كتاب الطالب

الدرس الأول – الأعداد المُركبة

مثال 1:

أجد قيمة الجذر الرئيس في كل مما يأتي بدلالة i:

1) $\sqrt{-16}$

بالتحليل	$\sqrt{-16} = \sqrt{-1 \times 16}$
خاصية ضرب الجذور التربيعة	$= \sqrt{-1} \times \sqrt{16}$
تعريف الجذر الرئيس للعدد 1-	$= i \times 4 = 4i$

2) $\sqrt{-72}$

بالتحليل	$\sqrt{-72} = \sqrt{-1 \times 36 \times 2}$
خاصية ضرب الجذور التربيعة	$= \sqrt{-1} \times \sqrt{36} \times \sqrt{2}$
تعريف الجذر الرئيس للعدد 1-	$= i \times 6 \times \sqrt{2} = 6i\sqrt{2}$

أتحقق من فهمي

أجد قيمة الجذر الرئيس في كل مما يأتي بدلالة i:

a) $\sqrt{-75}$

$$\sqrt{-75} = \sqrt{-1 \times 25 \times 3} = \sqrt{-1} \times \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5i\sqrt{3}$$

b) $\sqrt{-49}$

$$\sqrt{-49} = \sqrt{-1 \times 49} = \sqrt{-1} \times \sqrt{49} = 7i$$

مثال 2:

أجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة مُفترضا أن $i = \sqrt{-1}$:

1) $\sqrt{-8} \times \sqrt{-18}$

$\sqrt{-8} \times \sqrt{-18} = \sqrt{-1 \times 8} \times \sqrt{-1 \times 18}$	بالتحليل
$= (\sqrt{-1} \times \sqrt{8}) \times (\sqrt{-1} \times \sqrt{18})$	خاصية ضرب الجذور التربيعية
$= (i \times \sqrt{8}) \times (ix \times \sqrt{18})$	بافتراض أن $\sqrt{-1} = i$
$= (i \times i) \times (\sqrt{8} \times \sqrt{18})$	خاصيتا التبديل والتجميع للضرب
$= i^2 \times \sqrt{144}$	خاصية ضرب الجذور التربيعية
$= -1 \times 12 = -12$	بالتبسيط $i^2 = -1$

2) $5j \times \sqrt{-4}$

$5j \times \sqrt{-4} = 5j \times \sqrt{-1 \times 4}$	بالتحليل
$= 5j \times \sqrt{-1} \times \sqrt{4}$	خاصية ضرب الجذور التربيعية
$= 5j \times j \times 2$	بافتراض أن $\sqrt{-1} = i$
$= (2 \times 5) \times i \times i$	خاصيتا التبديل والتجميع للضرب
$= 10i^2$	خاصية ضرب الجذور التربيعية
$= 10 \times -1 = -10$	بالتبسيط $i^2 = -1$

3) i^{15}

$i^{15} = (i^2)^7 \times i$	خاصية قوة القوة
$= (-1)^7 \times i$	بالتبسيط: $t^2 = -1$
$= -i$	بالتبسيط: $(-1)^7 = -1$

أتحقق من فهمي

أجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة مفترضا أن $i = \sqrt{-1}$:

a) $\sqrt{-27} \times \sqrt{-48}$

$$\sqrt{-27} \times \sqrt{-48} = \sqrt{-1 \times 27} \times \sqrt{-1 \times 48}$$

$$= i\sqrt{9 \times 3} \times i\sqrt{16 \times 3} = i^2\sqrt{9 \times 3 \times 16 \times 3} = 36i^2 = -36$$

b) $\sqrt{-50} \times -4i$

$\sqrt{-50} \times -4j = \sqrt{-1 \times 50} \times (-4i)$

$= 5i\sqrt{2} \times (-4i) = -20\sqrt{2}i^2 = 20\sqrt{2}$

c) i^{2021}

$i^{2021} = (i^2)^{1010} \times i = (-1)^{1010} \times i = i$

مثال 3:

أجد قيمة x وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة: $2x - 6 + (3y+2)i = 4x + 8i$ صحيحة

أُساوي الجزأين الحقيقيين، وأُساوي الجزأين التخيليين، ثم أحُل المعادلتين الناتجتين:

بمساواة الجزأين التخليين $3y + 2 = 8$ بمساواة الجزأين الحقيقيين $2x - 6 = 4x$

بحل المعادلة $y = 2$ بحل المعادلة $x = -3$

إذن، $x = -3, y = 2$

أتحقق من فهمي

أجد قيمة x، وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة: $x + 5 + (4y - 9)i = 12 - 5i$ صحيحة.

$x + 5 + (4y-9)i = 12 - 5i \Rightarrow x + 5 = 12\,, 4y - 9 = -5 \Rightarrow x = 7, y = 1$

مثال 4:

أُمثل العدد المُركب ومرافقه بيانيا في المستوى المُركب في كل مما يأتي:

1) $z = -3 + 5i$

مرافق العدد المركب: $z = -3 + 5i$ هو: $\bar{z} = -3 - 5i$

يمثل الزوج المرتب (3,5-) العدد المركب z، ويمثل الزوج المرتب (3,-5-) مرافقة $\bar{z}$

2) $z = 6 - 4i$

مرافق العدد المركب: $z = 6 - 4i$ هو: $\bar{z} = 6 + 4i$

يمثل الزوج المرتب (4- ,6) العدد المركب z، ويمثل الزوج المرتب (6, 4) مرافقة $\bar{z}$

3) $z = 2i$

مرافق العدد المركب: $z = 2i$ هو: $\bar{z} = -2i$

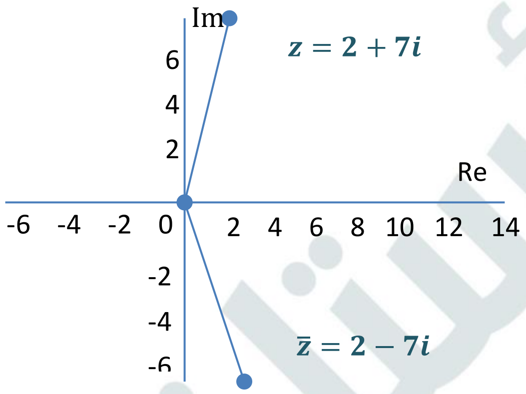
يمثل الزوج المرتب (0, 2) العدد المركب z، ويمثل الزوج المرتب (2- ,0) مرافقة $\bar{z}$

أتحقق من فهمي

أُمثل العدد المركب ومرافقه بيانيا في المستوى المركب في كل مما يأتي:

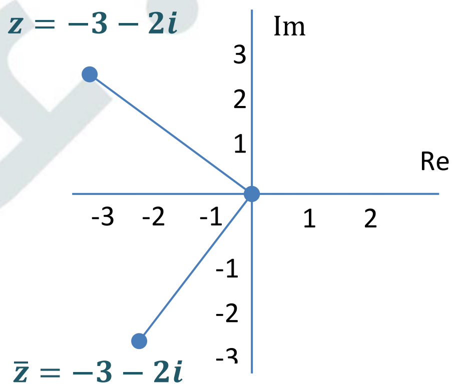
a) $z = 2 + 7i$

$z = 2 + 7i\,, \bar{z} = 2 - 7i$



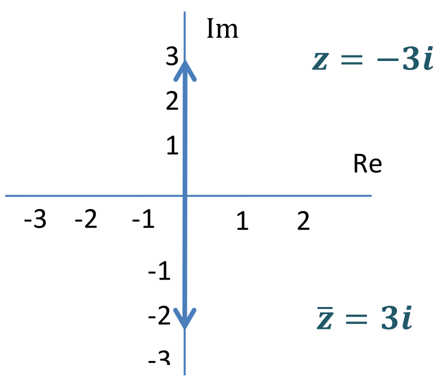
b) $z = -3 - 2i$

$z = -3 - 2i\,, \bar{z} = -3 - 2i$



c) $z = -3i$

$z = -3i\,, \bar{z} = 3i$



مثال 5:

أجد مقياس كل عدد مركب مما يأتي:

1) $z = 3 - 4i$

صيغة مقياس العدد المركب $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

بتعويض $a = 3, b = -4$ $= \sqrt{3^2 + (-4)^2}$

بالتبسيط $= \sqrt{25} = 5$

2) $z = 12i$

صيغة مقياس العدد المركب $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

بتعويض $a = 0, b = 12$ $= \sqrt{0^2 + (12)^2}$

بالتبسيط $= \sqrt{144} = 12$

أتحقق من فهمي

أجد مقياس كل عدد مرمب مما يأتي:

a) $z = -3 - 6i\sqrt{2}$

$$z = -3 - 6i\sqrt{2} \Rightarrow |z| = \sqrt{(-3)^2 + (-6\sqrt{2})^2} = \sqrt{81} = 9$$

b) $z = -2i$

$$z = -2i \Rightarrow |z| = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

c) $z = 4 + \sqrt{-20}$

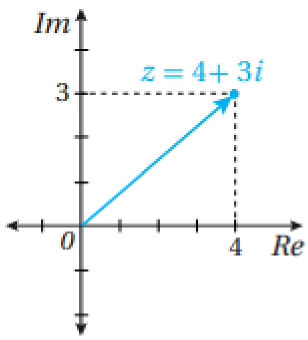
$$z = 4 + \sqrt{-20} = 4 + \sqrt{-1} \times \sqrt{20} = 4 + i\sqrt{20}$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{(4)^2 + (\sqrt{20})^2} = \sqrt{36} = 6$$

مثال 6:

أجد سعة كل من الأعداد المركبة الآتية، مُقربا إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين:

1) $z = 4 + 3i$



بالنظر إلى التمثيل البياني للعدد المركب: $z = 4 + 3i$

في الشكل المجاور، ألاحظ أنه يقع في الربع الأول.

سعة العدد المركب في الربع الأول

$$\text{Arg}(z) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

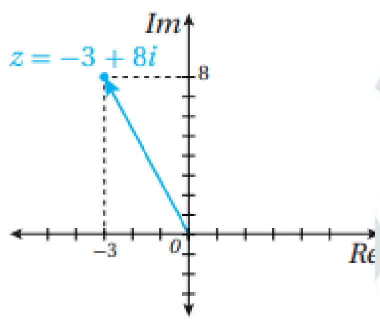
بتعويض $a = 4, b = 3$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 0.64

إذن $\text{Arg}(z) \approx 0.64$

2) $z = -3 + 8i$



بالنظر إلى التمثيل البياني للعدد المركب: $z = -3 + 8i$

في الشكل المجاور، ألاحظ أنه يقع في الربع الثاني.

سعة العدد المركب في الربع الثاني

$$\text{Arg}(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

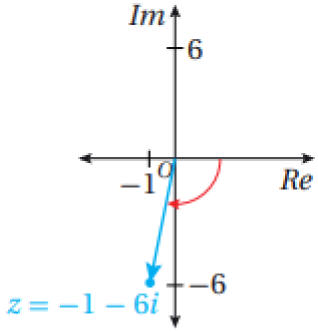
بتعويض $a = 3, b = 8$

$$= \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right)$$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 1.93

إذن $\text{Arg}(z) \approx 1.93$

3) $z = -1 - 6i$



بالنظر إلى التمثيل البياني للعدد المركب: $z = -1 - 6i$

في الشكل المجاور، ألاحظ أنه يقع في الربع الثالث.

سعة العدد المركب في الربع الثالث

$$\mathrm{Arg}(z) = -(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right))$$

بتعويض $a = 1, b = 6$

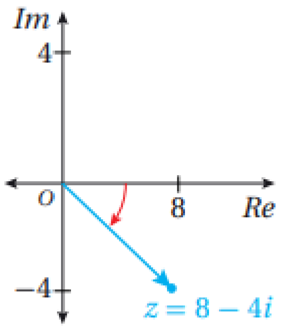
$$= -(\pi - \tan^{-1}(\frac{6}{1}))$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$\approx -1.74$$

إذن $\mathrm{Arg}(z) \approx -1.74$

4) $z = 8 - 4i$



بالنظر إلى التمثيل البياني للعدد المركب: $z = 8 - 4i$

في الشكل المجاور، ألاحظ أنه يقع في الربع الرابع.

سعة العدد المركب في الربع الرابع

$$\mathrm{Arg}(z) = -\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

بتعويض $a = 8, b = 4$

$$= -\tan^{-1}(\frac{4}{8}))$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$\approx -0.46$$

إذن $\mathrm{Arg}(z) \approx -0.46$

أتحقق من فهمي

أجد سعة كل من الأعداد المركبة الآتية، مُقربا إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين:

a) $z = 8 + 2i$

$z = 8 + 2i$

$Arg(z) = tan^{-1}\left(\frac{2}{8}\right) \approx 0.24$

b) $z = -5 + 12i$

$z = -5 + 12i$

$Arg(z) = \pi - tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right) \approx 1.97$

c) $z - 2 - 3i$

$z = -2 - 3i$

$Arg(z) = -\left(\pi - tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) \approx 2.16$

d) $z = 8 - 8i\sqrt{3}$

$z = 8 - 8i\sqrt{3}$

$Arg(z) = -tan^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{8}\right) = -\frac{\pi}{3} \approx -1.05$

مثال 7:

أكتب العدد المركب z في كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

1) $|z| = 4, Arg(z) = \frac{\pi}{6}$

الصورة المثلثية للعدد المركب

$z = r(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$

بتعويض $r = 4, \theta = \frac{\pi}{6}$

$= 4(cos\,\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6})$

إذن، الصورة المثلثية للعدد z هي:

$z = 4(cos\,\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6})$

2) $z = -2 - 5i$

الخطوة 1: أجد مقياس العدد z.

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

الخطوة 2: أجد سعة العدد z

بما أن العدد يقع في الربع الثالث، فإن:

سعة العدد المركب في الربع الثالث $\quad \text{Arg}(z) = -(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right))$

بتعويض $a = 2, b = 5$ $\quad = -(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right))$

باستعمال الآلة الحاسبة $\quad \approx -1.95$

إذن: $Arg(z) \approx -1.95$

الخطوة 3: أكتب z بالصورة المثلثية:

$$z \approx \sqrt{29}(cos(-1.195) + i\, sin(-1.95))$$

أتحقق من فهمي

أكتب العدد المركب z في كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

a) $|z| = 4\sqrt{2}, Arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$

$$|z| = 4\sqrt{2}, Arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$$

$$z = r(cos\,\theta + i\,sin\,\theta) = 4\sqrt{2}(cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\,sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right))$$

b) $z = -4 - 4i$

$$z = -4 - 4i$$

$$\Rightarrow r = |z| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$Arg(z) = -\left(\pi - -tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right)\right) \approx -\frac{3\pi}{4}$$

$$z = r(cos\,\theta + i\,sin\,\theta) = 4\sqrt{2}(cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\,sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right))$$

c) $z = 2i$

$z = 2i$

$\Rightarrow r = |z| = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = 2$

$Arg(z) = \frac{\pi}{2}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\ sim\left(\frac{\pi}{2}\right))$

أتدرب وأحل المسائل

أجد قيمة الجذر الرئيس في كل مما يأتي بدلالة i:

1) $\sqrt{-19}$

$\sqrt{-19} = \sqrt{-1 \times 19} = \sqrt{-1} \times \sqrt{19} = i\sqrt{19}$

2) $\sqrt{\frac{-12}{25}}$

$\sqrt{-\frac{12}{25}} = \sqrt{-1 \times \frac{12}{25}} = \sqrt{-1} \times \sqrt{\frac{12}{25}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}i$

3) $\sqrt{\frac{-9}{32}}$

$\sqrt{-\frac{9}{32}} = \sqrt{-1 \times \frac{9}{32}} = \sqrt{-1} \times \sqrt{\frac{9}{32}} = \frac{3}{4\sqrt{2}}i$

4) $\sqrt{-53}$

$\sqrt{-53} = \sqrt{-1 \times 53} = \sqrt{-1} \times \sqrt{53} = i\sqrt{53}$

أجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة مُفترضا أن $i = \sqrt{-1}$:

5) i^{26}

$i^{26} - (i^2)^{13} - -1$

6) i^{39}

$i^{39} - (i^2)^{19} \times i = (-1)^{19} \times i = -i$

7) $(i)(2i)(-7i)$

$(i)(2i)(-7i) = (2i^2)(-7i) = (-2)(-7i) = 14i$

8) $\sqrt{-6} \times \sqrt{-6}$

$\sqrt{-6} \times \sqrt{-6} = \sqrt{-1 \times 6} \times \sqrt{-1 \times 6}$

$= i\sqrt{6} \times i\sqrt{6}$

$= 6i^2 = -6$

9) $\sqrt{-4} \times \sqrt{-8}$

$\sqrt{-4} \times \sqrt{-8} = \sqrt{-1 \times 4} \times \sqrt{-1 \times 8}$

$= 2i \times 2\sqrt{2}i$

$= 4\sqrt{2i^2} = -4\sqrt{2}$

10) $2i \times \sqrt{-9}$

$2i \times \sqrt{-9} = 2i \times \sqrt{-1 \times 9}$

$= 2i + 3i$

$= 6i^2 = -6$

أكتب في كل مما يأتي العدد المركب z بالصورة القياسية:

11) $\frac{2+\sqrt{-4}}{2}$

$$\frac{2+\sqrt{-4}}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$$

12) $\frac{8+\sqrt{-16}}{2}$

$$\frac{8+\sqrt{-16}}{2} = \frac{8+4i}{2} = 4 + 2i$$

13) $\frac{10-\sqrt{-50}}{5}$

$$\frac{10-\sqrt{-50}}{5}=\frac{10-5i\sqrt{2}}{5}=2+i\sqrt{2}$$

أحدد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لكل من الأعداد المركبة الآتية، ثم أُمثلها جميعها في المستوى المركب نفسه:

14) $z=2+15i$

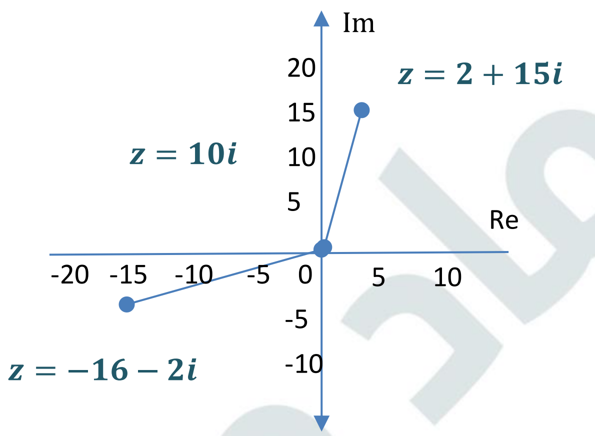
$z=2+15i\ \Rightarrow Re(z)=2, Im(z)=15$

15) $z=10i$

$z=10i\ \Rightarrow Re(z)=0, Im(z)=10$

16) $z=-16-2i$

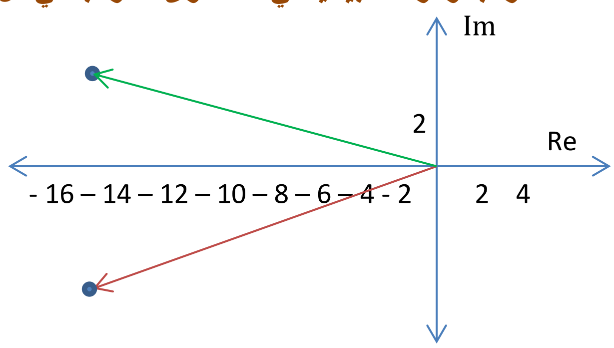
$z=-16-2i\Rightarrow Re(z)=-16, Im(z)=\ -2$



أُمثل العدد المركب ومرافقه بيانيا في المستوى المركب في كل مما يأتي:

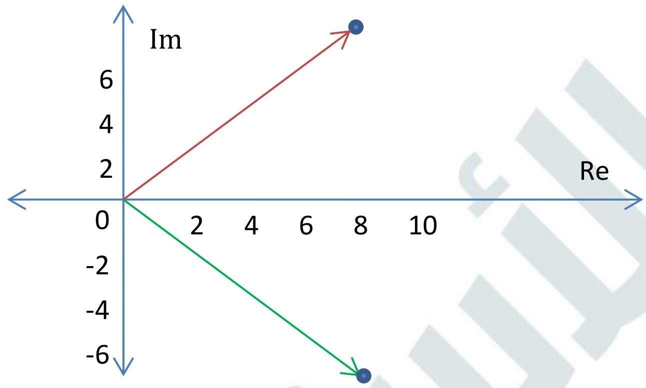
17) $z=-15+3i$

$z=-15+3i, \bar{z}=-15-3i$



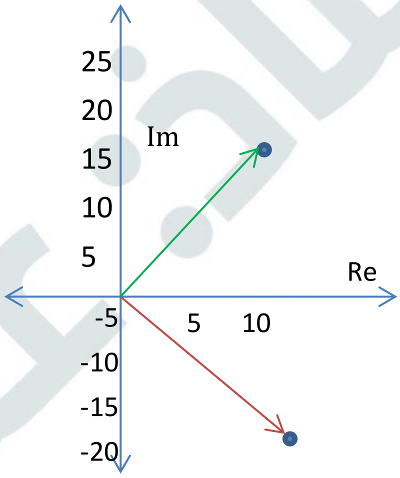
18) $z = 8 - 7i$

$z = 8 - 7i, \bar{z} = 8 + 7i$



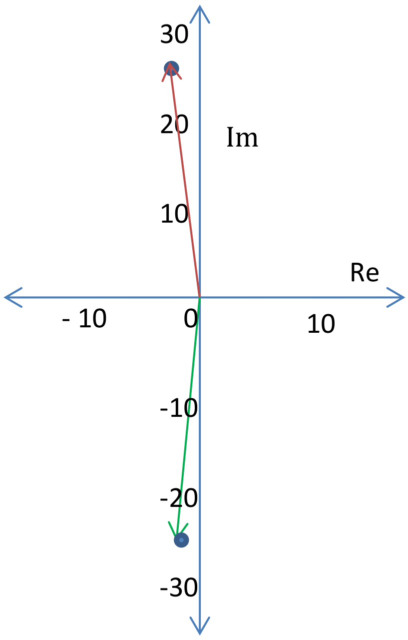
19) $z = 12 + 17i$

$z = 12 + 17i, \bar{z} = 12 - 17i$



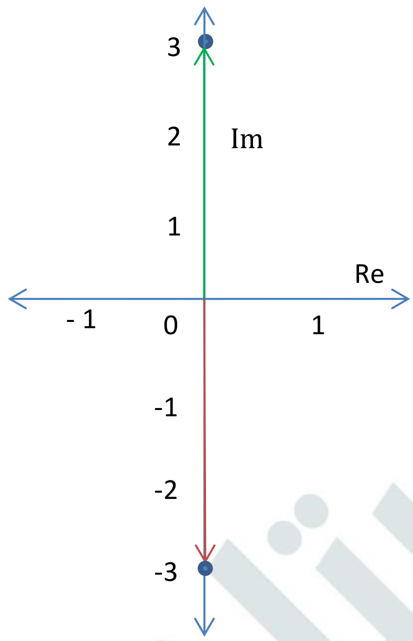
20) $z = -3 - 25i$

$z = -3 - 25i, \bar{z} = -3 + 25i$



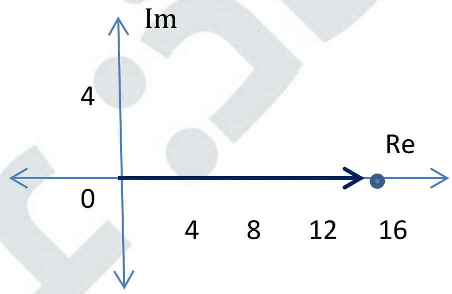
21) $3i$

$z = 3i, \bar{z} = -3i$



22) 15

$z = 15, \bar{z} = 15$



أجد $|z|$ ، و $\bar{z}$ لكل مما يأتي:

23) $z = -5 + 5i$

$z = -5 + 5i$

$\bar{z} = -5 - 5i$

$|z| = \sqrt{(-5)^2 + (5)^2} = 5\sqrt{2}$

24) $z = 3 + 3i\sqrt{3}$

$z = 3 + 3\sqrt{3}i$

$\bar{z} = 3 - 3\sqrt{3}i$

$|z| = \sqrt{(3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = 6$

25) $z = 6 - 8i$

$z = 6 - 8i$

$\bar{z} = 6 + 8i$

$|z| = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$

أجد قيم كل من x، و y الحقيقية التي تجعل كلا من المعادلات الآتية صحيحة:

26) $x^2 - 1 + i(2y - 5) = 8 + 9i$

$x^2 - 1 + i(2y - 5) = 8 + 9i \Rightarrow x^2 - 1 = 8$ و $2y - 5 = 9$

$\Rightarrow x = \pm 3$ و $y = 7$

27) $2x + 3y + i(x - 2y) = 8 - 3i$

$2x + 3y + i(x - 2y) = 8 - 3i \Rightarrow 2x + 3y = 8$ و $x - 2y = -3$

$\Rightarrow x = 1 \ , \ y = 2$

28) $y - 3 + i(3x + 2) = 9 + i(y - 4)$

$y - 3 + i(3x + 2) = 9 + i(y - 4) \Rightarrow y - 3 = 9 \ , \ 3x + 2 = y - 4$

$\Rightarrow y = 12 \ , \ x = 2$

29) $i(2x - 5y) + 3x + 5y = 7 + 3i$

$i(2x - 5y) + 3x + 5y = 7 + 3i \Rightarrow 2x - 5y = 3 \ , \ 3x + 5y = 7$

$\Rightarrow x = 2 \ , \ y = \frac{1}{5}$

أجد سعة كل من الأعداد المركبة الآتية، مُقربا إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين:

30) 1

$z = 1$

$Arg(z) = tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) = 0$

31) $3i$

$z = 3i$

$Arg(z) = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$

32) $-5 - 5i$

$z = -5 - 5i$

$Arg(z) = -\left(\pi - tan^{-1}\left(\frac{5}{5}\right)\right) = -\frac{3\pi}{4} \approx -2.36$

33) $1 - i\sqrt{3}$

$z = 1 - i\sqrt{3}$

$Arg(z) = -tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3} \approx -1.05$

34) $6\sqrt{3} + 6i$

$z = 6\sqrt{3} + 6i$

$Arg(z) = tan^{-1}\left(\frac{6}{6\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} \approx 0.52$

35) $3 - 4i$

$z = 3 - 4i$

$Arg(z) = -tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx -0.93$

36) $-12+5i$

$z=-12+5i$

$Arg(z)=\pi-tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)\approx 2.75$

37) $-58-93i$

$z=-58-93i$

$Arg(z)=-\left(\pi-tan^{-1}\left(\frac{93}{58}\right)\right)\approx -2.13$

38) $2i-4$

$z=4-2i$

$Arg(z)=\pi-tan^{-1}\left(\frac{2}{4}\right)\approx 2.68$

أكتب في كل مما يأتي العدد المركب z بالصورة المثلثية:

39) $|z|=2, Arg\ z=\frac{\pi}{2}$

$r=|z|=2\ , Arg(z)=\frac{\pi}{2}$

$z=r(cos\ \theta+i\ sin\ \theta)=2(cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\ sin\left(\frac{\pi}{2}\right))$

40) $|z|=3, Arg(z)=\frac{\pi}{3}$

$r=|z|=3\ , Arg(z)=\frac{\pi}{3}$

$z=r(cos\ \theta+i\ sin\ \theta)=3(cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\ sin\left(\frac{\pi}{3}\right))$

41) $|z|=7, Arg\ (z)=\ 6$

$r=|z|=7\ , Arg(z)=\frac{5\pi}{6}$

$z=r(cos\ \theta+i\ sin\ \theta)=7(cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\ sin\left(\frac{5\pi}{6}\right))$

42) $|z| = 1, Arg\,(z) = \frac{\pi}{4}$

$r = |z| = 1\ ,\ Arg(z) = \frac{\pi}{4}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

43) $z = 6$

$z = 6$

$\Rightarrow r = |z| = \sqrt{(6)^2 + (0)^2} = 6$

$Arg(z) = 0$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 6(\cos(0) + i\sin(0))$

44) $z = 1 + i$

$z = 1 + i$

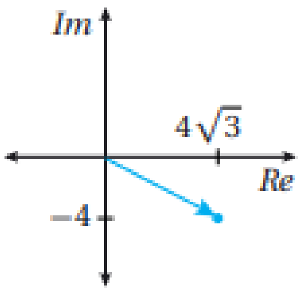
$\Rightarrow r = |z| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right))$

45) يُبين الشكل المجاور التمثيل البياني للعدد المركب z_1 في المستوى المركب،

أجد العدد المركب z_2 الذي يحقق ما يأتي:



$|z_z| = 40 \quad and \quad Arg\ z_2 = Arg\ \overline{z_1}$

$z_1 = 4\sqrt{3} - 4i \Rightarrow \overline{z_1} = 4\sqrt{3} + 4i$

$Arg(z_2) = Arg\,(\overline{z_1}) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{4\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

${}_2 = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 40(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$= 40\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 20\sqrt{3} + 20i$

إذن، $z_2 = 20\sqrt{3} + 20i$

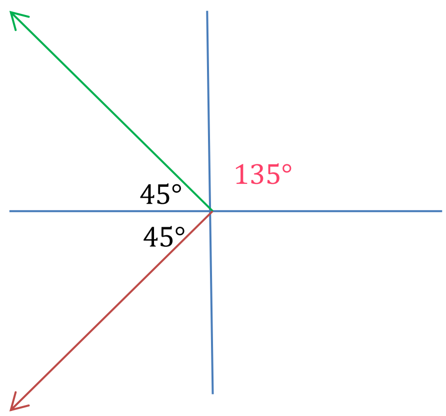
بافتراض أن: $z = a + ib$، حيث: $|z| = 10\sqrt{2}$، وأن: $Arg(z) = \frac{3\pi}{4}$:

46) أكتب العدد المركب z بالصورة القياسية.

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 10\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 10\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -10 + 10i$$

إذن، $z = -10 + 10i$



47) أجد قياس الزاوية الصغرى المحصورة بين z و $\overline{z_1}$

بنا أن z في الربع الثاني إذن $\overline{z_1}$ في الربع الثالث

فيكون قياس الزاوية الصغرى بينهما هو $\frac{\pi}{2}$

إذا كان: $z = -8 + 8i$، فأجد كلا مما يأتي:

48) $|z|$

$$z = -8 + 8i$$

$$|z| = \sqrt{(-8)^2 + (8)^2} = 8\sqrt{2}$$

49) $Arg(z)$

$$Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{8}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

50) $|\bar{z}|$

$$|\bar{z}| = |z| = 8\sqrt{2}$$

51) $Arg(\bar{z})$

$$\bar{z} = -8 - 8i \rightarrow Arg(\bar{z}) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{8}{8}\right)\right) = -\frac{3\pi}{4}$$

أو نكتب مباشرة :

$$Arg(\bar{z}) = -Arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$$

مهارات التفكير العليا:

تبرير: إذا كان: $Arg(5+2i) = \alpha$، فأجد سعة كل مما يأتي بدلالة $\propto$، مبررا إجابتي:

52) $-5-2i$

$$Arg(5+2i) = \propto = tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$Arg(-5-2i) = -\left(\pi - tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)\right) = -(\pi-\alpha) = -\pi+\alpha$$

53) $5-2i$

$$Arg(5-2i) = -tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = -\propto$$

54) $-5+2i$

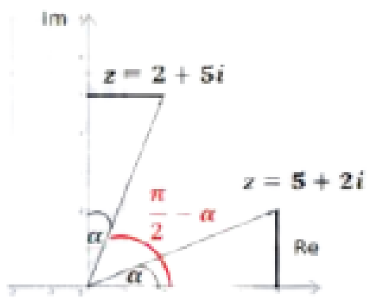
$$Arg(-5+2i) = \pi - tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = \pi - \propto$$

55) $2+5i$

يوضح الرسم المجاور العلاقة بين سعة كل من العددين

$z = 2+5i \quad , \quad z = 5+2i$

$$Arg(2+5i) = tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{\pi}{2} - tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{\pi}{2} - \propto$$



56) $-2+5i$

$$Arg(-5+2i) = \pi - tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

57) تحد: إذا كان: $z = 5+im$، حيث: $|z| = 6$، و $0 < Arg(z) < \frac{\pi}{2}$، فأجد قيمة العدد الحقيقي m.

$$z = 5+im \;, |z| = 6, \quad 0 < Arg(z) < \frac{\pi}{2}$$

$$|z| = \sqrt{(5)^2+(m)^2} = \sqrt{25+m^2} = 6 \to 25+m^2 = 36 \to m = \pm\sqrt{11}$$

لكن $0 < Arg(z) < \frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أن z في الربع الأول، ومنه $m = \sqrt{11}$

58) تبرير: إذا كان: $z = 5 + 3ik$، حيث: $|z| = 13$، فأجد جميع قيم k الحقيقية الممكنة، مبررا إجابتي.

$z = 5 + 3ik\,, |z| = 13$

$|z| = \sqrt{(5)^2 + (3k)^2} = \sqrt{25 + 9k^2} = 13 \to 25 + 9k^2 = 169 \to k = \pm 4$

تحد: بافتراض أن z_1 عدد مركب، مقياسه: $4\sqrt{5}$، وسعته: $\theta = tan^{-1}(2)$:

59) أكتب z_1 بالصورة القياسية.

$|z_1| = r = 4\sqrt{5}, Arg(z_1) = tan^{-1}(2) = \theta$

(نستنتج هنا أن z_1 يقع في الربع الأول، ففي الأرباع الأخرى تكون السعة بإشارة سالبة أو تحتوي π)

$tan\,\theta = 2 \;\Rightarrow tan\,\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, cos\,\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$z_1 = r(cos\,\theta + i\,sin\,\theta) = 4\sqrt{5}(cos\,\theta + i\,sin\,\theta) = 4\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + i\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 4 + 8i$

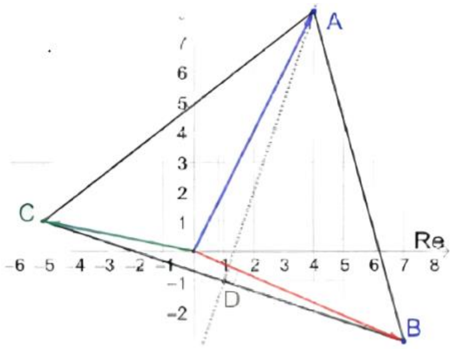
60) إذا كان: $z_2 = 7 - 3i, z_3 = -5 + i$، فأجد مساحة المثلث الذي رؤوسه: z_1, z_2, z_3 في المستوى المركب.

$z_1 = 4 + 8i, z_2 = 7 - 3i, z_3 = -5 + i$

$AC = \sqrt{(4-(-5))^2 + (8-1)^2}$

$AB = \sqrt{4-7)^2 + (8-(-3))^2}$

$BC = \sqrt{(7-(-5))^2 + (-3-1)^2}$



ومنه فإن المثلث ABC متطابق الضلعين، نتخذ BC قاعدة له ونجد إحداثيي النقطة D نقطة منتصف القاعدة BC:

$D\left(\frac{7-5}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) \to D(1,-1)$

ارتفاع هذا المثلث هو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأس ومنتصف القاعدة وهو $\overline{AD}$

$AD = \sqrt{(4-1)^2 + (8--1)^2} = \sqrt{90}$

لتكن مساحة المثلث ABC هي A فإن:

$A = \frac{1}{2} \times \sqrt{160} \times \sqrt{90} = 60$

إذن، مساحة المثلث ABC تساوي 60 وحدة مربعة.

كتاب التمارين

الدرس الأول – الأعداد المُركبة

أجد قيمة الجذر الرئيس في كل مما يأتي بدلالة i:

1) $\sqrt{-128}$

$\sqrt{-128} = \sqrt{-1 \times 2 \times 64} = 8i\sqrt{2}$

2) $\sqrt{-14}$

$\sqrt{-14} = \sqrt{-1 \times 14} = i\sqrt{14}$

3) $\sqrt{-81}$

$\sqrt{-81} = \sqrt{-1 \times 81} = 9i$

4) $\sqrt{-125}$

$\sqrt{-125} = \sqrt{-1 \times 5 \times 25} = 5i\sqrt{5}$

5) $3\sqrt{-32}$

$3\sqrt{-32} = 3\sqrt{-1 \times 2 \times 16} = 12i\sqrt{2}$

6) $\sqrt{\frac{-28}{9}}$

$$\sqrt{-\frac{28}{9}} = \sqrt{-1 \times \frac{7 \times 4}{9}} = \frac{2i\sqrt{7}}{3}$$

أجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة، مُفترضا أن $i = \sqrt{-1}$:

7) i^7

$i^7 = i^6 \times i = (i^2)^3 \times i = (-1)^3 \times i = -i$

8) i^{12}

$i^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1$

9) i^{98}

$$i^{98} = (i^2)^{49} = (-1)^{49} = -1$$

10) i^{121}

$$i^{121} = i^{121} \times i = (i^2)^{60} \times i = (-1)^{60} \times i = i$$

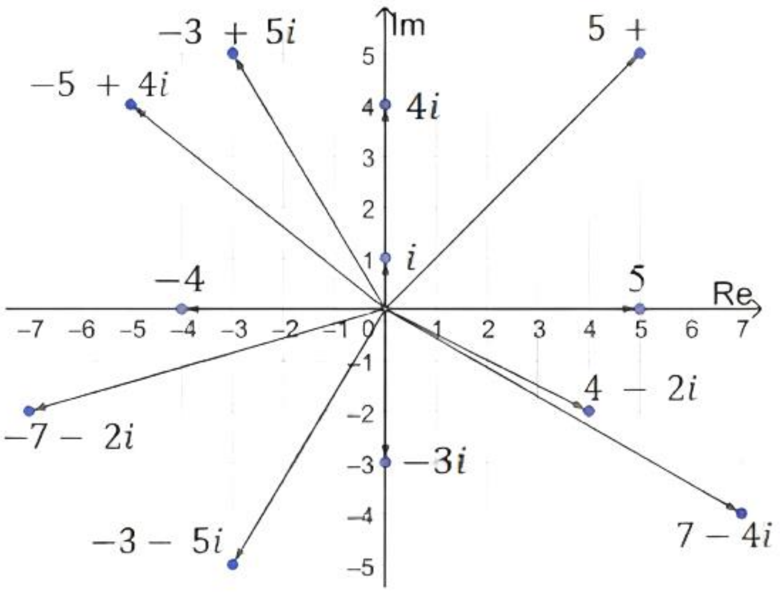
11) أملأ الفراغ بما هو مناسب في الجدول الآتي:

z	$Re(z)$	$Im(z)$
$-4+6i$		
-3		
$8i$		
	-8	3

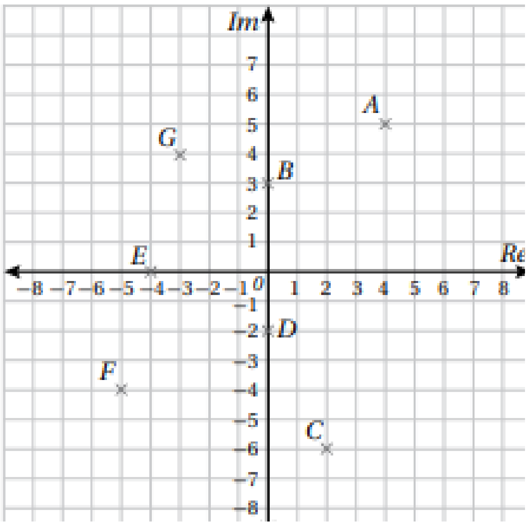
z	$Re(z)$	$Im(z)$
$-4+6i$	-4	6
-3	-3	0
$8i$	0	8
$-8+3i$	-8	3

أمثل كلا من الأعداد المركبة الآتية في المستوى المركب المجاور:

23-12



24) أكتب كلا من الأعداد المركبة الممثلة بيانيا في المستوى المركب المجاور بالصورة القياسية، ثم أجد مقياسه وسعته.



