frac{(2t+1)^2(500000\, t) - (250000\, t^2)2(2t+1)\times 2}{(2t+1)^4}$	قاعدتا مشتقة اقتران القوة، ومشتقة السلسلة
$= \frac{(2t+1)^2(500000\, t) - (1000000\, t^2)(2t+1)}{(2t+1)^4}$	بالتبسيط
$= \frac{(2t+1)(500000\, t)((2t+1) - 2t)}{(2t+1)^4}$	بإخراج العامل المشترك
$= \frac{500000\, t}{(2t+1)^3}$	بقسمة البسط والمقام على $(2t+1)$

2) أجد $N'(52)$، مُفسراً معنى الناتج.

أجد $N'(52)$:

مشتقة الاقتران $N(t)$ $\quad N'(t)=\frac{500000\,t}{(2t+1)^3}$

بتعويض $t=52$ $\quad N'(52)=\frac{500000\,(52)}{(2(52)+1)^3}$

باستعمال الآلة الحاسبة $\quad \approx 22$

إذن، $N'(52)=22$، وهذا يعني أن إجمالي عدد القطع المبيعة من المُنتج يزداد بمُعدل 22 قطعة لكل أسبوع بعد مرور 52 أسبوعاً على طرح المُنتج في الأسواق.

اتحقق من فهمي:

تُحسب قيمة بدل الخدمة لأحد المُنتجات بالدينار باستعمال الاقتران: $U(x)=80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$، حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج:

Ⓐ أجد مُعدل تغير قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المبيعة من المُنتج.

$$U(x)=80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$$

$$U'(x)=80\times\frac{\frac{(3x+4)(2)-(2x+1)(3)}{(3x+4)^2}}{2\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}}=\frac{200}{(3x+4)^2}\sqrt{\frac{3x+4}{2x+1}}$$

Ⓑ أجد $U'(20)$، مفسرا معنى الناتج.

$$U'(20)=\frac{200}{(64)^2}\sqrt{\frac{64}{41}}\approx 0.061$$

وهذا يعنيي أنه عند بيع 20 قطعو فإن قيمة بدل الخدمة تتزايد بمقدار 0.061 دينار/ قطعة.

مثال 6:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x)=8^{5x}$

الاقتران المعطى $\quad f(x)=8^{5x}$

مشتقة $a^{g(x)}$ $\quad f'(x)=(\ln 8)\,8^{5x}(5)=(5\ln x)8^{5x}$

2) $f(x) = 6^{x^2}$

$f(x) = 6^{x^2}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = (\ln 6)6^{x^2}(2x) = (2x \ln 6)6^{x^2}$ مشتقة $a^{g(x)}$

3) $f(x) = e^{3x} + 2^{3x}$

$f(x) = e^{3x} + 2^{3x}$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 3^{3x} + (3 \ln 2)2^{3x}$ مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = 3x$، ومشتقة $a^{g(x)}$، وقاعدة مشتقة المجموع

اتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

Ⓐ $f(x) = \pi^{\pi x}$

$f(x) = \pi^{\pi x}$

$f'(x) = (\pi \ln \pi)\pi^{\pi x} = \pi^{\pi x+1} \ln \pi$

Ⓑ $f(x) = 6^{1-x^3}$

$f(x) = 6^{1-x^3}$

$f'(x) = (-3x^2 \ln 6)6^{1-x^3}$

Ⓒ $f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$

$f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$

$f'(x) = 4e^{4x} + (2 \ln 4)4^{2x}$

مثال 7:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = \log \cos x$

$f(x) = \log \cos x$ الاقتران المعطى

$f'(x) = \dfrac{-\sin x}{(\ln 10)\cos x}$ مشتقة $\log_a g(x)$

$= -\dfrac{\tan x}{\ln 10}$ المتطابقات النسبية

2) $f(x) = \log_2(\frac{x^2}{x-1})$

$f(x) = \log_2(\frac{x^2}{x-1}) = \log_2 x^2 - \log_2(x-1)$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$f'(x) = \frac{2x}{(\ln 2)x^2} - \frac{1}{(\ln 2)(x-1)}$ مشتقة $\log_a g(x)$ ، وقاعدة مشتقة الطرح

$= \frac{2}{(\ln 2)x} - \frac{1}{(\ln 2)(x-1)}$ بالتبسيط

اتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

Ⓐ $f(x) = \log \sec x$

$f(x) = \log \sec x$

$f'(x) = \frac{\sec x \tan x}{\ln 10 \sec x} = \frac{\tan x}{\ln 10}$

Ⓑ $f(x) = \log_8(x^2 + 3x)$

$f(x) = \log_8(x^2 + 3x)$

$f'(x) = \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x)\ln 8}$

مثال 8:

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = \frac{\pi}{4}$:

$$x = 2\sin t,\quad y = 3\cos t,\quad 0 \le t \le 2\pi$$

الخطوة 1:

أجد ميل المماس عندما $t = \frac{\pi}{4}$:

$\frac{dx}{dt} = 2\cos t$ بإيجاد مشتقة x بالنسبة إلى المتغير t

$\frac{dy}{dt} = -3\sin t$ بإيجاد مشتقة y بالنسبة إلى المتغير t

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ مشتقة المعادلة الوسيطية

$= \frac{-3\sin t}{2\cos t}$ بتعويض $\frac{dx}{dt} = 2\cos t$ ، $\frac{dy}{dt} = -3\sin t$

$= -\frac{3}{2}\tan t$ المتطابقات النسبية

$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{2}\tan\frac{\pi}{4}$ بتعويض $t = \frac{\pi}{4}$

$= -\frac{3}{2}$ بإيجاد الناتج

الخطوة 2:

أجد x و y عندما $t = \frac{\pi}{4}$

بتعويض $t = \frac{\pi}{4}$ $\quad x = 2\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

بتعويض $t = \frac{\pi}{4}$ $\quad y = 3\cos\frac{\pi}{4} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

إذن، $x = \frac{2}{\sqrt{2}}$ ،$y = \frac{3}{\sqrt{2}}$

الخطوة 3:

أجد معادلة المماس.

معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$

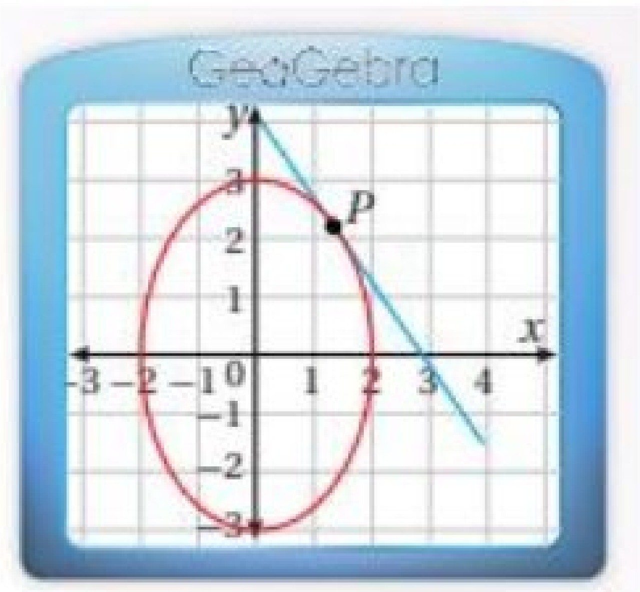
بتعويض $x_1 = \frac{2}{\sqrt{2}}, y_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}, m = -\frac{3}{2}$ $\quad y - \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

بإعادة كتابة المعادلة $\quad 2y + 3x = 6\sqrt{2}$

الدعم البياني:

يُبيين الشكل المجاور التمثيل البياني لمنحنى المعادلة الوسيطية: $x = 2\sin t, y = 3\cos t$،

حيث: $0 \le t \le 2\pi$، ومماس المنحنى عند النقطة $P(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$.



يُمكن تمثيل المعادلة الوسيطية باستعمال برمجية جيوجبرا،

عن طريق كتابة الصيغة الآتية في شريط الإدخال، ثم الضغط على ↵:

$$\text{curve}\,(2\sin t, 3\cos t, t, 0, 2\pi)$$

اتحقق من فهمي:

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = \frac{\pi}{4}$:

$$x = \sec t, \quad y = \tan t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t, \frac{dx}{dt} = \sec t \tan t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t}$$

$$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sec\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$x = \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}, y = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

معادلة المماس هي: $y - 1 = \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \Rightarrow y = \sqrt{2}x - 1$

أتدرب وأحل المسائل

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = e^{4x+2}$

$f(x) = e^{4x+2}$

$f'(x) = 4e^{4x+2}$

2) $f(x) = 50\, e^{2x-10}$

$f(x) = 50\, e^{2x-10}$

$f'(x) = 100e^{2x-10}$

3) $f(x) = \cos\,(x^2 - 3x - 4)$

$f(x) = \cos\,(x^2 - 3x - 4)$

$f'(x) = -(2x-3)\sin(x^2 - 3x - 4) = (3-2x)\sin(x^2 - 3x - 4)$

4) $f(x) = 10x^2 e^{-x^2}$

$f(x) = 10x^2 e^{-x^2}$

$f'(x) = (10x^2)\left(-2xe^{-x^2}\right) + \left(e^{-x^2}\right)(20x) = 20xe^{-x^2}(1-x^2)$

5) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = -\frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

6) $f(x) = x^2 \tan\frac{1}{x}$

$$f(x) = x^2 \tan\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = (x^2)\left(-\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}\right) + (\tan\frac{1}{x})(2x)$$

$$= -\sec^2\frac{1}{x} + 2x\tan\frac{1}{x}$$

0795153669

7) $f(x) = 3x - 5\cos(\pi x)^2$

$$f(x) = 3x - 5\cos(\pi x)^2$$

$$f'(x) = 3 + 5(2)(\pi x)(\pi)\sin(\pi x)^2 = 3 + 10\pi^2 x\sin(\pi x)^2 f(x) = \ln(\frac{1+e^x}{1-e^x})$$

$$f(x) = \ln(\frac{1+e^x}{1-e^x}) = \ln(1+e^x) - \ln(1-e^x)$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^x}{1-e^x} = \frac{2e^x}{1-e^{2x}}$$

8) $f(x) = (\ln x)^4$

$$f(x) = (\ln x)^4$$

$$f'(x) = \frac{4}{x}(\ln x)^3$$

9) $f(x) = \sin\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x}$

$$f(x) = \sin\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cos\sqrt[3]{x} + \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

10) $f(x) = \sqrt[5]{x^2+8x}$

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2+8x} = (x^2+8x)^{\frac{1}{5}}$$

$$f'(x) = \frac{2x+8}{5\sqrt[5]{(x^2+8x)^4}}$$

11) $f(x) = \frac{3^{2x}}{x}$

$$f(x) = \frac{3^{2x}}{x}$$

$$f'(x) = \frac{(x)(2\ln 3)3^{2x} - 3^{2x}}{x^2} = \frac{(-1+2x\ln 3)3^{2x}}{x^2}$$

12) $f(x) = 2^{-x}\cos\pi x$

$$f(x) = 2^{-x}\cos\pi x$$

$$f'(x) = (2^{-x})(-\pi\sin\pi x) + (\cos\pi x)(-\ln 2)2^{-x}$$

$$= -\pi 2^{-x}\sin\pi x - 2^{-x}(\cos\pi x)\ln 2$$

13) $f(x)=\frac{10\log_4 x}{x}$

$$f(x)=\frac{10\log_4 x}{x}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{10x}{x\ln 4}-10\log_4 x}{x^2}=\frac{\frac{10}{\ln 4}-10\log_4 x}{x^2}$$

14) $f(x)=(\frac{\sin x}{1+\cos x})^2$

$$f(x)=(\frac{\sin x}{1+\cos x})^2$$

$$f'(x)=2(\frac{\sin x}{1+\cos x})^1\times\frac{(1+\cos x)(\cos x)-(\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$=2\times\frac{\sin x}{1+\cos x}\times\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$=2\times\frac{\sin x}{1+\cos x}\times\frac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

15) $f(x)=\log_3(1+x\ln x)$

$$f(x)=\log_3(1+x\ln x)$$

$$f'(x)=\frac{(x)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(1)}{(\ln 3)(1+x\ln x)}=\frac{1+\ln x}{(\ln 3)(1+x\ln x)}$$

16) $f(x)=e^{\sin 2x}+\sin(e^{2x})$

$$f(x)=e^{\sin 2x}+\sin(e^{2x})$$

$$f'(x)=2e^{\sin 2x}\cos 2x+2e^{2x}\cos(e^{2x})$$

17) $f(x)=\tan^4(\sec(\cos x))$

$$f(x)=\tan^4(\sec(\cos x))=(\tan(\sec(\cos x)))^4$$

$$f'(x)=4(\tan(\sec(\cos x)))^3\sec^2(\sec(\cos x))\times\sec(\cos x)\tan(\cos x)\times(-\sin x)$$

$$=-4\tan^3(\sec(\cos x))\sec^2(\sec(\cos x))\sec(\cos x)\tan(\cos x)\sin x$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

18) $f(x) = 4e^{-0.5x^2}, x = -2$

$f(x) = 4e^{-0.5x^2}$

$f(-2) = 4e^{-0.5(-2)^2} = \frac{4}{e^2}$

$f'(x) = -4xe^{-0.5x^2}$

ميل المماس هو: $m = f'(-2) = -4(-2)e^{-0.5(-2)^2} = \frac{8}{e^2}$

معادلة المماس هي: $y - \frac{4}{e^2} = \frac{8}{e^2}(x+2) \Rightarrow y = \frac{8}{e^2}x + \frac{20}{e^2}$

19) $f(x) = x + \cos 2x, x = 0$

$f(x) = x + \cos 2x$

$f(0) = 0 + \cos(0) = 1$

$f'(x) = 1 - 2\sin 2x$

ميل المماس هو: $m = f'(0) = 1 - 2\sin 2(0) = 1$

معادلة المماس هي: $y - 1 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 1$

20) $f(x) = 2^x, x = 0$

$f(x) = 2^x$

$f(0) = 2^0 = 1$

$f'(x) = (\ln 2)2^x$

ميل المماس هو: $m = f'(0) = (\ln 2)\, 2^0 = \ln 2$

معادلة المماس هي: $y - 1 = (\ln 2)(x - 0) \Rightarrow y = (\ln 2)x + 1$

21) $f(x) = \sqrt{x+1}\,\sin\frac{\pi x}{2}, x = 3$

$f(x) = \sqrt{x+1}\,\sin\frac{\pi x}{2}$

$f(3) = 2\sin\frac{3\pi}{2} = -2$

$f'(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right) + (\sin\frac{\pi x}{2})(\frac{1}{2\sqrt{x+1}})$

ميل المماس هو: $m = f'(3) = (2)(0) + (-1)\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$

معادلة المماس هي: $y + 2 = -\frac{1}{4}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$

22) إذا كان: $f(-2)=8, f'(-2)=4, f'(5)=3, g(5)=-2, g'(5)=6$، فأوجد $A'(5)$.

$$A(x)=f(g(x))$$
$$A'(x)=f'(g(x))\times g'(x)$$
$$A'(5)=f'(g(5))\times g'(5)$$
$$=f'(-2)\times g'(5)$$
$$=4\times 6=24$$

23) إذا كان: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$، فأثبت أن $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)(1)-(x)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$$
$$=\frac{\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$$
$$=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

بكتريا: يُمثل الاقتران: $A(t)=Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:

24) أجد مُعدل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N.

$$A(t)=Ne^{0.1t}$$
$$A'(t)=0.1Ne^{0.1t}$$
$$A'(3)=0.1Ne^{0.3}$$

25) إذا كان مُعدل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة، فما قيمة k بدلالة الثابت N؟

$$A'(k)=0.1Ne^{0.1k}$$
$$0.2=0.1Ne^{0.1k}$$
$$e^{0.1k}=\frac{0.2}{0.1N}=\frac{2}{N}$$
$$0.1k=\ln\frac{2}{N}\Rightarrow k=10\ln\frac{2}{N}$$

أجد المشتقة العليا المطلوبة في كل مما يأتي:

26) $f(x) = \sin \pi x, f'''(x)$

$f(x) = \sin \pi x$

$f'(x) = \pi \cos \pi x$

$f''(x) = -\pi^2 \sin \pi x$

$f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x$

27) $f(x) = \cos(2x+1), f^{(5)}(x)$

$f(x) = \cos(2x+1)$

$f'(x) = -2 \sin(2x+1)$

$f''(x) = -4 \cos(2x+1)$

$f'''(x) = 8 \sin(2x+1)$

$f^{(4)}(x) = 16 \cos(2x+1)$

$f^{(5)}(x) = -32 \sin(2x+1)$

28) $f(x) = \cos x^2, f''(x)$

$f(x) = \cos x^2$

$f'(x) = -2x \sin x^2$

$f''(x) = (-2x)(2x \cos x^2) + (\sin x^2)(-2)$

$= -4x^2 \cos x^2 - 2 \sin x^2$

29) إذا كان الاقتران: $y = e^{\sin x}$، فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0, 1)$.

