## كتاب الطالب

## الدرس الأول – المُعدّلات المرتبطة

**مثال 1:**

عند سقوط قطرة ماء على مُسطح مائي، تتكون موجات دائرية مُتحدة المركز.

إذا كان نصف قطر إحدى الدوائر يزداد بمُعدل 3 cm/ s، فأجد كُلا مما يأتي:

1) مُعدل تغير محيط الدائرة عندما يكون نصف قطرها 5 cm.

**الخطوة 1:** أكتب معادلة، مُحددًا المعطيات والمطلوب.

**المعادلة:** أفترض أن r هو نصف قطر الدائرة، وأن C هو محيطها. ومن ثم، يُمكن الربط بين المُتغيرين باستعمال المعادلة الآتية:

$$C = 2\pi r$$

**معدل التغير المعطى:** $\frac{dr}{dt} = 3$

**المطلوب:** $\frac{dc}{dt}|_{r=5}$

**الخطوة 2:** أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، ثم أعوض.

**المعادلة:** $C = 2\pi r$

بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t: $\frac{d}{dt}(C) = \frac{d}{dt}(2\pi r)$

قاعدة السلسلة: $\frac{dC}{dt} = 2\pi \times \frac{dr}{dt}$

بتعويض $\frac{dr}{dt} = 3$: $= 2\pi(3)$

بالتبسيط: $= 6\pi$

إذن يزداد محيط الدائرة بمعدل $6\pi$ cm/s عندما يكون نصف قطرها 5 cm.

**2) معدل تغير مساحة الدائرة عندما يكون نصف قطرها 9cm**

**الخطوة 1:** أكتب معادلة، محددا المعطيات والمطلوب.

**المعادلة:** أفترض أن A هو مساحة الدائرة. ومن ثم، يُمكن الربط بين A و r باستعمال المعادلة الآتية:

$$A = \pi r^2$$

**معدل التغير المعطى:** $\frac{dr}{dt} = 3$

**المطلوب:** $\frac{dA}{dt}|_{r=9}$

**الخطوة 2:** أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، ثم أعوض.

**المعادلة:** $A = \pi r^2$

بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t: $\frac{d}{dt}(A) = \frac{d}{dt}(\pi r^2)$

قاعدة السلسلة: $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \times \frac{dr}{dt}$

بتعويض $\frac{dr}{dt} = 3$ ، $r = 9$: $\frac{dA}{dt}|_{r=9} = 2\pi(9)(3)$

بالتبسيط: $= 54\pi$

إذن يزداد مساحة الدائرة بمعدل $54\pi$ cm/s عندما يكون نصف قطرها 9 cm.

**أتحقق من فهمي**

**تنفخ ماجدة بالونا على شكل كرة، فيزداد حجمه بمعدل $80\ cm^3/s$. أجد مُعدل زيادة نصف قطر البالون عندما يكون نصف القطر 6 cm.**

ليكن حجم الكرة V وطول نصف قطرها r

معدل التغير المعطى: $\frac{dV}{dt} = 80\ cm^3/s$

معدل التغير المطلوب: $\frac{dr}{dt}|_{r=6}$

حجم البالون الكروي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt}|_{r=6} = 4\pi(6)^2 \frac{dr}{dt}|_{r=6}$$

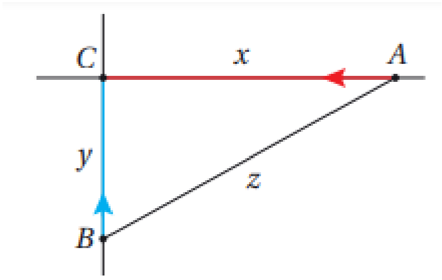
$$80 = 144\pi \frac{dr}{dt}|_{r=6}$$

$$\frac{dr}{dt}|_{r=6} = \frac{80}{144\pi}$$

$$= \frac{5}{9\pi}\ cm/s$$

**مثال 2:**

**تتحرك السيارة A في اتجاه الغرب بسرعة 80 km/h، وتتحرك السيارة B في اتجاه الشمال بسرعة 100 km/h، وهما تتجهان نحو تقاطع مروري. أجد مُعدل تغير البُعد بين السيارتين عندما تكون السيارة A والسيارة B على بُعد 0.3 km و 0.4 km (على الترتيب) من التقاطع.**



**الخطوة 1: أرسم مُخططا، ثم أكتب معادلة، مُحددًا المطلوب.**

**أرسم المُخطط، محددا عليه المعطيات الواردة في المسألة، ثم أسمّي نقطة التقاطع المروري C.**

**المعادلة: أفترض أن $x$ هو المسافة بين A و C وأن y هو المسافة بين B و C، وأن z هو المسافة بين A و B ومن ثم، يمكن الاستعانة بنظرية فيثاغورس للربط بين x و y و z باستعمال المعادلة الآتية:** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

**معدل التغير المعطى:** $\frac{dx}{dt} = -80, \frac{dy}{dt} = -100$

**المطلوب:** $\frac{dz}{dt}\Big|_{\substack{x=-.3 \\ y=0.4}}$

**الخطوة 2: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، ثم أعوض.**

**المعادلة:**

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

**بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t**

$$\frac{d}{dt}(z) = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

**قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني**

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

**بتعويض** $\frac{dx}{dt} = -80, x = 0.3$

$$= \frac{2(0.3)(-80) + 2(0.4)(-100)}{2\sqrt{(0.3)^2 + (0.4)^2}}$$

**بالتبسيط**

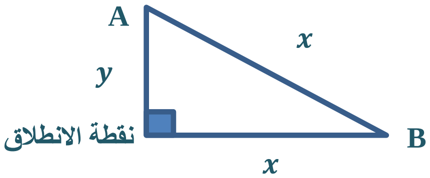
$$= -128$$

**إذن، تقترب السيارتان إحداهما من الأخرى بمُعدل 128 km/h عندما تكون السيارة A والسيارة B على بُعد 0.3 km و 0.4 km (على الترتيب) من التقاطع.**

## أتحقق من فهمي

**تحركت السيارة A والسيارة B في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، بحيث اتجهت السيارة A نحو الشمال بسرعة 45 km/h، واتجهت السيارة B نحو الشرق بسرعة 40 km/h. أجد مُعدل تغير البُعد بين السيارتين بعد ساعتين من انطلاقهما.**

**ليكن بعد A عن نقطة الانطلاق يساوي y، وبعد B عن نقطة الانطلاق يساوي x، والبعد بين A، و B يساوي z**



**معدلات التغير المعطاة:** $\frac{dx}{dt} = 40\text{km/h}, \frac{dy}{dt} = 45\text{ km/h}$

**معدل التغير المطلوب:** $\frac{dz}{dt}|_{t=2}$

**بعد ساعتين من الحركة يكون:**

$$x = 40 \times 2 = 80\text{ km}, y = 45 \times 2 = 90\text{ km}$$

**من نظرية فيثاغورس:**

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{dz}{dt}|_{t=2} = \frac{80 \times 40 + 90 \times 45}{\sqrt{4600 + 8100}}$$

$$= \frac{7250}{10\sqrt{145}} = \frac{725}{\sqrt{145}} \approx 60.21\text{ km/h}$$

## الحل بطريقة ثانية:

**بعد t ساعة من الحركة يكون:**

$$x = 40\,t\text{ km}, y = 45t\text{ km}$$

**من نظرية فيثاغورس:**

$$z^2 = x^2 + y^2$$

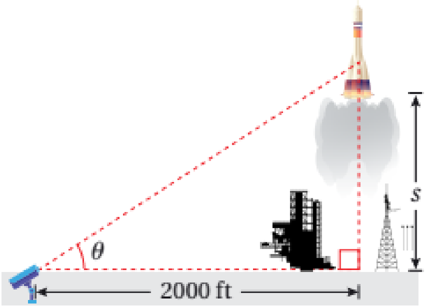
$$z = \sqrt{(40t)^2 + (45t)^2} = \sqrt{3625}t$$

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{3625} \approx 60.21$$

$$\frac{dz}{dt}|_{t=2} = 60.21\text{ km/h}$$

**مثال 3: من الحياة**

**رصدت كاميرا مُثبتة عند مستوى سطح الأرض لحظة إطلاق صاروخ رأسياً إلى الأعلى، وقد أُعطي ارتفاعه بالاقتران: $s(t) = 50t^2$، حيث s الموقع بالأقدام، و t الزمن بالثواني. إذا كانت الكاميرا تبعد مسافة $2000\ ft$ عن منصة الإطلاق، فأجد مُعدل تغير زاوية ارتفاع الصاروخ بعد 10 ثوانٍ من انطلاقه.**



**الخطوة 1: ارسم مُخططاً، ثم اكتب معادلة، ثم أحدد المطلوب.**

**ارسم المُخطط، ثم أحدد عليه المعطيات الواردة في المسألة.**

**المعادلة: افترض أن $\theta$ هي زاوية ارتفاع الصاروخ،**

**وأن s موقع الصاروخ. ومن ثمَّ،**

**يُمكن الربط بين s و $\theta$ باستعمال المعادلة الآتية:**

$$\tan\theta = \frac{s}{2000}$$

**مُعدل التغير المعطى: بما أن موقع الصاروخ هو $s(t) = 50t^2$، فإن سرعته هي $v(t) = \frac{ds}{dt} = 100\ t$**

**المطلوب: $\frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=10}$**

**الخطوة 2: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، ثم أعوض.**

**المعادلة**

$$\tan\theta = \frac{s}{2000}$$

**بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t**

$$\frac{d}{dt}(\tan\theta) = \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{2000}\right)$$

**قاعدة السلسلة**

$$\sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2000} \times \frac{ds}{dt}$$

**بحل المعادلة لـ $\frac{d\theta}{dt}$**

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2\theta}{2000} \times \frac{ds}{dt}$$

**لإيجاد $\cos^2\theta$، استعمل النسب المثلثية:**

**جيب تمام الزاوية**

$$\cos\theta = \frac{2000}{\sqrt{s^2+(2000)^2}}$$

**بتعويض $s = 50t^2$**

$$\cos\theta = \frac{2000}{\sqrt{(50t^2)^2+(2000)^2}}$$

**بتعويض $t = 10$**

$$= \frac{2000}{\sqrt{(50(10)^2)^2+(2000)^2}}$$

**بالتبسيط**

$$= \frac{2}{\sqrt{29}}$$

إذن، $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{29}}$ بعد 10 ثوانٍ من انطلاق الصاروخ.

المعادلة الناتجة من الاشتقاق

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos^2\theta}{2000} \times \frac{ds}{dt}$$

بتعويض $\cos^2\theta = \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{ds}{dt}$

$$= \frac{(\frac{2}{\sqrt{29}})^2}{2000} \times 100t$$

بتعويض $t = 10$

$$= \frac{(\frac{2}{\sqrt{29}})^2}{2000} \times 100(10)$$

بالتبسيط

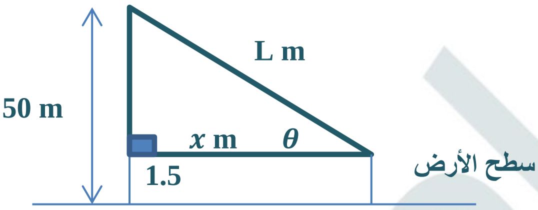
$$= \frac{2}{29}$$

إذن، مُعدل تغير زاوية ارتفاع الصاروخ عندما $t = 10$ هو: $\frac{2}{29}$ rad/s

**أتحقق من فهمي**

أمسك ولد ببكرة خيط طائرة ورقية تُحلق على ارتفاع 50 m فوق سطح الأرض، وتتحرك أفقياً بسرعة 2 m/s. أجد مُعدل تغير الزاوية بين الخيط والمستوى الأفقي عندما يكون طول الخيط 100 m، علماً بأن ارتفاع يد الولد عن الأرض 1.5 m

ليكن طول الخيط L وقياس الزاوية بين الخيط والأفقي $\theta$، وبعد الطائرة أفقياً هو $x$.



**المعطى:**

$$\frac{dx}{dt} = 2 \text{ m/s}$$

**المطلوب:**

$$\frac{d\theta}{dt}\Big|_{L=100}$$

$$\tan\theta = \frac{50 - 1.5}{x} = \frac{48.5}{x}$$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5 \frac{dx}{dt}}{x^2}$$

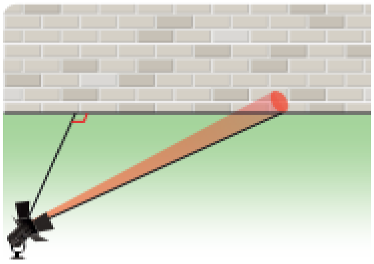
$$\frac{L^2}{x^2} \times \frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5 \frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{48.5\,(\frac{dx}{dt})}{x^2} \times \frac{x^2}{L^2} = \frac{48.5\,(\frac{dx}{dt})}{L^2}$$

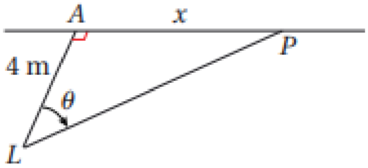
$$\frac{d\theta}{dt}\Big|_{L=100} = -\frac{48.5\,(2)}{(100)^2} \approx -0.0097 \text{ rad/s}$$

**مثال 4:**

**يدور مصباح مُثبت بالأرض حول نفسه 3 دورات في الدقيقة، ويبعد مسافة 4m عن جدار مستقيم كما في الشكل المجاور. أجد سرعة تحرك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بُعد 8 m من أقرب نقطة إلى المصباح على الجدار أثناء حركتها مُبتعدة عن هذه النقطة.**



**الخطوة 1:** ارسم مُخططا، ثم اكتب معادلة، مُحددا المطلوب.



أرسم المخطط، ثم أُحدد عليه موقع المصباح L،

وموقع بقعة الضوء P، وهي أقرب نقطة إلى المصباح على الجدار،

وهي النقطة A التي تبعد عنه مسافة 4 m

**المعادلة:** أفترض أن بقعة الضوء P تبعد مسافة $x$ عن A،

وأن $\theta$ هي الزاوية $ALP$.