$A = 4 + 5i \Rightarrow |A|\sqrt{16 + 25}$

$= \sqrt{41}, Arg(a) = tan^{-1}\frac{5}{4} \approx 0.90$

$B = 3i \Rightarrow |B| = \sqrt{9} = 3, Arg(B) = \frac{\pi}{2}$

$C = 2 - 6i \Rightarrow |C| = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10},$

$Arg(C) = -tan^{-1}3 \approx -1.25$

$D = -2i \Rightarrow |D| = \sqrt{4} = 2, Arg(D) = -\frac{\pi}{2}$

$E = -4 \Rightarrow |E| = \sqrt{16} = 4, Arg(E) = \pi$

$F = -5 - 4i \Rightarrow |F| = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$

$Arg(F) = -\left(\pi - tan^{-1}\frac{4}{5}\right) \approx -2.47$

$G = -3 + 4i \Rightarrow |G| = \sqrt{9 + 16} = 5$

$Arg(G) = \pi - tan^{-1}\frac{4}{3} \approx 2.21$

أجد قيمة x، وقيمة y الحقيقيتين اللتين تجعلان كل معادلة مما يأتي صحيحة:

25) $(2x + 1) + 4i = 7 - i(y - 3)$

$2x + 1 = 7, 4 = -y + 3$

$\Rightarrow x = 3 , y = -1$

26) $i(2x - 4y) + x + 3y = 26 + 32i$

$x + 3y = 26, 2x - 4y = 32$

$\Rightarrow x = 20 , y = 2$

أكتب كلا من الأعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية:

27) 6

$|z| = 6, Arg(z) = tan^{-1}\frac{0}{6} = 0$

$z = 6(\cos 0 + i \sin 0)$

28) $-5i$

$|z| = 5, Arg(z) = -\frac{\pi}{2}$

$z = 5(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right))$

29) $-2\sqrt{3} - 2i$

$|z| = \sqrt{12+4} = 4, Arg(z) = -\left(\pi - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{5\pi}{6}$

$z = 4(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right))$

30) $-1 + i$

$|z| = \sqrt{2} = 4, Arg(z) = \pi - \tan^{-1}\frac{3\pi}{4}$

$z = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

31) $4 - 2i$

$|z| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}, Arg(z) = -\tan^{-1}\frac{1}{2} \approx -0.46$

$z = 2\sqrt{5}(\cos(-0.46) + i\sin(-0.46))$

32) $2 + 8i$

$|z| = 2\sqrt{17}, Arg(z) = \tan^{-1}4 \approx 1.33$

$z = 2\sqrt{17}(\cos 1.33 + i\sin 1.33)$

أكتب كلا من الأعداد المركبة الآتية بالصورة القياسية:

33) $6(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 3\sqrt{3} + 3i$

34) $12(\cos\pi + i\sin\pi)$

$12(-1 + i(0)) = -12$

35) $8(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

$8\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -4 + 4i\sqrt{3}$

36) $3(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4})$

$3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i$

أجد مرافق كل من الأعداد المركبة التالية، ثم أمثلها جميعا في المستوى المركب نفسه:

37) $-1 - i\sqrt{5}$

$\bar{z} = -1 + i\sqrt{5}$

38) $9 - i$

$\bar{z} = 9 + i$

39) $2 - 8i$

$\bar{z} = 2 + 8i$

40) $-9i$

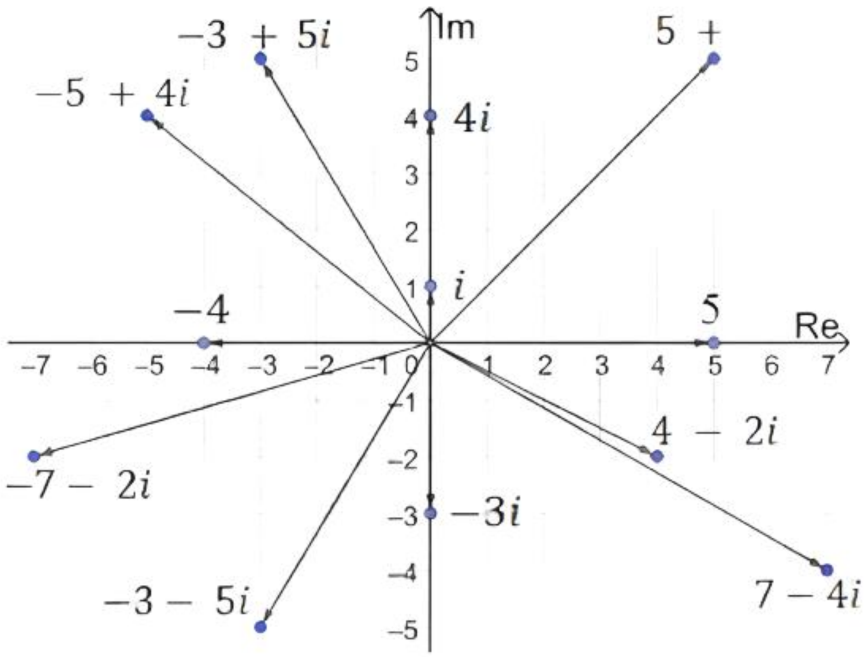
$\bar{z} = 9i$

41) 12

$\bar{z} = 12$

42) $i - 8$

$\bar{z} = -i - 8$



الدرس الثاني – العمليات على الأعداد المُركبة

مثال 1:

أجد ناتج كل مما يأتي:

1) $(5+7i)+(-9-4i)$

$(5+7i)+(-9-4i) = 5+7i-9-4i$ خاصية التوزيع

$= (5-9)+(7-4)i$ خاصيتا التبديل والتجميع

$= -4+3i$ بالتبسيط

2) $(8-5i)-(2-11i)$

$(8+5i)-(2-11i) = 8-5i-2+11i$ خاصية التوزيع

$= (8-2)+(-5+11)i$ خاصيتا التبديل والتجميع

$= 6+6i$ بالتبسيط

أتحقق من فهمي

a) $(7+8i)+(-9+14i)$

$(7+8i)+(-9+14i) = -2+22i$

b) $(11+9i)-(4-6i)$

$(11+9i)-(4-6i) = 7+15i$

مثال 2:

أجد ناتج كل مما يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1) $5i\,(3-7i)$

$5i(3-7i) = 5i(3)+(5i)(-7i)$ خاصية التوزيع

$= 15i+(-35)i^2$ بالضرب

$= 15i+(-35)(-1)$ باستبدال i^2 بالعدد -1

$= 35+15i$ بكتابة الناتج بالصورة القياسية

2) $(6+2i)(7-3i)$

$(6+2i)(7-3i) = 6(7) + 6(-3i) + 2i(7) + 2i(-3i)$	خاصية التوزيع
$= 42 - 18\circ + 14\circ - 6i^2$	بالضرب
$= 42 - 18i + 14i - 6(-1)$	باستبدال i^2 بالعدد 1-
$= (42+6) + (-18+14)i$	بتجميع الحدود المتشابهة
$= 48 - 4i$	بالتبسيط

3) $(5+4i)(5-4i)$

$(5+4i)(5-4i) = 5(5) + 5(-4i) + 4i(5) + 4i(-4i)$	خاصية التوزيع
$= 25 - 20i + 20i - 16i^2$	بالضرب
$= 25 - 20i + 20i + 16$	باستبدال i^2 بالعدد 1-
$= 41$	بتجميع الحدود المتشابهة

أتحقق من فهمي

a) $-3i(4-5i)$

$$-3i(4-5i) = -12i + 15i^2 = -15 - 12i$$

b) $(5+4i)(7-4i)$

$$(5+4i)(7-4i) = 35 - 20i + 28i - 16i^2 = 35 + 8i + 16 = 51 + 8i$$

c) $(3+6i)^2$

$$(3+6i)^2 = 9 + 36i + 36i^2 = 9 + 36i - 36 = -27 + 36i$$

مثال 3:

أجد ناتج كل مما يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1) $\frac{8-5i}{3-2i}$

بالضرب في $\frac{3+2i}{3+2i}$

$$\frac{8-5i}{3-2i}=\frac{8-5i}{3-2i}\times\frac{3+2i}{3+2i}$$

باستعمال خاصية التوزيع

$$=\frac{24+16i-15i-10i^2}{9+4}$$

$i^2=-1$

$$=\frac{24+16i-15i-10}{13}$$

بجمع الحدود المتشابهة

$$=\frac{34+i}{13}$$

بكتابة الناتج بالصورة القياسية

$$=\frac{34}{13}+\frac{1}{13}i$$

2) $\frac{3+5i}{2i}$

بالضرب في $\frac{i}{i}$

$$\frac{3+5i}{2i}=\frac{3+5i}{2i}\times\frac{i}{i}$$

باستعمال خاصية التوزيع

$$=\frac{3i+5i^2}{2i^2}$$

باستبدال i^2 بالعدد -1

$$=\frac{3i-5}{-2}$$

بكتابة الناتج بالصورة القياسية

$$\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i$$

أتحقق من فهمي

أجد ناتج كل مما يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

a) $\frac{-4+3i}{1+i}$

$$\frac{-4+3i}{1+i}=\frac{-4+3i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}$$

$$=\frac{-4+4i+3i-3i^2}{1-i^2}$$

$$=\frac{-4+7i+3}{1+1}$$

$$=\frac{-1+7i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i$$

b) $\frac{2-6i}{-3i}$

$$\frac{2-6i}{-3i} = \frac{2-6i}{-3i} \times \frac{i}{i}$$
$$= \frac{2i-6i^2}{-3i^2}$$
$$= \frac{2i+6}{3} = 2 + \frac{2}{3}i$$

c) $\frac{7i}{4-4i}$

$$\frac{7i}{4-4i} = \frac{7i}{4-4i} \times \frac{4+4i}{4+4i}$$
$$= \frac{28i+28i^2}{16-16i^2}$$
$$= \frac{28i-28}{16+16}$$
$$= \frac{28i-28}{32} = -\frac{7}{8} + \frac{7}{8}i$$

مثال 4:

إذا كان: $z_1 = 1(\cos\left(-\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right))$، وكان: $z_2 = 2(\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7})$، فأجد ناتج كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

1) $z_1 z_2$

صيغة ضرب عددين مُركبين
$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i(\sin(\theta_1+\theta_2))$$
بالتعويض
$$= 2 \times 10(\cos\left(-\frac{2\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}\right) + i\sin(-\frac{2\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}))$$
بالتبسيط
$$= 20(\cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7})$$

2) $\frac{z_1}{z_2}$

صيغة قسمة عددين مركبين مكتوبين بالصورة المثلثية

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2)+i(\sin(\theta_1-\theta_2))$$

بالتعويض
$$=\frac{10}{2}(\cos\left(-\frac{2\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}\right)+i\sin(-\frac{2\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}$$

بالتبسيط
$$=5(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right))$$

بحساب السعة الرئيسية
$$=5(\cos\left(-\frac{8\pi}{7}+2\pi\right)+i\sin(-\frac{8\pi}{7}+2\pi)$$

بالتبسيط
$$=5(\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7})$$

أتحقق من فهمي

أجد ناتج كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

a) $6(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\times 2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

$$6(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\times 2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$$
$$=6\times 2(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right))=12(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$$

b) $6(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right))\div 2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$

$$6(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right))\div 2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$$
$$=\frac{6}{2}(\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right))$$
$$=3(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right))$$
$$3(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi\right))$$
$$=3(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$$

مثال 5:

أجد الجذرين التربيعين للعدد المركب: $z = 21 - 20i$

أفترض أن: $\sqrt{z} = x + iy$، حيث x و y عددان حقيقيان:

بالفرض	$\sqrt{z} = x + iy$
بتربيع الطرفين	$z = (x + iy)^2$
بتعويض قيمة z	$21 - 20i = (x + iy)^2$
بفك القوسين	$21 - 20i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$
بتعويض $i^2 = -1$	$21 - 20i = x^2 - y^2 + 2ixy$
بمساواة الجزأين الحقيقين	$21 = x^2 - y^2$
بمساواة الجزأين التخيليين	$-20 = 2xy$

إذن، ينتج النظان الآتي الذي يحوي معادلتين بمتغيرين، ويمكن حلة بطريقة التعويض:

المعادلة الأولى	$x^2 - y^2 = 21$
المعادلة الثانية	$2xy = -20$
بحل المعادلة الثانية لـ y	$y = -\frac{10}{x}$
بتعويض $y = -\frac{10}{x}$ في المعادلة الأولى	$x^2 - (-\frac{10}{x})^2 = 21$
بضرب طرفي المعادلة الناتجة في x^2	$x^4 - 100 = 21x^2$
بإعادة ترتيب المعادلة	$x^4 - 21x^2 - 100 = 0$
بالتحليل	$(x^2 - 25)(x^2 + 4) = 0$
بحل المعادلتين	$x^2 = 25 \quad or \quad x^2 = -4$

بما أن x عدد حقيقي، فإن: $x = \pm 5$

وبتعويض قيمتي x في المعادلة: $y = -\frac{10}{x}$، فإن الناتج:

$x = 5 \rightarrow y = -2$

$x = -5 \rightarrow y = 2$

إذن، الجذران التربيعيان للعدد المركب: $21 - 20i$ هما: $5 - 2i$ و $-5 + 2i$

أتحقق من فهمي

أجد الجذرين التربيعين لكل من الأعداد المركبة الآتية:

a) $-5-12i$

$$\sqrt{-5-12i}=x+iy \Rightarrow -5-12i=x^2+2ixy+i^2y^2$$
$$\Rightarrow -5-12i=x^2-y^2+2ixy$$
$$\Rightarrow -5=x^2-y^2\ ,-12=2xy$$

$$y=-\frac{6}{x}$$
$$x^2-y^2=-5 \Rightarrow x^2-\frac{36}{x^2}=-5$$
$$\Rightarrow x^4+5x^2-36=0$$
$$\Rightarrow (x^2+9)(x^2-4)=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

عندما $x=2$ ، فإن $y=-3$، وعندما $x=-2$، فإن $y=3$,

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-5-12i$ هما: $2-3i\ ,-2+3i$

b) $-9i$

$$\sqrt{-9i}=x+iy \Rightarrow -9i=x^2+2ixy+i^2y^2$$
$$\Rightarrow -9i=x^2-y^2+2ixy$$
$$\Rightarrow 0=x^2-y^2\ ,-9=2xy$$

$$y=-\frac{9}{2x}$$
$$x^2-y^2=0 \Rightarrow x^2-\frac{81}{4x^2}=0$$
$$\Rightarrow 4x^4-81=0$$
$$\Rightarrow (2x^2+9)(2x^2-9)=0 \Rightarrow x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

عندما $x=\frac{3}{\sqrt{2}}$ ، فإن $y=-\frac{3}{\sqrt{2}}$، وعندما $x=-\frac{3}{\sqrt{2}}$، فإن $y=\frac{3}{\sqrt{2}}$,

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-9i$ هما: $\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}i\ ,-\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}i$

c) $-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sqrt{-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}}=x+iy\ \Rightarrow -\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}=x^2+2ixy+i^2y^2$$

$$-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}=x^2-y^2+2ixy$$

$$=-\frac{1}{2}=x^2-y^2,\frac{\sqrt{3}}{2}=2xy$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{4x}$$

$$x^2-y^2=-\frac{1}{2}\Rightarrow\ x^2-\frac{3}{16x^2}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 16x^4+8x^2-3=0$$

$$\Rightarrow (4x^2-1)(4x^23)=0\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

عندما $x=\frac{1}{2}$، فإن $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$، وعندما $x=-\frac{1}{2}$، فإن $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$،

إذن، الجذران التربيعيان للعدد المركب $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$، هما: $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

مثال 6:

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلة: $z^3+4z^2+z=26$

أجعل الطرف الأيمن صفرا بطرح 26 من طرفي المعادلة: $z^3+4z^2+z-26=0$

بحسب نظرية الأصفار النسبية، إذا كان لهذه المعادلة جذر نسبي، فإنه يكون أحد عوامل الحد الثابت (26-)، وهي:

$\pm1,\pm2,13,\pm26$

$$2^3+4(2^2)+2-26=0$$

إذن $z-2$ هو أحد عوامل كثير الحدود

أَقسِم z^3+4z^2+z-26 على $z-2$ لإيجاد العامل التربيعي باستعمال طريقة الجدول على النحو الآتي:

$\times$	z^2	$6z$	13	
z	z^3	$6z^2$	$13z$	0
-2	$-2z^2$	$-12z$	-26	

إذن، يُمكن كتابة المعادلة في صورة حاصل ضرب العامل الخطي والعامل التربيعي كما يأتي:

$$z^3+4z^2+z-26=(z-2)(z^2+6z+13)=0$$

باستعمال خاصية الضرب الصفري، فإن:

$$z^2+6z+13=0 \;\; or \;\; z-2=0$$

باستعمال القانون العام، فإن جذور المعادلة التربيعية هي:

$$z=\frac{-6\pm\sqrt{36-52}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{-16}}{2}=-3\pm 2i$$

إذن، لهذه المعادلة 3 جذور، هي: $2,-3+2i,-3-2i$

أتحقق من فهمي

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلة: $z^3-z^2-7z+15=0$

$$z^3-z^2-7z+15=0$$

عوامل الحد الثابت هي: $\pm1,\pm3,\pm5,\pm15$

بالتعويض، نجد أن العدد 3- يحقق المعادلة لأن: $(-3)^3-(-3)^2-7(-3)+15=0$

إذن $(z+3)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أن:

$$z^3-z^2-7z+15=(z+3)(z^2-4z+5)=0$$

$$z=-3, z=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=2\pm i$$

إذن لهذه المعادلة 3 جذور هي: $-3,2+i,2-i$

مثال 7:

إذا كان: $3+9i$ هو أحد جذور المعادلة: $x^2+ax+b=0$ ، فأجد قيمة كل من a، و b.

بما أن: $3+9i$ هو أحد جذور المعادلة، فإن مرافق هذا الجذر هو جذر آخر لهذه المعادلة.

أتبع خطوات عكسية لإيجاد المعادلة التربيعية:

$3\pm 9i$ هما جذران للمعادلة	$x=3\pm 9i$
بطرح 3 من طرفي المعادلة	$x-3=\pm 9i$
بتربيع الطرفين	$(x-3)^2=-81$
بالتبسيط	$x^2-6x+90=0$

بعد مقارنة حدود المعادلة التربيعية الناتجة بالمعادلة المعطاة، أستنتج أن: $a=-6, b=90$

أتحقق من فهمي

إذا كان $2-i$ هو أحد جذور المعادلة: $x^2+ax+b=0$، فأجد قيمة كل من a و b.