$y = e^{\sin x}$

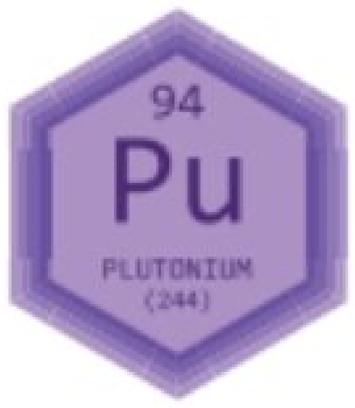
$\frac{dy}{dx} = e^{\sin x} \cos x$

ميل المماس هو:

$m = \frac{dy}{dx}|_{x=0} = e^{\sin x} \cos 0 = 1$

30) مواد مُشعة: يُمكن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها الابتدائية $20g$ من عنصر البلوتونيوم بعد t يوما باستعمال الاقتران: $A(t) = 20(\frac{1}{2})^{t/140}$.

أجد معدل تحلل عنصر البلوتونيوم عندما $t = 2$.



$$A(t) = 20(\frac{1}{2})^{t/140}$$

$$A'(t) = \frac{20}{140}(\ln\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^{t/140}$$

$$A'(2) = \frac{20}{140}(\ln\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^{\frac{2}{140}} \approx -0.098$$

إذن يتحلل البلوتونيوم بمعدل 0.098g كل يوم عندما $t = 2$.

زنبرك: تتحرك كرة مُعلقة بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُحدد الاقتران: $s(t) = 0.1\, sin\, 2.4t$ موقع الكرة عند أي زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالسنتيمترات:

31) أجد سرعة الكرة عندما $t = 1$.

$$s(t) = 0.1\, sin\, 2.4t$$

$$v(t) = 2.4 \times 0.1\, cos\, 2.4t = 0.24\, cos\, 2.4\, t$$

$$v(1) = 0.24\, cos\, 2.4 \approx -0.177 \text{ cm/s}$$

32) أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفراً.

$$v(t) = 0 \Rightarrow 0.24\, cos\, 2.4t = 0 \Rightarrow cos\, 2.4t = 0$$

وهذا يعني أن: $|sin\, 2.4t| = 1$

أي أن: $\sin 2.4t = 1, or -1$

لكن موقع الكرة هو: $s(t) = 0.1\, sin\, 2.4\, t$

وبتعويض قيمة $sin\, 2.4t$ نجد أن الموقع هو:

$$s = 0.1(1) = 0.1\ or,\ \ s = 0.1(-1) = -0.1$$

إذن، عندما تكون سرعة الكرة صفراً يكون موقعها عند $0.1\ cm$ أو $-0.1\ cm$

33) أجد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفراً.

$$a(t) = -0.24 \times 2.4\, sin\, 2.4t = -0.576\, sin\, 2.4t$$

$$a(t) = 0 \Rightarrow sin\, 2.4t = 0$$

لكن موقع الكرة هو: $s(t) = 0.1\, sin\, 2.4t$

وبتعويض قيمة $sin\, 2.4t$ نجد أن الموقع هو: $s = 0.1(0) = 0$

إذن، عندما يكون تسارع الكرة صفراً يكون موقعها عند $s = 0$، أي عند مرورها بموقع الاتزان.

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية مما يأتي عند النقطة المُحددة بقيمة t المعطاة:

34) $x = t + 2, y = t^2 - 1, t = 1$

$$\frac{dy}{dt} = 2t, \frac{dx}{dt} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{1} = 2t$$

ميل المماس: $m = \frac{dy}{dx}|_{t=1} = 2 \times 1 = 2$

نقطة التماس: $x = 1 + 2 = 3, y = (1)^2 - 1 = 0$

معادلة المماس: $y - 0 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 6$

35) $x = \frac{t}{2}, y = t^2 - 4, t = -1$

$$\frac{dy}{dt} = 2t, \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{\frac{1}{2}} = 4t$$

ميل المماس: $m = \frac{dy}{dx}|_{t=-1} = 4 \times -1 = -4$

نقطة التماس: $x = -\frac{1}{2}, y = (-1)^2 - 4 = -3$

معادلة المماس: $y + 3 = -4\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -4x - 5$

36) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t = \frac{\pi}{3}$

$$\frac{dy}{dt} = \sin t, \frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

ميل المماس: $m = \frac{dy}{dx}|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

نقطة التماس: $x = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}, y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

معادلة المماس: $y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 2$

37) $x = sec^2 t - 1, y = tan\, t, t = -\frac{\pi}{4}$

$$\frac{dy}{dt} = sec^2 t, \quad \frac{dx}{dt} = 2 \times sec\, t \times sec\, t\, tan\, t = 2sec^2 t\, tan\, t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{sec^2 t}{2sec^2 t\, tan\, t} = \frac{1}{2} \cot t$$

ميل المماس: $m = \frac{dy}{dx}|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

نقطة التماس: $x = sec^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 1 = 1, y = tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$

معادلة المماس: $y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

38) يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = 2(t - sin\, t), y = 2(1 - cos\, t)$، حيث: $0 \leq t \leq 2\pi$. أثبت أن ميل المماس وميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما $t = \frac{\pi}{4}$ هما: $1 + \sqrt{2}$، و $1 - \sqrt{2}$ على الترتيب.

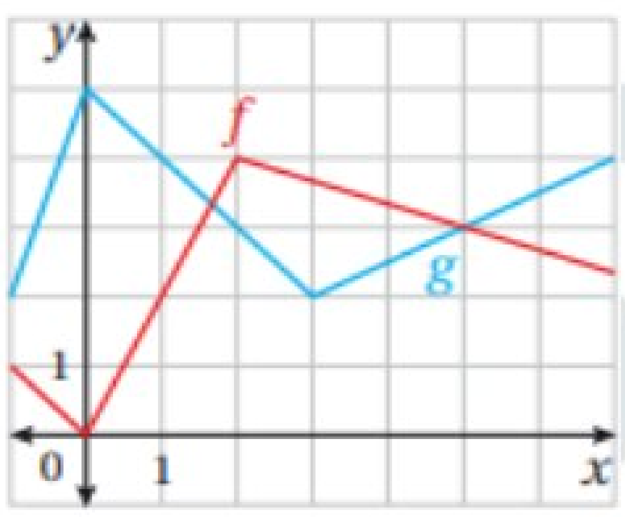
$$\frac{dy}{dt} = 2\, sin\, t, \quad \frac{dx}{dt} = 2(1 - cos\, t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\, sin\, t}{2(1 - cos\, t)} = \frac{sin\, t}{1 - cos\, t}$$

ميل المماس: $m = \frac{dy}{dx}|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{sin\frac{\pi}{4}}{1 - cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} + 1$

ميل العمودي على المماس: $m = \frac{-1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = 1 - \sqrt{2}$

يُبين الشكل المجاور منحنى الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان:
$h(x) = f(g(x))$، وكان: $p(x) = g(f(x))$، فأجد كُلا مما يأتي:



39) $h'(1)$

$h(x) = f(g(x))$

$h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$

$h'(1) = f'(g(1)) \times g'(1) = f'(4) \times g'(1)$

$g'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,2)$ و $(0,5)$ ويساوي 1-

$f'(4)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(5,3)$ و $(2,4)$ ويساوي $\frac{1}{3}$-

$h'(1) = -\frac{1}{3} \times -1 = \frac{1}{3}$

40) $p'(1)$

$$p(x) = g(f(x))$$
$$p'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$
$$p'(1) = g'\big(f(1)\big) \times f'(1) = g'(2) \times f'(1)$$

$g'(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (3,2) و (0,5) ويساوي 1-
$f'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (0,0) و (2,4) ويساوي 2

$$p'(1) = -1 \times 2 = -2$$

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان الاقتران: $y = \ln(ax+b)$، حيث a و b ثابتان موجبان، وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة p هو 1، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

41) أُثبت أن الإحداثي x للنقطة P أقل من 1

$$y = \ln(ax+b)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b}$$

ليكن إحداثيا P هما (x_1, y_1)، فيكون ميل المماس عند P هو:

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_1} = \frac{a}{ax_1+b} \Rightarrow \frac{a}{ax_1+b} = 1$$
$$\Rightarrow a = ax_1 + b$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$$

المقدار $\left(1 - \frac{b}{a}\right)$ أقل من 1 لأن $\frac{b}{a}$ مقدار موجب كون a, b موجبين.
إذن، الإحداثي x للنقطة P أقل من 1

42) أجد قيمة كل من a و b، علما بأن p هي النقطة (0,2)، ثم أُبرر إجابتي.

$$y = f(x) = \ln(ax+b)$$
$$y' = f'(x) = \frac{a}{ax+b}$$

ميل المماس عند $p(0,2)$ يساوي 1، أي أن: $f'(0) = 1$

$$f'(0) = \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$$
$$f(0) = \ln b = 2 \Rightarrow b = e^2$$
$$\Rightarrow a = b = e^2$$

43) أجد إحداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$

افترض أن النقطة التي ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{2}$ هي (x_1, y_1)، بتعويض قيمة كل من a، و b نجد أن:

$$f(x) = \ln(e^2x + e^2) = \ln\big(e^2(x+1)\big) = 2 + \ln(x+1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(x_1) = \frac{1}{x_1+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 1$$

$$y_1 = f(x_1) = f(1) = \ln(e^2 + e^2) = \ln(2e^2) = \ln 2 + \ln e^2 = \ln 2 + 2$$

إذن، النقطة التي ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{2}$ هي $(1, 2+\ln 2)$.

تبرير: يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = t^2, y = 2t$:

44) أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t

$$\frac{dy}{dt} = 2, \frac{dx}{dt} = 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$$

45) أجد معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(t^2, 2t)$.

ميل المماس:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$$

ميل العمودي على المماس:

$$m = \frac{-1}{\frac{1}{t}} = -t$$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - 2t = -t(x - t^2) \Rightarrow y = -tx + t^3 + 2t$$

46) أثبت أن مساحة المثلث المُكون من العمودي على المماس، والمحورين الإحداثيين، هي $\frac{1}{2}|t|(2+t^2)^2$.

لإيجاد المقطع x للعمودي على المماس نضع $y = 0$ في معادلته:

$$0 = -tx + t^3 + 2t \Rightarrow x = \frac{t^3+2t}{t} = t^2 + 2$$

لإيجاد المقطع y للعمودي على المماس نضع $x = 0$:

$$y = -t(0) + t^3 + 2t = t^3 + 2t$$

مساحة المثلث:

$$A = \frac{1}{2}|t^2+2||t^3+2t|$$
$$= \frac{1}{2}|t^2+2||t(t^2+2)|$$
$$= \frac{1}{2}|t(t^2+2)^2|$$
$$= \frac{1}{2}|t|(t^2+2)^2$$

تحد: أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

47) $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$

$$y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}} = \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}} = \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$$

48) $y = e^x \sin^2 x \cos x$

$$y = e^x \sin^2 x \cos x = (e^x \sin^2 x)(\cos x)$$

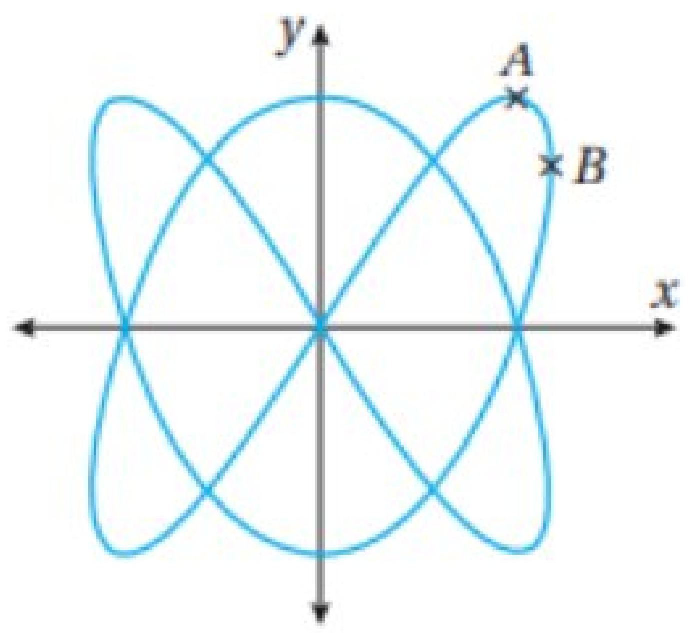
$$\frac{dy}{dx} = (e^x \sin^2 x\,(-\sin x) + (\cos x)((e^x)(2\sin x\cos x) + (\sin^2 x)(e^x))$$

$$= -e^x \sin^3 x + 2e^x \cos^2 x \sin x + e^x \cos x \sin^2 x$$

تحد: يُبين الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = \sin 2t, \quad y = \sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

49) إذا كان مماس منحنى المعادلة أفقيا عند النقطة A الواقعة في الربع الأول، فأجد إحداثيي A.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t} = 0$$

$$\Rightarrow \cos 3t = 0 \Rightarrow 3t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$$

$$x_A = \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_A = \sin 3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

إذن، إحداثيا A هما $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$

50) إذا كان مماس المنحنى موازياً للمحور y عند النقطة B، فأجد إحداثيي B.