ومن ثم، يُمكن الربط بين $x$ و $\theta$ باستعمال المعادلة الآتية: $x = 4\tan\theta$

**معدل التغير المعطى:** مُعدل تغير الزاوية $\theta$ بالنسبة إلى الزمن، وهو يُمثل السرعة الزاوية.

أستعمل معطيات السؤال لإيجاد السرعة الزاوية كالآتي:

قياس الدورة الكاملة $2\pi$، وهذا يعني أن كل 3 دورات تُقابل زاوية الدوران التي قياسها $3 \times 2\pi$ أو $6\pi$ راديان:

السرعة الزاوية
$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{\theta}{t}$$

بتعويض $\theta = 6\pi, t = 1\text{ min}$
$$= \frac{6\pi}{1\text{ min}}$$

إذن، السرعة الزاوية لبقعة الضوء: $\frac{d\theta}{dt} = 6\pi\text{ rad/min}$، وهي تُمثل مُعدل التغير المعطى.

**المطلوب:** $\frac{dx}{dt}\Big|_{x=8}$

**الخطوة 2:** أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى $t$، ثم أُعوض.

المعادلة:
$$x = 4\tan\theta$$

بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى $t$
$$\frac{d}{dt}(x) = \frac{d}{dt}(4\tan\theta)$$

قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني
$$\frac{dx}{dt} = 4\sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dt}$$

أستعمل متطابقات فيثاغورس لإيجاد $sec^2\theta$ عندما $x = 8$:

المعادلة الأصلية: $x = 4\,tan\,\theta$

بتعويض $x = 8$: $8 = tan\,\theta$

بحل المعادلة لـ $tan\,\theta$: $tan\,\theta = 2$

متطابقات فيثاغورس: $sec^2\theta = 1 + tan^2\theta$

بتعويض $tan\,\theta = 2$: $= 1 + 2^2$

بالتبسيط: $= 5$

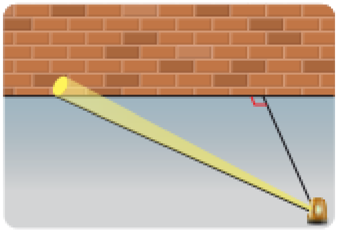
إذن، $sec^2\theta = 5$ عندما $x = 8$.

المعادلة الناتجة من الاشتقاق: $\frac{dx}{dt} = 4sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dt}$

بتعويض $\frac{d\theta}{dt} = 6\pi$، $sec^2\theta = 5$: $\frac{dx}{dt}|_{x=8} = 4(5) \times 6\pi$

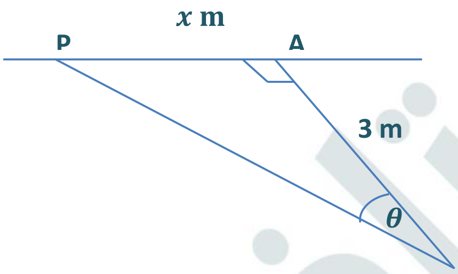
بالتبسيط: $= 120\,\pi$

إذن، تتحرك بقعة الضوء بسرعة $120\pi$ m/min عندما تكون على بُعد 8 m عن النقطة $A$ أثناء حركتها مُبتعدة عن هذه النقطة.



**أتحقق من فهمي**

**يدور مصباح مُثبت بالأرض حول نفسه 4 مرات في الدقيقة، ويبعد مسافة 3m عن جدار مستقيم كما في الشكل المجاور. أجد سرعة تحرك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بُعد 1m من أقرب نقطة إلى المصباح على الجدار أثناء حركتها مُقتربة من هذه النقطة.**



لتكن الأبعاد والقياسات كما في الشكل أعلاه

**المعطى:** $$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 4(2\pi) = -8\pi \text{ rad/min}$$

**المطلوب:** $$\frac{dx}{dt}|_{x=1}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 3\tan\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 3\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

نجد قيمة $\sec^2\theta$ عندما $x = 1$

$$x = 3\tan\theta \Rightarrow 1 = 3\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{3}$$

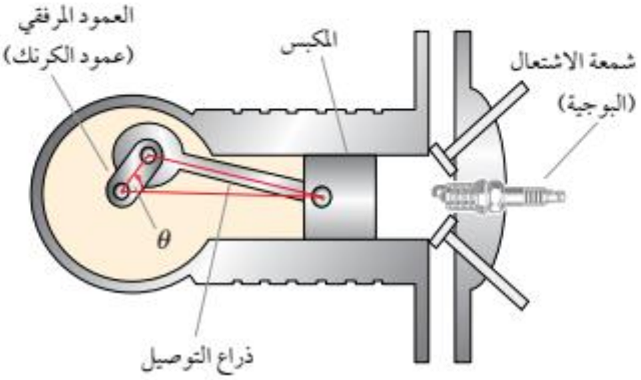
$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

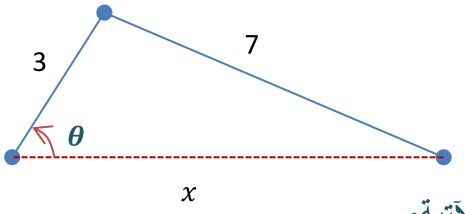
$$\frac{dx}{dt}|_{x=1} = 3\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = 3 \times \frac{10}{9} \times -8\pi = -\frac{80\,\pi}{3}$$

سرعة بقعة ضوء المصباح على الجدار هي $-\frac{80\,\pi}{3}$ m/min عندما تبعد 1m عن A، أثناء حركتها مقتربة من النقطة A

**مثال 5:**

**يُبين الشكل الآتي مُحرك سيارة يحتوي على ذراع توصيل طولها 7 in، وهي مُثبتة بعمود مرفقي طولة 3 in. إذا دار العمود المرفقي عكس اتجاه دوران عقارب الساعة 200 دورة في الدقيقة، فما سرعة المكبس عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$؟**





**الخطوة 1: أرسم مُخططا، ثم اكتب معادلة، ثم أُحدد المطلوب.**

**أرسم مثلثاً، ثم أُحدد عليه المعطيات الواردة في المسألة.**

**المعادلة: أفترض أن $x$ هو المسافة بين المكبس ورأس العمود المرفقي.**

**ومن ثم، يُمكن الاستعانة بقانون جيوب التمام للربط بين $x$ و $\theta$ باستعمال المعادلة الآتية:**

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 6(x)\cos\theta$$

**معدل التغير المعطى: بما أن معدل تغير الزاوية $\theta$ بالنسبة إلى الزمن يُمثل السرعة الزاوية، فإنه يمكن إيجاد السرعة الزاوية من معطيات السؤال كالآتي:**

**قياس الدورة الكاملة $2\pi$، وهذا يعني أن كل 200 دورة تُقابل زاوية الدوران التي قياسها $200 \times 2\pi$ أو $400\pi$راديان:**

**السرعة الزاوية** $\frac{d\theta}{dt} = w = \frac{\theta}{t}$

**بتعويض $\theta = 6\pi, t = 1\,min$** $= \frac{400\,\pi}{1\,min}$

**إذن، مُعدل التغير المعطى هو: $\frac{d\theta}{dt} = 400\pi\ \text{rad/ min}$**

**المطلوب: $\frac{dx}{dt}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{3}}$**

**الخطوة 2: أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى t، ثم أُعوض.**

**المعادلة** $$49 = 9 + x^2 - 6x\cos\theta$$

**بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t** $$\frac{d}{dt}(49) = \frac{d}{dt}(9 + x^2 - 6x\cos\theta)$$

**قاعدة السلسلة، وقاعدة مشتقة الضرب** $$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 6x\sin\theta\frac{d\theta}{dt} - 6\cos\theta\frac{dx}{dt}$$

**بإعادة ترتيب المعادلة، وإخراج $\frac{dx}{dt}$ عاملاً مشتركاً** $$(6\cos\theta - 2x)\frac{dx}{dt} = 6x\sin\ \theta\ \frac{d\theta}{dt}$$

**بحل المعادلة لـ $\frac{dx}{dt}$** $$\frac{dx}{dt} = \frac{6x\sin\theta\,(\frac{d\theta}{dt})}{6\cos\theta - 2x}$$

أُعوض $\theta = \frac{\pi}{3}$ في المعادلة الأصلية لإيجاد قيمة $x$:

| | |
|---|---|
| المعادلة | $49 = 9 + x^2 - 6x\cos\theta$ |
| بتعويض $\theta = \frac{\pi}{3}$ | $49 = 9 + x^2 - 6x\cos\frac{\pi}{3}$ |
| بالتبسيط | $49 = 9 + x^2 - 6x(\frac{1}{2})$ |
| بإعادة ترتيب المعادلة | $x^2 - 3x - 40 = 0$ |
| بتحليل العبارة التربيعية | $(x - 8)(x + 5) = 0$ |
| خاصية الضرب الصفري | $x - 8 = 0 \quad or \quad x + 5 = 0$ |
| بحل كل معادلة لـ $x$ | $x = 8 \quad or \quad x = -5$ |

بما أن $x$ يُعبر عن مسافة، فإنني أختار الحل الموجب، وهو $x = 8$:

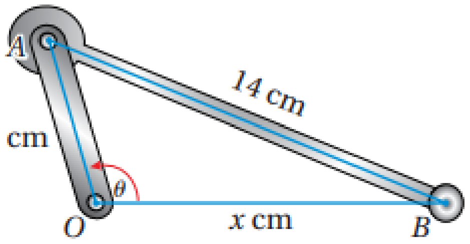
| | |
|---|---|
| المعادلة الناتجة من الاشتقاق | $\frac{dx}{dt} = \frac{6x\sin\theta\,(\frac{d\theta}{dt})}{6\cos\theta - 2x}$ |
| بتعويض $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{d\theta}{dt} = 400\pi, x = 8$ | $\frac{dx}{dt}\Big\|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = \frac{6(8)\sin\frac{\pi}{3}(400\pi)}{6\cos\frac{\pi}{3} - 2(8)}$ |
| بالتبسيط | $= \frac{9600\,\pi\sqrt{3}}{-13}$ |
| باستعمال الآلة الحاسبة | |

إذن، سرعة المكبس عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$ هي: 4018 in/ min في اتجاه اليسار.

### أتحقق من فهمي

**في المُخطط الآتي، تُمثل $\overline{AB}$ ذراع توصيل مكبس طولها 14 cm في مُحرك سيارة، وتُمثل $\overline{OA}$ عموداً مرفقياً طولة 5 cm، وهو مُثبت بطرف ذراع التوصيل، ويدور حول النقطة $O$ التي تبعد مسافة $x$ cm عن المكبس.**

**أجد سرعة دوران العمود المرفقي عندما يكون المكبس على بُعد 11 cm من النقطة $O$، ويتحرك مُقتربًا منها بسرعة مقدارها 120 cm/s في تلك اللحظة.**



معدل التغير المعلوم: $\frac{dx}{dt} = -120 \text{ cm/s}$

معدل التغير المطلوب: $\frac{d\theta}{dt}$ عندما $x = 11\ cm$

المعادلة التي تربط $x$ مع $\theta$ هي: $14^2 = x^2 + 5^2 - 2(5x)\cos\theta$

باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن $t$:

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} - 10\frac{dx}{dt}\cos\theta + 10x\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$(10\cos\theta - 2x)\frac{dx}{dt} = 10x\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(10\cos\theta - 2x)\frac{dx}{dt}}{10x\sin\theta}$$

نجد قيمة $\cos\theta$، و $\sin\theta$:

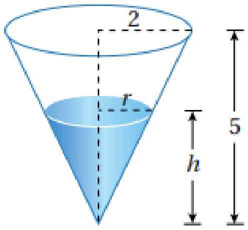
$$\cos\theta = \frac{11^2 + 5^2 - 14^2}{110} = \frac{-5}{11}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - (\frac{-5}{11})^2} = \frac{\sqrt{96}}{11}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(10\left(\frac{-5}{11}\right) - 2(11))(-120)}{10(11)(\frac{\sqrt{96}}{11})}$$

إذن، يدور العمود المرفقي بسرعة 21.4 rad/s تقريباً.

**مثال 6:**



خزان ماء على شكل مخروط دائري قائم، ارتفاعه 5 m، ونصف قطر قاعدته 2 m، ورأسه إلى الأسفل. تسرب الماء من الخزان بمُعدل $\frac{1}{12}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ ، ما مُعدل تغير ارتفاع الماء في الخزان عندما يكون ارتفاعه 4 m؟

**الخطوة 1:** أرسم مخططا، ثم أكتب معادلة، مُحددا المطلوب.

ارسم المخطط، ثم أُحدد عليه المعطيات الواردة في المسألة.