$x = 2 \pm i$

$x - 2 = \pm i$

$(x-2)^2 = -1$

$e^{-i\omega t} - 4x + 4 = -1$

$x^2 - 4x + 5 = 0$

بمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة المعطاة $(x^2+ax+b=0)$ نجد أن: $a=-4, b=5$

أتدرب وأحل المسائل:

أجد ناتج كل مما يأتي، ثم اكتبه بالصورة القياسية:

1) $(7+2\mathrm{i})+(3-11\mathrm{i})$

$(7+2i)+(3-11i)=10-9i$

2) $(5-9i)-(-4+7i)$

$5-9i)-(-4+7i)=9-16i$

3) $(4-3i)(1+3i)$

$(4-3i)(1+3i)=4+12i-3i+9=13+9i$

4) $(4-6i)(1-2i)(2-3i)$

$(4-6i)(1-2i)(2-3i)=(4-6i)(2-3i-4i-6)=(4-6i)(-4-7i)$

$=-16-28i+24i-42= -58-4i$

5) $(9-2i)^2$

$(9-2i)^2=81-36i-4=77-36i$

6) $\frac{10}{3-i}$

$$\frac{10}{3-i}=\frac{10}{3-i}\times\frac{3+i}{3+i}=\frac{30+10i}{9+1}=\frac{30+10i}{10}$$

أجد ناتج كل مما يأتي بالصورة المثلثية:

7) $6(\cos\pi + i\sin\pi) \times 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$6(\cos\pi + i\sin\pi) \times 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 12\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 12\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

8) $(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}) \div (\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5})$

$$\left(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}\right) \div \left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$$

9) $12(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \div 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$$12\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \div 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{12}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right))$$

$$= 3(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right))$$

10) $11\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \times 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$$11\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \times 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= 22\left(c0s\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

$$= 22\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 22\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2\pi\right)\right)$$

$$= 22(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right))$$

أجد القيم الحقيقية للثابتين a و b في كل مما يأتي:

11) $(a+6i)+(7-ib)=-2+5i$

$(a+6i)+(7-ib)=-2+5i$

$a+7+(6-b)i=-2+5i \Rightarrow a+7=-2\,, 6-b=5$

$\Rightarrow a=-9, b=1$

12) $(11-ia)-(b-9i)=7-6i$

$(11-ia)-(b-9i)=7-6i$

$11-b+(9-a)i=7-6i \;\Rightarrow 11-b=7\,, 9-a=\;-6$

$\Rightarrow b=4\,, a=15$

13) $(a+ib)(2-i)=5+5i$

$(a+ib)(2-i)=5+5i$

$2a+b+(2b-a)i=5+5i \;\Rightarrow 2a+b=5\,, 2b-a=5$

$\Rightarrow b=2, a=1$

طريقة ثانية للحل:

$a+ib=\dfrac{5+5i}{2-i}$

$=\dfrac{5+5i}{2-i}\times\dfrac{2+i}{2+i}$

$=\dfrac{10+5i+10i-5}{4+1}$

$=\dfrac{5+15i}{5}=1+3i$

$\Rightarrow a=1, b=3$

14) $\frac{a-6i}{1-2i} = b + 4i$

$$\frac{a-6i}{1-2i} = b+4i \Rightarrow \frac{a-6i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i} = b+4i$$

$$\Rightarrow \frac{a+2ai-6i+12}{1+4} = b+4i$$

$$\Rightarrow \frac{a+12}{5} + \frac{2a-6}{5}i = b+4i$$

$$\Rightarrow \frac{a+12}{5} = b, \frac{2a-6}{5} = 4 \ \Rightarrow a = 13$$

بتعويض قيمة a في المعادلة الأولى ينتج أن: $b = 5$

طريقة ثانية للحل:

$$a-6i = (b+4i)(1-2i) \Rightarrow a-6i = b+8+(-2b+4)i$$

$$\Rightarrow a = b+8, \qquad -6 = -2b+4$$

$$\Rightarrow b = 5, a = 13$$

15) أضرب العدد المركب $8(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$ في مُرافقه.

$$z = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right))$$

$$\Rightarrow \ \bar{z} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z\bar{z} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \times 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 64\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 64$$

الحل الثاني: نكتب كلا من العددين بالصورة المثلثية أولا ثم نطبق القاعدة:

$$z = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \bar{z} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z\bar{z} = 64\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 64$$

الحل الثالث: كتابة العددين بالصورة القياسية أولا ثم إجراء عملية الضرب:

$$z = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$$

$$\Rightarrow \bar{z} = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$$

$$\Rightarrow z\bar{z} = (4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i)(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i) = 32 + 32 = 64$$

أجد الجذرين التربيعين لكل من الأعداد المركبة الآتية:

16) $3 - 4i$

$$\sqrt{3-4i} = x + iy \Rightarrow 3 - 4i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$$

$$\Rightarrow 3 - 4i = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\Rightarrow 3 = x^2 - y^2 , -4 = 2xy$$

$$y = -\frac{2}{x}$$

$$x^2 - y^2 = 3 \Rightarrow x^2 - \frac{4}{x^2} = 3$$

$$\Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2+1)(x^2-4) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

عندما $x = 2$ فإن $y = -1$، وعندما $x = -2$، فإن $y = 1$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $3 - 4i$ هما: $2 - i , -2 + i$

17) $-15 + 8i$

$$\sqrt{-15+8i} = x + iy \Rightarrow -15 + 8i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$$

$$\Rightarrow -15 + 8i = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\Rightarrow -15 = x^2 - y^2 , 8 = 2xy$$

$$y = \frac{4}{x}$$

$$x^2 - y^2 = -15 \Rightarrow x^2 - \frac{16}{x^2} = -15$$

$$\Rightarrow x^4 + 15x^2 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2+16)(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

عندما $x = 1$ فإن $y = 4$، وعندما $x = -1$، فإن $y = -4$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-15 + 8i$ هما: $1 + 4i , -1 - 4i$

18) $5-12i$

$\sqrt{5-12i} = x+iy \Rightarrow 5-12i = x^2+2ixy+i^2y^2$

$\Rightarrow 5-12i = x^2-y^2+2ixy$

$\Rightarrow 5 = x^2-y^2 \,, -12 = 2xy$

$y = -\dfrac{6}{x}$

$x^2-y^2 = 5 \Rightarrow x^2-\dfrac{36}{x^2} = 5$

$\Rightarrow x^4-5x^2-36 = 0$

$\Rightarrow (x^2+4)(x^2-9) = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

عندما $x = 3$ فإن $y = -2$، وعندما $x = -3$، فإن $y = 2$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $5+12i$ هما: $3-2i \,, -3+2i$

19) $-7-24i$

$\sqrt{-7-24i} = x+iy \Rightarrow -7-24i = x^2+2ixy+i^2y^2$

$\Rightarrow -7-24i = x^2-y^2+2ixy$

$\Rightarrow -7 = x^2-y^2 \,, -24 = 2xy$

$y = -\dfrac{12}{x}$

$x^2-y^2 = -7 \Rightarrow x^2-\dfrac{144}{x^2} = -7$

$\Rightarrow x^4+7x^2-144 = 0$

$\Rightarrow (x^2+16)(x^2-9) = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

عندما $x = 3$ فإن $y = -4$، وعندما $x = -3$، فإن $y = 4$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $-7-24i$ هما: $3-4i \,, -3+4i$

إذا كان: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right), w = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$، فأجد كلا مما يأتي بالصورة المثلثية:

20) zw

$z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)\right), w = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$zw = 4\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{-\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

21) $\frac{z}{w}$

$$\frac{z}{w}=1\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$$

22) $\frac{w}{z}$

$$\frac{w}{z}=1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{-\pi}{4}\right)\right)=\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}$$

23) $\frac{1}{z}$

$$1=1(\cos 0+i\sin 0)$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(0-\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(0-\frac{-\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

24) w^2

$$w^2=ww=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\right)=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

25) $5iz$

$$5i=5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$5iz=5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\times 22\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

$$=10\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

$$=10\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة لكل من المعادلات الآتية:

26) $z^2 + 104 = 20z$

$$z^2 + 104 = 20z \Rightarrow z^2 - 20z + 104 = 0$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 416}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$z = \frac{20 \pm 4i}{2} = 10 \pm 2i$$

إذن، لهذه المعادلة جذران هما: $10 - 2i\ , 10 + 2i$

27) $z^2 + 18z + 202 = 0$

$$z^2 + 18z + 202 = 0$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 808}}{2}$$

$$= \frac{-18 \pm \sqrt{-484}}{2}$$

$$= \frac{-18 \pm 22i}{2} = -9 \pm 11i$$

إذن، لهذه المعادلة جذران هما: $-9 - 11i, -9 + 11i$

28) $9z^2 + 68 = 0$

$$9z^2 + 68 = 0 \Rightarrow z^2 = -\frac{68}{9} \Rightarrow z = \pm\sqrt{-\frac{68}{9}} = \pm i\,\frac{\sqrt{68}}{3}$$

إذن، لهذه المعادلة جذران هما: $-i\frac{\sqrt{68}}{3}, i\frac{\sqrt{68}}{3}$

29) $3z^3 - 2z^2 + 2z + 1 = 0$

$$3z^3 - 2z^2 + 2z + 1 = 0$$

الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm 1 , \pm \frac{1}{3}$

بالتعويض، نجد أن العدد $z = 1\frac{1}{3}$ يحقق المعادلة لأن:

$$3(-\frac{1}{3})^3 - 2(-\frac{1}{3})^2 + 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = 0$$

$$z = -\frac{1}{3} \Rightarrow 3z = -1 \Rightarrow 3z + 1 = 0$$

إذن $(3z + 1)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أن:

$$3z^3 - 2z^2 + 2z + 1 = (3z + 1)(z^2 - z + 1) = 0$$

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{3}, z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن لهذه المعادلة 3 حلةل (جذور) هي: $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

30) $z^3 + 4z + 10 = 5z^2$

$$z^3 + 4z + 10 = 5z^2 \Rightarrow z^3 - 5z^2 + 4z + 10 = 0$$

الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$

بالتعويض، نجد أن العدد $z = -1$ يحقق المعادلة لأن:

$$(-1)^3 - 5(-1)^2 + 4(-1) + 10 = 0$$

إذن $(z + 1)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أن:

$$z^3 - 5z^2 + 4z + 10 = (z + 1)(z^2 - 6z + 10) = 0$$

$$\Rightarrow z = -1, z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$$

إذن لهذه المعادلة 3 حلول (جذور) هي: $-1, 3 + i, 3 - i$

31) $2z^3 = 8z^2 + 13z - 87$

$$2z^3 = 8z^2 + 13z - 87 \Rightarrow 2z^3 - 8z^2 - 13z + 87 = 0$$

الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm 3, \pm 29, \pm \frac{29}{2} . \frac{87}{2}, \pm 87$

بالتعويض، نجد أن العدد $z = -3$ يحقق المعادلة لأن:

$$2(-3)^3 - 8(-3)^2 - 13(-3) + 87 = 0$$

إذن $(z + 3)$ هو أحد عوامل كثير الحدود، نجري عملية القسمة فنجد أن:

$$2z^3 - 8z^2 - 13z + 87 = (z + 3)(2z^2 - 14z + 29) = 0$$

$$\Rightarrow z = -3, z = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 232}}{4}$$

$$\Rightarrow z = -3, z = \frac{14 \pm \sqrt{-36}}{4} = \frac{14 \pm 6i}{4} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2} i$$

إذن لهذه المعادلة 3 حلول (جذور) هي: $-3, \frac{7}{2} + \frac{3}{2} i , \frac{7}{2} - \frac{3}{2} i$

أجد معادلة تربيعية لها الجذران المركبان المعطيان في كل مما يأتي:

32) $2 \pm 5i$

$$x = 2 \pm 5i$$

$$x - 2 = \pm 5i$$

$$(x - 2)^2 = -25$$

$$x^2 - 4x + 4 = -25$$

$$x^2 - 4x + 29 = 0$$

طريقة أخرى للحل:

نعلم أنه إذا كان h و k هما جذرا المعادلة التربيعية $x^2 - bx + c$،

فإن: $b = h + k$، $c = hk$

مجموع الجذرين يساوي: 4، وناتج ضربهما يساوي: $4 + 25 = 29$

إذن، المعادلة هي: $x^2 - 4x + 29 = 0$

33) $7 \pm 4i$

$x = 7 \pm 4i$

$x - 7 = \pm 4i$

$(x-7)^2 = -16$

$x^2 - 14x + 49 = -16$

$x^2 - 14x + 65 = 0$

طريقة أخرى للحل:

مجموع الجذرين يساوي: 14، وناتج ضربهما يساوي: $49 + 16 = 65$

إذن، المعادلة هي: $x^2 - 14x + 65 = 0$

34) $-8 \pm 20i$

$x = -8 \pm 20i$

$x + 8 = \pm 20i$

$(x+8)^2 = -400$

$x^2 + 16x + 64 = -400$

$x^2 + 16x + 464 = 0$

طريقة أخرى للحل:

مجموع الجذرين يساوي: 16، وناتج ضربهما يساوي: $64 + 400 = 464$

إذن، المعادلة هي: $x^2 - 16x + 464 = 0$

35) $-3 \pm 2i$

$x = -3 \pm 2i$

$x + 3 = \pm 2i$

$(x+3)^2 = -4$

$x^2 + 6x + 9 = -4$

$x^2 + 6x + 13 = 0$

طريقة أخرى للحل:

مجموع الجذرين يساوي: 6-، وناتج ضربهما يساوي: $9 + 4 = 13$

إذن، المعادلة هي: $x^2 - 6x + 13 = 0$

إذا كان: $z_1 = \sqrt{12} - 2i, z_2 = \sqrt{5} - i\sqrt{15}, z_3 = 2 - 2i$، فأجد المقياس والسعة لكل مما يأتي:

36) $\frac{z_2}{z_1}$

$$z_1 = \sqrt{12} - 2i, z_2 = \sqrt{5} - i\sqrt{15}, z_3 = 2 - 2i$$

$$|z_1| = \sqrt{12+4} = 4$$

$$|z_2| = \sqrt{5+15} = 2\sqrt{5}$$

$$|z_3| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$Arg(z_1) = -tan^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = -tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$Arg(z_2) = -tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}\right) = -tan^{-1}(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

$$Arg(z_3) = -tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = -tan^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$Arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = Arg(z_2) - Arg(z_1) = -\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

37) $\frac{1}{z_3}$

$$\left|\frac{1}{z_3}\right| = \frac{|1|}{|z_3|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$Arg\left(\frac{1}{z_3}\right) = Arg(1) - Arg(z_3) = 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

38) $\frac{z_3}{\overline{z_2}}$

$$\overline{z_2} = \sqrt{5} + i\sqrt{15} \rightarrow |\overline{z_2}| = |z_2| = 2\sqrt{5}, Arg(\overline{z_2}) = -Arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$$

$$\left|\frac{z_3}{\overline{z_2}}\right| = \frac{|z_3|}{|\overline{z_2}|} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

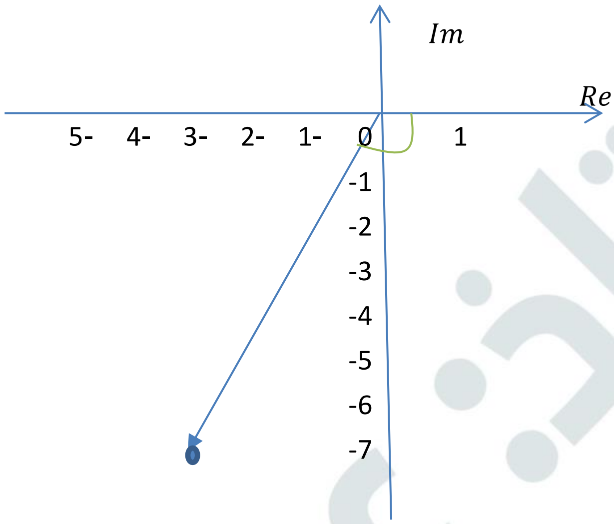
$$Arg\left(\frac{z_3}{\overline{z_2}}\right) = Arg(z_3) - Arg(\overline{z_2}) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{12}$$

إذا كان: $z = 8(cos\frac{2\pi}{3} - i\ sin\ \frac{2\pi}{3})$، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(39 أمثل العدد z بيانيا في المستوى المركب.

$$z = 8\left(cos\frac{2\pi}{3} - i\ sin\frac{2\pi}{3}\right) = 8(cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\ sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right))$$

إذن مقياس z يساوي 8 وسعته $\frac{-2\pi}{3}$



(40 أجد الجذرين التربيعين للعدد z.

$$z = 8\left(cos\frac{2\pi}{3} - i\ sin\frac{2\pi}{3}\right) = 8(cos\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -4 - 4\sqrt{3}i$$

$$\sqrt{-4 - 4\sqrt{3}i} = x + iy \ \Rightarrow\ -4 - 4\sqrt{3}i = x^2 + 2ixy + i^2y^2$$

$$\Rightarrow -4 - \sqrt{3}i = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\Rightarrow -4 = x^2 - y^2\ , -4\sqrt{3} = 2xy$$

$$y = -\frac{2\sqrt{3}}{x}$$

$$x^2 - y^2 = -4 \ \Rightarrow\ x^2 - \frac{12}{x^2} = -4$$

$$\Rightarrow x^4 + 4x^2 - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + 6)(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

عندما $x = \sqrt{2}$، فإن $y = -\sqrt{6}$، وعندما $x = -\sqrt{2}$، فإن $y = \sqrt{6}$،

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب z هما: $\sqrt{2} - i\sqrt{6}, -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$

(41 إذا كان: $(b+ic), (a-3i)$ هما الجذرين التربيعين للعدد المركب: $55-48i$، فأجد قيمة كل من الثوابت الحقيقية: a, b, a

بما أن $a-3i$ هو جذر للعدد المركب $55-48i$, إذن:

$$(a-3i)^2 = 55-48i \Rightarrow a^2-6ia-9 = 55-48i$$

$$\Rightarrow a^2-9 = 55, -6a = -48 \Rightarrow a = 8$$

وبما أن $b+ic$ هو جذر للعدد المركب $55-48i$، إذن:

$$(b+ic)^2 = 55-48i \Rightarrow b^2+2ibc-c^2 = 55-48i$$

$$\Rightarrow b^2-c^2 = 55, 2bc = -48$$

$$\Rightarrow c = -\frac{24}{b} \Rightarrow b^2 - \frac{576}{b^2} = 55$$

$$\Rightarrow b^4-55b^2-576 = 0$$

$$\Rightarrow (b^2-64)(b^2+9) = 0 \Rightarrow b = \pm 8$$

عندما $b=8$، فإن $c=-3$، وعندما $b=-8$، فإن $c=3$

جذرا هذا العدد المركب هما $8-3i\ , -8+3i$

وبمقارنة هذين الجذرين مع الجذرين المعطيين $(a-3i, b+ic)$ نلاحظ أن:

$$a = 8, b = -8, c = 3$$

الحل الأسهل هو:

ما أن $a-3i$ جذر للعدد المركب $55-48i$ إذن $-a+3i$ هو أيضا جذر له، ومنه:

بالمقارنة مع الجذرين $a-3i$ و $b+ic$ نجد أن: $b=-a$ و $c=3$ ومنه:

$$(a-3i)^2 = 55-48i \Rightarrow a^2-6ia-9 = 55-48i$$

$$\Rightarrow a^2-9 = 55, -6a = -48 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow b = -8$$

أحل المعادلة المعطى أحد جذورها في كل مما يأتي:

42) $x^3 + x^2 + 15x = 225, 5$

$$x^3 + x^2 + 15x = 225 \Rightarrow x^3 + x^2 + 15x - 225 = 0$$

بما أن 5 جذر لهذه المعادلة، إذن $(x-5)$ أحد عوامل كثير الحدود، بالقسمة عليه نحصل على:

$$x^3 + x^2 + 15x - 225 = (x-5)(x^2 + 6x + 45) = 0$$

$$x = 5, x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-180}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-144}}{2} = \frac{-6 \pm 12i}{2} = -3 \pm 6i$$

حلول هذه المعادلة هي: $x = 5, x = -3 + 6i, x = -3 - 6i$

43) $x^3 + 7x^2 - 13x + 45 = 0, -9$

$$x^3 + 7x^2 - 13x + 45 = 0$$

بما أن 9- جذر لهذه المعادلة، إذن $(x+9)$ أحد عوامل كثير الحدود، بالقسمة عليه نحصل على:

$$x^3 + 7x^2 - 13x + 45 = (x+9)(x^2 - 2x + 5) = 0$$

$$x = -9, x = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

حلول هذه المعادلة هي: $x = -9, x = 1 + 2i, x = 1 - 2i$

44) $3x(x^2 + 45) = 2(19x^2 + 37), 6 - i$

$$3x(x^2 + 45) = 2(19x^2 + 37) \Rightarrow 3x^3 - 38x^2 - 135x - 74 = 0$$

بما أن $(6 - i)$ جذر لهذه المعادلة، إذن مرافقه $(6 + i)$ هو أيضا جذر لهذه المعادلة، نكوّن المعادلة التربيعية التي جذراها $(6 + i), (6 - i)$:

$$x = 6 \pm i$$

$$x - 6 = \pm i$$

$$(x-6)^2 = -1$$

$$x^2 - 12x + 36 = -1 \rightarrow x^2 - 12x + 37 = 0$$

ثم نقسم كثير الحدود $3x^3 - 38x^2 - 135x - 74$ على $x^2 - 12x + 37$ فنجد أن:

$$3x^3 - 38x^2 - 135x - 74 = (x^2 - 12x + 37)(3x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3}, x = 6 \pm i$$

حلول هذه المعادلة هي: $x = \frac{2}{3}, x = 6 + i, x = 6 - i$

45) $x^3+10x^2+29x+30=0, -2+i$

$$x^3+10x^2+29x+30=0$$

بما أن $(-2+i)$ جذر لهذه المعادلة، إذن مرافقه $(-2-i)$ هو أيضا جذر لهذه المعادلة، نكوّن المعادلة التربيعية التي جذراها $(-2+i), (-2-i)$

$$x=-2\pm i$$
$$x+2=\pm i$$
$$(x+2)^2=-1$$
$$x^2+4x+4=-1$$
$$x^2+4x+5=0$$

ثم نقسم كثير الحدود $x^3+10x^2+29x+30$ على x^2+4x+5 فنجد أن:

$$x^3+10x^2+29x+30=(x^2+4x+5)(x+6)=0$$
$$\Rightarrow x=-6, x=-2\pm i$$

حلول هذه المعادلة هي: $x=-6, x=-2+i, x=-2-i$

إذا كان: $(4+11i)$ هو أحد جذري المعادلة: $z^2-8z+k=0$، حيث k عدد حقيقي، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعا:

46) أجد الجذر الآخر للمعادلة.