عند النقطة B يكون المماس موازياً لمحور y، أي أن ميله غير معرف، ومنه يكون:

$$\cos 2t = 0 \Rightarrow 2t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$x_B = \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$y_B = \sin 3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

إذن، إحداثيا B هما $(1, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

51) إذا مر فرعان من المنحنى بنقطة الأصل كما هو موضح في الشكل، فأجد ميل المماس لكل منهما عند هذه النقطة.

عند نقطة الأصل $x = y = 0$

أي أن: $\sin 2t = \sin 3t = 0$

تتحقق هاتان المعادلتان معا عندما $t = 0$، وعندها يكون ميل المماس:

$$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=0} = \frac{3\cos 3(0)}{2\cos 2(0)} = \frac{3\cos 0}{2\cos 0} = \frac{3}{2}$$

كما تتحققان أيضا عندما $t = \pi$، وعندها يكون ميل المماس:

$$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{t=\pi} = \frac{3\cos 3\pi}{2\cos 2\pi} = \frac{3\cos \pi}{2\cos 0} = \frac{-3}{2}$$

تبرير: يُمثل الاقتران: $s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9), t \geq 0$ موقع جُسيم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

52) أجد سرعة الجُسيم وتسارعه بعد t ثانية.

$$s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9)$$
$$v(t) = \frac{2t - 2}{t^2 - 2t + 1.9}$$
$$a(t) = \frac{(t^2 - 2t + 1.9)(2) - (2t - 2)(2t - 2)}{(t^2 - 2t + 1.9)^2} = \frac{-2t^2 + 4t - 0.2}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$$

53) أجد موقع الجُسيم وتسارعه عندما تكون سرعته صفراً.

$$v(t) = 0 \Rightarrow 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1$$
$$s(1) = \ln(1 - 2 + 1.9) = \ln 0.9 \text{ m}$$
$$a(1) = \frac{-2 + 4 - 0.2}{(1 - 2 + 1.9)^2} = \frac{1.8}{(0.9)^2} \approx 2.2 \text{ m/s}^2$$

54) متى يعود الجُسيم إلى موقعه الابتدائي؟

الموقع الابتدائي هو: $s(0) = \ln(1.9)$

$$s(t) = \ln(1.9) \Rightarrow \ln(t^2 - 2t + 1.9) = \ln(1.9)$$
$$\Rightarrow t^2 - 2t + 1.9 = 1.9$$
$$\Rightarrow t^2 - 2t = 0$$
$$\Rightarrow t(t - 2) = 0$$
$$\Rightarrow t = 0 \text{ or } t = 2$$

يعود الجسيم إلى موقعه الابتدائي بعد ثانيتين من بدء حركته.

كتاب التمارين

الدرس الثالث – قاعدة السلسلة

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

1) $f(x) = 100e^{-0.1x}$

$f(x) = -10e^{-0.1x}$

2) $f(x) = \sin(x^2 + 1)$

$f'(x) = 2x\cos(x^2 + 1)$

3) $f(x) = \cos^2 x$

$f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$

4) $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$

$f'(x) = -2\sin 2x + 2\sin x$

5) $f(x) = \log_3 \frac{x\sqrt{x-1}}{2}$

$f(x) = \log_3 \frac{x\sqrt{x-1}}{2} = \log_3 x + \frac{1}{2}\log_3(x-1) - \log_3 2$

$f'(x) = \frac{1}{x\ln 3} + \frac{1}{2(x-1)\ln 3}$

6) $f(x) = 2\cot^2(\pi x + 2)$

$f(x) = 2(\cot(\pi x + 2))^2$

$f'(x) = -4\pi\cot(\pi x + 2)\csc^2(\pi x + 2)$

7) $f(x) = \log 2x$

$f'(x) = \frac{2}{2x\ln 10} = \frac{1}{x\ln 10}$

8) $f(x) = \ln(x^3 + 2)$

$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 2}$

9) $f(x) = (\frac{x^2}{x^3+2})^2$

$f'(x) = 2 \times \frac{x^2}{x^3+2} \times \frac{2x(x^3+2) - 3x^4}{(x^3+2)^2}$

$= \frac{2x^2}{x^3+2} \times \frac{4x - x^4}{(x^3+2)^2} = \frac{8x^3 - 2x^6}{(x^3+2)^3}$

10) $f(x) = x^2\sqrt{20-x}$

$$f(x) = x^2 \times \frac{-1}{2\sqrt{20-x}} + 2x\sqrt{20-x}$$

$$= \frac{-x^2}{2\sqrt{20-x}} + 2x\sqrt{20-x} = \frac{80x-5x^2}{2\sqrt{20-x}}$$

11) $f(x) = \frac{\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$

$$f'(x) = \frac{2e^{x^2}\cos(2x+1) - 2xe^{x^2}\sin(2x+1)}{e^{2x^2}}$$

$$= \frac{2\cos(2x+1) - 2x\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$$

12) $f(x) = 3^{\cot x}$

$$f'(x) = -(3^{\cot x}\ln 3)\csc^2 x$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

13) $y = 2\sin 5x - 4\cos 3x\ , x = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = 10\cos 5x + 12\sin 3x$$

ميل المماس: $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -12$

عندما $x = \frac{\pi}{2}$، فإن $y = 2$

معادلة المماس: $y - 2 = -12\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = -12x + 6\pi + 2$

14) $f(x) = (x^2+2)^3, x = -1$

$$f'(x) = 6x(x^2+2)^2$$

ميل المماس $f'(-1) = -54$

$x = -1 \Rightarrow y = f(-1) = 27$

معادلة المماس: $y - 27 = -54(x+1) \Rightarrow y = -54x - 27$

15) $f(x) = \tan 3x, x = \frac{\pi}{4}$

$$f'(x) = 3\sec^2 3x$$

ميل المماس: $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6$

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$

معادلة المماس: $y + 1 = 6\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = 6x - \frac{3\pi}{2} - 1$

إذا كان الاقتران: $f(x) = 3\sin x - \sin^3 x$، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

16) أثبت أن $f'(x) = 3\cos^3 x$

$$f'(x) = 3\cos x - 3\sin^2 x\cos x$$
$$= 3\cos x\,(1 - \sin^2 x)$$
$$= 3\cos x\,(\cos^2 x)$$
$$= 3\cos^3 x$$

17) أجد $f''(x)$

$$f''(x) = -9\cos^2 x\sin x$$

18) يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = a\cos t, y = b\sin t$، حيث: $0 \le t \le 2\pi$. أجد المقطع y لمماس المنحنى عندما $t = \frac{\pi}{4}$ بدلالة a و b.

$$\frac{dy}{dt} = b\cos t$$
$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t$$

ميل المماس:
$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}\cot\frac{\pi}{4} = -\frac{b}{a}$$
$$t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = a\cos\frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}}, y = b\sin\frac{\pi}{4} = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

معادلة المماس:
$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b$$
$$x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2}b$$

إذا كان الاقتران: $y = e^{ax}$، حيث a ثابت، و $a > 0$، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

19) أجد إحداثيي النقطة p التي تقع على منحنى الاقتران، ويكون ميل المماس عندها 1

$$y = e^{ax}$$
$$\frac{dy}{dx} = ae^{ax} = 1 \rightarrow e^{ax} = \frac{1}{a}$$
$$\Rightarrow ax = \ln\frac{1}{a} = -\ln a$$
$$\Rightarrow x = \frac{-\ln a}{a}$$
$$\Rightarrow y = e^{a(\frac{-\ln a}{a})} = e^{-\ln a} = (e^{\ln a})^{-1} = \frac{1}{a}$$

إذن، النقطة المطلوبة هي:
$$P\left(\frac{-\ln a}{a}, \frac{1}{a}\right)$$

20) أُثبت أنه يُمكن كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة P في صورة: $x + y = k$، ثم أجد قيمة الثابت k.

ميل العمودي على المماس عند النقطة P يساوي 1-

معادلة العمودي على المماس هي:

$$y - \frac{1}{a} = -1\left(x + \frac{\ln a}{a}\right) \Rightarrow y = -x - \frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow y + x = -\frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a} \Rightarrow k = \frac{1 - \ln a}{a}$$

21) إذا كان: $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$، وكان: $f'(1) = 4$، $f(1) = 7$، فأجد $h'(1)$.

$$h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)} = (4 + 3f(x))^{\frac{1}{2}}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2}(3f'(x))(4 + 3f(x))^{-\frac{1}{2}} = \frac{3f'(x)}{2\sqrt{4 + 3f}}$$

$$h'(1) = \frac{3f'(1)}{2\sqrt{4 + 3f(1)}} = \frac{12}{2\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$$

22) إذا كان الاقتران: $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$، فأُثبت أن $f''(x) = 4f(x)$

$$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{-2x}$$

$$f''(x) = 4e^{2x} + 4e^{-2x} = 4(e^{2x} + e^{-2x}) = 4f(x)$$

23) إذا كان: $f(x) = \sin 4x + \cos 4x$، فأثبت أن $f''(x) + 16f(x) = 0$

$$f'(x) = 4\cos 4x - 4\sin 4x$$

$$f''(x) = -16\sin 4x - 16\cos 4x$$

$$= -16(\sin 4x + \cos 4x) = -16f(x)$$

$$f''(x) + 16f(x) = 0$$

يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = \sin^2\theta, y = 2\cos\theta$، حيث: $0 \le \theta \le 2\pi$:

24) أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة θ.

$$\frac{dy}{d\theta} = -2\sin\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = -\sec\theta$$

25) أجد معادلة المماس عندما يكون الميل $\sqrt{2}$

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{2}\rightarrow -sec\,\theta=\sqrt{2}\rightarrow sec\,\theta=-\sqrt{2}\rightarrow cos\,\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

عندما $cos\,\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$، فإن:

$$x=sin^2\theta=1-cos^2\theta=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ y=2\,cos\,\theta=2\times-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

معادلة المماس:

$$y+\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow y=\sqrt{2}x-\frac{3}{\sqrt{2}}$$

26) أجد النقطة التي يكون عندها المماس موازياً للمحور y.

$$\frac{dy}{dx}=-sec\,\theta=-\frac{1}{cos\,\theta}$$

يكون المماس موازيا لمحور y عندما يكون $\frac{dy}{dx}$ غير معرف، أي عندما $cos\,\theta=0$

وعندها يكون:

$$x=sin^2\theta=1-cos^2\theta=1-0=1,\ y=2\,cos\,\theta=2\times 0=0$$

فالنقطة المطلوبة هي: $(1,0)$

27) سيارة: يُمثل الاقتران: $v(t)=15\,te^{-0.05t^2}$ سرعة (بالمتر لكل ثانية) سيارة تتحرك في مسار مستقيم، حيث: $0\le t\le 10$. أجد سرعة السيارة عندما يكون تسارعها صفراً.

$$a(t)=-1.5t^2e^{-0.05t^2}+15e^{-0.05t^2}=15e^{-0.05t^2}(1-0.1t^2)$$

$$a(t)=0\Rightarrow 1-0.1t^2=0\Rightarrow t^2=10\Rightarrow t=\sqrt{10}$$

$$v(\sqrt{10})=15\sqrt{10}e^{-0.5}=\frac{15\sqrt{10}}{\sqrt{e}}\ m/s$$

أجد $(fog)'(x)$ عند قيمة x المعطاة في كل مما يأتي:

28) $f(u)=u^5+1,u=g(x)=\sqrt{x},x=1$

$$f(u)=u^5+1\Rightarrow f'(u)=5u^4$$

$$u=g(x)=\sqrt{x}\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(fog)'(1)=f'(g(1))\times g'(1)=f'(1)\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

29) $f(u)=u+\frac{1}{cos^2u},u=g(x)=\pi x,x=\frac{1}{4}$

$$f(u)=u+\frac{1}{cos^2u}\Rightarrow f'(u)=1+\frac{2\,cos\,u\,sin\,u}{cos^4u}=1+2\,sec^2u\,tan\,u$$

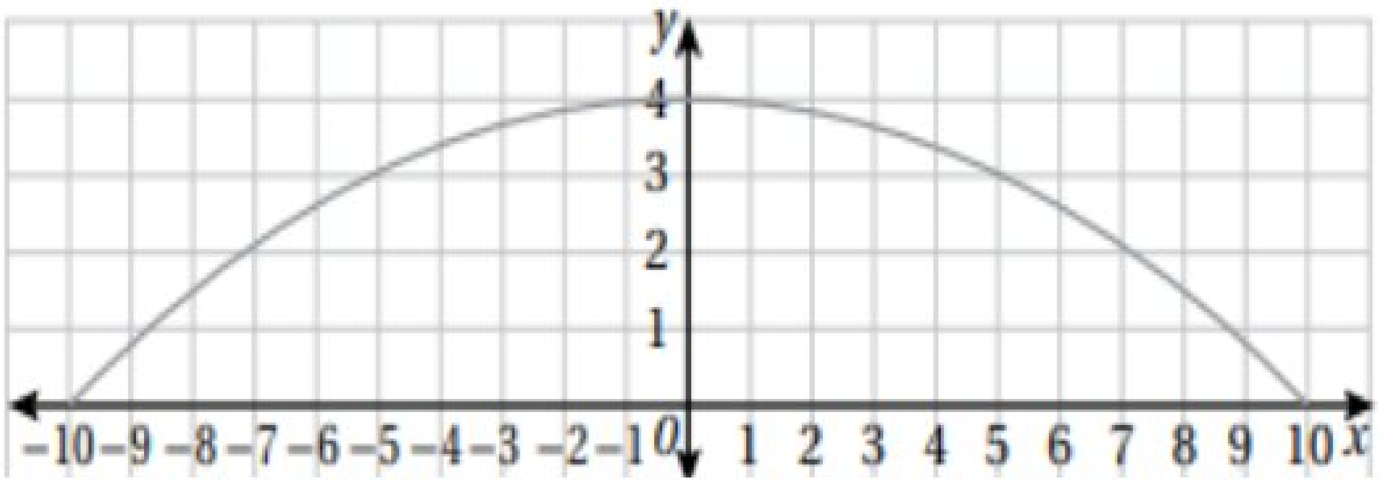
$$u=g(x)=\pi x\Rightarrow g'(x)=\pi$$

$$(fog)'\left(\frac{1}{4}\right)=f'\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right)\times g'\left(\frac{1}{4}\right)=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\pi=5\pi$$

مرور: يُبين التمثيل البياني المجاور شكل مطب سرعة صُمم للتخفيف من سرعة السيارات على أحد الطرق. وفيه يُمثل المحور x سطح الأرض، وتقاس جميع الأطوال بالسنتيمترات.