**المعادلة:** أفترض أن $r$ هو نصف قُطر سطح الماء في الخزان، و $h$ ارتفاع الماء في الخزان، و $V$ حجم الماء في الخزان. ومن ثم يُمكن الربط بين $r$ و $h$ و $V$ باستعمال المعادلة الآتية: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

**معدل التغير المعطى:** $\frac{dV}{dt}=-\frac{1}{12}$

**المطلوب:** $\frac{dh}{dt}\Big|_{h=4}$

**الخطوة 2:** أكتب المعادلة بدلالة مُتغير واحد.

يُمكنني كتابة $V$ بدلالة المُتغير الذي أُريد إيجاد مُعدل تغير، وهو $h$، باستعمال تشابه المثلثات:

$$\frac{r}{h}=\frac{2}{5}\rightarrow r=\frac{2h}{5}$$

وبذلك، يُمكن كتابة المعادلة على النحو الآتي:

$$V=\frac{1}{3}\pi(\frac{2h}{5})^2 h=\frac{4\pi}{75}h^3$$

**الخطوة 3:** أشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى $t$، ثم أعوض.

المعادلة

$$V=\frac{4\pi}{75}h^3$$

بإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى $t$

$$\frac{d}{dt}(V)=\frac{d}{dt}(\frac{4\pi}{75}h^3)$$

قاعدة السلسلة، والاشتقاق الضمني

$$\frac{dV}{dt}=\frac{4\pi}{75}\times 3h^2\times\frac{dh}{dt}$$

بتعويض $\frac{dV}{dt}=-\frac{1}{12}, h=4$

$$-\frac{1}{12}=\frac{4\pi}{75}\times 3(4)^2\times\frac{dh}{dt}$$

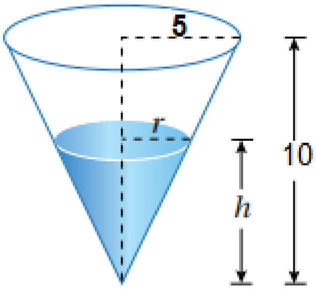
بحل المعادلة لـ $\frac{dh}{dt}$

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{25}{768\pi}$$

إذن، يتناقص ارتفاع الماء في الخزان بمُعدل $\frac{25}{768\,\pi}\,\mathrm{m/min}$ عندما يكون ارتفاع الماء 4 m.

أتحقق من فهمي

**خزان ماء على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى الأسفل، وارتفاعه 10m، ونصف قطر قاعدته 5m. صب الماء في الخزان بمعدل $\pi\ m^3 / min$. ما معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان عندما يكون ارتفاعه 8 m؟**



ليكن حجم الماء في الخزان V ونصف قطر قاعدته r وارتفاعه h

المعطى: $\frac{dV}{dt} = \pi m^3/min$

المطلوب: $\frac{dh}{dt}|_{h=8}$

من التشابه: $\frac{r}{h} = \frac{5}{10} \to r = \frac{1}{2}h$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}h)^2 h$$

$$V = \frac{\pi}{12}h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\pi = \frac{\pi}{4}(8)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt}|_{h=8} = \frac{1}{16}\text{m/min}$$

إذن، يزداد ارتفاع الماء في الخزان بمعدل $\frac{1}{16}$ m/min عندما يكون ارتفاعه 8 m

## أتدرب وأحل المسائل:

**يزداد طول أحد أضلاع مستطيل بمُعدل 2 cm/s، ويقل طول ضلعه الآخر بمُعدل 3 cm/s، بحيث يحافظ المستطيل على شكله، وفي لحظة مُعينة بلغ طول الضلع الأول 20 cm، وطول الضلع الثاني 50 cm:**

**1) ما معدل تغير مساحة المستطيل في تلك اللحظة؟**

ليكن طول المستطيل $x$ وعرضة $y$ ومساحته $A$ ومحيطه $P$ وطول قطره $R$

المعطى: $\frac{dy}{dt} = -3cm/s, \frac{dx}{dt} = 2\ cm/s$

المطلوب $\frac{dA}{dt}|_{x=20,y=50}$

$$A = xy \ \Rightarrow \frac{dA}{dt} = x\ \frac{dy}{dt} + y\ \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt}|_{x=20,y=50} \ = 20(-3) + 50(2) = 40\ cm^2/s$$

**2) ما معدل تغير محيط المستطيل في تلك اللحظة؟**

$$P\ = 2x + 2y\ \Rightarrow \frac{dP}{dt} = 2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dt}|_{x=20,y=50} \ = 2(2) + 2(-3) = -2\ cm/s$$

**3) ما معدل تغير طول قطر المستطيل في تلك اللحظة؟**

$$R^2 = x^2 + y^2$$

$$2R\frac{dR}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\sqrt{(20)^2 + (50)^2}\frac{dR}{dt}|_{x=20,y=50} = 20(2) + 50(-3)$$

$$\frac{dR}{dt}|_{x=20,y=50} = -\frac{110}{10\sqrt{29}} = -\frac{11}{\sqrt{29}}cm/s$$

**4) أي الكميات في المسألة مُتزايدة؟ أيها مُتناقصة؟ أُبرر إجابتي.**

في اللحظة المذكورة تكون المساحة متزايدة (لأن معدل تغيرها موجب)، بينما يتناقص كل من المحيط وطول القطر (لأن معدل تغير كل منهما سالب).

**مكعب طول ضلعه 10 cm . بدأ المكعب يتمدد، فزاد طول ضلعه بمُعدل 6 cm/s، وظل مُحافِظًا على شكله:**

**5) أجد مُعدل تغير حجم المُكعب بعد 4s من بدء تمدده.**

ليكن حجم المكعب $V$ وطول ضلعه (حرفه) $x$

المعطى $\frac{dx}{dt} = 6\ cm/s$

المطلوب: $\frac{dV}{dt}|_{t=4}$

بعد مرور t ثانية يصبح طول ضلع المكعب: $x = 10 + 6t$

ويكون حجمه: $V = x^3 = (10 + 6t)^3$

$$\frac{dV}{dt} = 3(10 + 6t)^2 \times 6$$

$$\frac{dV}{dt}|_{t=4} = 3(34)^2(6) = 20808\ cm^3/s$$

**6) أجد معدل تغير مساحة سطح المكعب بعد 6s من بدء تمدده.**

لتكن مساحة سطح المكعب $A$

بعد مرور $t$ ثانية تصبح مساحة سطح المكعب: $A = 6x^2 = 6(10 + 6t)^2$

$$\frac{dA}{dt} = 12(10 + 6t) \times 6$$

$$\frac{dA}{dt}|_{t=6} = 12(46)(6) = 3312 cm^2/s$$

**وقود: خزان أسطواني الشكل، ارتفاعه 15m، وقطر قاعدته 2m. مُلئ الخزان بالوقود بمعدل 500L/min:**

**7) أجد مُعدل ارتفاع الوقود في الخزان عند أي لحظة.**

ليكن ارتفاع الوقود في الخزان h، سيكون طول نصف قطر قاعدته 1m، ويكون حجمه:

$$V = \pi r^2 h = \pi h$$

المعطى: $\frac{dV}{dt} = 500L/min = 0.5\ m^3/min$

المطلوب: $\frac{dh}{dt}$

العلاقة التي تربط الحجم بالارتفاع: $V = \pi h$

$$\frac{dV}{dt} = \pi \frac{dh}{dt}$$

$$0.5 = \pi \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2\pi} m/min$$

8) أجد معدل تغير المساحة الجانبية للوقود عند أي لحظة.

$$A = 2\pi rh = 2\pi h$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \frac{dh}{dt}$$

$$= 2\pi \times \frac{1}{2\pi} = 1\ m^2/min$$

9) علوم: يُمثل الاقتران: $T(x) = \frac{200}{1+x^2}$ درجة الحرارة (بالسليسيوس) التي يشعر بها شخص على بُعد $x$ مترا من النار. أذا كان الشخص يبتعد عن النار بمُعدل 2m/s، فأجد سرعة تغير درجة الحرارة التي يشعر بها الشخص عندما يكون على بُعد 5m من النار.

المعطى: $\frac{dx}{dt} = 2\ m/s$

المطلوب: $\frac{dT}{dt}|_{x=5}$

$$T(x) = \frac{200}{1+x^2}$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{400x\frac{dx}{dt}}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{dT}{dt}|_{x=5} = -\frac{400(5)(2)}{(1+(5)^2)^2} = -5.9\ °C/s$$

أي أن درجة الحرارة التي يشعر بها ستقل بمعدل $6\ °C/s$ تقريبا عندما يكون على بعد 5 أمتار من مصدر النار.

آلات: يسقط الرمل من حزام ناقل بمعدل $10\ m^3/min$ على قمة كومة مخروطية الشكل. إذا كان ارتفاع الكومة يساوي دائنا ثلاثة أثمان طول قطر قاعدتها، فأجد كُلا مما يأتي:

**10) سرعة تغير ارتفاع الكومة عندما يكون ارتفاعها 4m.**

ليكن حجم كومة الرمل $V$، وارتفاعها $h$، وطول نصف قطر قاعدتها $r$

المعطى: $h = \frac{3}{8}(2r)$ , $\frac{dV}{dt} = 10m^3/min$

المطلوب: $\frac{dh}{dt}|_{h=4}$

$$h = \frac{3}{8}(2r) \Rightarrow r = \frac{4}{3}h$$

$$V = \frac{1}{3}\ \pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\frac{4}{3}h)^2 h$$

$$V = \frac{16}{27}\pi h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{16}{9}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$10 = \frac{16}{9}\pi(4)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt}|_{h=4} = \frac{45}{128\pi} m/min$$

إذن يزداد ارتفاع الكومة المخروطية عند تلك اللحظة بمعدل 0.112 مترا لكل ثانية تقريبا.

**11) سرعة تغير طول نصف قطر قاعدة الكومة عندما يكون ارتفاعها 4m.**

$$r = \frac{4}{3}h$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{4}{3}\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt}|_{h=4} = \frac{4}{3}\frac{dh}{dt}|_{h=4} = \frac{4}{3} \times \frac{45}{128\pi} = \frac{15}{32\pi}\ m/min$$

إذن يزداد نصف القطر عند تلك اللحظة بمعدل 0.149 مترا لكل ثانية تقريباً.

**12) سرعة تغير مساحة قاعدة الكومة عندما يكون ارتفاعها 4 m**

**لتكن A مساحة قاعدة الكومة، وطول نصف قطرها r**

المطلوب: $\frac{dA}{dh}|_{h=4}$

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

لكن $\frac{dr}{dt}|_{h=4} = \frac{15}{32\pi}$ من سؤال 11، لكن $h = \frac{3}{8}(2r)$، فعندما يكون الارتفاع 4m يكون:

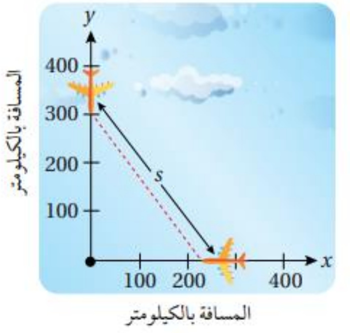
$$4 = \frac{3}{8}(2r) \Rightarrow r = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt}|_{h=4} = 2\pi \times \frac{16}{3} \times \frac{15}{32\pi} = 5\ m^2/min$$

إذن، تزداد مساحة قاعدة الكومة بمعدل $5\ m^2/min$ عندما يكون ارتفاعها 4 أمتار.

**<u>طيران</u>: رصد مُراقب الحركة الجوية في أحد المطارات طائرتين تُحلقان على الارتفاع نفسه، وتقتربان من نقطة مسار حركتيهما في زاوية قائمة كما في الشكل المجاور. كانت الطائرة الأولى تسير بسرعة 450 km/h، في حين كانت الطائرة الثانية تسير بسرعة 600 km/h:**

**13) أجد مُعدل تغير المسافة بين الطائرتين في اللحظة التي تبعد فيها الطائرة الأولى مسافة 225km عن نقطة التقاء مسار حركة الطائرتين، في حين تبعد الطائرة الثانية 450 km عن النقطة نفسها.**



ليكن بعد الطائرة الأولى عن نقطة التقاء المسارين في لحظة ما هو $x$.

وبعد الطائرة الثانية عن نقطة التقاء المسارين في تلك اللحظة هو $y$، والبعد بين الطائرتين هو s.

المعطى: $\frac{dy}{dt} = -600\ km/h$ $\qquad$ $\frac{dx}{dt} = -450 \frac{km}{h}$

المطلوب: $\frac{ds}{dt}|_{x=225,y=450}$

$$s^2 = x^2 + y^2$$

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{s} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{ds}{dt}|_{x=225,y=450} = \frac{225(-450) + 450(-600)}{\sqrt{(225)^2 + (450)^2}} \approx -737.9\ km/h$$

إذن في تلك اللحظة تقل المسافة بين الطائرتين بمعدل 738 كيلو مترا تقريبا في الساعة.