الجذر الآخر هو مرافق الجذر الأول، أي $4-11i$

47) أجد قيمة الثابت k

$$k=(4-11i)(4+11i)=16-121i^2=16+121=137$$

مهارات التفكير العليا:

تبرير: أجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعا، مبررا إجابتي:

48) أجد ناتج: $(p+iq)^2$، حيث p و q عددان حقيقيان.

$$(p+iq)^2=p^2+2ipq+i^2q^2=p^2+2ipq-q^2$$

49) إذا كان: $(p+iq)^2 = 45 + im$، حيث p، q عددان صحيحان موجبان، و $p > q$، فأجد ثلاثة قيم ممكنة للعدد الحقيقي m.

$$(p+iq)^2 = 45 + im = p^2 - q^2 + 2ipq$$

$$\Rightarrow p^2 - q^2 = 45 \,, m = 2pq$$

$$\Rightarrow\ p^2 - q^2 = 45 \ \Rightarrow (p+q)(p-q) = 45$$

بما أن p و q عددان صحيحان موجبان و $p > q$ فإن $(p+q)$ و $(p-q)$ عددان صحيحان موجبان أيضا و $(p+q) > (p-q)$ ومنه يكفي تحليل العدد 45 إلى عاملين صحيحين موجبين أحدهما أكبر من الآخر، لدينا ثلاث حالات لتحليل 45 إلى عاملين صحيحين موجبين هي:

الحالة الأولى: $1 \times 45 = 45$ فإن: $p - q = 1 \,, p + q = 45$

ومنه: $p = 23$ و $q = 22$ أي أن: $m = 2pq = 1012$

الحالة الثانية: $3 \times 15 = 45$ فإن: $p - q = 3 \,, p + q = 15$

ومنه: $p = 9$ و $q = 6$ أي أن: $m = 2pq = 108$

الحالة الثالثة: $5 \times 9 = 45$ فإن: $p - q = 5 \,, p + q = 9$

ومنه: $p = 7$ و $q = 2$ أي أن: $m = 2pq = 28$

قيم m المطلوبة هي: $28, 108, 1012$

50) أستعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد الجذرين التربيعين للعدد المركب: $45 - 108i$

المطلوب إيجاد الجذرين التربيعين للعدد المركب $45 - 108i$

بما أن $m = 2pq = -108$ إذن العددان p و q مختلفان بالإشارة، من السؤال السابق نجد أن:

$p = 9, q = -6$ أو $p = -9, q = 6$

الجذران المطلوبان هما: $9 - 6i, -9 + 6i$

51) برهان: أثبت أن $z\bar{z} = |z|^2$ لأي عدد مركب z

ليكن $z = x + iy$ إذن: $\bar{z} = x - iy$

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - y^2y^2 = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2+y^2})^2 = |z|^2$$

(52 برهان: إذا كان z عددا مركبا، حيث: $|z| = 5\sqrt{5}, Arg(z) = tan^{-1}(\frac{1}{2})$، وكان:
$\frac{z}{3+4i} = p + iq$، فأثبت أن $p + q = 1$.

$$|z| = 5\sqrt{5}, Arg(z) = tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \frac{z}{3+4i} = p + iq$$

ليكن $z = x + iy$

بما أن $Arg(z) = tan^{-1}(\frac{1}{2})$، إذن يقع العدد المركب z في الربع الأول، ويكون $x = 2y$

$$\Rightarrow z = 2y + iy$$

$$|z| = 5\sqrt{5}$$

$$(2y)^2 + y^2 = 125 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = 5, x = 10$$

إذن، $z = 10 + 5i$

$$\frac{z}{3+4i} = \frac{10+5i}{3+4i} = \frac{10+5i}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i}$$

$$p + iq = \frac{30 - 40i + 15i + 20}{9 + 16} = \frac{50 - 25i}{25} = 2 - i$$

إذن، $p = 2, q = -1$ ويكون $p + q = 1$

53) تحد: العدد المركب: $z = (10 - i) - (2 - 7i)$ هو أحد جذور المعادلة:
$.z^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$
أجد بقية جذور هذه المعادلة، ثم أحل المعادلة الآتية: $x^6 + 164x^2 = 20(x^4 + 20)$

$$z^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$$

بما أن $(8 + 6i)$ جذر لهذه المعادلة، فإن مرافقه $(8 - 6i)$ هو أيضا جذر لهذه المعادلة،
نكون المعادلة التربيعية التي جذراها $(8 - 6i), (8 + 6i)$:

$$(8 + 6i) + (8 - 6i) = 16$$

$$(8 + 6i) \times (8 - 6i) = 64 + 36 = 100 \Rightarrow z^2 - 16z + 100 = 0$$

ثم نقسم كثير الحدود $z^3 - 20z^2 + 164z - 400$ على $z^2 - 16z + 100$ فنجد أن:

$$z^3 - 20z^2 + 164z - 400 = (z^2 - 16z + 100)(z - 4) = 0 \Rightarrow z = 4, z = 8 \pm 6i$$

حلول هذه المعادلة: $z = 4, z = 8 + 6i, z = 8 - 6i$
المعادلة الجديدة هي: $x^6 - 20x^4 + 164x^2 - 400 = 0$
إذا عوضنا $z = x^2$، تتحول هذه المعادلة إلى $z^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$
إذن، حلول المعادلة $x^6 - 20x^4 + 164x^2 - 400 = 0$ هي الجذور التربيعية لحلول المعادلة
$z^3 - 20z^2 + 164z - 400 = 0$
إذن، حلول المعادلة هي: $x = \pm 2, x = \pm\sqrt{8 + 6i}, x = \pm\sqrt{8 - 6i}$
نجد الجذرين التربيعين للعدد $8 + 6i$

$$\sqrt{8 + 6i} = h + ik \Rightarrow 8 + 6i = h^2 - k^2 + 2ihk$$

$$\Rightarrow 8 = h^2 - k^2 \text{ و } 6 = 2hk$$

$$h = \frac{3}{k}$$

$$h^2 - k^2 = 8 \Rightarrow h^2 - \frac{9}{k^2} = 8$$

$$\Rightarrow h^4 - 8h^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow (h^2 + 1)(h^2 - 9) = 0 \Rightarrow h = \pm 3 \Rightarrow k = \pm 1$$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $8 + 6i$ هما: $3 + i, 3 - i$
بالمثل نجد أن الجذرين التربيعين للعدد المركب $8 - 6i$ هما: $3 - i, -3 + i$
ويكون للمعادلة $x^6 - 20x^4 + 164x^2 - 400 = 0$ ستة حلول هي:

$$x = 2, x = -2, x = 3 + i, x = 3 - i, x = -3 + i, x = -3 - i$$

<u>كتاب التمارين</u>

<u>الدرس الثاني- العمليات على الأعداد المركبة</u>

أجد ناتج كل مما يأتي، ثم أكتبه بالصورة القياسية:

1) $(6 + 8i) + (3 - 5i)$

$9 + 3i$

2) $(-6 - 3i) - (-8 + 2i)$

$2 - 5i$

3) $4i(7 - 3i)$

$12 + 28i$

4) $(8 - 6i)(8 + 6i)$

$64 - 36i^2 = 100$

5) $(-2 + 2i\sqrt{3})^3$

$-8 + 24\sqrt{3}i + 72 - 27\sqrt{3}i = 64$

6) $\frac{(2+i)(1-i)}{4-3i}$

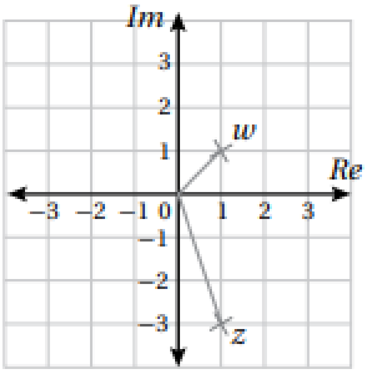
$$\frac{3 - i}{4 - 3i} \times \frac{4 + 3i}{4 + 3i} = \frac{15 + 5i}{25} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$$

مُعتمدا المستوى المركب المجاور الذي يبين العددين المركبين z وw،

أجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

7) أكتب كلا من العددين z و w بالصورة القياسية

$z = 1 - 3i, w = 1 + i$



8) أجد السعة والقياس لكل من العددين المركبين wz و $\frac{w}{z}$

$$wz = 4 - 2i \rightarrow |wz| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$$

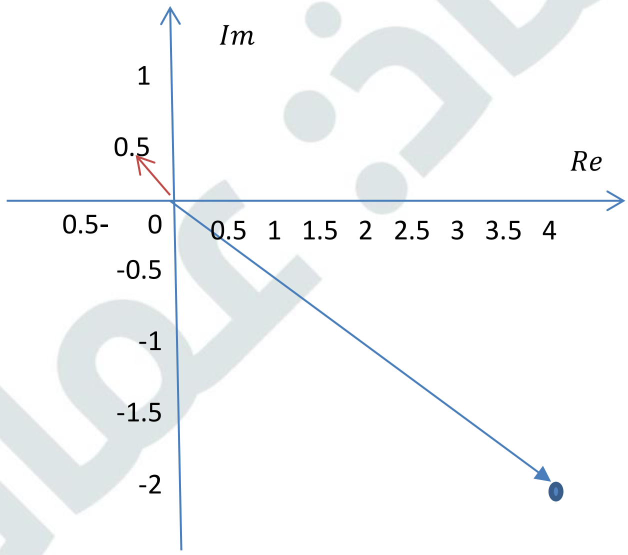
$$Arg(wz) = -tan^{-1}\frac{1}{2} \approx= 0.46$$

$$\frac{w}{z} = \frac{1+i}{1-3i} \times \frac{1+3i}{1+3i} = \frac{-2+4i}{10} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

$$\left|\frac{w}{z}\right| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, Arg\left(\frac{w}{z}\right) = \pi - tan^{-1}2 \approx 2.03$$

9) أمثل العددين wz و $\frac{w}{z}$ في المستوى المركب

$$wz = 4 - 2i, \frac{w}{z} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$



إذا كان: $z = -3 + 3i\sqrt{3}$، وكان: $|w| = 18, Arg(w) = -\frac{\pi}{6}$، فأجد ناتج كل مما يأتي:

10) $Arg(z)$

$$Arg(z) = \pi - tan^{-1}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

11) $|z|$

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = 6$$

12) $Arg(zw)$

$$Arg(zw) = Arg(z) + Arg(w) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

13) $|zw|$

$$|zw| = |z| \times |w| = 6 \times 18 = 108$$

أجد الجذرين التربيعيين لكل عدد مركب مما يأتي:

14) $-15 + 8i$

$$\sqrt{-15 + 8i} = x + iy \Rightarrow -15 + 8i = (x + iy)^2$$

$$\Rightarrow -15 + 8i = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = -15, 2xy = 8 \Rightarrow y = \frac{4}{x}$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{16}{x^2} = -15$$

$$\Rightarrow x^4 + 15x^2 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + 16)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1, y = \pm 4$$

$$\sqrt{-15 + 8i} = \pm(1 + 4i)$$

15) $-7 - 24i$

$$\sqrt{-7 - 24i} = x + iy \Rightarrow -7 + 24i = (x + iy)^2$$

$$\Rightarrow -7 - 24i = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = -7, 2xy = -24 \Rightarrow y = -\frac{12}{x}$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{144}{x^2} = -7$$

$$\Rightarrow x^4 + 7x^2 - 144 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + 16)(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x = \pm 3, y = \pm 4$$

$$\sqrt{-7 - 24i} = \pm(3 - 4i)$$

16)$105 + 88i$

$$\sqrt{105+88i} = x + iy \Rightarrow 105 + 88i = (x+iy)^2$$

$$\Rightarrow 105 + 88i = x^2 - y^2\ , + 2ixy$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = 105, 2xy = 88 \Rightarrow y = \frac{44}{x}$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{1936}{x^2} = 105$$

$$\Rightarrow x^4 - 105x^2 - 1936 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2+16)(x^2-121) = 0 \Rightarrow x = \pm 11, y = \pm 4$$

$$\sqrt{105+88i} = \pm(11+4i)$$

17)إذا كان: $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$، فأكتبه بالصورة المثلثية، مبينا أن $\omega^2 = -1$.

$$Arg(\omega) = tan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = tan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}, |\omega| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$$

$$\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = i(cos\,\frac{\pi}{3} + i\,sin\,\frac{\pi}{3})$$

$$|\omega^3| = |\omega| \times |\omega| \times |\omega| = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$Arg(\omega^3) = Arg(\omega) + Arg(\omega) + Arg(\omega) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1(cos\,\pi + i\,sin\,\pi) = -1$$

إذا كان: $z_1 = 3(cos\,\frac{\pi}{5} + i\,sin\,\frac{\pi}{5})$، وكان: $z_2 = 2(cos\,\frac{\pi}{3} + i\,sin\,\frac{\pi}{3})$، فأجد كلا مما يأتي بالصورة المثلثية:

18)$z_1 z_2$

$$z_1 z_2 = 3 \times 2\left(cos\,\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{5}\right) + i\,sin\,\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{5}\right)\right) = 6(cos\,\frac{8\pi}{15} + i\,sin\,\frac{8\pi}{15})$$

19)$z_1(\overline{z_1})$

$$z_1 = 3\left(cos\frac{\pi}{5} + i\,sin\,\frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow \overline{z_1} = 3(\,cos\,\frac{-\pi}{5} + i\,sin\,\frac{-\pi}{5})$$

$$z_1\overline{z_1} = 3 \times 3\left(cos\,\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right) + i\,sin\,\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{5}\right)\right) = 9(cos\,0 + i\,sin\,0) = 9$$

20)z_2^3

$$z_2^3 = z_2^2 \times z_2 = 2^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\right) \times z_2$$

$$= 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \times 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 8(\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right))$$

$$= 8(\cos\pi + i\sin\pi) = -8$$

21)$\frac{z_2}{z_1}$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\right)\right) = \frac{2}{3}(\cos\frac{2\pi}{15} + i\sin\frac{2\pi}{15})$$

22)إذا كان: $\left|\frac{u-9i}{3+i}\right| = 5$، فما قيمة u، علما بأنها سالبة؟

$$\left|\frac{u-9i}{3+i}\right| = 5 \Rightarrow \frac{|u-9i|}{|3+i|} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{u^2+81}}{\sqrt{9+1}} = 5$$

$$= \sqrt{u^2+81} = 5\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow u^2+81 = 250$$

$$u^2 = 169 \Rightarrow u = \pm 13$$

لكن u سالبة حسب المعطيات، إذن $u = -13$.

حل آخر:

ويمكن كتابة الصورة القياسية للعدد $\frac{u-9i}{3+i}$ وهي $\frac{3u-9}{10}-\frac{u+27}{10}i$ ثم إيجاد مقياس هذا العدد

$$\left|\frac{u-9i}{3+i}\right| = \left|\frac{3u-9}{10}-\frac{u+27}{10}i\right|$$

$$\sqrt{\left(\frac{3u-9}{10}\right)^2+\left(-\frac{u+27}{10}\right)^2} = 5$$

$$\left(\frac{3u-9}{10}\right)^2+\left(-\frac{u+27}{10}\right)^2 = 25$$

$$(3u-9)^2+(u+27)^2 = 2500$$

$$9u^2-54u+81+u^2+54u+729 = 2500$$

$$10u^2 = 1690 \Rightarrow u^2 = 169 \Rightarrow u = \pm 13$$

وبما أن u سالبة فإن $u=-13$.

23)إذا كان: $(1+4i)$ جذرا للمعادلة: $x^3+5x^2+ax+b=0$، فأجد قيمة كل من العددين الحقيقيين a، و b، والجذرين الآخرين لهذه المعادلة.

بما أن $(1+4i)$ جذر للمعادلة $x^3+5x^2+ax+b=0$ فإنه يحقق المعادلة، أي أن:

$$(1+4i)^3+5(1+4i)^2+a(1+4i)+b=0$$

$$(1+8i+16i^2)(1+4i)+5(1+8i+16i^2)+a(1+4i)+b=0$$

$$(-15+8i)(1+4i)+5(-15+8i)+a(1+4i)+b=0$$

$$-15-52i-32-75+40i+a+4ia+b=0$$

$$-122+a+b+i(4a-12)=0$$

$$-122+a+b=0\ ,\ 4a-12=0\ \Rightarrow a=3, b=119$$

فالمعادلة هي: $x^3+5x^2+3x+119=0$

بما أن $(1+4i)$ جذر للمعادلة، فإن $1-4i$ جذر آخر لها. نكوّن معادلة تربيعية لها هذان الجذران:

$$\big(x-(1+4i)\big)\big(x-(1-4i)\big) = (x-1-4i)(x-1+4i) = x^2-2x+17$$

ثم نقسم كثير الحدود $x^3+5x^2+3x+119$ على $x^2-2x+17$ فنحصل على:

$$x^3+5x^2+3x+119 = (x^2-2x+17)(x+7)$$

الجذران الآخران لهذه المعادلة هما: $x=-7, x=1-4i$

24)أجد قيمتي الجذر التربيعي: $\sqrt{\frac{362-153i}{2-3i}}$

نبسط $\frac{362-153i}{2-3i}$

$$\frac{362-153i}{2-3i}=\frac{362-153i}{2-3i}\times\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{1183+780i}{13}=19+60i$$

$$\sqrt{\frac{362-153i}{2-3i}}=\sqrt{91+60i}=x+iy$$

$$\Rightarrow 91+60i=x^2-y^2+2ixy$$

$$\Rightarrow x^2-y^2=91, 2xy=60\Rightarrow y=\frac{30}{x}$$

$$\Rightarrow x^2-\frac{900}{x^2}=91$$

$$\Rightarrow\ x^4-91x^2-900=0$$

$$\Rightarrow (x^2+9)(x^2-100)=0\Rightarrow x=\pm 10, y=\pm 3$$

$$\sqrt{\frac{362-153i}{2-3i}}=\pm(10+3i)$$

25) أثبت أن أحد الجذرين التربيعيين للعدد: $(7+24i)$ هو $(4+3i)$، ثم أجد الجذر التربيعي الآخر.