إذا كانت المعادلة الوسيطية التي تُمثل منحنى المطب هي: $x = 10\sin t, y = 2 + \cos 2t$،

حيث: $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$، فأجد كُلا مما يأتي:



30) ميل المماس لمنحنى المطب بدلالة t.

$$\frac{dy}{dt} = -4\sin 2t, \frac{dx}{dt} = 10\cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-4\sin 2t}{10\cos t} = -\frac{4}{5}\sin t, -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

31) قيمة t عند أعلى نقطة على منحنى المطب.

يكون المماس عند أعلى نقطة في المنحنى المعطى أفقياً، إذن ميله يساوي صفراً.

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0$$

أو أن قيمة x عند أعلى نقطة تساوي صفراً، إذن: $10\sin t = 0 \Rightarrow t = 0$

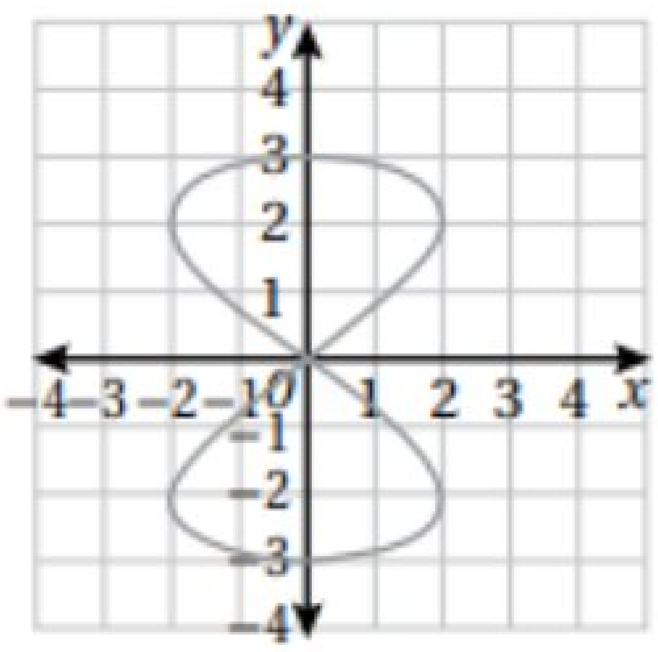
أو أن قيمة y عند أعلى نقطة تساوي 4، إذن:

$$2 + 2\cos 2t = 4 \Rightarrow 2\cos 2t = 2 \Rightarrow \cos 2t = 1 \Rightarrow 2t = 0 \Rightarrow t = 0$$

32) **تبرير:** يُبين الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = 2\sin 2t, y = 3\cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

أجد ميل المماس لمنحنى المعادلة عند نقطة الأصل، مُبررًا إجابتي.



$$\frac{dy}{dt} = -3\sin t, \frac{dx}{dt} = 4\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3\sin t}{4\cos 2t}, 0 \le t \le 2\pi$$

$$(x, y) = (0, 0) \Rightarrow (2\sin 2t, 3\cos t) = (0, 0) \Rightarrow \sin 2t = 0, \cos t = 0$$

$$\sin 2t = 0 \Rightarrow t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

$$\cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

يتحقق الشرطان معاً عندما $t = \frac{\pi}{2}$ أو $t = \frac{3\pi}{2}$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

إذن ميل مماس أحد فرعي المنحنى عند نقطة الأصل هو $\frac{3}{4}$ وميل مماس الفرع الآخر $-\frac{3}{4}$

كتاب الطالب

الدرس الرابع – الاشتقاق الضمني

مثال 1:

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1) $x^2 + y^2 = 4$

$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(4)$ باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغير x

$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$ قاعدتا مشتقة المجموع، ومشتقة الثابت

$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ قاعدتا مشتقة اقتران القوة، ومشتقة السلسلة

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ بحل المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

2) $\sin x + \cos y = 2x - 3y$

$\frac{d}{dx}(\sin x + \cos y) = \frac{d}{dx}(2x - 3y)$ باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المتغير x

$\frac{d}{dx}(\sin x) + \frac{d}{dx}(\cos y) = \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(3y)$ قاعدتا مشتقة المجموع، ومشتقة الفرق

$\cos x - \sin y\,\frac{dy}{dx} = 2 - 3\frac{dy}{dx}$ قاعدتا مشتقة اقتران القوة، ومشتقة السلسلة

$3\frac{dy}{dx} - \sin y\frac{dy}{dx} = 2 - \cos x$ بإعادة ترتيب المعادلة

$\frac{dy}{dx}(3 - \sin y) = 2 - \cos x$ بإخراج $\frac{dy}{dx}$ عاملاً مشتركاً

$\frac{dy}{dx} = \frac{2-\cos x}{3-\sin y}$ بحل المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

اتحقق من فهمي:

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

A) $x^2 + y^2 = 13$

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Ⓑ $2x + 5y^2 = \sin y$

$$2x + 5y^2 = \sin y$$

$$2 + 10y\frac{dy}{dx} = \cos y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}(10y - \cos y) = -2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{10y - \cos y}$$

مثال 2:

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1) $2xy - y^3 = 1$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المتغير x

$$\frac{d}{dx}(2xy - y^3) = \frac{d}{dx}(1)$$

قاعدتا مشتقة الفرق، ومشتقة الثابت

$$\frac{d}{dx}(2xy) - \frac{d}{dx}(y^3) = 0$$

قاعدة مشتقة الضرب

$$2x\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(y^3) = 0$$

قاعدتا مشتقة اقتران القوة، ومشتقة السلسلة

$$2x\frac{dy}{dx} + 2y - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

بإعادة ترتيب المعادلة

$$2x\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} = -2y$$

بإخراج $\frac{dy}{dx}$ عاملاً مشتركاً

$$\frac{dy}{dx}(2x - 3y^2) = -2y$$

بحل المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{2x - 3y^2}$$

2) $\sin(x + y) = y^2 \cos x$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المتغير x

$$\frac{d}{dx}(\sin(x+y)) = \frac{d}{dx}(y^2 \cos x)$$

قاعدة مشتقة الضرب

$$\frac{d}{dx}(\sin(x+y)) = y^2\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\,\frac{d}{dx}(y^2)$$

قاعدة السلسلة

$$\cos(x+y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = -y^2 \sin x + \cos x\left(2y\,\frac{dy}{dx}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع

$$\cos(x+y) + \cos(x+y)\frac{dy}{dx} = -y^2 \sin x + 2y\cos x\frac{dy}{dx}$$

بإعادة ترتيب المعادلة

$$\cos(x+y)\frac{dy}{dx} - 2y\cos x\,\frac{dy}{dx} = -y^2 \sin x - \cos(x+y)$$

بإخراج $\frac{dy}{dx}$ عاملاً مشتركاً

$$\frac{dy}{dx}(\cos(x+y) - 2y\cos x) = -y^2 \sin x - \cos(x+y)$$

بحل المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2 \sin x - \cos(x+y)}{\cos(x+y) - 2y\cos x}$$

3) $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(\frac{x-1}{x+1})$ — باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المتغير x

$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(x-1)-(x-1)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$ — قاعدتا مشتقة القسمة، ومشتقة السلسلة

$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}$ — قاعدة مشتقة اقتران القوة

$2y\frac{dy}{dx} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$ — باستعمال خاصية التوزيع

$2y\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x+1)^2}$ — بالتبسيط

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2y\,(x+1)^2}$ — بحل المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

$= \frac{1}{y(x+1)^2}$ — بالتبسيط

اتحقق من فهمي:

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

Ⓐ $3xy^2 + y^3 = 8$

$$3xy^2 + y^3 = 8$$

$$6xy\frac{dy}{dx} + 3y^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3y^2}{6xy + 3y^2}$$

Ⓑ $\tan(x-y) = 2xy^3 + 1$

$$\tan(x-y) = 2xy^3 + 1$$

$$\left(1-\frac{dy}{dx}\right)\sec^2(x-y) = 6xy^2\frac{dy}{dx} + 2y^3$$

$$\sec^2(x-y) - \sec^2(x-y)\frac{dy}{dx} = 6xy^2\frac{dy}{dx} + 2y^3$$

$$\frac{dy}{dx}\left(6xy^2 + \sec^2(x-y)\right) = \sec^2(x-y) - 2y^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2(x-y) - 2y^3}{6xy^2 + \sec^2(x-y)}$$

ⓒ $x^2=\frac{x-y}{x+y}$

$$x^2=\frac{x-y}{x+y}$$

$$2x=\frac{(x+y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right)-(x-y)(1+\frac{dy}{dx})}{(x+y)^2}$$

$$2x(x+y)^2=x-x\frac{dy}{dx}+y-y\frac{dy}{dx}-x-x\frac{dy}{dx}+y+y\frac{dy}{dx}$$

$$2\times\frac{dy}{dx}=2y-2x(x+y)^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y-2x(x+y)^2}{2x}=\frac{y-x(x+y)^2}{x}$$

مثال 3:

1) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $e^{2x}\ln y=x+y-2$ عند النقطة (1,1).

الخطوة 1: أجد $\frac{dy}{dx}$.

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغير x

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}\ln y)=\frac{d}{dx}(x+y-2)$$

قواعد مشتقات المجموع، والفرق والضرب

$$e^{2x}\frac{d}{dx}(\ln y)+\ln y\frac{d}{dx}(e^{2x})=\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(y)-\frac{d}{dx}(2)$$

قواعد مشتقات الاقتران الأسي الطبيعي، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، والقوة، والسلسلة

$$e^{2x}\times\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}+\ln y\times 2e^{2x}=1+\frac{dy}{dx}$$

بإعادة ترتيب المعادلة

$$\frac{e^{2x}}{y}\times\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}=1-2e^{2x}\ln y$$

بإخراج $\frac{dy}{dx}$ عاملاً مشتركاً

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{y}-1\right)=1-2e^{2x}\ln y$$

بحل المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-2e^{2x}\ln x}{\frac{e^{2x}}{y}-1}$$

الخطوة 2: أجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(1, 1)$

بتعويض $x=1, y=1$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(1,1)}=\frac{1-2e^{2(1)}\ln(1)}{\frac{e^{2(1)}}{1}-1}$$

بالتبسيط

$$=\frac{1}{e^2-1}$$

إذن، ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, 1)$ هو: $\frac{1}{e^2-1}$

2) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $y^2 = x$ عندما $x = 4$.

الخطوة 1: أجد $\frac{dy}{dx}$.

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغير x

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x)$$

مشتقتا اقتران القوة، وقاعدة السلسلة

$$2y\frac{dy}{dx} = 1$$

بحل المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

الخطوة 2: أجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 4$

أعوض قيمة x في العلاقة الأصلية لإيجاد قيمة y المقابلة لها:

العلاقة الأصلية $\quad y^2 = x$

بتعويض $x = 4$ $\quad y^2 = 4$

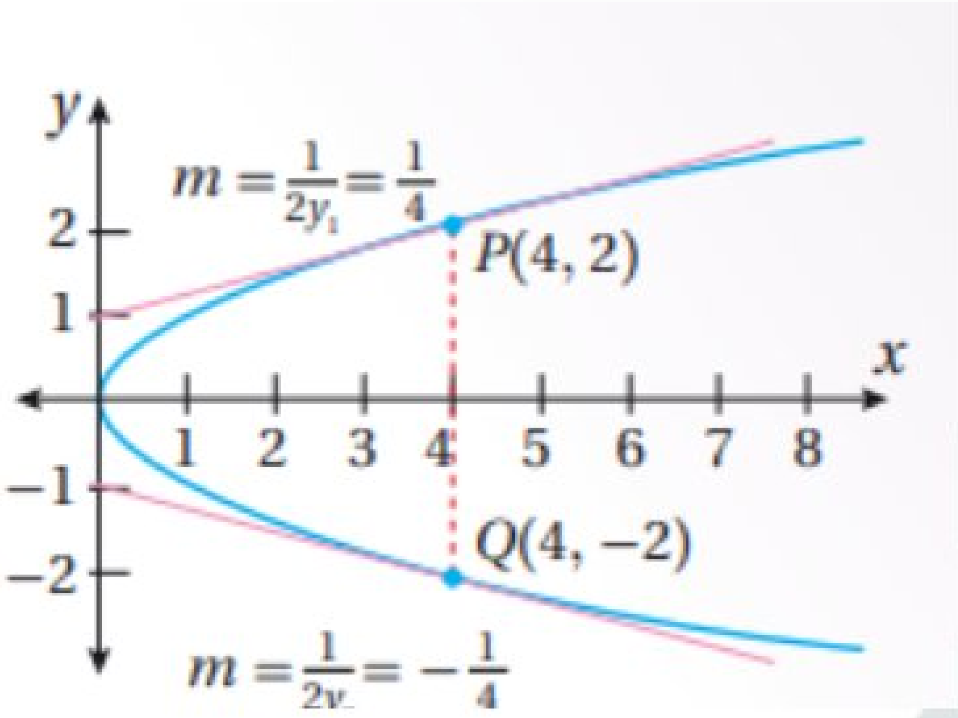
بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة $\quad y = \pm 2$

إذن، أجد الميل عند النقطتين: (4, 2)، و (4, -2):

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(4,-2)} = -\frac{1}{4} \qquad \frac{dy}{dx}\Big|_{(4,2)} = \frac{1}{4}$$

الدعم البياني:

ألاحظ من التمثيل البياني المجاور لمنحنى العلاقة: $y^2 = x$ وجود نقطتين على منحنى العلاقة، والإحداثي x لكل منهما 4؛ ما يعني أن لكل نقطة مماساً خاصاً بها، وهذا يؤكد منطقية الحل الجبري.



اتحقق من فهمي:

Ⓐ أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $y^2 = \ln x$ عند النقطة $(e, 1)$

$$y^2 = \ln x \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2xy}$$
$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(e,1)} = \frac{1}{2e}$$

Ⓑ أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $(y-3)^2 = 4(x-5)$ عندما $x = 6$.

نجد قيمة y عندما $x = 6$

$$(y-3)^2 = 4(6-5) \Rightarrow (y-3)^2 = 4$$
$$\Rightarrow y - 3 = \pm 2$$
$$\Rightarrow y = 5 \text{ or } y = 1$$

باشتقاق طرفي العلاقة $(y-3)^2 = 4(x-5)$ بالنسبة إلى x ينتج أن:

$$2(y-3)\frac{dy}{dx} = 4$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y-3}$$

ميل المماس عند النقطة الأولى هو:

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(6,1)} = \frac{2}{1-3} = -1$$

وميل المماس عند النقطة الثانية هو:

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(6,5)} = \frac{2}{5-3} = 1$$

مثال 4:

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^2 - xy + y^2 = 7$ عند النقطة $(-1, 2)$

الخطوة 1: أجد $\frac{dy}{dx}$.