**14) هل يجب على مراقب الحركة الجوية توجيه إحدى الطائرتين لاتخاذ مسار مختلف؟ أبرر إجابتي.**

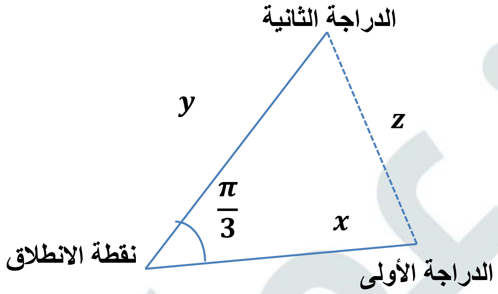
نحسب الوقت الذي تحتاجه كل من الطائرتين للوصول لنقطة التقاء المسارين:

$$t_1 = \frac{x}{v_x} = \frac{225}{450} = 0.5\ h$$

$$t_2 = \frac{x}{v_y} = \frac{450}{600} = 0.75\ h$$

لن تصل الطائرتان لنقطة التقاء المسارين في وقت واحد بعد رصدهما من قبل المراقب الجوي، فإن اصطدامهما غير متوقع، ولا يجب على مراقب الحركة الجوية اتخاذ أي إجراء بخصوص الطائرتين.

**15) دراجات نارية: تحركت دراجتان في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، على طريقين مستقيمين، قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}\ rad$. إذا كانت سرعة الدراجة الأولى 15 km/h، وسرعة الدراجة الثانية 20 km/h فأجد سرعة ابتعاد كل منهما عن الأُخرى بعد ساعتين من انطلاقهما.**



المعطى: $\frac{dy}{dt} = 20\ km/h$ $\frac{dx}{dt} = 15km/h$

المطلوب: $\frac{dz}{dt}|_{t=2}$

بعد t ساعة من انطلاقها يكون: $x = 15t, y = 20t$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$z = \sqrt{(15t)^2 + (20t)^2 - 2(15t)(20t)(\frac{1}{2})} = 5\sqrt{13}t$$

$$\frac{dz}{dt} = 5\sqrt{13}$$

$$\frac{dz}{dt}|_{t=2} = 5\sqrt{13}\ km/h$$

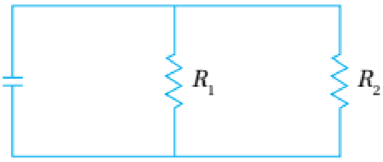
إذن بعد ساعتين من انطلاقهما تتباعد الدراجتان كل منهما عن الأخرى بسرعة $5\sqrt{13}$كيلو متر كل ساعة

**16) كهرباء: تعطى المقاومة المكافئة R بالأوم (Ω) للمقاوتين $R_1$ و $R_2$ الموصولتين على التوازي، كما في الشكل المجاور، بالعلاقة الآتية:**

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

**إذا كانت $R_1$ و $R_2$ تزدادان بمعدل $0.3\ \Omega/s$ و $0.2\ \Omega/s$ على الترتيب، فأجد مُعدل تغير R عندما $R_1=80\ \Omega$، $R_2=100\ \Omega$.**

عندما $R_1=80, R_2=100$ يكون:



$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{80}+\frac{1}{100}=\frac{180}{8000}$$

$$R=\frac{800}{18}=\frac{400}{9}\Omega$$

المعطى: $\frac{dR_1}{dt}=0.3, \frac{dR_2}{dt}=0.2$

المطلوب: $\frac{dR}{dt}\left|_{R_1=80,R_2=100}\right.$

العلاقة المعطاة:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

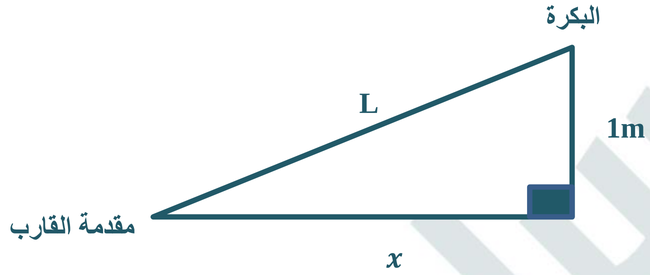
$$-\frac{\frac{dR}{dt}}{R^2}=-\frac{\frac{dR_1}{dt}}{{R_1}^2}-\frac{\frac{dR_2}{dt}}{{R_2}^2}$$

$$\frac{dR}{dt}=R^2\left(\frac{\frac{dR_1}{dt}}{{R_1}^2}+\frac{\frac{dR_2}{dt}}{{R_2}^2}\right)$$

$$\frac{dR}{dt}\left|_{R_1=80,R_2=100}\right.=\frac{160000}{81}\left(\frac{0.3}{6400}+\frac{0.3}{10000}\right)\approx 0.132\ \Omega/s$$

17) **قوارب:** يسحب جمال قاربه إلى رصيف الاصطفاف باستعمال بكرة سحب ترتفع 1m عن مقدمة القارب. إذا طوت البكرة حبل السحب بسرعة 1 m/s، وكان القارب يبعد عن الرصيف مسافة 8m في لحظة ما، فما سرعة اقتراب القارب من الرصيف عندئذ؟

لتكن الأبعاد كما في الشكل:



المعطى: $\frac{dL}{dt} = -1\ m/s$

المطلوب: $\frac{dx}{dt}\Big|_{x=8}$

$$L^2 = x^2 + 1$$

$$2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

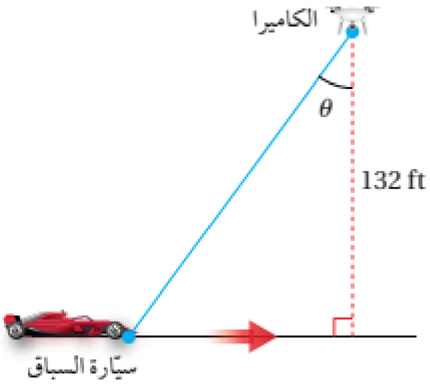
$$\frac{dx}{dt} = \frac{L}{x} \times \frac{dL}{dt} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \times \frac{dL}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{x=8} = \frac{\sqrt{8^2+1}}{8} \times -1 = -\frac{\sqrt{65}}{8}\ m/s$$

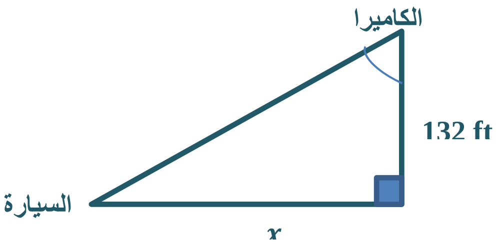
إذن في تلك اللحظة يقترب القارب من الرصيف بسرعة $\frac{\sqrt{65}}{8}\ m/s$

**سباقات سيارات:** ترتفع كاميرا عن الأرض مسافة $132\ ft$، وترصد سيارة تتحرك على مضمار سباق، وتبلغ سرعتها $264\ \mathrm{ft/s}$ كما في الشكل المجاور:

18) أجد سرعة تغير الزاوية $\theta$ عندما تكون السيارة أسفل الكاميرا تماماً.



لتكن $x$ كما في الشكل:



المعطى: $\frac{dx}{dt} = -264\ ft/s$

المطلوب $\frac{d\theta}{dt}\Big|_{\theta=0}$

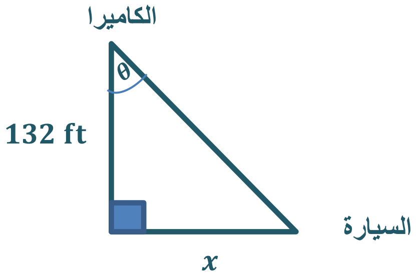
$$\tan\theta = \frac{x}{132}$$

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt} \times \cos^2\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt}\Big|_{\theta=0} = \frac{1}{132}(-264)\cos^2 0 = -2\ rad/s$$

**19) أجد سرعة تغير الزاوية $\theta$ بعد نصف ثانية من مرور السيارة أسفل الكاميرا تماماً.**



**لتكن $x$ كما في الشكل:**

**بعد تجاوز السيارة للكاميرا تتزايد المسافة $x$ حيث يصبح** $\frac{dx}{dt} = 264\ ft/s$

**المطلوب:** $\frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=0.5\ s}$

**بعد نصف ثانية:** $x = 0.5 \times 264 = 132$

$$\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{132}$$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\frac{dx}{dt} \times \cos^2\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=0.5\ s} = \frac{1}{132}(264) \times \cos^2(\frac{\pi}{4})$$

$$= 2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1\ rad/s$$

**يزداد قياس الزاوية $\theta$ بسرعة 1 rad/s في تلك اللحظة.**

**20) فيزياء: يتحرك جُسيم على منحنى الاقتران: $f(x) = 2\sin\frac{\pi x}{2}$. وعند مروره بالنقطة $(\frac{1}{3}, 1)$، فإن الإحداثي $x$ لموقعه يزداد بمُعدل $\sqrt{10}$ وحدة طول لكل ثانية. أجد مُعدل تغير المسافة بين الجُسيم ونقطة الأصل في هذه اللحظة.**

ليكن الجسيم عند النقطة $P(x, 2\sin\frac{\pi x}{2})$ في أي لحظة، () نقطة الأصل، وليكن $PO = L$

المعطى: $\frac{dx}{dt}\Big|_{x=\frac{1}{3}} = \sqrt{10} units/s$

المطلوب: $\frac{dL}{dt}\Big|_{x=\frac{1}{3}}$

$$L^2 = (x-0)^2 + (2\sin\frac{\pi x}{2} - 0)^2$$

$$L^2 = x^2 + 4\sin^2\frac{\pi x}{2}$$

$$2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 8\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{L}\left(x + 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\pi x\right)\frac{dx}{dt}$$

عندما $x = \frac{1}{3}$، فإن:

$$L = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + 4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\frac{dL}{dt}\Big|_{x=\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{3}}(\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{3})\sqrt{10}$$

$$= 1 + \frac{3\sqrt{3}\,\pi}{2}$$

إذن يزداد الجسيم عن نقطة الأصل في تلك اللحظة بسرعة $(1 + \frac{3\sqrt{3}\,\pi}{2})$ وحدة/ ثانية

**سيارات: عجلة سيارة طول نصف قطرها الداخلي 30 cm، وهي تدور بمعدل 10 دورات في الثانية. رُسمت النقطة P على حافة العجلة كما في الشكل المجاور:**

**21) أجد $\frac{dx}{dt}$ بدلالة $\theta$**

المعطى: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 10 \times 2\pi = 20\pi\ rad/s$

المطلوب: $\frac{dx}{dt}$

$$\cos\theta = \frac{x}{30} \Rightarrow x = 30\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -30\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

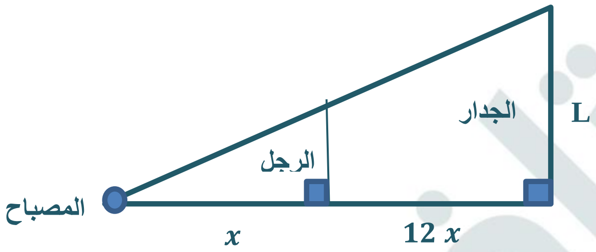
$$= -30(20\pi)\sin\theta = -600\pi\sin\theta$$

22) أجد $\frac{dx}{dt}$ عندما $\theta=\frac{\pi}{4}$

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -600\pi\, sin\,\frac{\pi}{4} = -\frac{600\pi}{\sqrt{2}}\ cm/s$$

**23) ضوء: مصباح مُثبت بالأرض، وهو يضيء على جدار يبعد عنه مسافة 12m. إذا سار رجل طوله 2 m من موقع المصباح إلى الجدار بسرعة 1.6 m/s، فأجد مُعدل تغير طول ظله على الجدار عندما يكون على بُعد 4m من الجدار.**

ليكن بعد الرجل عن المصباح أفقياً $x$، وطول ظله على الجدار $L$



المعطى: $\frac{dx}{dt}=1.6\ m/s$

المطلوب: $\frac{dL}{dt}\Big|_{x=8}$

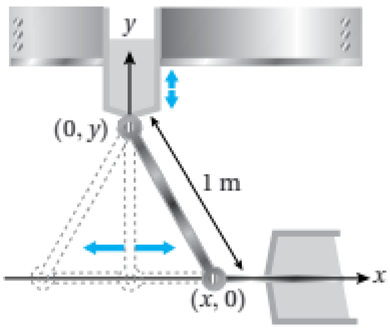
من تشابه المثلثات: $\frac{L}{2}=\frac{12}{x}\rightarrow L=\frac{24}{x}$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{-24\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$\frac{dL}{dt}\Big|_{x=8}=\frac{-24(1.6)}{64}=-0.6\ m/s$$

إذن يتناقص طول ظل الرجل عند تلك اللحظة بمعدل 0.6 متر لكل ثانية.

**هندسة ميكانيكية: يُبين الشكل المجاور ذراعا معدنية متحركة طولها 1m، واحداثيات نهايتيها $(x,0)$ و $(0,y)$. ويمثل الاقتران: $x(t)=\frac{1}{2}sin\,\frac{\pi t}{6}$ موقع طرف الذراع على المحور $x$، حيث t الزمن بالثواني:**



24) أجد أعلى نقطة على المحور $y$ يصلها الذراع.

يصل الطرف العلوي للذراع إلى أعلى نقطة عندما يكون وضع الذراع رأسياً، وتكون النقطة المطلوبة هي (0, 1)

**25) أجد سرعة طرف الذراع الواقع على المحور $y$**

**عندما يكون الطرف الآخر عند النقطة $(\frac{1}{4}, 0)$**

المعطى: $x(t) = \frac{1}{2} sin \frac{\pi t}{6}$

المطلوب: $\frac{dy}{dt}|_{x=\frac{1}{4}}$

عندما $x = \frac{1}{4}$، فإن:

$$\frac{1}{2} sin \frac{\pi t}{6} = \frac{1}{4}$$

$$sin \frac{\pi t}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow cos \frac{\pi t}{6} = \pm\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

يكون $cos\frac{\pi t}{6}$ لبعض قيم t موجباً ولبعضها الآخر سالباً، مع بقاء $sin \frac{\pi t}{6} = \frac{1}{2}$، فمثلاً عندما $t = 1$ يكون $cos\frac{\pi t}{6}$ موجبا وعندما $t = 5$ يكون سالبا.