إذا كان $(4+3i)$ جذرا تربيعيا للعدد $(7+24i)$ فيجب أن تكون العبارة الآتية صحيحة:

$$(4+3i)^2=7+24i$$

نستطيع التأكد من ذلك بالحساب:

$$(4+3i)^2=16+24i-9=7+24i$$

إذن هو فعلا جذر تربيعي للعدد $(7+24i)$، وجذره التربيعي الآخر هو: $-4-3i$

26)أثبت أن سعة $(7+24i)$ تساوي ضعف سعة $(4+3i)$

$$\theta_1=Arg(7+24i)=tan^{-1}\frac{24}{7}\approx 1.287$$

$$\theta_2=Arg(4+3i)=tan^{-1}\frac{3}{4}\approx 0.6435$$

$$2\times\theta_2=2(0.6435)=1.287=\theta_1$$

إذن، $Arg(7+24i)=2Arg(4+3i)$

27)أثبت أن مقياس $(7+24i)$ يساوي مربع مقياس $(4+3i)$

$$|7+24i|=\sqrt{49+576}=\sqrt{625}=25$$
$$|4+3i|=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$
$$\Rightarrow |7+24i|=|4+3i|^2$$

28) إذا كان: $\frac{a}{3+i}+\frac{b}{1+2i}=1-i$، فأجد قيمة كل من العددين الحقيقيين a، b.

$$\frac{a}{3+i}+\frac{b}{1+2i}=1-i \Rightarrow \frac{a}{3+i}\times\frac{3-i}{3-i}+\frac{b}{1+2i}\times\frac{1-2i}{1-2i}=1-i$$
$$\Rightarrow \frac{3a-ia}{10}+\frac{b-2ib}{5}=1-i$$
$$\Rightarrow \frac{3}{10}a-i\frac{a}{10}+\frac{b}{5}-i\frac{2b}{5}=1-i$$
$$\Rightarrow \frac{3}{10}a+\frac{b}{5}=1\,,\frac{a}{10}+\frac{2b}{5}=1$$
$$\Rightarrow 3a+2b=10, a+4b=10$$
$$\Rightarrow b=2, a=2$$

أحل كل معادلة مما يأتي:

29)$2z^3=8z^2+13z-87$

$$2z^3=8z^2+13z-87=0$$

الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm1,\pm3,\pm29,\pm\frac{3}{2},\pm\frac{29}{2},\pm87,\pm\frac{87}{2}$

بالتعويض، نجد أن العدد $z=-3$ يحقق المعادلة لأن:

$$2(-3)^3-8(-3)^2-13(-3)+87=0$$

إذن $(z+3)$ هو أحد العوامل، نجري عملية القسمة فنجد أن:

$$2z^3=8z^2+13z-87=(z+3)(2z^2-14z+29)=0$$
$$\Rightarrow z=-3, z=\frac{14\pm\sqrt{-36}}{4}=\frac{3\pm6i}{4}=\frac{3}{4}\pm\frac{3}{2}i$$

إذن لهذه المعادلة 3 حلول هي: $-3,\frac{3}{4}+\frac{3}{2}i,\frac{3}{4}-\frac{3}{2}i$

$30) z^3+4z^2-10z+12=0$

الأصفار النسبية المحتملة هي: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$
بالتعويض، نجد أن العدد $z=-6$ يحقق المعادلة لأن:

$$(-6)^3+4(-6)^2-10(-6)+12=0$$

إذن $(z+6)$ هو أحد العوامل، نجري عملية القسمة فنجد أن:

$$z^3+4z^2-10z+12=(z+6)(z^2-2z+2)=0$$

$$\Rightarrow z=-6, z=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm2i}{2}=1\pm i$$

إذن لهذه المعادلة 3 حلول هي: $-6, 1+i, 1-i$

31) إذا كان: $-2+i$ هو أحد جذور المعادلة: $z^4+az^3+bz^2+10z+25=0$، فأجد قيمة a، وقيمة b، ثم أجد جميع الجذور الحقيقية والجذور المركبة للمعادلة.

بما أن $(-2+i)$ جذر للمعادلة $z^4+az^3+bz^2+10z+25=0$ فإنه يحقق المعادلة، أي أن:

$$(-2+i)^4+a(-2+i)^3+b(-2+i)^2+10(-2+i)+25=0$$

$$\Rightarrow -7-24i+a(-2+11i)+b(3-4i)-20+10i+25=0$$

$$\Rightarrow -7-2a+3b-20+25+i(-24+11a-3b+10)=0$$

$$\Rightarrow 2-2a+3b=0, -14+11a-4b=0$$

$$\Rightarrow a=2, b=2$$

المعادلة هي: $z^4+az^3+bz^2+10z+25=0$
بما أن $(-2+i)$ جذر للمعادلة، فإن $(-2-i)$ جذر آخر لها. نكوّن معادلة تربيعية لها هذان الجذران:

$$\big(z-(-2+i)\big)\big(z-(-2-i)\big)=(z+2-i)(z+2+i)=z^2+4z+5$$

ثم نقسم كثير الحدود $z^4+az^3+bz^2+10z+25$ على z^2+4z+5 فنحصل على:

$$z^4+az^3+bz^2+10z+25=(z^2+4z+5)(z^2-2z+5)$$

$$z^2-2z+5=0 \Rightarrow z=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{2\pm4i}{2}=1\pm2i$$

جذور هذه المعادلة هي: $x=1-2i, x=1+2i, x=-2+i, x=-2-i$

الدرس الثالث – المحل الهندسي في المستوى المُركب

مثال1:

أجد المحل الهندسي الذي تُمثله المعادلة: $|z-2+8i|=3$، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

الخطوة 1: أجد المحل الهندسي.

عندما أكتب المعادلة في صورة: $|z-(a+ib)|=r$، فإن: $|z-(2-8i)|$، وهذه معادلة دائرة، مركزها (2, -8)، وطول نصف قطرها 3 وحدات.

الخطوة 2: أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

أكتب هذه المعادلة بالصيغة الديكارتية على النحو الآتي:

المعادلة المعطاة $|z-2+8i|=3$

باستبدال z بالصيغة $x+iy$ $|x+iy-2+8i|=3$

بتجميع الحدود المتشابهة $|(x-2)+(y+8)i|=3$

صيغة مقياس العدد المركب $\sqrt{(x-2)^2+(y+8)^2}=3$

بتربيع الطرفين $(x-2)^2+(y+8)^2$

ألاحظ أن المعادلة: $(x-2)^2\_(y+8)^2=9$ هي أيضا معادلة دائرة، مركزها (2, -8)، وطول نصف قطرها 3 وحدات.

أتحقق من فهمي

أجد المحل الهندسي الذي تُمثله المعادلة: $|z+5-4i|=7$، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

$$|z+5-4i|=7 \Rightarrow |z-(-5+4i)|=7$$

وهذه معادلة دائرة في المستوى المركب مركزها (-5,4) وطول نصف قطرها 7 وحدات.

$$|z+5-4i|=7 \Rightarrow |x+iy+5-ei|=7$$

$$\Rightarrow |(x+5)+(y-4)i|=7$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+5)^2+(y-4)^2=7}$$

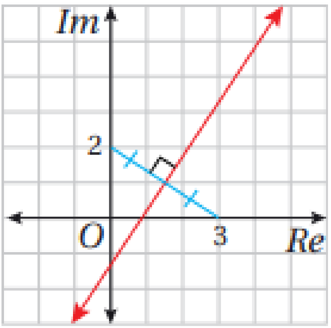
$$\Rightarrow (x+5)^2+(y-4)^2=49$$

وهذه معادلة دائرة مركزها (-5,4) وطول نصف قطرها 7 وحدات.

مثال2:

أجد المحل الهندسي الذي تُمثله المعادلة: $|z-3|=|z-2i|$، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

الخطوة 1: أجد المحل الهندسي.



عندما أكتب المعادلة في صورة:

$|z-(a+ib)|=|z-(c+id)|$، فإن:

$|z-(3+0i)|=|z-(0+2i)|$. وهذه معادلة المُنصف العمودي للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين: (3,0), (0,2)، وهو يظهر باللون الأحمر في الشكل المجاور.

الخطوة 2: أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

لكتابة المعادلة بالصيغة الديكارتية، أعوض $z=x+iy$، ثم أجد مقياس العدد المركب، ثم أبسط:

المعادلة المعطاة	$|z-3|=|z-2i|$
باستبدال z بالصيغة $x+iy$	$|x+iy-3|=|x+iy-2i|$
بتجميع الحدود المتشابهة	$|(x-3)+iy|=|x+(y-2)i|$
صيغة مقياس العدد المركب	$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$
بتربيع الطرفين، وفك الأقواس	$x^2-6x+9+y^2=x^2+y^2-4y+4$
بطرح x^2، و y^2 من الطرفين	$-6x+9=-4y+4$
بكتابة المعادلة في صورة: $Ax+By+C=0$	$6x-4y-5=0$

إذن، معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $6x-4y-5=0$

أتحقق من فهمي

أجد المحل الهندسي الذي تُمثله المعادلة: $|z+1|=|z-5i|$، ثم أكتب المعادلة بالصيغة الديكارتية.

$|z+1|=|z-5i| \Rightarrow |z-(-1)|=|z-(5i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (-1,0), (0,5)

$|z+1|=|z-5i| \Rightarrow |x+iy+1|=|x+iy-5i|$

$\Rightarrow |(x+1)+iy|=|x+i(y-5)|$

$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-5)^2}$

$\Rightarrow (x+1)^2+y^2=x^2+(y-5)^2$

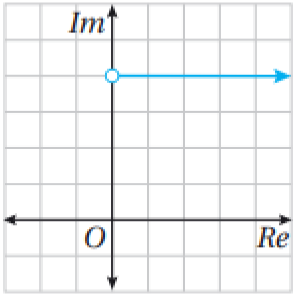
$\Rightarrow x^2+2x+1+y^2=x^2+y^2-10y+25 \Rightarrow 2x+10y-24=0$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $x+5y-12=0$

مثال 3:

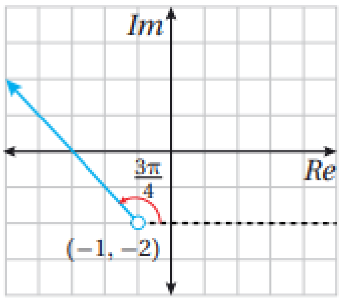
أجد المحل الهندسي الذي تُمثله كل معادلة مما يأتي، ثم أرسمه في المستوى المركب:

1) $Arg(z-4i)=0$



تُمثل هذه المعادلة شعاعا يبدأ بالنقطة (0,4)، ولا يشملها،
ويصنع زاوية قياسها 0 مع المستقيم الذي يوازي المحور الحقيقي؛
أي إنه يوازي المحور الحقيقي كما في الشكل المجاور.

2) $Arg(z+1+2i)=\frac{3\pi}{4}$



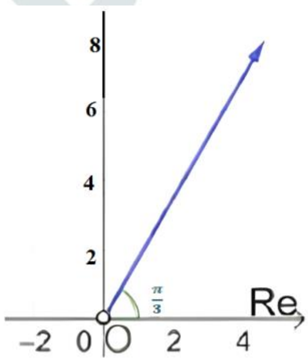
عندما أكتب المعادلة في صورة:
$Arg(z-(a+bi))=\theta$، **فإن:**
$Arg(z-(-1-2i))=\frac{3\pi}{4}$. **وهذه معادلة شعاع يبدأ بالنقطة**
(−1,-2)، ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{3\pi}{4}$ **مع المستقيم الذي**
يوازي المحور الحقيقي كما في الشكل المجاور.

أتحقق من فهمي

أجد المحل الهندسي الذي تُمثله كل معادلة مما يأتي، ثم أرسمه في المستوى المركب:

a) $Arg(z)=\frac{\pi}{3}$

$$Arg(z)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow Arg(z-(0))=\frac{\pi}{3}$$



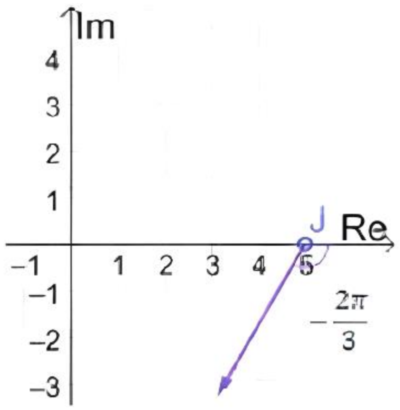
هذه معادلة شعاع يبدأ بالنقطة (0,0) ولا يشملها،
ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ **مع المحور الحقيقي**

b) $Arg\,(z-5) = -\frac{2\pi}{3}$

$Arg(z-5) = -\frac{2\pi}{3} \Rightarrow Arg\big(z-(5)\big) = \frac{2\pi}{3}$

هذه معادلة شعاع يبدأ بالنقطة (5,0) ولا يشملها،

ويصنع زاوية قياسها $-\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي



مثال 4:

أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق كل متباينة مما يأتي:

1) $|z-3| > 5$

الخطوة 1: أحدد المنحنى الحدودي.

يمثل منحنى المعادلة: $|z-3| = 5$ المنحنى الحدودي للمتباينة: $|z-3| > 5$؛ وهو دائرة مركزها (3,0)، وطول نصف قطرها 5 وحدات. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنني أرسم المنحنى الحدودي متقطعا.

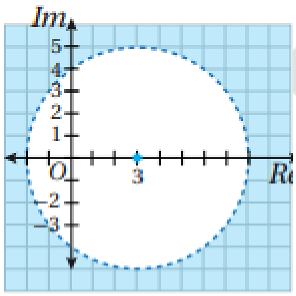
الخطوة 2: أحدد منطقة الحلول الممكنة

تبعد الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة:

$|z-3| > 5$ مسافة تزيد على 5 وحدات عن مركز الدائرة.

إذن، منطقة الحلول الممكنة للمتباينة تقع خارج محيط الدائرة:

$|z-3| = 5$ كما في الشكل المجاور.



2) $|z-7| \le |z+3i|$

الخطوة 1: أحدد المنحنى الحدودي.

يمثل منحنى المعادلة: $|z-7| = |z+3i|$ المنحنى الحدودي للمتباينة: $|z-7| \le |z+3i|$؛ وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين (7,0) و (0, -3). وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنني أرسم المنحنى الحدودي متصلاً.

الخطوة 2: أحدد منطقة الحلول الممكنة.

تتحقق المتباينة: $|z-7| \le |z+3i|$ في إحدى جهتي المنحنى الحدودي، ويمكن تحديدها باختيار عدد مركب عشوائيا في المتباينة.

أختار العدد: $z = 0 + 0i$ الذي تُمثله نقطة الأصل:

المتباينة الأصلية $\quad |z-7| \le |z+3i|$

بتعويض $z = 0 + 0i \quad |0-7| \overset{?}{\le} |0+3i|$

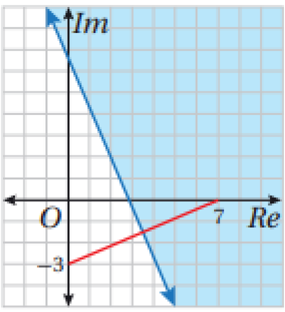
بالتبسيط $\quad \sqrt{49} \overset{?}{\le} \sqrt{9}$

$7 \overset{?}{\le} 3 \quad \boxed{\times}$

بما أن العدد: $z = 0 + 0i$ لا يحقق المتباينة،

فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة

التي لا تحوي نقطة الأصل كما في الشكل المجاور.

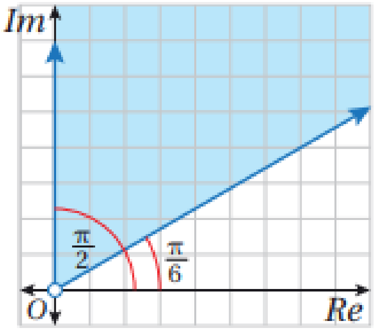


3) $\frac{\pi}{6} \leq Arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$

الخطوة 1: أحدد المنحنى الحدودي.

يمثل منحنى المعادلة: $Arg(z) = \frac{\pi}{6}$ شعاعا يبدأ بنقطة الأصل، ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{6}$ مع المحور الحقيقي الموجب. ويمثل منحنى المعادلة: $Arg(z) = \frac{\pi}{2}$ شعاعا آخر يبدأ بنقطة الأصل، ولا يشملها ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي الموجب.

إذن يمثل الشعاعان معا منحنى حدوديا للمتباينة: $\frac{\pi}{6} \leq Arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$. وبما أنه توجد مساواة في رمزي المتباينة، فإنني أرسم المنحنى الحدودي متصلاً.



الخطوة 2: أحدد منطقة الحلول الممكنة

المنطقة التي تمثلها المتباينة:

$\frac{\pi}{6} \leq Arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$ هي جزء من المستوى المركب محدود بشعاعين كما في الشكل المجاور.

أتحقق من فهمي

أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق كل متباينة مما يأتي:

a) $|z + 3 + i| \leq 6$

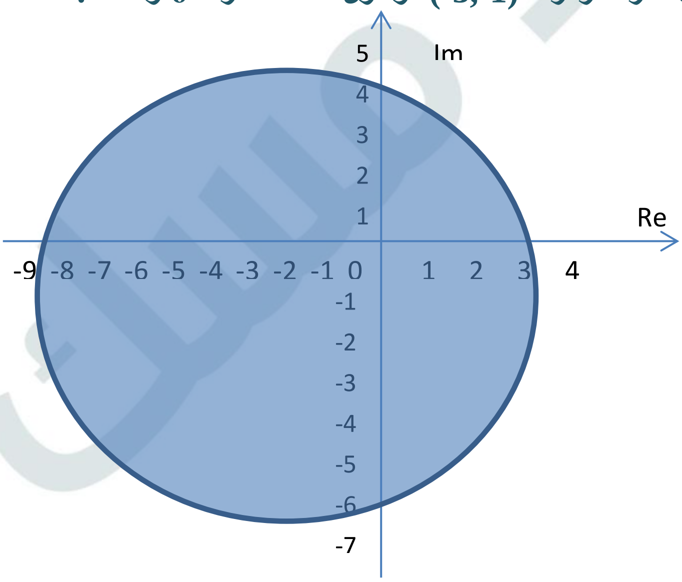
$|z + 3 + i| \leq 6$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z + 3 + i| = 6$ وهو دائرة مركزها (-3,-1)، وطول نصف قطرها 6 وحدات.

وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة،

فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلاً.

أما منطقة المحل الهندسي فهي داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها، لأن الأعداد المركبة التي تحقق المتباينة تبعد مسافة تقل عن 6 وحدات عن مركز الدائرة أو تساويها.