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغير x
$$\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^2) = \frac{d}{dx}(7)$$

قواعد مشتقات المجموع، والفرق، والثابت
$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

قواعد مشتقات القوة، والضرب، والسلسلة
$$2x - \left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

باستعمال خاصية التوزيع
$$2x - x\frac{dy}{dx} - y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

بإعادة ترتيب المعادلة
$$2y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} = y - 2x$$

بإخراج $\frac{dy}{dx}$ عاملاً مشتركاً
$$(2y - x)\frac{dy}{dx} = y - 2x$$

بحل المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-2x}{2y-x}$$

الخطوة 2: أجد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة (-1, 2)

بتعويض $x=-1, y=2$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(-1,2)} = \frac{2-2(-1)}{2(2)-(-1)}$$

بالتبسيط

$$= \frac{4}{5}$$

إذن، ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة (-1, 2)هو: $\frac{4}{5}$

الخطوة 3: أجد معادلة المماس عند النقطة (-1, 2)

معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

بتعويض $x_1=-1, y_1=2, m=\frac{4}{5}$

$$y-(2)=\frac{4}{5}(x-(-1))$$

بالتبسيط

$$y=\frac{4}{5}x+\frac{14}{5}$$

اتحقق من فهمي:

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^3+y^3-3xy=17$ عند النقطة (2, 3)

$$x^3+y^3-3xy=17 \Rightarrow 3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-3x\frac{dy}{dx}-3y=0$$

بتعويض $y=3, x=2$ ينتج أن:

$$3(2)^2+3(3)^2\frac{dy}{dx}-3(2)\frac{dy}{dx}-3(3)=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\Big|_{(2,3)}=-\frac{1}{7}$$

ميل المماس هو: $-\frac{1}{7}$

إذن، معادلة المماس هي:

$$y-3=-\frac{1}{7}(x-2) \Rightarrow y=-\frac{1}{7}x+\frac{23}{7}$$

مثال 5:

إذا كان: $2x^3-3y^2=8$، فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

الخطوة 1: أجد $\frac{dy}{dx}$.

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المتغير x

$$\frac{d}{dx}(2x^3-3y^2)=\frac{d}{dx}(8)$$

قواعد مشتقات المجموع، والفرق، والثابت

$$\frac{d}{dx}(2x^3)-\frac{d}{dx}(3y^2)=0$$

قاعدتا مشتقة القوة، والسلسلة

$$6x^2-6y\frac{dy}{dx}=0$$

بحل المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y}$$

الخطوة 2: أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

قاعدة مشتقة القسمة

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y)\frac{d}{dx}(x^2) - (x^2)\frac{d}{dx}(y)}{(y)^2}$$

قاعدتا مشتقة القوة، والسلسلة

$$= \frac{2xy - x^2\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

بتعويض $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y}$

$$= \frac{2xy - x^2(\frac{x^2}{y})}{y^2}$$

بالتبسيط

$$= \frac{2xy^2 - x^4}{y^3}$$

اتحقق من فهمي:

إذا كان: $xy + y^2 = 2x$ فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$xy + y^2 = 2x \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x+2y}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+2y)\left(-\frac{dy}{dx}\right) - (2-y)(1+2\frac{dy}{dx})}{(x+2y)^2}$$

$$= \frac{(x+2y)\left(\frac{y-2}{x+2y}\right) - (2-y)(1+2\times\frac{2-y}{x+2y})}{(x+2y)^2}$$

$$= \frac{(x+2y)(y-2) - (2-y)(x+4)}{(x+2y)^3}$$

$$= \frac{2xy - 4x + 2y^2 - 8}{(x+2y)^3}$$

مثال 6:

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = 1$:

$$x = t^3 + 3t^2, y = t^4 - 8t^2$$

الخطوة 1: أجد $\frac{dy}{dx}$.

بإيجاد مشتقة x بالنسبة إلى المتغير t $\quad \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 6t$

بإيجاد مشتقة y بالنسبة إلى المتغير t $\quad \frac{dy}{dt} = 4t^3 - 16t$

مشتقة المعادلة الوسيطية $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

بتعويض $\frac{dy}{dt} = 4t^3 - 16t, \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 6t$ $\quad = \frac{4t^3-16t}{3t^2+6t}$

بإخراج العامل المشترك من البسط والمقام $\quad = \frac{4t(t^2-4)}{3t(t+2)}$

بتحليل الفرق بين المربعين $\quad = \frac{4(t+2)(t-2)}{3(t+2)}$

بالتبسيط $\quad = \frac{4}{3}(t-2)$

الخطوة 2: أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عندما $t = 1$

بإيجاد مشتقة $\frac{dy}{dx}$ بالنسبة إلى المتغير t $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}(t-2)\right) = \frac{4}{3}$

المشتقة الثانية للمعادلة الوسيطية $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}$

بتعويض $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{4}{3}, \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 6t$ $\quad = \frac{\frac{4}{3}}{3t^2+6t} = \frac{4}{3(3t^2+6t)}$

بتعويض $t = 1$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1} = \frac{4}{3(3(1)^2+6(1))}$

بالتبسيط $\quad = \frac{4}{27}$

اتحقق من فهمي:

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = 2$:

$$x = 3t^2 + 1, y = t^3 - 2t^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 4t}{6t} = \frac{1}{2}t - \frac{2}{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{2}}{6t} = \frac{1}{12t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=2} = \frac{1}{24}$$

مثال 7:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

1) $y = x^x, x > 0$

الاقتران المعطى	$y = x^x$
بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة	$\ln y = \ln x^x$
قانون القوة في اللوغاريتمات	$\ln y = x \ln x$
باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المتغير x	$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x \ln x)$
قواعد مشتقات الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، والسلسلة ، والضرب	$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}$
بحل المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$	$\frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1)$
$y = x^x$	$= x^x(\ln x + 1)$

2) $y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$

الاقتران المعطى
$$y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة
$$\ln y = \ln \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$$

قانونا القسمة والقوة في اللوغاريتمات
$$\ln y = 2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+9)$$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغير x
$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\left(2\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+9)\right)$$

قواعد مشتقات الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، والسلسلة، والطرح
$$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+9}$$

بتوحيد المقامات
$$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+x+18}{(x-1)(x^2+9)}$$

بحل المعادلة لـ $\frac{dy}{dx}$
$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{x^2+x+18}{(x-1)(x^2+9)}\right)$$

بتعويض $y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}$
$$= \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+9}}\left(\frac{x^2+x+18}{(x-1)(x^2+9)}\right)$$

بالتبسيط
$$= \frac{(x-1)(x^2+x+18)}{(x^2+9)^{3/2}}$$

اتحقق من فهمي:

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

A) $y = x^{\sqrt{x}}, x > 0$

$$y = x^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln y = \ln x^{\sqrt{x}}$$
$$\Rightarrow \ln y = \sqrt{x}\ln x$$
$$\Rightarrow \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \sqrt{x}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{y}{2\sqrt{x}}\ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\ln x$$

Ⓑ $y=\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$

$$y=\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}} \Rightarrow \ln y=\ln\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$$

$$\Rightarrow \ln y=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x^4+1}$$

$$\Rightarrow \ln y=\frac{1}{2}(\ln(x-1)-\ln(x^4+1))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2x^3}{x^4+1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\left(\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2x^3}{x^4+1}\right)\sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}$$

أتدرب وأحل المسائل

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1) $x^2-2y^2=4$

$$x^2-2y^2=4$$

$$2x-4y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2y}$$

2) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{10}$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{10}$$

$$\frac{-2x}{x^4}+\frac{-2y\frac{dy}{dx}}{y^4}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^4}\times\frac{y^4}{-2y}=-\frac{y^3}{x^3}$$

3) $(x^2+y^2)^2=50(x^2-y^2)$

$$(x^2+y^2)^2=50(x^2-y^2)$$

$$2(x^2+y^2)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)=50\left(2x-2y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}(yx^2+y^3+25y)=25x-x^3-xy^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{25x-x^3-xy^2}{xy^2+y^3+25y}$$

4) $e^x y = xe^x$

$$e^x y = xe^x$$

$$(e^x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(e^x) = (x)\left(e^y \frac{dy}{dx}\right) + (e^y)(1)$$

$$\frac{dy}{dx}(e^x - xe^y) = e^y - ye^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y - ye^x}{e^x - xe^y}$$

5) $3^x = y - 2xy$

$$3^x = y - 2xy$$

$$3^x \ln 3 = \frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} - 2y$$

$$\frac{dy}{dx}(1 - 2x) = 2y + 3^x \ln 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y + 3^x \ln 3}{1 - 2x}$$

6) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

7) $x = sec\ \frac{1}{y}$

$$x = sec\ \frac{1}{y}$$

$$1 = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} sec\ \frac{1}{y} tan\frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{sec\ \frac{1}{y}\ tan\ \frac{1}{y}} = -y^2\ cos\ \frac{1}{y}\ cot\ \frac{1}{y}$$

8) $(\sin \pi x + \cos \pi y)^3 = 8$

$(\sin \pi x + \cos \pi y)^3 = 8$

$3(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 \left(\pi \cos \pi x - \pi \sin \pi y \frac{dy}{dx}\right) = 0$

$3\frac{dy}{dx}(\pi \sin \pi y)(\sin \pi x + \cos \pi y)^2 = 3(\pi \cos \pi x)(\sin \pi x + \cos \pi y)^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3(\pi \cos \pi x)(\sin \pi x + \cos \pi y)^2}{3(\pi \sin \pi y)(\sin \pi x + \cos \pi y)^2} = \frac{\cos \pi x}{\sin \pi y}$

9) $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$

$$\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$$

$$\frac{y^2(1) - x(2y\frac{dy}{dx})}{y^4} + \frac{2y\frac{dy}{dx}(x) - 1(y^2)}{x^2} = 0$$

$$\frac{y^2 - 2xy\frac{dy}{dx}}{y^4} = -\frac{2xy\frac{dy}{dx} - y^2}{x^2}$$

$$x^2\left(y^2 - 2xy\frac{dy}{dx}\right) = -y^4(2xy\frac{dy}{dx} - y^2)$$

$$2xy^5\frac{dy}{dx} - 2x^3y\frac{dy}{dx} = y^6 - x^2y^2$$

$$(2xy^5 - 2x^3y)\frac{dy}{dx} = y^6 - x^2y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^6 - x^2y^2}{2xy^5 - 2xy} = \frac{y^2(y^4 - x^2)}{2xy(y^4 - x^2)} = \frac{y}{2x}$$

10) $x + y = \cos(xy)$

$$x + y = \cos(xy)$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = -\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)\sin xy$$

$$\frac{dy}{dx}(-x\sin xy - 1) = 1 + y\sin xy$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + y\sin xy}{x\sin xy + 1}$$

11) $x^2 + y^2 = \ln(x+y)^2$

$$x^2 + y^2 = \ln(x+y)^2$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{2(x+y)(1 + \frac{dy}{dx})}{(x+y)^2}$$

$$x + y\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{dy}{dx}}{x+y}$$

$$\frac{dy}{dx}(xy + y^2 - 1) = 1 - x^2 - xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2 - xy}{xy + y^2 - 1}$$

12) $\sin x \cos y = x^2 - 5y$

$$\sin x \cos y = x^2 - 5y$$
$$(\sin x)\left(-\sin y \frac{dy}{dx}\right) + (\cos y)(\cos x) = 2x - 5\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx}(\sin x \sin y - 5) = \cos x \cos y - 2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cos y - 2x}{\sin x \sin y - 5}$$

أجد y' لكل مما يأتي عند القيمة المعطاة:

13) $2y^2 + 2xy - 1 = 0, x = \frac{1}{2}$

$$2y^2 + 2xy - 1 = 0$$

أجد قيمة y عندما $x = \frac{1}{2}$:

$$2y^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)y - 1 = 0 \Rightarrow 2y^2 + y - 1 = 0$$
$$\Rightarrow (2y-1)(y+1) = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}, y = -1$$

باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج أن:

$$4yy' + 2xy' + 2y = 0$$
$$y' = \frac{-y}{2y + x}$$
$$y'\Big|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$$
$$y'\Big|_{\left(\frac{1}{2},-1\right)} = \frac{1}{-2 + \frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}$$

14) $y^3 + 2x^2 = 11y, y = 1$

$$y^3 + 2x^2 = 11y$$

أجد قيمة x عندما $y = 1$:

$$1 + 2x^2 = 11 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x ينتج أن:

$$3y^2y' + 4x = 11y'$$
$$y' = \frac{4x}{11 - 3y^2}$$
$$y'\Big|_{(-\sqrt{5},1)} = \frac{-\sqrt{5}}{2}$$
$$y'\Big|_{(\sqrt{5},1)} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

أجد ميل المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

15) $x^2 + y^2 = 25, (3, -4)$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2(3) + 2(-4)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{(3,-4)} = \frac{3}{4}$$

16) $x^2y = 4(2 - y), (2, 1)$

$$x^2y = 4(2 - y)$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = -4\frac{dy}{dx}$$

$$4\frac{dy}{dx} + 2(2)(1) = -4\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{(2,1)} = -\frac{1}{2}$$

17) $e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1, (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1$$

$$e^{\sin x}\cos x - e^{\cos y}\sin y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$e^{\sin\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2} - e^{\cos\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} = 0$$

18) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5, (8, 1)$

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5$$

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 5$$

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}(1)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{(8,1)} = -\frac{1}{2}$$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

19) $x^2 + xy + y^2 = 13, (-4, 3)$

$$x^2 + xy + y^2 = 13$$

$$2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-8 - 4\frac{dy}{dx} + 3 + 6\frac{dy}{dx} = 0$$

ميل المماس هو: $\frac{dy}{dx}|_{(-4,3)} = \frac{5}{2}$

معادلة المماس هي: $y - 3 = \frac{5}{2}(x + 4) \Rightarrow y = \frac{5}{2}x + 13$

$20) x+y-1=\ln(x^2+y^2), (1,0)$

$x+y-1=\ln(x^2+y^2)$

$1+\frac{dy}{dx}=\frac{2x+2y\frac{dy}{dx}}{x^2+y^2}$

بالتعويض ينتج أن: $1+\frac{dy}{dx}=2$

ميل المماس هو: $\frac{dy}{dx}|_{(1,0)}=1$

معادلة المماس هي: $y-0=1(x-1)\Rightarrow y=x-1$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي:

$21) x+y=\sin y$

$x+y=\sin y$

$1+\frac{dy}{dx}=\cos y\,\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{-1+\cos y}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sin y\,\frac{dy}{dx}}{(-1+\cos y)^2}=\frac{\sin y\,(\frac{1}{-1+\cos y})}{(-1+\cos y)^2}=\frac{\sin y}{(-1+\cos y)^3}$