العلاقة المعطاة: $x(t) = \frac{1}{2} sin \frac{\pi t}{6}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{12} cos \frac{\pi t}{6}$$

$$\frac{dx}{dt}|_{x=\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{12} cos \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} \times \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$$

هذا يعني أن الطرف الواقع على المحور $x$ قد يتحرك بالاتجاه الموجب أو بالاتجاه السالب عندما $x = \frac{1}{4}$، من نظرية فيثاغورس:

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2\sqrt{1 - x^2}\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1 - x^2}}$$

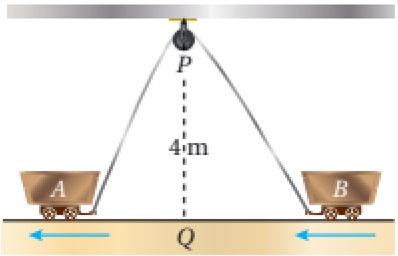
$$\frac{dy}{dt}|_{x=\frac{1}{4}} = -\frac{(\frac{1}{4})(\pm\frac{\sqrt{3}\pi}{24})}{\sqrt{1 - \frac{1}{16}}}$$

$$= \mp\frac{\sqrt{3}\pi}{96} \times \frac{4}{\sqrt{15}} = \mp\frac{\pi}{24\sqrt{5}}\ m/s$$

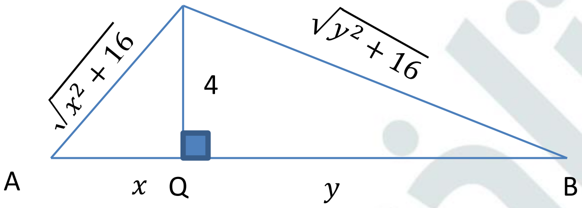
إذن، يتحرك طرف الذراع الواقع على المحور $y$ للأسفل أو للأعلى بمعدل $\frac{\pi}{24\sqrt{5}} \frac{m}{s}$ عندما $x = \frac{1}{4}$.

## مهارات التفكير العليا:

**26) تبرير: ربُطت العربتان A, B بحبل طوله 12m، وهو يمر بالبكرة P كما في الشكل المجاور. إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربتين أسفل P مباشرة، وتبعد عنها مسافة 4m، وكانت العربة A تتحرك بعيداً عن النقطة Q بسرعة 0.5m/s، فأجد سرعة اقترات العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بعد 3m من النقطة Q، مبررا إجابتي.**



لتكن الأبعاد كما في الشكل أدناه:



المعطى:
$$\frac{dx}{dt} = 0.5\ m/s$$

المطلوب:
$$\frac{dy}{dt}\Big|_{x=3}$$

طول الحبل:
$$AP + BP = \sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16} = 12$$

عندما $x = 3$ فإن:
$$\sqrt{9+16} + \sqrt{y^2+16} = 12 \ \Rightarrow \sqrt{y^2+16} = 7 \ \Rightarrow y = \sqrt{33}$$

$$\sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16} = 12$$

$$\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{y^2+16}} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x\sqrt{y^2+16}}{y\sqrt{x^2+16}}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}\Big|_{x=3} = -\frac{3\sqrt{33+16}}{\sqrt{33}\sqrt{25}} \times 0.5 = -\frac{21}{10\sqrt{33}}\ m/s$$

إذن، تقترب العربة B من النقطة Q بسرعة مقدارها $\frac{21}{10\sqrt{33}}\ m/s$

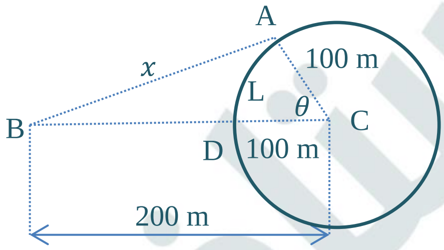
**27) تبرير: يركض عدّاء في مضمار دائري، طول نصف قطره 100m، بسرعة ثابتة مقدارها 7 m/s، ويقف صديقه على بُعد 200m من مركز مضمار الركض. أجد مُعدل تغير المسافة بين العداء وصديقه عندما تكون المسافة بينهما 200m.**

**تنبيه: أجد الحلول المُمكنة.**

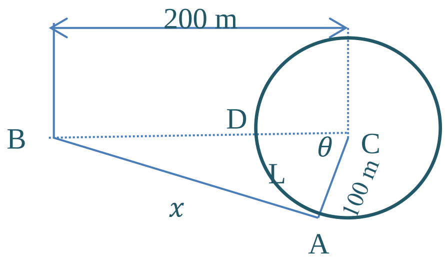
**ليكن العداء عند A، وصديقه عند B، والبعد بينهما $x$ كما في الشكل، وليكن L هو طول القوس الأصغر AD.**

**توجد حالتان لموقع العداء كما في الرسمين الآتيين:**

**الحالة الأولى**



**الحالة الثانية**



**الحالة الأولى:**

**المعطى: (تكون L متناقصة) ويكون:** $\frac{dL}{dt} = -7\ m/s$

**المطلوب:** $\frac{dx}{dt}\Big|_{x=200\ m}$

$$L = r\theta = 1000 \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 100\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -0.07\ rad/s$$

$$x^2 = (200)^2 + (100)^2 - 2(200)(100)\cos\theta$$

$$x^2 = 50000 - 40000\cos\theta$$

$$2x\frac{dx}{dt} = 40000\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{20000\sin\theta}{x}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\cos\theta = \frac{50000 - x^2}{40000}$$

**عندما $x = 200$ فإن:**

$$\cos\theta = \frac{50000 - 40000}{40000} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - (\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{x=200} = \frac{20000\frac{\sqrt{15}}{4}}{200} \times -0.07 = -\frac{7\sqrt{15}}{4}m/s$$

**الحالة الثانية:**

عندئذ يتزايد طول القوس $L$، ويكون $\frac{dL}{dt} = 7\ m/s$، ويكون $\frac{d\theta}{dt} = 0.07\ rad/s$، وعليه فإن:

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{x=200} = \frac{20000\frac{\sqrt{15}}{4}}{200} \times 0.07 = \frac{7\sqrt{15}}{4}\, m/s$$

إذن، عندما تكون المسافة بين العدائين 200m، فإنهما يقتربان من بعضهما أو يتباعدان عن بعضهما بسرعة مقدارها

$\frac{7\sqrt{15}}{4} m/s$

## كتاب التمارين

## الدرس الأول – المُعدّلات المرتبطة

مُلئ بالون كروي بالهيليوم بمعدل 8 cm³/s. أجد معدل تغير نصف قطر البالون في كل من الحالات الآتية:

1) عندما يكون طول نصف قطره 12 cm.

المعطى: $\frac{dy}{dt} = 8$

المطلوب: $\frac{dr}{dt}|_{r=12}$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dV}{dt}|_{r=12} = 576\pi \frac{dr}{dt}|_{r=12} = 8 \Rightarrow \frac{dr}{dt}|_{r=12} = \frac{8}{576\pi} = \frac{1}{72\pi}\ cm/s$$

2) عندما يكون حجمه $36\pi\ cm^3$ (أُقرب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة)

المطلوب: $\frac{dr}{dt}|_{V=36\pi}$

عندما يكون الحجم $36\pi$، يكون:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \Rightarrow r = 3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt}|_{r=3} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}|_{r=3}$$

$$8 = 4\pi \times 9 \frac{dr}{dt}|_{r=3}$$

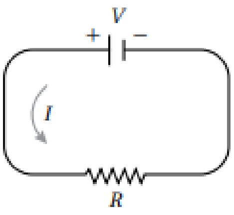
$$\frac{dr}{dt}|_{r=3} = \frac{8}{36\pi} = \frac{2}{9\pi}\ cm/s$$

3) إذا مُلئ مدة 33.5s

$$t = 33.5 \ \Rightarrow V = 8 \times 33.5 = 268\ cm^3$$

عندما يكون الحجم $268\ cm^3$ يكون طول نصف القطر $\sqrt[3]{\frac{3(268)}{4\pi}} \approx 4\ cm$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt}|_{r=4} = 64\pi \frac{dr}{dt}|_{r=4} = 8 \Rightarrow \frac{dr}{dt}|_{r=4} = \frac{8}{64\pi} = \frac{1}{8\pi} \approx 0.04\ cm/s$$



4) تُمثل المعادلة: $V = IR$ جُهد الدائرة الكهربائية (بالفولت) المُبينة في الشكل المجاور، حيث I شدة التيار بالأمبير، و R المقاومة بالأوم.

إذا كان جهد الدارة يزداد بمعدل 1 volt/s، وشدة التيار تقل بمعدل $\frac{1}{3} amp/s$،

فأجد معدل تغير R عندما I=2 , V=12

$$V = IR$$

$$\frac{dV}{dt} = I\frac{dR}{dt} + R\frac{dI}{dt}$$

المعطى: $\frac{dV}{dt} = 1 , \frac{dI}{dt} = -\frac{1}{3}$

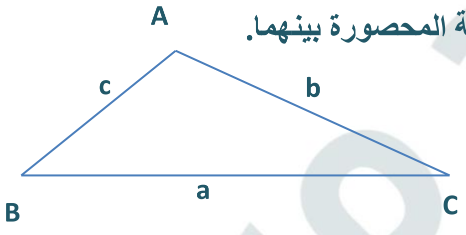
المطلوب: $\frac{dR}{dt}$ عندما $I = 2, V = 12$

عندما $I = 2 =, V = 12$، فإن ب 6، $R = 6$، بالتعويض في المعادلة أعلاه ينتج أن:

$$1 = 2\frac{dR}{dt} + 6\left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \frac{dR}{dt} = 1.5\ \Omega/s$$

إذا كانت $\theta$ الزاوية المحصورة بين الضلعين اللذين طول كل منهما s في مثلث متطابق الضلعين، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

5) أثبت أن مساحة المثلث تعطى بالمعادلة: $A = \frac{1}{2}s^2 \sin\theta$



معلوم أن مساحة المثلث تساوي نصف ناتج ضرب طولي أي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

$$A = \frac{1}{2}ab\sin C$$

فإذا كان $a = b = s, C = \theta$، فإن:

$$A = \frac{1}{2}s^2 \sin\theta$$

6) إذا كانت الزاوية $\theta$ تزداد بمعدل $\frac{1}{2} rad/min$، فأجد معدل تغير مساحة المثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$، علما بأن طول الضلعين المتطابقين ثابت.

المعطى: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}$ والمطلوب: $\frac{dA}{dt}|_{\theta=\frac{\pi}{6}}$، حيث s ثابت

$$A = \frac{1}{2}s^2 \sin\theta \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}s^2 \cos\theta \frac{d\theta}{dt}$$

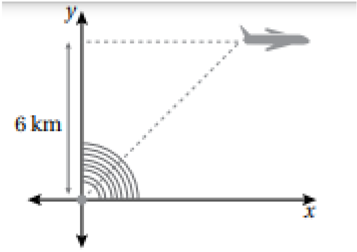
$$\Rightarrow \frac{dA}{dt}|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}s^2\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}s^2$$

7) يتحرك جُسيم على منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{10}{1+x^2}$. إذا كان معدل تغير الإحداثي $x$ هو 3 cm/s، فأجد معدل تغير الإحداثي $y$ عندما $x = 20$.

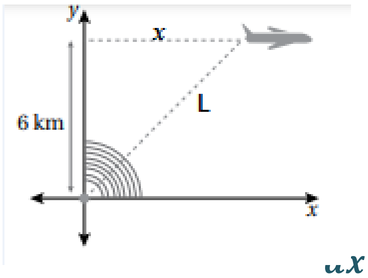
المعطى: $\frac{dx}{dt} = 3$ و المطلوب: $\frac{dy}{dt}|_{x=20}$

$$y = \frac{10}{1+x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-20x}{(1+x^2)^2}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt}|_{x=20} = \frac{-1200}{(401)^2} \approx -0.007\ cm/s$$

8) حلقت طائرة على ارتفاع 6km، ومرت في أثناء تحليقها مباشرة فوق رادار كما في الشكل المجاور. وعندما أصبح البعد بينها وبين الرادار 10 km، رصد الرادار معدل تغير البعد بينه وبين الطائرة، فكان 300 km/h. أجد سرعة الطائرة في هذه اللحظة.