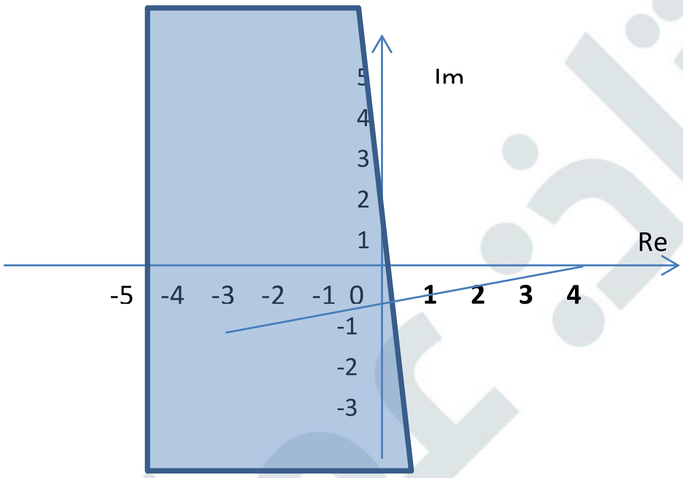
b) $|z+3+i| < |z-4|$

$|z+3+i| < |z-4|$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينة معادلته $|z+3+i| = |z-4|$ وهو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين (-3,-1) و (4,0). وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعا.

نحدد جهة المنحنى الحدودي التي تحقق المتباينة باختيار نقطة الأصل مثلا وتعويضها في المتباينة،

$|0+3+i| < |0-4| \Rightarrow \sqrt{10} < 4$ بما أن نقطة الأصل تحقق المتباينة، فإن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحوي نقطة الأصل.



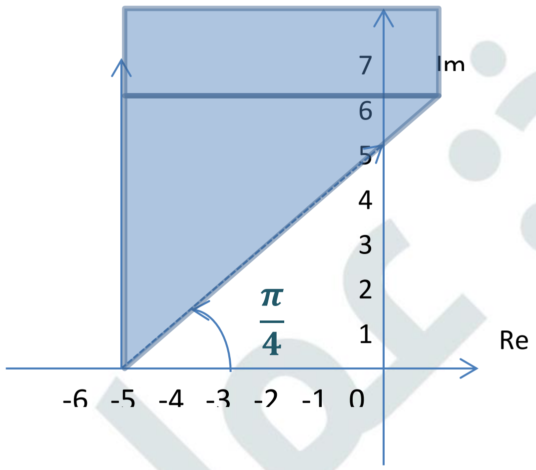
c) $\frac{\pi}{4} < Arg(z+5) \leq \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{4} < Arg(z+5) \leq \frac{\pi}{2}$$

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z+5) = \frac{\pi}{2}$ شعاعا(نرسمه متصلا بسبب وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة (-5,0) ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي.

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z+5) = \frac{\pi}{4}$ شعاعا (نرسمه متقطعا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينة) يبدأ من النقطة (-5,0) ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي.

المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة المطلوبة هو الجزء المظلل من المستوى المركب كالآتي:



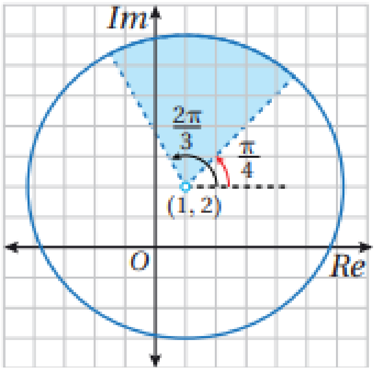
مثال 5:

أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق كل متباينة مما يأتي: $|z-1-2i| \leq 5$ والمتباينة:

$$\frac{\pi}{4} < Arg(z-1-2i) < \frac{2\pi}{3}$$

الخطوة 1: أحدد المنحنى الحدودي لكل متباينة.

- تُمثل المعادلة: $|z-1-2i| = 5$ دائرة مركزها النقطة (1,2)، وطول نصف قطرها 5 وحدات. وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنني أرسم المنحنى الحدودي متصلا.
- تمثل المعادلة: $Arg(z-1-2i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعا يبدأ بالنقطة (1,2)، ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنني ارسم الشعاع متقطعا.
- تمثل المعادلة: $Arg(z-1-2i) = \frac{2\pi}{3}$ شعاعا يبدأ بالنقطة (1,2)، ولا يشملها، ويصنع زاوية قياسها $\frac{2\pi}{2}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنني أرسم الشعاع متقطعا.



الخطوة 2: أحدد منطقة الحلول الممكنة.

تُمثل المتباينة: $|z-1-2i| \leq 5$ النقاط الواقعة داخل الدائرة،

وتمثل المتباينة $\frac{\pi}{4} < Arg(z-1-2i) < \frac{2\pi}{3}$ النقاط الواقعة بين الشعاعين.

إذن، المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين معا هو

الجزء الواقع داخل القطاع الدائري كما في الشكل المجاور.

أتحقق من فهمي

أمثل في المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة: $|z+3-2i| \geq 4$

والمتباينة: $\frac{-\pi}{2} < Arg(z-2+i) < \frac{\pi}{4}$

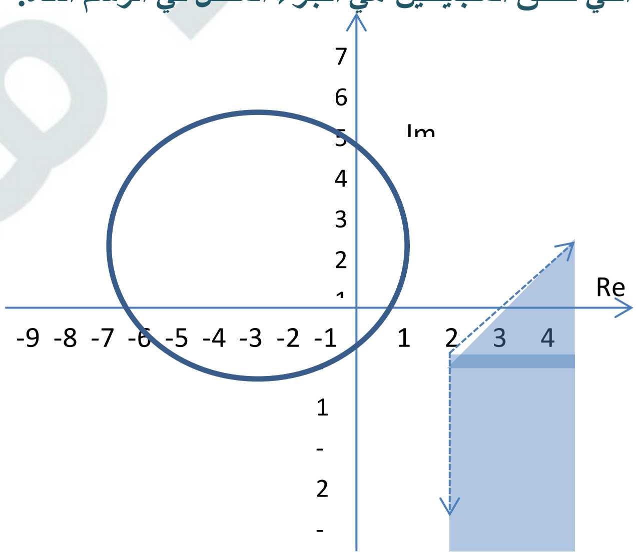
$$|z+3-2i| \geq 4, \frac{-\pi}{2} < Arg(z-2+i) < \frac{\pi}{4}$$

تمثل المعادلة $|z+3-2i| = 4$ دائرة مركزها النقطة (-3,2) وطول نصف قطرها 4 وحدات، وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم المنحنى الحدودي متصلاً.

تمثل المعادلة $Arg(z-2+i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعا يبدأ بالنقطة (2,-1) ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة فإننا نرسم الشعاع متقطعا.

تمثل المعادلة $Arg(z-2+i) > -\frac{\pi}{2}$ شعاعا يبدأ بالنقطة (2,-1) ويصنع زاوية قياسها $-\frac{\pi}{2}$ مع مستقيم يوازي المحور الحقيقي، وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإننا نرسم الشعاع متقطعا.

تمثل المتباينة $|z+3-2i| \geq 4$ النقاط الواقعة على الدائرة أو خارجها، وتمثل المتباينة $\frac{-\pi}{2} < Arg(z-2+i) < \frac{\pi}{4}$ النقاط الواقعة بين الشعاعين. المنطقة التي تحقق المتباينتين هي الجزء المظلل في الرسم أدناه.

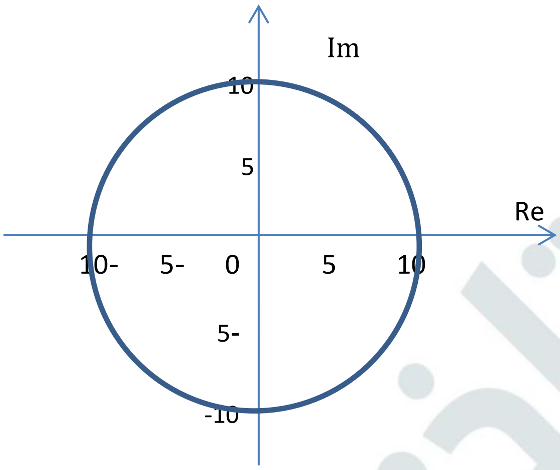


أتدرب وأحل المسائل:

1) $|z| = 10$

$|z| = 10 \Rightarrow |x + iy| = 10 \Rightarrow x^2 + y^2 = 100$

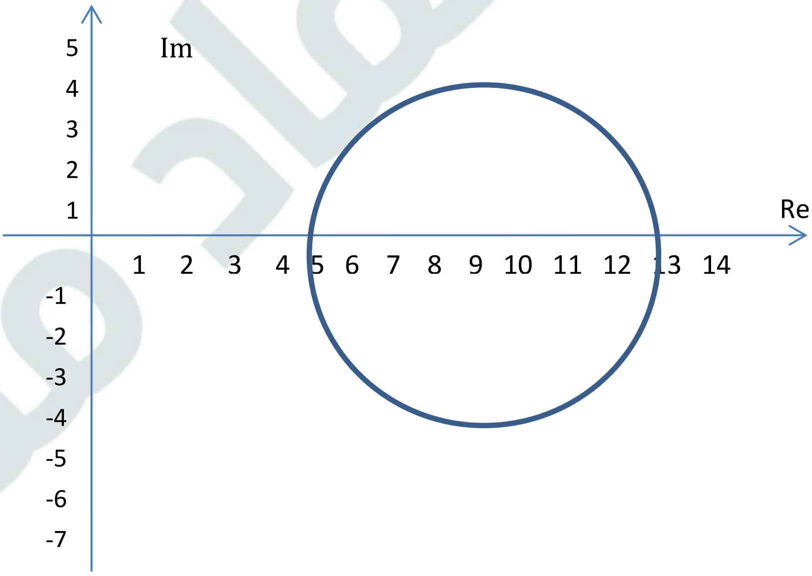
المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها (0,0) وطول نصف قطرها 10 وحدات.



2) $|z - 9| = 4$

$|z - 9| = 4 \Rightarrow |(x - 9) + iy| = 4 \Rightarrow (x - 9)^2 + y^2 = 16$

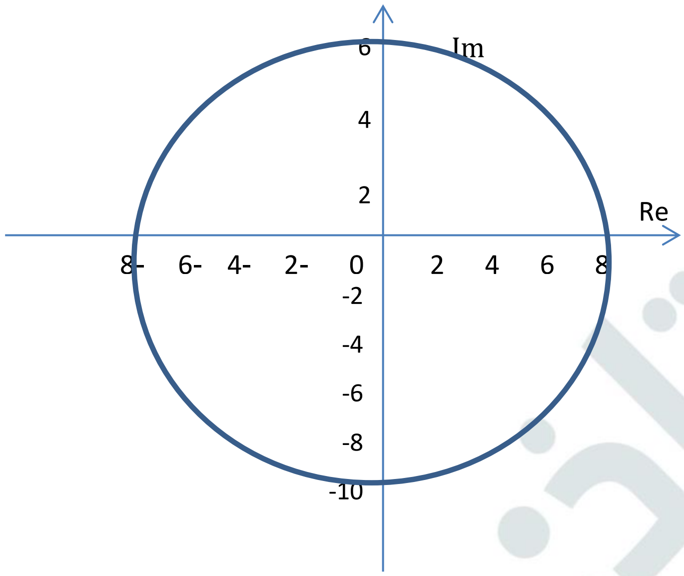
المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها (9,0) وطول نصف قطرها 4 وحدات.



3) $|z + 2i| = 8$

$$|z + 2i| = 8 \Rightarrow |x + i(y + 2)| = 8 \Rightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 64$$

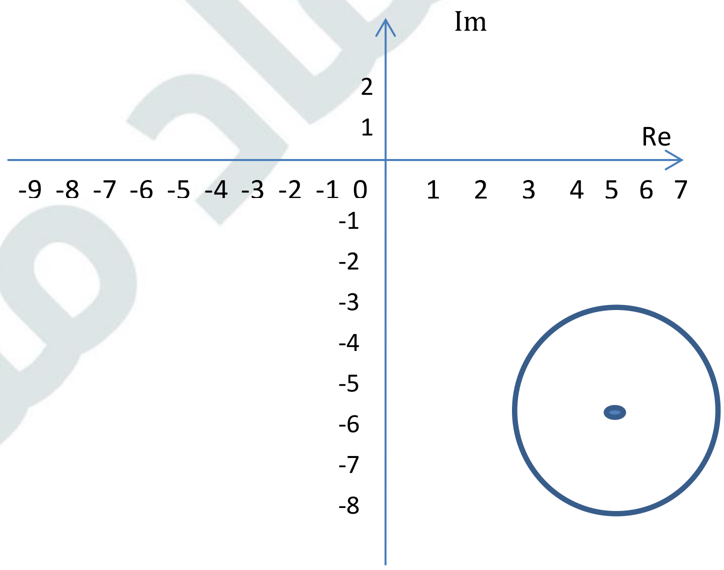
المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها (0,-2) وطول نصف قطرها 8 وحدات.



4) $|z - 5 + 6i| = 2$

$$|z - 5 + 6i| = 2 \Rightarrow |(x - 5) + i(y + 6)| = 2 \Rightarrow (x - 5)^2 + (y + 6)^2 = 4$$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها (5,-6) وطول نصف قطرها وحدتان.

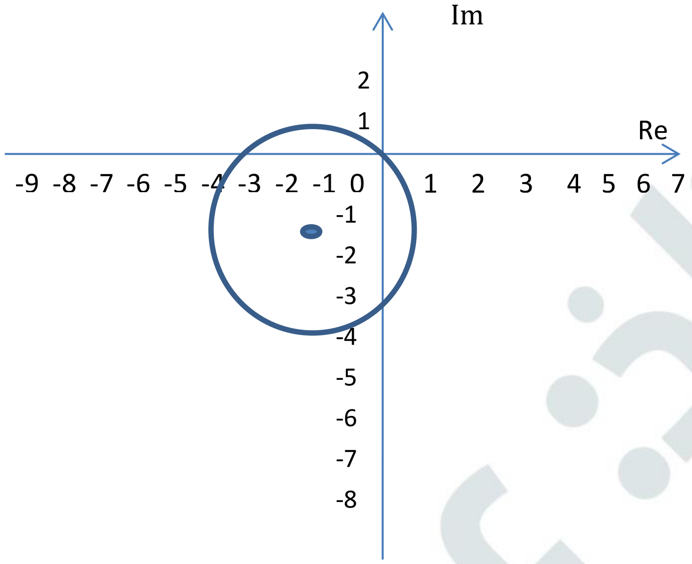


5) $|z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}|=2$

$|z+\sqrt{2}+i\sqrt{2}|=2 \Rightarrow |(x+\sqrt{2})+i(y+\sqrt{2})|=2$

$\Rightarrow (x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2=4$

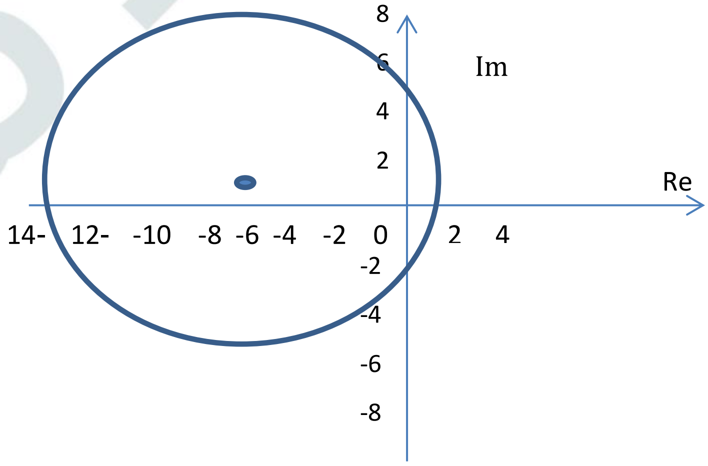
المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ وطول نصف قطرها وحدتان.



6) $|z+6-i|=7$

$|z+6-i|=7 \Rightarrow |(x+6)+i(y-1)|=7 \Rightarrow (x+6)^2+(y-1)^2=49$

المحل الهندسي الذي تمثله هذه المعادلة هو دائرة مركزها (-6,-1) وطول نصف قطرها 7 وحدات.



7) $|z-5| = |z-3i|$

$$|z-5| = |z-3i| \Rightarrow |z-(5)| = |z-(3i)|$$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (5,0), (0,3)

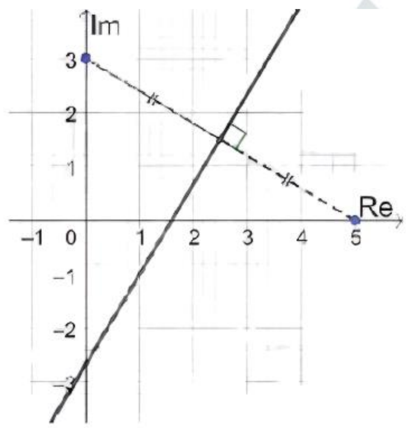
$$|z-5| = |z-3i| \Rightarrow |(x-5)+iy| = |x+i(y-x)|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-5)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2}$$

$$\Rightarrow (x-5)^2+y^2 = x^2+(y-3)^2$$

$$\Rightarrow x^2-10x+25+y^2 = x^2+y^2-6y+9$$

$$\Rightarrow 10x-6y-16=0$$



إذن معادلة العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $5x-3y-8=0$

8) $|z+3i| = |z-7i|$

$$|z+3i| = |z-7i| \Rightarrow |z-(-3i)| = |z-(7i)|$$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (0,-3), (0,7)

$$|z+3i| = |z-7i| \Rightarrow |x+i(y+3)| = |x+i(y-7)|$$

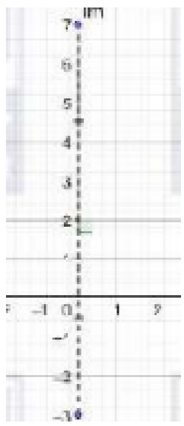
$$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y+3)^2} = \sqrt{x^2+(y-7)^2}$$

$$\Rightarrow x^2+(y+3)^2 = x^2+(y-7)^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = x^2+6y+9$$

$$= x^2+y^2-14y+49$$

$$\Rightarrow 20y-40=0$$



إذن معادلة العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $y=2$

9) $|z+5+2i| = |z-7|$

$|z+5+2i| = |z-7| \Rightarrow |z-(-5-2i)| = |z-(7)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقتين (7,0) ,(-5,-2)

$|z+5+2i| = |z-7| \Rightarrow |(x+5)+i(y+2)| = |(x-7)+iy|$

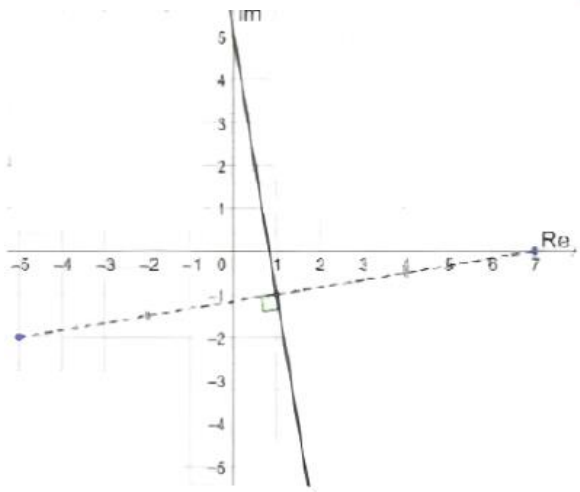
$\Rightarrow \sqrt{(x+5)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-7)^2+y^2}$

$\Rightarrow (x+5)^2+(y+2)^2 = (x-7)^2+y^2$

$\Rightarrow x^2+10x+25+y^2+4y+4 = x^2-14x+49+y^2$

$\Rightarrow 24x+4y-20=0$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $6x+y-5=0$



10) $|z-3| = |z-2-i|$

$|z-3| = |z-2-i| \Rightarrow |z-(3)| = |z-(2+i)|$

هذه هي معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقتين (3,0),(2,1)

$|z-3| = |z-2-i| \Rightarrow |(x-3)+iy| = |(x-2)+i(y-1)|$

$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2+y^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$

$\Rightarrow (x-3)^2+y^2 = (x-2)^2+(y-1)^2$

$\Rightarrow x^2-6x+9+y^2 = x^2-4x+4+y^2-2y+1$

$\Rightarrow 2x-2y-4=0$

إذن معادلة المنصف العمودي للقطعة المستقيمة بالصيغة الديكارتية هي: $x-y-2=0$

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) إذا كان: $\sqrt{-1} = i$ فإن i^{343} تساوي:

a) -1 b)1 c) $-i$ d) i

2) ناتج $(1-i)^3$ هو:

a) $-2+2i$ b) $-2-2i$ c)$2-2i$ d)$2+2i$

3) إذا كان $2i$ هو أحد جذور المعادلة: $az^3+5z^2+8z+20=0$ فإن قيمة a هي:

a) -8 b) -2 c) 2 d) 8

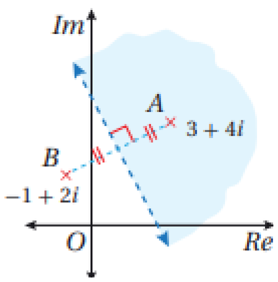
4) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z=-1+i\sqrt{3}$ هي:

a) $2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ b) $2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$ c) $2(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})$ d) $2(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3})$

5) الصورة القياسية لناتج: $8(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}) \div 2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ هي:

a) $4i$ b) -4 c) $-4+4i$ d) $4-4i$

6) حدي الآتية تصف المنطقة المظللة في الشكل المجاور:



a) $|z-1+2i| < |z+3+4i|$

b) $|z-1+2i| > |z+3+4i|$

c) $|z+1-2i| < |z-3-4i|$

d) $|z+1-2i| > |z-3-4i|$

7) أجد الجذرين التربيعين للعدد المركب $z = 45 - 28i$

الحل

$$\sqrt{45-28i} = x + iy \Rightarrow 45 - 28i = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = 45 \quad , \quad 2xy = -28 \Rightarrow y = -\frac{14}{x}$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{196}{x^2} = 45$$

$$\Rightarrow x^4 - 45x^2 - 196 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 49)(x^2 + 4) = 0 \Rightarrow x = \pm 7$$

$$\Rightarrow x = 7\,, y = -2 \text{ or } x = -7, y = 2$$

الجذران التربيعيان للعدد $45 - 28i$ هما: $-7 + 2i\,, 7 - 2i$

---

8) أجد مقياس العدد المركب: $w = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}i$، وسعته، مقربا إجابتي إلي أقرب منزلتين عشريتين.