$22) 4y^3=6x^2+1$

$4y^3=6x^2+1$

$12y^2\frac{dy}{dx}=12x$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y^2}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y^2-2xy\frac{dy}{dx}}{y^4}=\frac{y-2x(\frac{x}{y^2})}{y^3}=\frac{y^3-2x^2}{y^5}$

23) $xy + e^y = e$

$$xy + e^y = e$$

$$x\frac{dy}{dx} + y + e^y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x + e^y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + e^y)\left(-\frac{dy}{dx}\right) + y(1 + e^y\frac{dy}{dx})}{(x + e^y)^2}$$

$$= \frac{(x + e^y)\left(\frac{y}{x + e^y}\right) + y(1 + e^y\frac{-y}{x + e^y})}{(x + e^y)^2}$$

$$= \frac{(x + e^y)(y) + y(x + e^y - ye^y)}{(x + e^y)^3}$$

$$= \frac{2yx + 2ye^y - y^3e^y}{(x + e^y)^3}$$

24) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $(x - 6)(y + 4) = 2$ عند النقطة (7, -2).

$$(x - 6)(y + 4) = 2$$

$$(x - 6)\frac{dy}{dx} + (y + 4) = 0$$

$$(7 - 6)\frac{dy}{dx} + (-2 + 4) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{(7,-2)} = -2$$

إذن ميل العمودي على المماس هو $\frac{1}{2}$

معادلة العمودي على المماس هي: $y + 2 = \frac{1}{2}(x - 7) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$

25) أُثبت أن لمنحنى العلاقة: $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ مماسين أفقيين، ثم أجد إحداثيي نقطتي التماس.

$$3x^2 + 2xy + y^2 = 6$$

$$6x + 2x\frac{dy}{dx} + 2y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x - y}{x + y}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{-3x - y}{x + y} = 0 \Rightarrow -3x - y = 0 \Rightarrow y = -3x$$

$$3x^2 + 2x(-3x) + (-3x)^2 = 6 \Rightarrow 6x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm 1$$

إذن للمنحنى مماسان أفقيان عند النقطتين (1, -3), (-1, 3)

26) أجد إحداثيي نقطة على المنحنى: $x + y^2 = 1$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازياً للمستقيم: $x + 2y = 0$.

$$x + y^2 = 1$$

$$1 + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2y}$$

ميل المستقيم $x + 2y = 0$ هو $-\frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2y} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 1$$
$$\Rightarrow x + (1)^2 = 1 \Rightarrow x = 0$$

النقطة المطلوبة هي $(0, 1)$

27) أجد إحداثيي نقطة (نقاط) على المنحنى: $y^3 = x^2$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى عموديا على المستقيم: $y + 3x - 5 = 0$ ، حيث: $y \neq 0$

$$y^3 = x^2$$
$$3y^2 \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2}, y \neq 0$$

ميل المستقيم $y + 3x - 5$ هو 3- إذن ميل العمودي عليه يساوي $\frac{1}{3}$

$$\frac{2x}{3y^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow 2x = y^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} y^2$$
$$y^3 = x^2 \Rightarrow y^3 = \frac{1}{4} y^4 \Rightarrow 1 = \frac{1}{4} y \Rightarrow y = 4$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(4)^2 \rightarrow x = 8$$

النقطة المطلوبة هي $(8, 4)$

28) إذا كان: $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=10$ حيث: $x>0, y>0$، فأثبت أن $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=10, x>0\,, y>0$$

$$\frac{\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{y^2}}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}+\frac{\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}}{2\sqrt{\frac{y}{x}}}=0\Rightarrow\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2y^2\sqrt{\frac{x}{y}}}=\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2x^2\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\Rightarrow\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)\left(x^2\sqrt{\frac{y}{x}}\right)=(y-x\frac{dy}{dx})(y^2\sqrt{\frac{x}{y}})$$

$$x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}-x^3\sqrt{\frac{y}{x}}\frac{dy}{dx}=y^3\sqrt{\frac{x}{y}}-xy^2\sqrt{\frac{x}{y}}\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y^3\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}}{x^2y\sqrt{\frac{y}{x}}-x^3\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$=\frac{y(y^2\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2\sqrt{\frac{y}{x}})}{x(y^2\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2\sqrt{\frac{y}{x}})}=\frac{y}{x}$$

يمكن اختصار العامل المشترك من البسط والمقام لأنه لا يساوي صفراً إلا إذا كان $x=y$ وهذا لا يتسق مع العلاقة الأصلية.

29) أجد إحداثيي النقطة على منحنى الاقتران: $y=x^{\frac{1}{x}}, x>0$، التي يكون عندها ميل المماس صفراً.

$$y=x^{\frac{1}{x}}, x>0$$

$$\ln y=\ln x^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y=\frac{1}{x}\ln x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\ln x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(1-\ln x)}{x^2}$$

$$\frac{y(1-\ln x)}{x^2}=0\Rightarrow\ln x=1\Rightarrow x=e\ \Rightarrow y=\ e^{\frac{1}{e}}$$

النقطة المطلوبة هي $(e, e^{\frac{1}{e}})$

30) أجد إحداثيات جميع النقاط على منحنى الدائرة: $x^2 + y^2 = 100$، التي يكون عندها ميل المماس $\frac{3}{4}$.

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$-\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x$$

$$x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow x^2 + (-\frac{4}{3}x)^2 = 100$$

$$\Rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 100$$

$$\Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$$

إذا كانت $x = 6$، فإن $y = -\frac{4}{3}(6) = -8$

وإذا كانت $x = -6$، فإن $y = -\frac{4}{3}(-6) = 8$

إذن، هناك نقطتان تحققان المطلوب هما (8 ,6-)، (8- ,6)

31) يُمثل الاقتران: $s(t) = t^{\frac{1}{t}}, t > 0$ موقع جُسيم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني. أجد سرعة الجُسيم وتسارعه.

$$s(t) = t^{\frac{1}{t}}$$
$$\ln s(t) = \ln t^{\frac{1}{t}}$$
$$\ln s(t) = \frac{1}{t}\ln t$$
$$\frac{v(t)}{s(t)} = \left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t}\right) + (\ln t)\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \frac{1-\ln t}{t^2}$$
$$\Rightarrow v(t) = s(t) \times \frac{1-\ln t}{t^2}$$

باشتقاق طرفي العلاقة الأخيرة بالنسبة إلى الزمن t نجد أن:

$$a(t) = v(t)\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right) + s(t)\left(\frac{t^2\left(-\frac{1}{t}\right) - 2t(1-\ln t)}{t^4}\right)$$
$$= s(t)\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right)\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right) + s(t)\left(\frac{t^2\left(-\frac{1}{t}\right) - 2t(1-\ln t)}{t^4}\right)$$
$$= t^{\frac{1}{t}}\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right)\left(\frac{1-\ln t}{t^2}\right) + t^{\frac{1}{t}}\left(\frac{t^2\left(-\frac{1}{t}\right) - 2t(1-\ln t)}{t^4}\right)$$
$$= t^{\frac{1}{t}}\frac{(1-\ln t)^2}{t^4} + t^{\frac{1}{t}}\left(\frac{-t-2t+2t\ln t}{t^4}\right)$$
$$\Rightarrow a(t) = t^{\frac{1}{t}}\left(\frac{(1-\ln t)^2 - 3t + 2t\ln t}{t^4}\right)$$

32) إذا كان $y = \ln x$، حيث: $x > 0$، فأُثبت أن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ باستعمال الاشتقاق الضمني.

بالتحويل إلى الصيغة الأسية ينتج أن: $y = \ln x, x > 0$ - $e^y = x$

باشتقاق الطرفين ضمنياً بالنسبة إلى x ينتج أن:

$$e^y\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}$$

بتعويض $e^y = x$ ينتج أن: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

أجد مشتقة كل من الاقترانات الآتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

33) $y = (x^2+3)^x$

$$y = (x^2+3)^x \Rightarrow \ln y = \ln(x^2+3)^x \Rightarrow \ln y = x\ln(x^2+3)$$
$$\Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x)\left(\frac{2x}{x^2+3}\right) + \ln(x^2+3)$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{2x^2}{x^2+3} + \ln(x^2+3)\right)(x^2+3)^x$$

34) $y = \frac{(x^4+1)\sqrt{x+2}}{2x^2+2x+1}$

$$y = \frac{(x^4+1)(\sqrt{x+2})}{2x^2+2x+1} \Rightarrow \ln y = \ln \frac{(x^4+1)(\sqrt{x+2})}{2x^2+2x+1}$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln(x^4+1) + \ln(\sqrt{x+2}) - \ln(2x^2+2x+1)$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln(x^4+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) - \ln(2x^2+2x+1)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{4x^3}{x^4+1} + \frac{1}{2x+4} - \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{4x^3}{x^4+1} + \frac{1}{2x+4} - \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\right)\frac{(x^4+1)(\sqrt{x+2})}{2x^2+2x+1}$$

35) $y = \sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$

$$y = \sqrt{x^2(x+1)(x+2)} \Rightarrow \ln y = \ln\sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{2}\ln x^2(x+1)(x+2)$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{2}\ln x^2 + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2)$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+2)}\right)\sqrt{x^2(x+1)(x+2)}$$

36) $y = x^{\sin x}, x > 0$

$$y = x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{\sin x}$$

$$\Rightarrow \ln y = (\sin x)\ln x$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (\sin x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(\cos x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{\sin x}{x} + (\ln x)(\cos x)\right)x^{\sin x}$$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل معادلة وسيطية مما يأتي عند قيمة t المعطاة:

37) $x = \sin t, y = \cos t, t = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sec^2 t}{\cos t} = -\sec^3 t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\sec^3\frac{\pi}{4} = -2\sqrt{2}$$

38) $x = e^{-t}, y = t^3 + t + 1, t = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2+1}{-e^{-t}} = e^{-t}(-3t^2-1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(e^t)(-6t) + (-3t^2-1)(e^t)}{-e^{-t}} = e^{2t}(1+6t+3t^2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0} = e^0(1) = 1$$

إذا كانت العلاقة: $x^3 + y^3 = 6xy$، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

39) أجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع منحنى المعادلة مع منحنى $y = x$ في الربع الأول.

$x^3 + y^3 = 6xy$

$y = x \Rightarrow x^3 + x^3 = 6x^2$

$\Rightarrow x^3 = 3x^2$

$\Rightarrow x^2(x-3) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \text{ or } x = 3$

نقطة التقاطع في الربع الأول هي $(3, 3)$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6x\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

ميل المماس هو : $\frac{dy}{dx}|_{(3,3)} = \frac{6-9}{9-6} = -1$

معادلة المماس هي: $y - 3 = -(x-3) \Rightarrow y = -x + 6$

40) أجد إحداثيي نقطة على منحنى العلاقة في الربع الأول، بحيث يكون عندها مماس المنحنى أفقياً.

بما أن المماس أفقي، فإن $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{2y - x^2}{y^2 - 2x} = 0 \Rightarrow 2y - x^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2$$

$$x^3 + y^3 = 6xy \Rightarrow x^3 + \frac{1}{8}x^6 = 3x^3$$

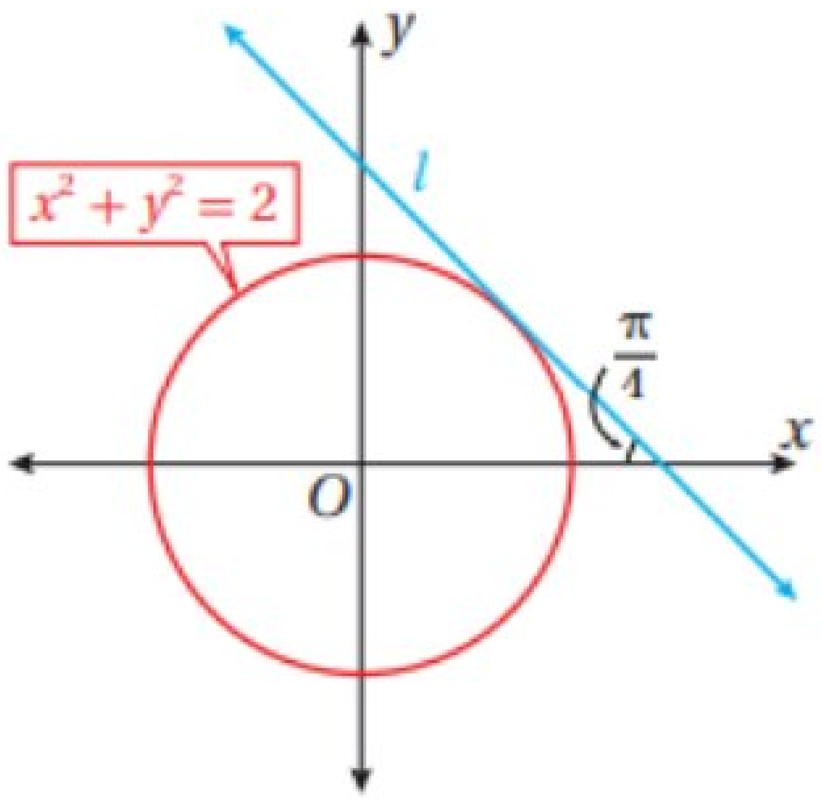
$$\Rightarrow \frac{1}{8}x^6 - 2x^3 = 0$$

$$\Rightarrow x^6 - 16x^3 = 0$$

$$\Rightarrow x^3(x^3 - 16) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \sqrt[3]{16}$$

$$\Rightarrow y = 0, y = \frac{1}{2}\sqrt{(16)^2}$$

النقطة المطلوبة في الربع الأول هي: $(\sqrt[3]{16}, \frac{1}{2}\sqrt{(16)^2})$



40) يُبين الشكل المجاور منحنى العلاقة:
$x^2 + y^2 = 2$، والمستقيم l الذي يُمثل
مماسا لمنحنى العلاقة في الربع الأول. أجد معادلة المستقيم l.