المعطى: $\frac{dL}{dt} = 300$ و المطلوب: $\frac{dx}{dt}|_{L=10}$

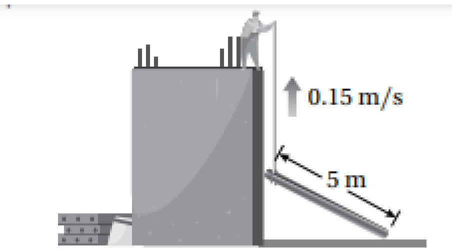


$$L^2 = x^2 + 36 \Rightarrow x = \sqrt{L^2 - 36}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{L\frac{dL}{dt}}{\sqrt{L^2 - 36}}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt}|_{L=10} = \frac{10 \times 300}{\sqrt{100 - 36}} = \frac{3000}{\sqrt{64}} = 375\ km/h$$

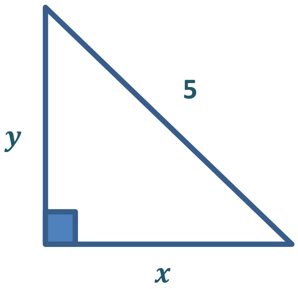
9) **بناء:** يسحب عامل بناء لوحا خشبيا طوله 5m إلى الأعلى بجانب مبنى لم يكتمل إنشاؤه بعد، وذلك باستعمال حبل رُبط به أحد طرفي اللوح كما في الشكل المجاور. إذا افترضت أن طرف اللوح المربوط بالحبل يتبع مسارًا عموديا على جدار المبنى، وأن العامل يسحب الحبل بمعدل 0.15 m/s، بحيث يظل الطرف العلوي من اللوح ملامسا للجدار، فما سرعة انزلاق الطرف الآخر للوح على الأرض عندما يكون على بعد 3m من جدار المبنى؟



**ملاحظة هامة:** يرجى تصحيح الجملة الثانية من السؤال بحيث تصبح كما يأتي:

(إذا افترضت أن طرف اللوح غير المربوط بالحبل يتبع مسارا عموديا على جدار المبنى)

نفرض أن بعد الطرف السفلي عن الجدار هو $x$، وأن بعد الطرف العلوي عن الأرض هو $y$



المعطى: $\frac{dy}{dt} = 0.15\ m/s$

المطلوب: $\frac{dx}{dt}\Big|_{x=3}$

من نظرية فيثاغورس: $x^2 + y^2 = 25$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

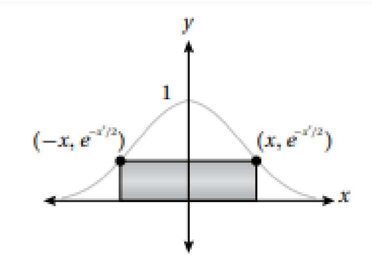
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y\frac{dy}{dt}}{x}$$

عندما $x = 3$، يكون:

$$y^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow y = 4$$

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{x=3} = -\frac{4(0.15)}{3} = -0.2\ m/s$$

إذن يتحرك الطرف السفلي في تلك اللحظة بسرعة 0.2 m/s نحو اليسار مقتربا من الجدار.



يُبين الشكل المجاور مستطيلا مرسوما داخل منحنى الاقتران:

$f(x) = e^{-x^2/2}$. إذا كان $x$ يتغير مع الزمن، مغيرا معه موضع المستطيل،

فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

10)أجد مساحة المستطيل بدلالة $x$.

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$A = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

11)أجد معدل تغير مساحة المستطيل عندما $x = 4\ cm$، وعندما $\frac{dx}{dt} = 4\ cm/min$

المعطى: $\frac{dx}{dt} = 4$

المطلوب: $\frac{dA}{dt}|_{x=4}$

$$A = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\frac{dA}{dt} = (2x)\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{dt}\right) + \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\left(2\frac{dx}{dt}\right)$$

$$2e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2)\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt}|_{x=4} = 2e^{-\frac{(4)^2}{2}}(1 - (4)^2)(4)$$

$$-120e^{-8}cm^2/min$$

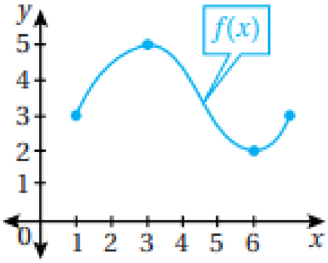
## كتاب الطالب

## الدرس الثاني – القيم القصوى والتقعُّر

**مثال 1:**

**أجد القيم القصوى المحلية والقيم القصوى المُطلقة (إن وجدت) للاقتران المعطى تمثيله البياني في كل مما يأتي:**

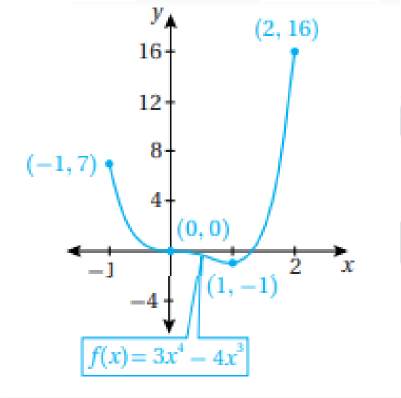
**1)**



**ألاحظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ وجود:**

- قيمة عظمى محلية ومطلقة للاقتران $f$، هي:
  $f(3) = 5$.
- قيمة صغرى محلية ومطلقة للاقتران $f$، هي:
  $f(6) = 2$.

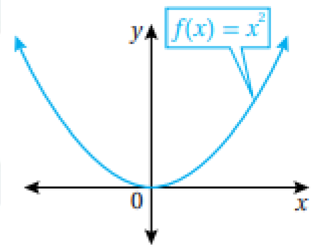
**2)**



**ألاحظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ وجود:**

- قيمة صغرى محلية ومطلقة للاقتران $f$، هي:
  $f(1) = -1$.
- قيمة عظمى مطلقة للاقتران $f$، هي:
  $f(2) = 16$ (ليست قيمة عظمى محلية؛
  لأنها ليست داخلية، فهي طرف فترة).

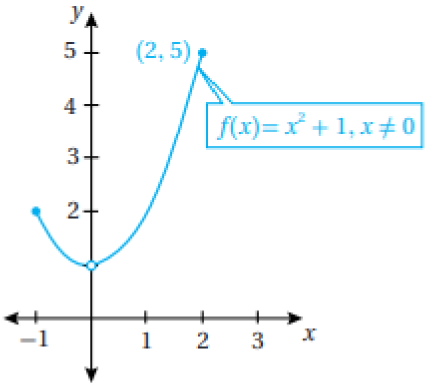
**3)**



**ألاحظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ أنه:**

- توجد قيمة صغرى محلية ومطلقة للاقتران $f$، هي:
  $f(0) = 0$.
- لا توجد قيمة عظمى (محلية، أو مطلقة) للاقتران $f$.

**4)**



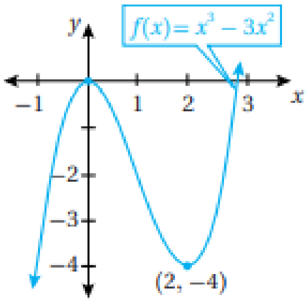
ألاحظ من التمثيل البياني لمنحنى $f(x)$ أنه:

- توجد قيمة عظمى مطلقة للاقتران $f$، هي: $f(2)=5$.
- لا توجد قيمة صغرى (محلية، أو مطلقة) للاقتران $f$.

أتحقق من فهمي:

أجد القيم القصوى المحلية والقيم القصوى المُطلقة (إن وجدت) للاقتران المعطى تمثيله البياني في كل مما يأتي:

**a)**

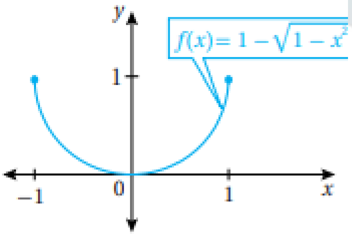


ليس للاقتران $f$ قيم قصوى مطلقة

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x=0$ هي $f(0)=0$

وله قيمة صغرى محلية عند $x=2$ هي $f(2)=-4$

**b)**



للاقتران $f$ قيمة عظمى مطلقة عند $x=1$ و $x=-1$ هي $f(\pm1)=1$

وله قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x=0$ هي $f(0)=0$

**مثال 2:**

**أجد القيمة العظمى المُطلقة والقيمة الصغرى المُطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة:**

**1)** $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, [-2, 2]$

**بما أن الاقتران $f$ متصل على الفترة $[-2, 2]$؛ لأنه كثير حدود، فإنه يمكنني إيجاد القيم القصوى المُطلقة باتباع الخطوات الآتية:**

**الخطوة 1: أجد القيم الحرجة للاقتران $f$ المتصل على الفترة (-2, 2)**

الاقتران المعطى $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$

بإيجاد المشتقة $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

بمساواة المشتقة بالصفر $3x^2 - 6x - 9 = 0$

بإخراج 3 عاملاً مشتركاً $3(x^2 - 2x - 3) = 0$

بالتحليل $3(x+1)(x-3) = 0$

خاصية الضرب الصفري $x + 1 = 0 \quad or \quad x - 3 = 0$

بحل كل معادلة لـ $x$ $x = -1 \quad or \quad x = 3$

**بما أن $x = 3$ ليست ضمن مجال $f$، فإنها تُهمل. وبما أنه لا توجد قيم تكون عندها $f'$ غير موجودة، فإنه توجد قيمة حرجة واحدة للاقتران $f$ هي: $x = -1$، وقيمة الاقتران عندها هي: $f(-1) = 7$**

**الخطوة 2: أجد قيمتي الاقتران $f$ عند طرفي الفترة.**

$$f(-2) = 0 \quad , \quad f(2) = -20$$

**الخطوة 3: أقارن بين القيم.**

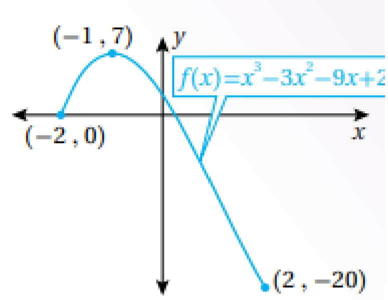
**القيمة العظمى المُطلقة للاقتران $f$ في الفترة $[-2, 2]$ هي: $f(-1) = 7$، والقيمة الصغرى المُطلقة له هي: $f(2) = -20$.**

**الدعم البياني:**

**يُبين التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران:**

**$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ في الفترة [-2, 2]**

**أن القيمة العظمى المُطلقة هي 7، وأن القيمة الصغرى المُطلقة هي -20.**



2) $f(x) = x^{2/3}$ , $[-1, 2]$

بما أن الاقتران $f$ متصل على الفترة [-1,2]، فإنه يُمككني إيجاد القيم القصوى المُطلقة باتباع الخطوات الآتية:

**الخطوة 1:** أجد القيم الحرجة للاقتران $f$ المتصل على الفترة (-1, 2).

الاقتران المعطى $f(x) = x^{2/3}$

بإيجاد المشتقة $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$

الصورة الجذرية $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

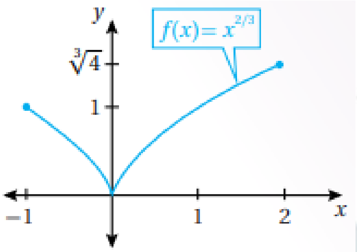
ألاحظ أنه لا توجد أصفار للمشتقة، وأن المشتقة غير موجودة عندما $x = 0$؛ لأنها غير مُعرفة في هذه الحالة؛ لذا توجد قيمة حرجة واحدة للاقتران $f$ هي: $x = 0$، وقيمة الاقتران عندها هي: $f(0) = 0$

**الخطوة 2:** أجد قيمتي الاقتران $f$ عند طرفي الفترة.

$$f(-1) = 1 \quad , \quad f(2) = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$$

**الخطوة 3:** أقارن بين القيم.

القيمة العظمى المطلقة للاقتران $f$ في الفترة [-1, 2] هي: $f(2) = \sqrt[3]{4}$، والقيمة الصغرى المُطلقة له هي: $f(0) = 0$



الدعم البياني:

يُبين التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران:

$f(x) = x^{2/3}$ في الفترة [-1, 2] أن القيمة العظمى المُطلقة هي $\sqrt[3]{4}$،

وأن القيمة الصغرى المُطلقة هي 0.

**3) $f(x) = 2\sin x - \cos 2x, [0, 2\pi]$**

**بما أن الاقتران $f$ متصل على الفترة $[0, 2\pi]$، فإنه يُمكنني إيجاد القيم القصوى المُطلقة باتباع الخطوات الآتية:**

**الخطوة 1: أجد القيم الحرجة للاقتران $f$ المتصل على الفترة $(0, 2\pi)$.**

الاقتران المعطى: $f(x) = 2\sin x - \cos 2x$

بإيجاد المشتقة $f'(x) = 2\cos x + 2\sin 2x$

بمساواة المشتقة بالصفر $2\cos x + 2\sin 2x = 0$

متطابقات ضعف الزاوية $2\cos x + 4\sin x\cos x = 0$

بإخراج $2\cos x$ عاملا مشتركا $2\cos x\,(1 + 2\sin x) = 0$

خاصية الضرب الصفري $2\cos x = 0 \quad or \quad 1 + 2\sin x = 0$

بحل المعادلة الأولى لـ $\cos x$، وحل المعادلة الثانية لـ $\sin x$ $\cos x = 0 \quad or \quad \sin x = -\frac{1}{2}$

بحل كل معادلة لـ $x$ $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad or \quad x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

بما أنه لا توجد قيم تكون عندها $f'$ غير موجودة، فإن قيم الاقتران $f$ عند القيم الحرجة هي:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3, f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1, f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$$

**الخطوة 2: أجد قيمتي الاقتران $f$ عند طرفي الفترة.**

$$f(0) = -1 \quad , \quad f(2\pi) = -1$$

**الخطوة 3: أقارن بين القيم**

القيمة العظمى المُطلقة للاقتران $f$ في الفترة $[0, 2\pi]$ هي: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$، والقيمة الصغرى المُطلقة له هي:

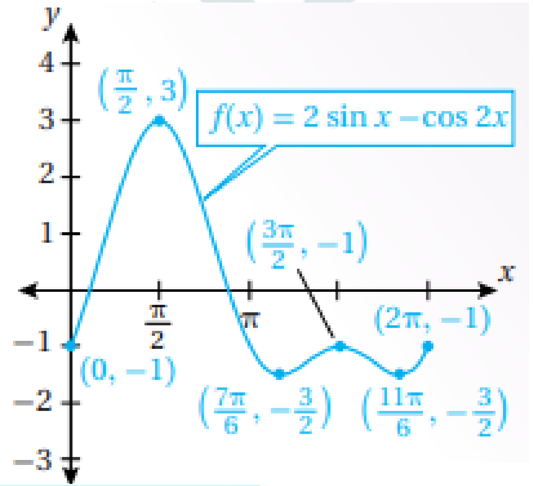
$$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$$

**الدعم البياني:**

يُبين التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران:

$f(x) = 2\sin x - \cos 2x$ في الفترة $[0, 2\pi]$أن القيمة

العظمى المُطلقة هي 3، وأن القيمة الصغرى المُطلقة هي$-\frac{3}{2}$.