الحل

$$|w| = \sqrt{(-\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{7}{12}} \approx 0.76$$

$$Arg|w| = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)\right) = -\left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -2.43$$

---

9) إذا كان: $z = -8 + 8i$، وكان: $w = a + 2i$، حيث $a < 0$، فأجد قيمة a علما بأن: $|z + w| = 26$.

الحل

$$z + w = a - 8 + 10i \Rightarrow |z + \omega| = \sqrt{(a-8)^2 + 100} = 26$$

$$\Rightarrow (a-8)^2 + 100 = 676 \Rightarrow (a-8)^2 = 576 \Rightarrow a - 8 = \pm 24 \Rightarrow a = -16 \checkmark \quad a = 32 \; x$$

إذا كان: $w = \frac{14-31i}{3-2i}$ فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعا:

10) أكتب العدد w في صورة $x + iy$

$$w = \frac{14-31i}{3-2i} \times \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{104-56i}{9+4} = 8 - 5i$$

11) إذا كان العدد w هو أحد جذور المعادلة: $z^2+cz+d=0$ فأجد قيمة كل من العددين الحقيقين c و d

الحل

$$(8-5i)^2+c(8-5i)+d=0 \Rightarrow 64-80i-25+8c-5ci+d=0$$

$$\Rightarrow 39+d+8c-i(80+5c)=0$$

$$\Rightarrow 39+d+8c=0, 80+5c=0$$

$$\Rightarrow c=-16, d=89$$

حل آخر

$$w=8-5i \Rightarrow \bar{w}=8+5i$$

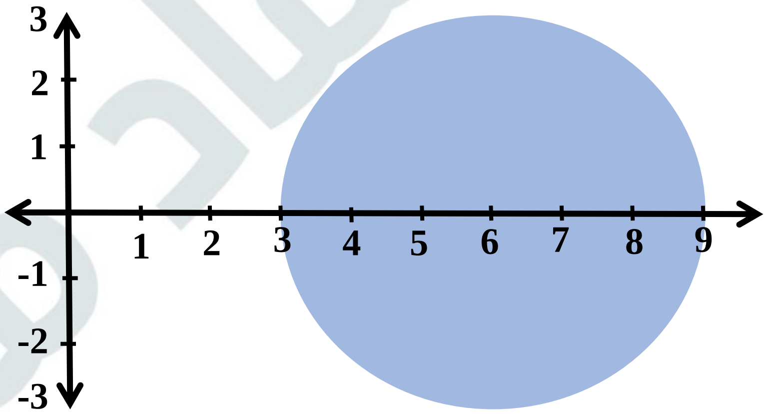
$$\Rightarrow c=-(w+\bar{w})=-16$$

$$\Rightarrow d=w\times\bar{w}=64+25=89$$

أمثل في المستوى المركب المنطقة التي تحددها كل متابينة مما يأتي:

12) $|z-6|\leq 3$

المنحنى الحدودي لهذه المتباينه معادلته $|z-6|=3$ ، وهو دائرة مركزها $(6,0)$ وطول نصف قطرها 3 وحدات .
وبما أنه توجد مساواة فى رمز المتباينه ، فإننا نرسم المنحنى الحدودى متصلا .
أما منطقة المحل الهندسى فهى داخل الدائرة وعلى محيطها وليس خارجها ، لأن الأعداد المركبه التي تحقق المتباينه تبعد عن مركز الدائرة مسافة تقل عن طول نصف القطر أو تساويها .

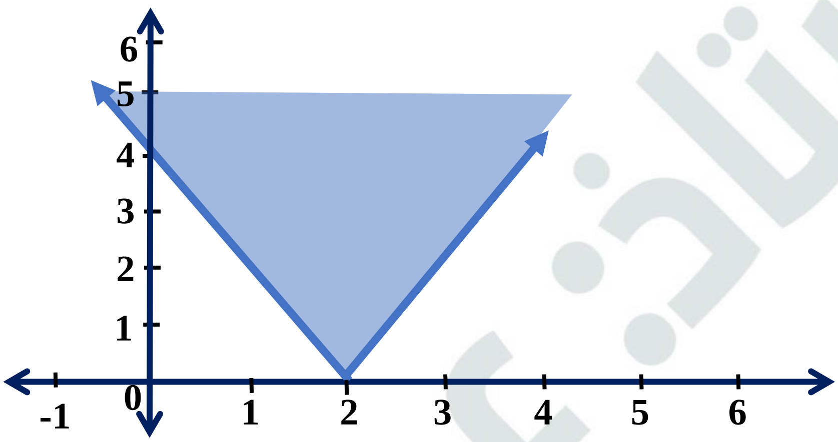


---

13) $\frac{\pi}{4} \le Arg(z-2) \le \frac{2\pi}{3}$

يمثل منحنى المعادلة $Arg(z-2) \le \frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متصلا بسبب وجود المساواة فى المتباينه) يبدأ من النقطة $(2\,,0)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور الحقيقي

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z-2) \le \frac{2\pi}{3}$ شعاعاً (نرسمه متصلا بسبب وجود المساواة فى المتباينة)
يبدأ من النقطة $(2,0)$ ولا يشملها ، ويصنع زاويه قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي
المحل الهندسى للنقاط التى تحقق المتباينه هو المنطقة المظللة في الشكل أدناه :



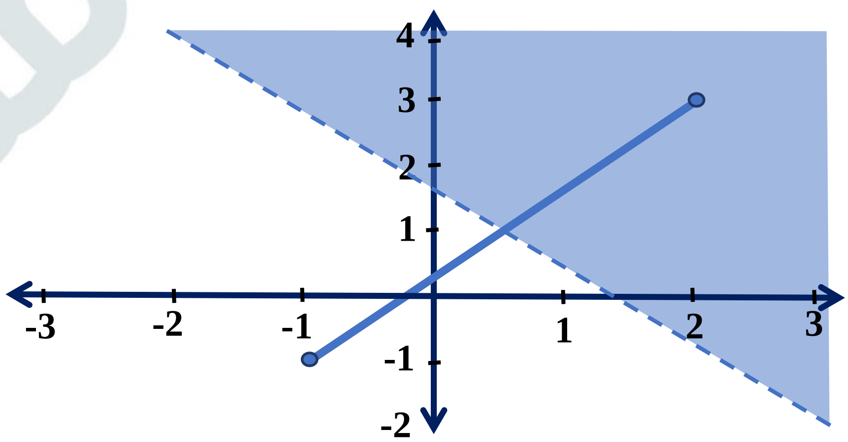
---

14) $|z+1+i| > |z-3-3i|$

المنحنى الحدودى لهذه المتباينه معادلته $|z+1+i| = |z-3-3i|$
وهو المنصف العمودى للقطعه المستقيمة التي طرفها $(3,3)$ و $(-1\,,-1)$.
وبما أنه لا توجد مساواة فى رمز المتباينه ، فإننا نرسم المنحنى الحدودي متقطعًا .
تحدد جهة المنحنى الحدودى التي تحقق المتباينه باختيار $z = 0$ مثلا وتعويضة فى المتباينه ،

$|0+1+i| > |\,0-3-3i| \;\rightarrow \sqrt{2} > \sqrt{18} \quad x$

بما أن العدد لا يحقق المتباينة ، فإن منطقة الحلول الممكنه هي المنطقة التي لا تحوى $z = 0$



إذا مثلث النقطةM العدد $Z_1 = 1 - 8i$ ومثلث النقطة N العدد $Z_1 = 4 + 7i$ وكانت O هي نقطة الأصل فأجب عن الأسئلة الأتية تباعا:

15) أبين أن المثلث OMN متطابق الضلعين

$$NO = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$$

$$MO = \sqrt{1 + 64} = \sqrt{65}$$

إذن المثلث OMN متطابق الضلعين.

16) أبين أن جيب تمام الزاوية MON يساوي $-\frac{4}{5}$ بأستخدام قانون جيب التمام فى الملف OMN

$$(NM)^2 = (NO)^2 + (MO)^2 - 2(NO)(MO)cosMON$$

$$\Rightarrow cos\angle MON = -\frac{234 - 130}{130} = -\frac{4}{5}$$

---

17) أجد مساحة المثلث OMN

$$A = \frac{1}{2}(NO)(MO)SIN\ MON = \frac{1}{2} \times 65 \times \frac{3}{5} = \frac{39}{2}$$

---

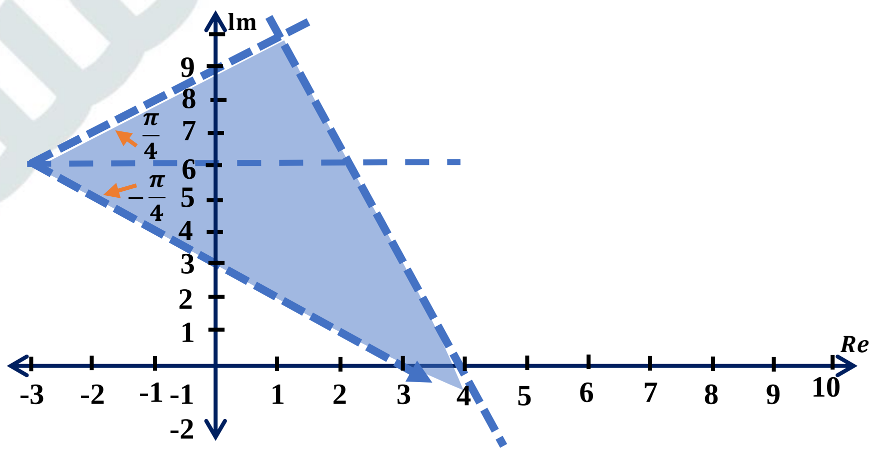
18) أمثل فى المستوى المركب المحل الهندسي للنقاط التى تحقق المتباينة$|z - 8| > |z + 2i|$, والمتباينة

المنحنى الحدودى لهذه المتباينة معادلته $|z - 8| = |z + 2i|$
وهو المنصف العمودى للقطعة المستقيمة التي طرفاها $(0, -2)$ و $(8, 0)$.
وبما أنه لا توجد مساواة فى رمز المتباينه ،فإننا نرسم المنحنى الحدودى متقطعًا .

$$-\frac{\pi}{4} < Arg(z + 3 - 6i) < \frac{\pi}{4}$$

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z + 3 - 6i) = \frac{\pi}{4}$ شعاعًا (نرسمه متقطعًا بسبب عدم وجود مساوة فى المتباينه) يبدأ من النقطة $(-3, 6)$ ولا يشملها ، ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم مواز للمحور الحقيقي

ويمثل منحنى المعادلة $Arg(z + 3 - 6i) = \frac{2\pi}{3}$ شعاعًا (نرسمة متقطعًا بسبب عدم وجود مساواة في المتباينه) يبدأ من النقطة $(-3, 6)$ ولا يشملها ، ويصنع زاويه قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع مستقيم مواز للمحور الحقيقي المحل الهندسى للنقاط التي تحقق المتباينتين هو المنطقة المظللة فى الشكل أدناه :



إذا كانت z=5+2i فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعا:

19) أبين أن: $\frac{z}{z}=\frac{1}{29}(21+20i)$.

20) من خلال البحث فى سعة كل من الأعداد المركبة $\frac{z}{z}$, $\overline{z}$, z أبين أن: $2\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{20}{21}\right)$

حل السؤالين 20,19 موجود فى الدرس الثالث مهارات عليا

تمثل النقاط A,B,C,D جذور المعادلة $Z^4-6Z^3+14Z^2-64Z+680=0$

21) إذا كان العدد ($4i$ + 2-) :هو أحد هذه الجذور، فأجد الجذور الثلاثة الأُخرى لهذه المعادلة.

بما أن العدد $-2+4i$ هو حل لهذه المعادلة ، إذن مرافقة $-2-4i$ يكون حلاً أيضًا لها ويكون ناتج ضربهما أحد عوامل كثير الحدود المرتبطة بهذه المعادلة .

$$\big(z-(-2+4i)\big)\big(z-(-2-4i)\big)=z^2+4z+20$$

نقسم $z^4-6z^3+14z^2-64z+680$ على $z^2+4z+20$ فنجد أنّ :

$$z^4-6z^3+14z^2-64z+680=(z^2+4z+20)(z^2-10z+34)=0$$

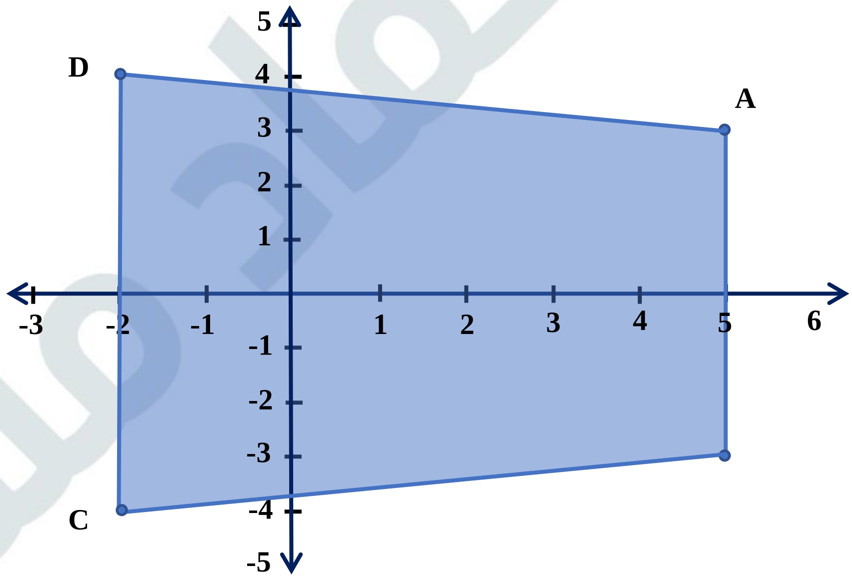
لإيجاد جذور المعادلة $z^2-10z+34=0$ نستخدم القانون العام لحل المعادلة التربيعية :

$$z=\frac{10\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{10\pm6i}{2}=5\pm3i$$

فتكون الجذور الثلاثة المطلوبة هي : $5+3i\,,5-3i,-2-4i$

---

22) أُمثِّل الجذور الأربعة في المستوى المُركَّب، ثم أجد مساحة الشكل الرباعي ABCD .

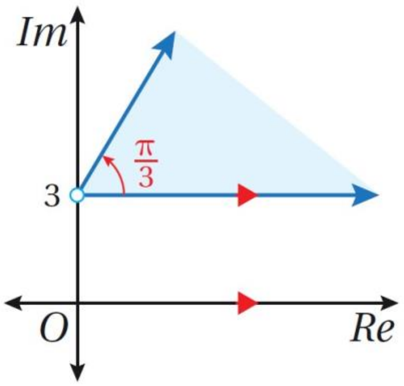


الرباعى $ABCD$ هو شبه منحرف ، مساحته بالوحدات المربعة تساوى :

$$A=\frac{1}{2}(7)(6+8)=49$$

23) أكتب (بدلالة Z) متباينة تُمثِّل المحل الهندسي المعطى في الشكل الآتي:

$$0 \le Arg(z-3i) \le \frac{\pi}{3}$$



إذا كان $Z^2 - 2Z + 10 = 0$ فأجيب على السؤالين الأتيين تباعا:

24) أبين أن لجذرى المعادلة المقياس نفسه.

$\Delta = 4 - 40 = -36$

مميز المعادلة التربيعية سالب ، إذن لهذه المعادلة جذران مركبان مترافقان ، وحسب النظرية فإن العددان المركبان المترافقان لهما المقياس نفسه

25) أجد سعة كل جذر من جذري المعادلة.

$$z_1 = \frac{-2+\sqrt{-36}}{2} = -1+3i \Rightarrow Arg(z_1) = \pi - tan^{-1}3 \approx 1.89$$

$$z_2 = \frac{-2-\sqrt{-36}}{2} = -1-3i \Rightarrow Arg(z_2) = -(\pi - tan^{-1}3) \approx -1.89$$

26) يحقق العددان المركبان u v المعادلة: $u + 2v = 2i$ والمعادلة: $iu + v = 3$ أحل المعادلتين لإيجاد العدد u والعدد v.

$u + 2v = 2i \dots\dots\dots\dots\dots(1)$

$iu + v = 3 \dots\dots\dots\dots\dots\dots(2)$

$$i \times (2) + (1): v(2+i) = 5i \Rightarrow v = \frac{5i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{10i+5}{4+1} = 1+2i$$

$$\Rightarrow u = 2i - 2(1+2i) = -2-2i$$

27) أمثل في المستوي المركب المحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينة:

$\frac{\pi}{2} \le Arg\ z \le \frac{2\pi}{3}$، والمتباينة $|z - 2i| \le 2$

المتباينة الأولى تمثلها المنطقة بين الشعاعين المنطلقين من نقطة الأصل يصنع أحدهما زاوية قياسها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور الحقيقي الموجب، ويصنع الآخر زاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ مع المحور الحقيقي الموجب.

والمتباينة الثانية تمثلها النقاط الواقعة على دائرة مركزها النقطة (0,2) وطول نصف قطرها وحدتان مع النقاط الواقعة داخل الدائرة فالمحل الهندسي للنقاط التي تحقق المتباينتين هو الجزء المظلل في الرسم المجاور.