لتكن نقطة التماس $A(x_1, y_1)$

باشتقاق طرفي العلاقة $x^2 + y^2 = 2$ بالنسبة إلى x نجد أن:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

إذن، ميل المماس l هو $-\frac{x_1}{y_1}$

لكن ميل المماس l هو $tan\ \frac{3\pi}{4} = -1$

إذن، $-\frac{x_1}{y_1} = -1 \Rightarrow x_1 = y_1$

وبتعويض (x_1, y_1) في المعادلة المعطاة نجد أن: $x_1{}^2 + y_1{}^2 = 2$

وبتعويض $x_1 = y_1$ في هذه المعادلة نجد أن: $x_1{}^2 + x_1{}^2 = 2 \Rightarrow 2x_1{}^2 = 2 \Rightarrow x_1{}^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$

إذن، نقطة التماس هي: $A(1, 1)$، ومعادلة المماس l هي:

هي:

$$y - 1 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

مهارات التفكير العليا:

تبرير: إذا كان: $x^2 - y^2 = 1$، فأجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعاً:

41) أجد $\frac{dy}{dx}$

$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow 2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

42) يُمكن التعبير عن منحنى العلاقة: $x^2 - y^2 = 1$ بالمعادلة الوسيطية: $x = \sec t, y = \tan t$، حيث: $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

استعمل هذه الحقيقة لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t}$$

43) أُثبت أن المقدارين الجبريين اللذين يُمثلان $\frac{dy}{dx}$ الناتجين في الفرعين السابقين متكافئان مُبررا إجابتي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec t}{\tan t} = \frac{x}{y}$$

المقداران الجبريان اللذان يمثلان $\frac{dy}{dx}$ متكافئان، لأنه من نص السؤال:

$y = \tan t\ , x = \sec$ ومنه فإن $\frac{sc\ t}{\tan t} = \frac{x}{y}$

44) أجد إحداثيات النقاط التي يكون ندها ميل المماس لمنحنى العلاقة 2

$$\frac{dy}{dx} = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y$$

$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow (2y)^2 - y^2 = 1$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}, y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

النقاط التي يكون عندها ميل المماس 2 هي: $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})(2/\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

45) تبرير: إذا مثَّل l أي مماس لمنحنى المعادلة: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$، حيث k عدد حقيقي موجب، فأثبت أن مجموع المقطع x والمقطع y للمستقيم l يساوي k، مبررا إجابتي.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

نفرض نقطة التماس هي (x_1, y_1) فيكون ميل المماس:

$$\frac{dy}{dx}|_{(x_1,y_1)} = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1)$$

المقطع x والمقطع y للمماس:

$$x = 0 \Rightarrow y - y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(-x_1) \Rightarrow y = y_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1}$$

$$x = 0 \Rightarrow y_1 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1) \Rightarrow x = x_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1}$$

مجموع المقطعين:

$$y_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1} + x_1 + \sqrt{y_1}\sqrt{x_1} = y_1 + 2\sqrt{y_1}\sqrt{x_1} + x_1$$
$$= \left(\sqrt{y_1} + \sqrt{x_1}\right)$$
$$= (\sqrt{k})^2 = k$$

46) تحد: إذا كان مماس منحنى الاقتران: $y = (x-3)^{\sqrt{x}}$ عند النقطة $(4,1)$ يقطع المحور x في النقطة B ، والمحور y في النقطة C، فأجد مساحة ΔOBC، حيث O نقطة الأص.

$$y = (x-3)^{\sqrt{x}}$$
$$\ln y = \ln(x-3)^{\sqrt{x}}$$
$$\ln y = \sqrt{x}\ln(x-3)$$
$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (\sqrt{x})\left(\frac{1}{x-3}\right) + \ln(x-3)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \Rightarrow y = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-3} + \frac{\ln(x-3)}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (x-3)^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x}}{x-3} + \frac{\ln(x-3)}{2\sqrt{x}}\right)$$

ميل المماس:

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(4,1)} = (1)^2\left(\frac{2}{1} + \frac{\ln 1}{2(2)} - 1(2+0)\right) = 2$$

معادلة المماس:

$$y - 1 = 2(x-4) \Rightarrow y = 2x - 7$$

المقطع x والمقطع y للمماس:

$$x = 0 \Rightarrow y = -7$$
$$y = 0 \Rightarrow 0 = 2x - 7 \Rightarrow x = 3.5$$

مساحة المثلث OBC بوحدة المساحة هي:

$$A = \frac{1}{2} \times 3.5 \times |-7| = 12.25$$

كتاب التمارين

الدرس الرابع – الاشتقاق الضمني

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

1) $x^3y^3 = 144$

$$3x^3y^2\frac{dy}{dx} + 3x^2y^3 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

2) $xy = \sin(x+y)$

$$x\frac{dy}{dx} + y = \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)\cos(x+y)$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} - \cos(x+y)\frac{dy}{dx} = -y + \cos(x+y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y+\cos(x+y)}{x-\cos(x+y)}$$

3) $y^4 - y^2 = 10x - 3$

$$4y^3\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = 10 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{10}{4y^3 - 2y} = \frac{5}{2y^3 - y}$$

4) $x\sin y - y\cos x = 1$

$$x\cos y\frac{dy}{dx} + \sin y + y\sin x - \cos x\,\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin y + y\sin x}{\cos x - x\cos y}$$

5) $\cot y = x - y$

$$-\csc^2 y\,\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - \csc^2 y} = \frac{-1}{\cot^2 y} = -\tan^2 y$$

6) $\sqrt{xy} + x + y^2 = 0$

$$\frac{x\frac{dy}{dx} + y}{2\sqrt{xy}} + 1 + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y + 2\sqrt{xy} + 4y\sqrt{xy}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y + 2\sqrt{xy}}{x + 4y\sqrt{xy}}$$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

7) $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y, (2, -1)$

$$2x + 3x\frac{dy}{dx} + 3y + 2y\frac{dy}{dx} = 1 + 3\frac{dy}{dx}$$

نعوض $(x.y) = (2, -1)$

$$\Rightarrow 4 + 6\frac{dy}{dx} - 3 - 2\frac{dy}{dx} = 1 + 3\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

معادلة المماس:

$$y + 1 = 0(x - 2) \Rightarrow y = -1$$

8) $xe^y + y\ln x = 2, (1, \ln 2)$

$$xe^y\frac{dy}{dx} + e^y + \frac{y}{x} + \ln x\frac{dy}{dx} = 0$$

نعوض $(x.y) = (1, \ln 2)$

$$e^{\ln 2}\frac{dy}{dx} + e^{\ln 2} + \ln 2 + 0 = 0$$

$$2\frac{dy}{dx} + 2 + \ln 2 = 0 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1 - \frac{1}{2}\ln 2$$

معادلة المماس:

$$y - \ln 2 = (-1 - \tfrac{1}{2}\ln 2)(x - 1)$$

$$y = \left(-1 - \frac{1}{2}\ln 2\right)x + 1 + \frac{3}{2}\ln 2$$

9) $4xy = 9, (1, \frac{9}{4})$

$$4x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

نعوض $(x, y) = (1, \frac{9}{4})$

$$4\frac{dy}{dx} + 9 = 0 \ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{9}{4}$$

$$y - \frac{9}{4} = -\frac{9}{4}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{9}{4}x + \frac{9}{2}$$

10) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1, (1, 2)$

$$x + \frac{1}{4}y\frac{dy}{dx} = 0$$

نعوض $(x, y) = (1, 2)$

$$1 + \frac{1}{2}\frac{dy}{dx} = 0 \ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2$$

معادلة المماس:

$$y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow y = \ -2x + 4$$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي:

11) $x^2y - 4x = 5$

$$x^2\frac{dy}{dx} + 2xy - 4 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4-2xy}{x^2} = 4x^{-2} - 2yx^{-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -8x^{-3} + 2yx^{-2} - 2x^{-1}\frac{dy}{dx}$$

$$= -8x^{-3} + 2yx^{-2} - 2x^{-1}(4x^{-2} - 2yx^{-1})$$

$$= -16x^{-3} + 6yx^{-2} = -\frac{16}{x^3} + \frac{6y}{x^2}$$

12) $x^2 + y^2 = 8$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -xy^{-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xy^{-2}\frac{dy}{dx} - y^{-1}$$

$$= xy^{-2}(-xy^{-1}) - y^{-1}$$

$$= -x^2y^{-3} - y^{-1}$$

$$= -\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = -\frac{x^2+y^2}{y^3} = -\frac{8}{y^3}$$

13) $y^2 = x^3$

$$2y\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12\,xy - 6x^2\frac{dy}{dx}}{4y^2} = \frac{12\,xy - 6x^2 \times \frac{3x^2}{2y}}{4y^2} = \frac{12xy^2 - 9x^4}{4y^3}$$

14) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $y = x^{x^2}$ عندما $x = 2$.

$$y = (x)^{x^2} \Rightarrow \ln y = \ln(x)^{x^2}$$

$$\Rightarrow \ln y = x^2 \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = x^2 \times \frac{1}{2} + 2x\ln x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = xy + 2xy\ \ln x$$

$$x = 2 \Rightarrow y = (2)^{2^2} = 16 \Rightarrow (2, 16)$$

ميل المماس: $\frac{dy}{dx}|_{x=2} = 2 \times 16 + 2 \times 2 \times 16 \ln 2 = 32 + 64\ \ln 2$

معادلة المماس: $y - 16 = (32 + 64\ \ln 2)(x - 2)$

15) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة $(x+y)^3 = x^2 + y$ عند النقطة $(1,0)$.

$$3(x+y)^2\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = 2x + \frac{dy}{dx}$$

نعوض $(x,y) = (1,0)$

$$3\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = 2 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow 3 + 3\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$$

ميل المماس: $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$

بما أن ميل المماس هو $-\frac{1}{2}$، فإن ميل العمودي على المماس هو 2

معادلة العمودي على المماس: $y - 0 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 2$

16) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $y = x(\ln x)^x$ عندما $x = e$.

$$y = x(\ln x)^x \Rightarrow \ln y = \ln(x(\ln x)^x)$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln x + x\ln(\ln x)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x} + x \times \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} + \ln(\ln x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y}{\ln x} + y\ln(\ln x)$$

$$x = e \Rightarrow y = e(\ln e)^e = e \Rightarrow (e,e)$$

ميل المماس: $\frac{dy}{dx}|_{x=e} = \frac{e}{e} + \frac{e}{1} + 0 = 1 + e$

معادلة المماس $y - e = (1+e)(x-e) \Rightarrow y = (1+e)x - e^2$

أجد مشتقة كل من الاقترانات الآتية باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

17) $y = (x-2)^{x+1}$

$$y = (x-2)^{x+1} \Rightarrow \ln y = (x+1)\ln(x-2)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = (x+1) \times \frac{1}{x-2} + \ln(x-2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y(x+1)}{x-2} + y\ln(x-2)$$

$$= \frac{(x-2)^{x+1}(x+1)}{x-2} + (x-2)^{x+1}\ln(x-2)$$

$$= (x-2)^x(x+1) + (x-2)^{x+1}\ln(x-2)$$

18) $y = \frac{10\sqrt[10]{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}$

$$y = \frac{10\sqrt[10]{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}} \Rightarrow \ln y = 10\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+5) - \frac{1}{3}\ln(xx^2+2)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{10}{x} + \frac{x}{x^2+5} - \frac{16x}{3(8x^2+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt[10]{x^2+5}}{\sqrt[3]{8x^2+2}}(\frac{10}{x} + \frac{x}{x^2+5} - \frac{16x}{3(8x^2+2)}$$

19) $y = (\cos x)^x$

$$y = (\cos x)^x \Rightarrow \ln y = x\ln(\cos x)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = x \times \frac{-\sin x}{\cos x} + \ln(\cos x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\cos x)^x(-x\tan x + \ln(\cos x))$$

20) أجد إحداثيي النقطة الواقعة في الربع الأول على منحنى العلاقة: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ التي يكون ميل المماس عندها -0.5

نفرض أن النقطة المطلوبة هي $P(x_1, y_1)$ الواقعة على المنحنى.

نشتق طرفي العلاقة بالنسبة إلى x فينتج أن:

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{9}y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{2}{9}y} = -\frac{9x}{4y}$$

ميل المماس عند P هو: $-\frac{9x_1}{4y_1}$ لكن ميل المماس يساوي -0.5

إذن، $-\frac{9x_1}{4y_1} = -0.5 \Rightarrow 2y_1 = 9x_1$

وبضرب طرفي معادلة المنحنى في 36 نجد أن: $4y^4 + 9x^2 = 36$

وبتعويض إحداثيي P نجد أن:

$$4{y_1}^2 + 9{x_1}^2 = 36$$

$$\Rightarrow 81{x_1}^2 + 9{x_1}^2 = 36 \Rightarrow 90{x_1}^2 = 36 \Rightarrow {x_1}^2 = 0.4 \Rightarrow x_1 = \sqrt{0.4}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{9}{2}\sqrt{0.4} = \sqrt{8.1}$$

النقطة المطلوبة هي: $P(\sqrt{0.4}, \sqrt{8.1})$

21) أجد نقطتي تقاطع منحنى العلاقة: $x^2 + xy + y^2 = 7$ مع المحور x، ثم أثبت أن مماسي منحنى العلاقة عند هاتين النقطتين متوازيان.

$$x^2 + xy + y^2 = 7$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \Rightarrow P_1 = (\sqrt{7}, 0), P_2 = (-\sqrt{7}, 0)$$

$$x^2 + xy + y^2 = 7 \Rightarrow 2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

$$\frac{dy}{dx}|_{P_1} = -\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = -2, \qquad \frac{dy}{dx}|_{P_2} = -\frac{-2\sqrt{7}}{-\sqrt{7}} = -2$$

ميلا المماسين متساويان، إذن هذان المماسان متوازيان.