**أتحقق من فهمي:**

**أجد القيمة العظمى المُطلقة والقيمة الصغرى المُطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة:**

**a)** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, [-3, 5]$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, [-3, 5]$

$f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$

وتكون قيم $x$ الحرجة هي: $x = 0, x = 4$

نقارن قيم الاقتران عند النقط الحرجة وعند طرفي مجاله.

$f(-3) = -27 - 54 + 5 = -76, f(0) = 5$

$f(4) = 64 - 96 + 5 = -27, f(5) = 125 - 150 + 5 = -20$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = -3$ هي $f(-3) = -76$

وله قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 5$

**b)** $f(x) = \sqrt[3]{x}, [-8, 8]$

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}, [-8, 8]$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(x)$ لا تساوي صفرا لأي قيمة في (-8, 8)، وهي غير موجودة عند $x = 0$ وهذه هي القيمة الحرجة فقط.

$f(-8) = -2$

$f(0) = 0$

$f(8) = 2$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = -8$ هي $f(-8) = -2$

وله قيمة عظمى مطلقة عند $x = 2$ هي $f(8) = 2$

c) $f(x) = sin^2x + cos\ x, [0, 2\pi]$

$f(x) = sin^2x + cos\ x, [0, 2\pi]$

أجد القيم الحرجة في الفترة $(0, 2\pi)$

$f'(x) = 2\ sin\ x\ cos\ x - sin\ x = 0\ \Rightarrow sin\ x\ (2\ cos\ x - 1) = 0$

$\Rightarrow sin\ x = 0 \quad or \quad cos\ x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \ \pi, or\ x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$

وتكون قيم $x$ الحرجة هي: $x = \pi, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$

أجد قيم الاقتران عند القيم الحرجة وطرفي مجالة.

$f(0) = 1$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

$f(\pi) = -1$

$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

$f(2\pi) = 1$

للاقتران قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x = \pi$ هي $f(\pi) = -1$

وله قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$ هي $\frac{5}{4}$

**مثال 3:**

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران: $f(x) = (x^2 - 3)e^x$

بما أن الاقتران $f$ متصل عند جميع الأعداد الحقيقية، فإنه يُمكنني إيجاد القيم القصوى المحلية وتحديد نوعها باستعمال اختبار المشتقة الأولى كما يأتي:

**الخطوة 1:** أجد القيم الحرجة للاقتران $f$.

| | |
|---|---|
| الاقتران المعطى | $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ |
| قاعدة مشتقة الضرب | $f'(x) = (x^2 - 3)e^x + 2xe^x$ |
| بإخراج $e^x$ عاملا مشتركا | $= (x^2 + 2x - 3)e^x$ |
| بمساواة المشتقة بالصفر | $(x^2 + 2x - 3)e^x = 0$ |
| خاصية الضرب الصفري | $x^2 + 2x - 3 = 0 \quad or \quad e^x = 0$ |
| بالتحليل | $(x - 1)(x + 3) = 0$ |
| خاصية الضرب الصفري | $x - 1 = 0 \quad or \quad x + 3 = 0$ |
| بحل المعادلة لـ $x$ | $x = 1 \quad or \quad x = -3$ |

بما أن $f' = 0$ عندما $x = 1, -3$، وعدم وجود قيم تكون عندها $f'$ غير موجودة، فإن القيم الحرجة للاقتران $f$ هي:
$x = 1, x = -3$

**الخطوة 2:** أبحث في إشارة المشتقة الأولى.

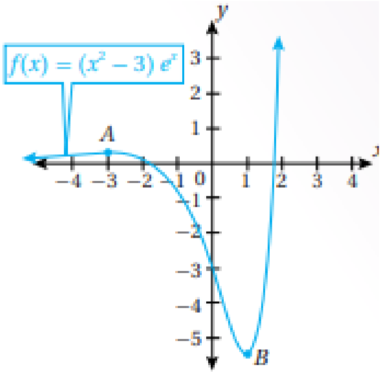
أختار بعض القيم التي هي أصغر من قيم $x$ الحرجة وأكبر منها، ثم أحدد إشارة المشتقة عند كل منها:

| $x > 1$ | $-3 < x < 1$ | $x < -3$ | |
|---|---|---|---|
| $x = 2$ | $x = 0$ | $x = -4$ | قيم الاختبار $(x)$ |
| $f'(2) > 0$ | $f'(0) < 0$ | $f'(-4) > 0$ | إشارة $f'(x)$ |
| مُتزايد<br>↗ | مُتناقص<br>↘ | متزايد<br>↗ | تزايد الاقتران وتناقصه |

**الخطوة 3:** أجد القيم القصوى المحلية.

- توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = -3$ وهي: $f(-3) = 6e^{-3}$.
- توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$، وهي: $f(1) = -2e$

**الدعم البياني:**



يُبين التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران:

$f(x) = (x^2 - 3)e^x$ وجود قيمة عظمى محلية عندما $x = -3$،

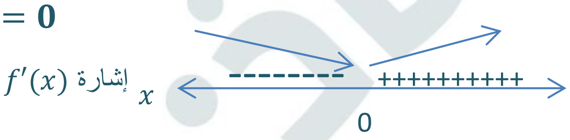
وقيمة صغرى محلية ومُطلقة عندما $x = 1$.

**أتحقق من فهمي:**

**أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران: $f(x) = (x - 1)e^x$.**

$$f(x) = (x - 1)e^x$$

$$f'(x) = (x - 1)e^x + e^x = 0 \Rightarrow xe^x = 0 \Rightarrow x = 0$$



**للاقتران قيمة حرجة وحيدة هي $x = 0$**

**بما أن إشارة المشتقة الأولى تغيرت من السالب إلى الموجب عند هذه القيمة، لذا يكون للاقتران قيمة صغرى محلية هي:**

$$f(0) = -1$$

**مثال 4:**

أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران: $f(x) = (x^2-4)^{2/3}$

بما أن الاقتران $f$ متصل عند جميع الأعداد الحقيقية، فإنه يُمكنني إيجاد القيم القصوى المحلية وتحديد نوعها باستعمال اختبار المشتقة الأولى كما يأتي:

**الخطوة 1:** أجد القيم الحرجة للاقتران $f$.

الاقتران المعطى: $f(x) = (x^2-4)^{2/3}$

قاعدة سلسلة القوة $f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-4)^{-\frac{1}{3}}(2x)$

الصورة الجذرية $= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-4}}$

بمساواة المشتقة بالصفر $\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-4}} = 0$

بمساواة البسط بالصفر $4x = 0$

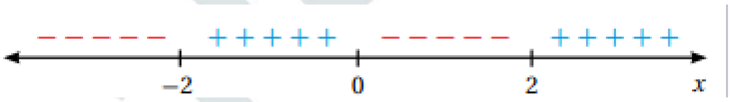
بحل المعادلة لـ $x$ $x = 0$

بما أن $f' = 0$ عندما $x = 0$، و $f'$ غير موجودة عندما $x = \pm 2$، فإن القيم الحرجة للاقتران $f$ هي:

$$x = -2, x = 0, x = 2$$

**الخطوة 2:** أبحث في إشارة المشتقة الأولى.

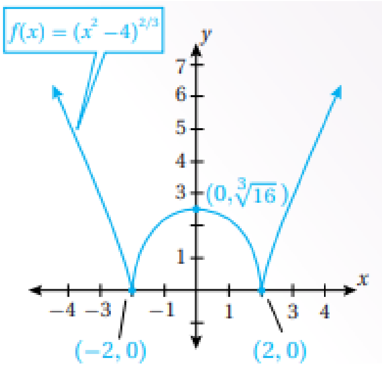
أختار بعض القيم التي هي أصغر من قيم $x$ الحرجة وأكبر منها، ثم أحدد إشارة المشتقة عند كل منها:



| $x > 2$ | $0 < x < 2$ | $-2 < x < 0$ | $x < -2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $x = 3$ | $x = 1$ | $x = -1$ | $x = -3$ | قيم الاختبار $(x)$ |
| $f'(3) > 0$ | $f'(1) = 0$ | $f'(-1) < 0$ | $f'(-3) > 0$ | إشارة $f'(x)$ |
| مُتزايد<br>↗ | مُتناقص<br>↘ | مُتزايد<br>↗ | مُتناقص<br>↘ | تزايد الاقتران وتناقصه |

**الخطوة 3:** أجد القيم القصوى المحلية:

- توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$، وهي: $f(0) = \sqrt[3]{16}$
- توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -2$، وهي: $f(-2) = 0$
- توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 2$، وهي: $f(2) = 0$



**الدعم البياني:**

يُبين التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران:

$f(x) = (x^2-4)^{2/3}$ وجود قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$،

وقيمة صغرى محلية وقيمة صغرى مُطلقة عندما $x = \pm 2$،

وعدم وجود قيمة عظمى مُطلقة للاقتران.

**أتحقق من فهمي:**

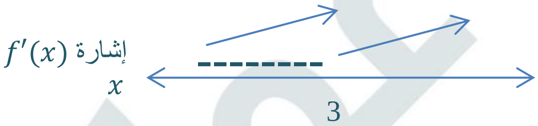
أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$:

$$f(x) = \sqrt[3]{x-3} = (x-3)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x-3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}$$

$f'(x)$ لا تساوي صفرا لأي عدد حقيقي $x$، لكن $f'(x)$ غير موجودة عند $x = 3$

إذن القيمة الحرجة الوحيدة هي $x = 3$



الاقتران $f$ متزايد على $R$ ولا يوجد له قيم قصوى محلية ولا مطلقة. النقطة $(3, 0)$ نقطة حرجة لكنها ليست نقطة قيمة قصوى لعدم تغير إشارة المشتقة حولها.

**مثال 5:**

**أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي:**

**1)** $f(x) = e^{-x^2/2}$

**أجد فترات التقعر للاقتران $f$ باستعمال المشتقة الثانية كما يأتي، علما بأن الاقتران متصل على جميع الأعداد الحقيقية:**

**الخطوة 1: أجد المشتقة الثانية للاقتران.**

الاقتران المعطى $f(x) = e^{-x^2/2}$

قاعدة السلسلة $f'(x) = -xe^{-x^2/2}$

قاعدة مشتقة الضرب $f''(x) = (-x)(-x)e^{-x^2/2} + e^{-x^2/2}(-1)$

بالتبسيط $= (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$

**الخطوة 2: أجد قيم $x$ التي تكون عندها مشتقة الاقتران الثانية صفرا، أو غير موجودة.**

**لا توجد قيم تكون عندها المشتقة الثانية غير موجودة؛ لذا أجد قيم $x$ التي تكون عندها المشتقة الثانية صفراً:**

بمساواة المشتقة الثانية بالصفر $(x^2 - 1)e^{-x^2/2} = 0$

خاصية الضرب الصفري $(x^2 - 1) = 0 \quad or \quad e^{-x^2/2} = 0$

بحل المعادلة الأولى لـ $x$ $x = \pm 1$

لا يوجد حل للمعادلة الثانية؛ لأن $e^{-x^2/2} \neq 0$.

إذن، قيم $x$ المطلوبة هي: $x = \pm 1$

**الخطوة 3: أبحث في إشارة المشتقة الثانية.**

| $x > 1$ | $-1 < x < 1$ | $x < -1$ | |
|---|---|---|---|
| $x = 2$ | $x = 0$ | $x = -2$ | قيم الاختبار $(x)$ |
| $f''(2) > 0$ | $f''(0) < 0$ | $f''(-2) > 0$ | إشارة $f''(x)$ |
| مقعر للأعلى<br>◡ | مقعر للأسفل<br>⌒ | مقعر للأعلى<br>◡ | تقعر الاقتران |

**الخطوة 4: أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل.**

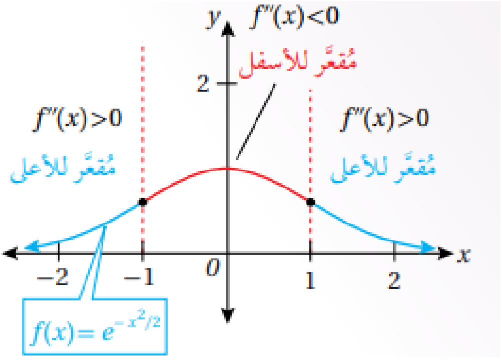
- منحنى الاقتران $f$ مقعر للأعلى على الفترة $(-\infty, -1)$، والفترة $(1, \infty)$.
- منحنى الاقتران $f$ مقعر للأسفل على الفترة (-1, 1).