اختبار نهاية الوحدة

اختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) يُمثل الاقتران: $s(t)3 + sin\ t$ حركة توافقية بسيطة لجُسيم. إحدى الآتية تُمثل الزمن الذي تكون عنده سرعة الجسيم صفراً:

a) $t = 0$ b) $t = \frac{\pi}{4}$ c) $t = \frac{\pi}{2}$ d) $t = \pi$

2) إذا كان: $y = uv$، وكان: $u(1) = 2, u'(1) = 3, v(1) = -1, v'(1) = 1$، فإن $y'(1)$ تساوي:

a) 1 b) -1 c) 1 d) 4

3) إذا كان: $f(x) = x - \frac{1}{x}$، فإن $f''(x)$ هي:

a) $1 + \frac{1}{x^2}$ b) $1 - \frac{1}{x^2}$ c) $\frac{2}{x^3}$ d) $-\frac{2}{x^3}$

4) إذا كان: $y = tan\ 4t$، فإن $\frac{dy}{dt}$ هو:

a) $4\ sec\ 4t\ tan\ 4t$ b) $sec\ 4t\ tan\ 4t$ c) $sec^2(4t)$ d) $4\ sec^2(4t$

5) إذا كان: $y^2 - x^2 = 1$، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ هو:

a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $-\sqrt{2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

6) إذا كان: $f(x) = log\ (2x - 3)$، فإن $f'(x)$هي:

a) $\frac{2}{(2x-3)\ln 10}$ b) $\frac{2}{(2x-3)}$ c) $\frac{1}{(2x-3)\ln 10}$ d) $\frac{1}{(2x-3)}$

7) إذا كان: $y = 2^{1-x}$، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عندما $x = 2$ هو:

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\ln 2}{2}$ d) $-\frac{\ln 2}{2}$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي:

8) $f(x) = e^x(x + x\sqrt{x})$

$$f(x) = e^x(x + x\sqrt{x})$$

$$f'(x) = (e^x)\left(1 + (x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + (\sqrt{x})(1)\right) + (x + x\sqrt{x})(e^x)$$

$$= e^x(1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} + x + x\sqrt{x})$$

9) $f(x) = \frac{x}{tan\, x}$

$$f(x) = \frac{x}{tan\, x}$$

$$f'(x) = \frac{(tan\, x)(1) - (x)(sec^2 x)}{tan^2 x} = \frac{tan\, x - x sec^2 x}{tan^2 x}$$

10) $f(x) = \frac{1}{x} - 12\, sec\, x$

$$f(x) = \frac{1}{x} - 12\, sec\, x$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} - 12\, sec\, x\, tan\, x$$

11) $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$

$$f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$$

$$f'(x) = \frac{(\ln x)(e^x) - (e^x)(\frac{1}{x})}{\ln^2 x} = \frac{e^x(x \ln x - 1)}{x \ln^2 x}$$

12) $f(x) = \frac{\ln x}{x^4}$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{(x^4)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(4x^3)}{x^8} = \frac{1 - 4\ln x}{x^5}$$

13) $f(x) = 5^{2-x}$

$f(x) = 5^{2-x}$

$\ln f(x) = \ln 5^{2-x}$

$\ln f(x) = (2-x)\ln 5$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\ln 5$

$f'(x) = -(\ln 5)f(x) = -(\ln 5)(5^{2-x})$

14) $f(x) = 10\, sin\, 0.5\, x$

$f(x) = 10\, sin\, 0.5\, x$

$f'(x) = 5\, cos\, 0.5x$

15) $f(x) = (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})^3 (x + \frac{1}{x})^2$

$f(x) = (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})^3 (x + \frac{1}{x})^2$

$f'(x) = (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})^3 \left(2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right) + (x+\frac{1}{x})^2 \left(3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\right)$

$= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)(2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right))$

$= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^4}-\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}-\frac{3}{x^3}-\frac{6}{x^4})$

$= -\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)(\frac{8+5x+4x^2+x^3}{x^4})$

16) $f(x) = e^{-1.5x} cos\, x^2$

$f(x) = e^{-1.5x} cos\, x^2$

$f'(x) = (e^{-1.5x})(-2x\, sin\, x^2) + (cos\, x^2)(-1.5e^{-1.5x})$

$= -e^{-1.5x}(2x\, sin\, x^2 + 1.5\, cos\, x^2)$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 2$، وكان: $f(2) = 3, f'(2) = -4, g(2) = 1, g'(2) = 2$

فأوجد كُلا مما يأتي:

17) $(fg)'(2)$

$(fg)'(2) = f(2)g'(2) + g(2)f'(2)$

$= 3 \times 2 + 1 \times -4 = 2$

18) $(\frac{f}{g})'(2)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{g(2)f'(2) - f(2)g'(2)}{g^2(2)} = \frac{1 \times -4 - 3 \times 2}{(1)^2} = -10$$

19) $(3f - 4fg)'$

$$(3f - 4fg)'(2) = 3f'(2) - 4(fg)'(2) = 3(-4) - 4(2) = -20$$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي:

20) $f(x) = x^7 \ln x$

$$f(x) = x^7 \ln x$$

$$f'(x) = (x^7)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(7x^6) = x^6 + 7x^6 \ln x$$

$$f''(x) = 6x^5 + (7x^6)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(42x^5) = 13x^5 + 42x^5 \ln x$$

21) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{(x)(-\sin x) - (\cos x)(1)}{x^2} = \frac{-\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} - \frac{-x^2 \sin x - 2x\cos x}{x^4}$$

$$= \frac{-x^3 \cos x + 2x^2 \sin x + 2x\cos x}{x^4}$$

$$= \frac{-x^2 \cos x + 2x\sin x + 2\cos x}{x^3}$$

22) $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$

$$f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{(1+\sqrt{x})(1) - (x)(\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1+\sqrt{x})^2\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}\right) - (1+\frac{1}{2}\sqrt{x})(\frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}))}{(1+\sqrt{x})^4}$$

$$= \frac{-3-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}$$

23) $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

$$f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$f'(x)=\frac{(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(1+x^2)^2(-4)-(-4x)(2\times 2x(1+x^2))}{(1+x^2)^4}$$

$$=\frac{12x^2-4}{(1+x^2)^3}$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران مما يأتي عند القيمة المعطاة:

24) $f(x)=\frac{x^2}{1+x}, x=1$

$$f(x)=\frac{x^2}{1+x}$$

نقطة التماس: $f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow(1,\frac{1}{2})$

ميل المماس: $f'(x)=\frac{(1+x)(2x)-(x^2)(1)}{(1+x)^2}=\frac{x^2+2x}{(1+x)^2}$

$$f'(1)=\frac{3}{4}$$

معادلة المماس: $y-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}(x-1)\Rightarrow y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

25) $f(x)=\frac{x^2}{\cos x}, x=\frac{\pi}{4}$

$$f(x)=\frac{x^2}{\cos x}$$

نقطة التماس: $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{(\frac{\pi}{4})^2}{\cos(\frac{\pi}{4})}=\frac{\frac{\pi^2}{16}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}\Rightarrow(\frac{\pi}{4},\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16})$

ميل المماس: $f'(x)=\frac{(\cos x)(2x)-(x^2)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{\pi^2}{16}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{2}}=\frac{8\pi+\pi^2}{8\sqrt{2}}$$

معادلة المماس: $y-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}=\frac{8\pi+\pi^2}{8\sqrt{2}}(x-\frac{\pi}{4})$

26) $f(x)=\ln(x+5), x=0$

نقطة التماس

$$f(x)=\ln(x+5)$$

$$f(0)=\ln(0+5)=\ln 5\Rightarrow(0,\ln 5)$$

ميل المماس: $f'(x)=\frac{1}{x+5}$

$$f'(0)=\frac{1}{5}$$

معادلة المماس: $y-\ln 5=\frac{1}{5}(x-0)\Rightarrow y=\frac{1}{5}x+\ln 5$

27) $f(x)=\sin x+\sin 3x, x=\frac{\pi}{4}$

$$f(x)=\sin x+\sin 3x$$

نقطة التماس $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow(\frac{\pi}{4},\sqrt{2})$

ميل المماس: $f'(x)=\cos x+3\cos 3x$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}+3\cos\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

معادلة المماس: $y-\sqrt{2}=-\sqrt{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow y=-\sqrt{2}x+\sqrt{2}\left(\frac{\pi+4}{4}\right)$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية مما يأتي عند النقطة المُحددة بقيمة t المعطاة:

28) $x = t^2, y = t + 2, t = 4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{2t}$$

ميل المماس: $m = \frac{dy}{dx}|_{t=4} = \frac{1}{8}$

نقطة التماس: $x = (4)^2 = 16, y = 4 + 2 = 6 \Rightarrow (16, 6)$

معادلة المماس: $y - 6 = \frac{1}{8}(x - 16) \Rightarrow y = \frac{1}{x}x + 4$

29) $x = 4\cos t, y = 3\sin t, t = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\cos t}{-4\sin t} = -\frac{3}{4}\cot t$$

ميل المماس: $m = \frac{dy}{dx}|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{4}\cot\frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}$

نقطة التماس: $x = 4\cos\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}, y = 3\sin\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (2\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$

معادلة المماس: $y - \frac{3\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{4}(x - 2\sqrt{2}) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 3\sqrt{2}$

إذا كان: $y = x\ln x$، حيث: $x > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

30) أجد معادلة المماس عند النقطة $(1, 0)$

$y = x\ln x$

ميل المماس: $f'(x) = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1) = 1 + \ln x$

$f'(1) = 1 + \ln 1 = 1$

معادلة المماس: $y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$

31) أجد إحداثيي النقطة التي يكون ميل المماس عندها 2.

$f'(x) = 2 \Rightarrow 1 + \ln x = 2$

$\Rightarrow \ln x = 1$

$\Rightarrow x = e \Rightarrow y = e\ln e = e$

النقطة المطلوبة هي (e, e)

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

32) $x(x+y) = 2y^2$

$$x(x+y) = 2y^2 \Rightarrow x^2 + xy = 2y^2$$
$$\Rightarrow 2x + x\frac{dy}{dx} + y = 4y\frac{dy}{dx}$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{4y-x}$$

33) $x = \frac{2y}{x^2-y}$

$$x = \frac{2y}{x^2-y}$$
$$1 = \frac{2\frac{dy}{dx}(x^2-y) - 2y(2x - \frac{dy}{dx})}{(x^2-y)^2}$$
$$(x^2-y)^2 + 3xy = 2x^2\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2-y)^2 + 4xy}{2x^2}$$

34) $y\cos x = x^2 + y^2$

$$y\cos x = x^2 + y^2 \Rightarrow -y\sin x + \frac{dy}{dx}\cos x = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\sin x}{-2y + \cos x}$$

35) $2xe^y + ye^x = 3$

$$2xe^y + ye^x = 3 \Rightarrow 2xe^y\frac{dy}{dx} + 2e^y + ye^x + e^x\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2e^y + ye^x}{2xe^y + e^x}$$

36) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $y^2 = \frac{x^3}{2-x}$

$$y^2 = \frac{x^3}{2-x}$$
$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(2-x)(3x^2) - (x^3)(-1)}{(2-x)^2}$$
$$2(-1)\frac{dy}{dx} = \frac{(2-1)(3) - (1)(-1)}{(2-1)^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2$$

ميل المماس: $m = -2$

ميل العمودي على المماس: $m = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$

معادلة العمودي على المماس: $y + 1 = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

37) $y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}, x > 2$

$$y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$\ln y = \ln \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \ln(x+1) + \ln(x-2) - \ln(x-1) - \ln(x+2)$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) y$$

$$= \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \left(\frac{-2}{x^2-1} + \frac{4}{x^2-4}\right) \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \left(\frac{2x^2+4}{(x^2-1)(x^2-4)}\right) \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{2x^2+4}{(x-1)^2(x-4)^2}$$

38) $y = x^{\ln x}, x > 0$

$$y = x^{\ln x}$$

$$\ln y = \ln x^{\ln x}$$

$$= (\ln x)(\ln x) = (\ln x)^2$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = 2(\ln x) \times \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2\ln x}{x}\right) y$$

$$= \left(\frac{2\ln x}{x}\right) x^{\ln x}$$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

39) $x^2+3xy+y^2=x+3y,(2,-1)$

$$x^2+3xy+y^2=x+3y$$

$$2x+3x\frac{dy}{dx}+3y+2y\frac{dy}{dx}=1+3\frac{dy}{dx}$$

ميل المماس عند (2, -1):

$$4+6\frac{dy}{dx}-3-2\frac{dy}{dx}=1+3\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}|_{(2,-1)}=0$$

معادلة المماس:

$$y+1=0(x-2)\Rightarrow y=-1$$

40) $x^2e^y=1,(1,0)$

$$x^2e^y=1$$

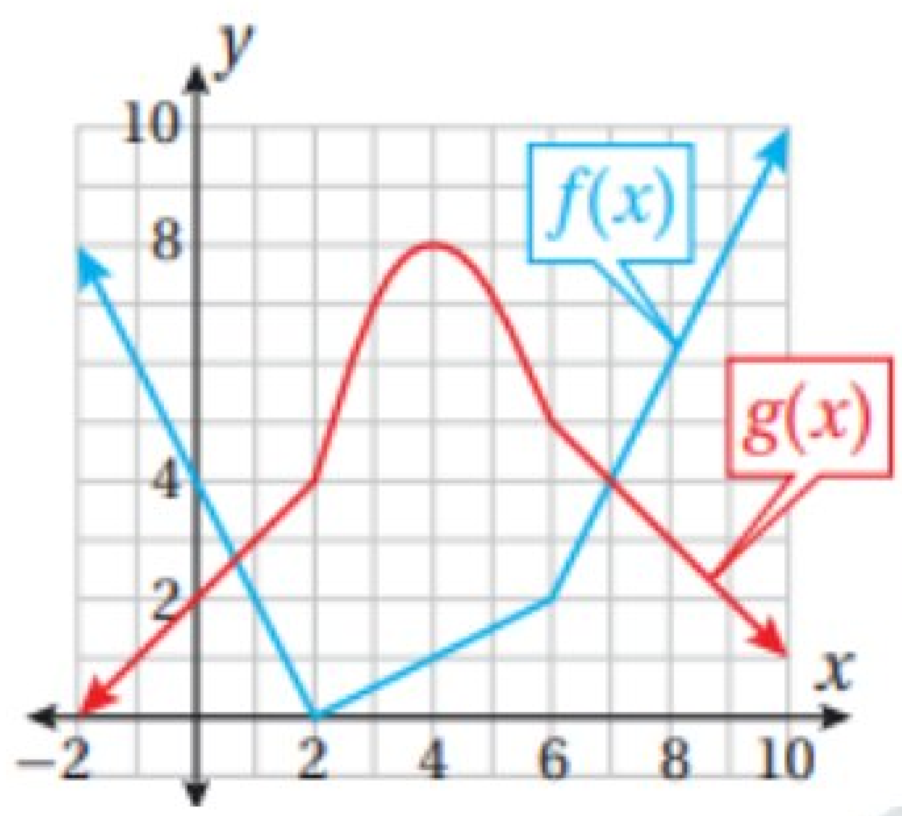
ميل المماس:

$$x^2e^y=\frac{dy}{dx}+2xe^y=0$$

$$\frac{dy}{dx}+2=0\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}|_{(1,0)}=-2$$

معادلة المماس:

$$y-0=-2(x-1)\Rightarrow y=-2x+2$$



يُبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x)$، $g(x)$. إذا كان: $p(x)=f(x)g(x)$، وكان: $q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$، فأجد كُلا مما يأتي:

41) $p'(1)$

$$p'(1)=f(1)g'(1)+g(1)f'(1)=2\times1+3\times-2=-4$$

42) $p'(4)$

$$p'(4)=f(4)g'(4)+g(4)f'(4)=1\times0+8\times0.5=4$$

43) $q'(7)$

$$q'(7)=\frac{g(7)f'(7)-f(7)g'(7)}{(g(7))^2}=\frac{4\times2-4\times-1}{(4)^2}=\frac{3}{4}$$

44) مواد مُشعة: يُمكن نمذجة الكمية R (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها $200g$ من عنصر مُشع بعد t يوماً باستعمال الاقتران: $R(t)=200(0.9)^t$. أجد $\frac{dR}{dt}$ عندما $t=2$

$$R(t)=200(0.9)^t$$

$$\frac{dR}{dt}=200(0.9)^t\ln0.9$$

$$\frac{dR}{dt}|_{t=2}=200(0.9)^2\ln0.9\approx-17.1\text{ g/day}$$

45) يُمثل الاقتران: $s(t) = 10 + \frac{1}{4}sin\ (10\pi t)$ موقع جُسيم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالسنتيمترات، و t الزمن بالثواني. أجد سرعة الجُسيم وتسارعه بعد t ثانية.

$$s(t) = 10 + \frac{1}{4}sin\ (10\pi t)$$
$$v(t) = \frac{5\pi}{2}cos\ (10\pi t)$$
$$a(t) = -25\pi^2 sin\ (10\pi t)$$