**الخطوة 5: أجد نقاط الانعطاف.**

توجد نقطتا انعطاف عندما $x = 1$، وعندما $x = -1$، وهما: (-1, $e^{-1/2}$)، و ( 1, $e^{-1/2}$)؛ لأن الاقتران $f$ متصل عند كلتا النقطتين، وغير اتجاه تقعره عندهما.

الدعم البياني:

يُبين التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^{-x^2/2}$ وجود فترتي تقعر للأعلى، وفترة تقعر للأسفل، ونقطتي انعطاف.



2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

**أجد فترات التقعر للاقتران $f$، وانتبه أن $f$ غير مُعرف عندما $x = 0$.**

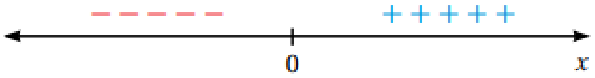
**الخطوة 1: أجد المشتقة الثانية للاقتران.**

| | |
|---|---|
| الاقتران المعطى | $f(x) = x + \frac{1}{x}$ |
| قاعدة مشتقة اقتران القوة، وقاعدة مشتقة المقلوب | $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ |
| قاعدة مشتقة المقلوب | $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ |

**الخطوة 2: أجد قيم $x$ التي تكون عندها مشتقة الاقتران الثانية صفرا، أو غير موجودة.**

لا توجد قيم تكون عندها المشتقة الثانية صفرا، والمشتقة غير موجودة أيضا عندما $x = 0$؛ لأن $f$ غير مُعرف عندها.

**الخطوة 3:** أبحث في إشارة المشتقة الثانية.



| $x > 0$ | $x < 0$ | |
|---|---|---|
| $x = 1$ | $x = -1$ | قيم الاختبار $(x)$ |
| $f''(1) > 0$ | $f''(-1) < 0$ | إشارة $f''(x)$ |
| مقعر للأعلى<br>∪ | مقعر للأسفل<br>∩ | تقعر الاقتران |

**الخطوة 4:** أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل.

- منحنى الاقتران $f$ مقعر للأعلى على الفترة $(0, \infty)$
- منحنى الاقتران $f$ مقعر للأسفل على الفترة $(-\infty, 0)$

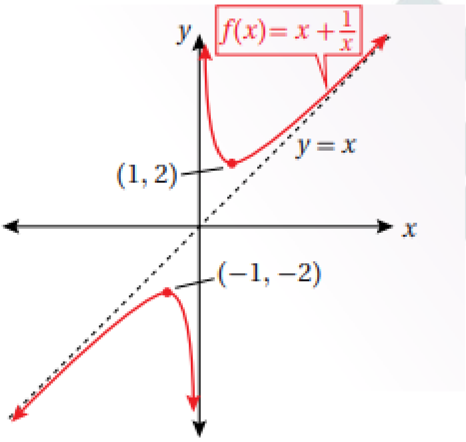
**الخطوة 5:** أجد نقاط الانعطاف.

لا توجد نقاط انعطاف لمنحنى الاقتران

الدعم البياني:

يُبين التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقتران:

$f(x) = x + \frac{1}{x}$ وجود فترة تقعر للأسفل هي $(-\infty, 0)$، وفترة تقعر للأعلى هي $(0, \infty)$، ووجود خط تقارب رأسي عندما $x = 0$.



**أتحقق من فهمي:**

**أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي:**

**a)** $f(x) = (x-2)^3(x-1)$

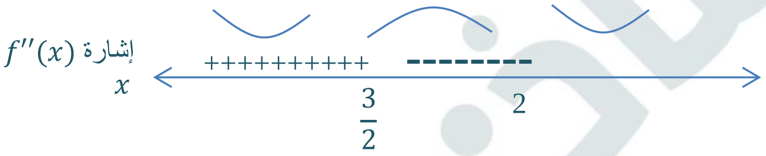
$$f(x) = (x-2)^3(x-1)$$

$$f'(x) = (x-2)^3 + 3(x-1)(x-2)^2$$

$$f''(x) = 3(x-2)^2 + 6(x-1)(x-2) + 3(x-2)^2$$

$$= 3(x-2)\big((x-2) + 2(x-1) + (x-2)\big)$$

$$= 3(x-2)(4x-6) = 0 \ \Rightarrow x = 2 \quad or \quad x = \frac{3}{2}$$



إذن منحنى $f(x)$ مقعر للأعلى في $(-\infty, \frac{3}{2})$ و $(2, \infty)$، ومقعر للأسفل في $(\frac{3}{2}, 2)$

وله نقطتا انعطاف هما $(\frac{3}{2}, \frac{1}{16})$ و $(2, 0)$

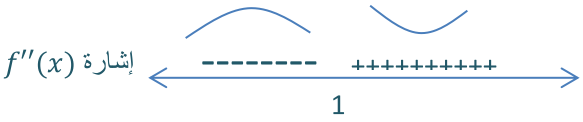
**b)** $f(x) = \frac{x}{x-1}$

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$f''(x)$ لا تساوي صفرا لأي عدد حقيقي $x$، لكن $f''(x)$ غير موجودة عند $x = 1$



إذن منحنى $f(x)$ مقعر للأسفل في $(-\infty, 1)$، ومقعر للأعلى في $(1, \infty)$

ولا توجد نقاط انعطاف مع أن المنحنى غيّر من اتجاه تقعره عند $x = 1$ وذلك لأنها خارج مجال $f(x)$

**مثال 6:**

**إذا كان: $f(x) = (x^2 - 4)^2$، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران $f$.**

**الخطوة 1: أجد المشتقة الأولى والقيم الحرجة للاقتران.**

| | |
|---|---|
| الاقتران المعطى | $f(x) = (x^2 - 4)^2$ |
| قاعدة سلسلة القوة | $f'(x) = 4x(x^2 - 4)$ |
| بمساواة المشتقة بالصفر | $4x(x^2 - 4) = 0$ |
| خاصية الضرب الصفري | $4x = 0 \quad or \quad x^2 - 4 = 0$ |
| بحل كل معادلة لـ $x$ | $x = 0 \qquad x = \pm 2$ |

إذن، القيم الحرجة للاقتران $f$ هي: $x = 0, x = 2, x = -2$

**الخطوة 2: أجد المشتقة الثانية للاقتران.**

| | |
|---|---|
| باستعمال خاصية التوزيع | $f'(x) = 4x^3 - 16x$ |
| قاعدة مشتقة اقتران القوة | $f''(x) = 12x^2 - 16$ |

**الخطوة 3: أعوض القيم الحرجة في المشتقة الثانية؛ لتصنيفها.**

| | |
|---|---|
| بتعويض $x = -2$ | $f''(-2) = 12(-2)^2 - 16 = 32 > 0$ |
| بتعويض $x = 0$ | $f''(0) = 12(0)^2 - 16 = -16 < 0$ |
| بتعويض $x = 2$ | $f''(2) = 12(2)^2 - 16 = 32 > 0$ |

**ألاحظ أن:**

- $f''(-2) > 0, f'(-2) = 0$

  إذن، توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = -2$، وهي: $f(-2) = 0$.
- $f''(0) < 0 , f'(0) = 0$

  إذن، توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$، وهي: $f(0) = 16$.
- $f''(2) > 0, f'(2) = 0$

  إذن، توجد قيمة صغرى محلية عندما $x = 2$، وهي: $f(2) = 0$.

**أتحقق من فهمي:**

إذا كان: $f(x) = xe^x$، فأستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران $f$.

$$f(x) = xe^x$$

$$f'(x) = xe^x + e^x = 0 \rightarrow \ e^x(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

القيمة الحرجة هي $x = -1$

$$f''(x) = xe^x + e^x + e^x = e^x(x+2)$$

$$f''(-1) = e^{-1} > 0$$

إذن توجد قيمة صغرى محلية للاقتران $f$ هي $f(-1) = -e^{-1}$

**مثال 7:**

يُمثل الاقتران: $s(t) = 3t^2 - 2t^3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث $s$ الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

1) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

يُمكن تحديد الفترات الزمنية لاتجاه حركة الجسم بدراسة إشارة السرعة كما يأتي:

**الخطوة 1:** أجد قيم $t$ التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي (سرعة الجسم تساوي صفراً)

اقتران السرعة $V(t) = s'(t) = 6t - 6t^2$

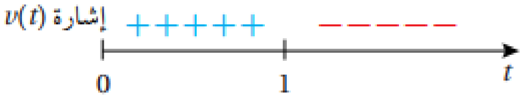
بمساواة اقتران السرعة بالصفر $6t - 6t^2 = 0$

بإخراج 6t عاملاً مشتركا $6t(1-t) = 0$

خاصية الضرب الصفري $6t = 0 \quad or \quad 1 - t = 0$

بحل كل معادلة لـ t $t = 0 \qquad t = 1$

**الخطوة 2:** أدرس إشارة السرعة.



**الخطوة 3:** أحدد فترات اتجاه الحركة

- يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب عندما $v(t) > 0$؛ أي في الفترة $(0, 1)$.
- يتحرك الجسم في الاتجاه السالب عندما $v(t) < 0$؛ أي في الفترة $(1, \infty)$

**2) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم؟**

**يُمكن وصف سرعة الجسم بدراسة إشارة التسارع كما يأتي:**

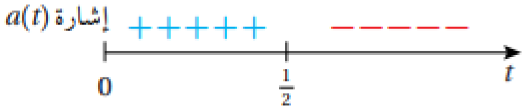
**الخطوة 1: أجد قيم t التي يكون عندها تسارع الجسم صفراً.**

**اقتران التسارع** $a(t) = v'(t) = s''(t) = 6 - 12t$

**بمساواة اقتران التسارع بالصفر** $6 - 12t = 0$

**بحل المعادلة لـ $t$** $t = \frac{1}{2}$

**الخطوة 2: أدرس إشارة التسارع.**



**الخطوة 3: أحدد فترات تزايد السرعة وفترات تناقصها.**

- **تكون سرعة الجسم متزايدة عندما $a(t) > 0$؛ أي في الفترة $(0, \frac{1}{2})$**
- **تكون سرعة الجسم متناقصة عندما $a(t) < 0$؛ أي في الفترة $(\frac{1}{2}, \infty)$**

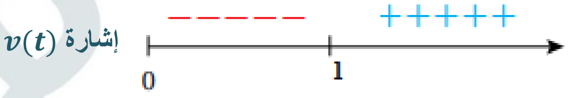
**أتحقق من فهمي:**

**يُمثل الاقتران: $s(t) = t^3 - 3t + 3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:**

**a) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟**

$$s(t) = t^3 - 3t + 3, t \geq 0$$

$$v(t) = 3t^2 - 3 = 0 \ \Rightarrow t = 1$$

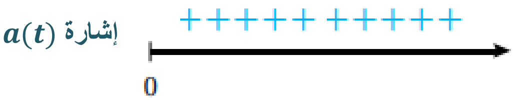


**يتحرك الجسم في الاتجاه السالب في الفترة $(0, 1)$**

**يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب في الفترة $(1, \infty)$**

**b) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم؟**

$$a(t) = 6t = 0 \Rightarrow t = 0$$

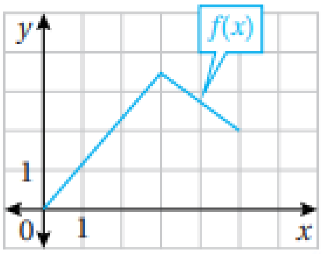


**تكون سرعة الجسم متزايدة في الفترة $(0, \infty)$ ولا تتناقص أبداً.**

## أتدرب وأحل المسائل:

**أجد القيم الحرجة والقيم القصوى المحلية والمُطلقة (إن وجدت) للاقتران الممثل بيانيا في كل مما يأتي:**

**1)**

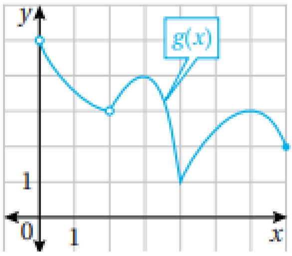


قيم $x$ الحرجة هي: $x = 3$ (المشتقة عندها غير موجودة)، ولا توجد قيم تكون عندها $f'(x) = 0$

توجد قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$

توجد قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 3$ هي $f(3) = 3.5$

**2)**



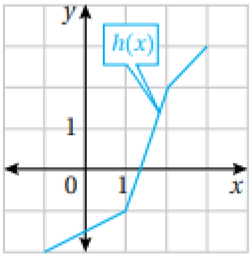
ألاحظ أن المشتقة تساوي صفرا عند $x = 3$، و $x = 6$، وأنها غير موجودة عند $x = 4$، إذن توجد 3 قيم حرجة هي $x = 3$، $x = 4$، $x = 6$

توجد قيمة صغرى محلية ومطلقة عند $x = 4$ هي $g(4) = 1$

توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 3$ هي $g(3) = 4$، وعند $x = 6$ هي $g(6) = 3$

لا توجد قيمة عظمى مطلقة.

**3)**



قيم $x$ الحرجة هي: $x = 1, x = 2$ (المشتقة عندهما غير موجودة)

توجد قيمة صغرى مطلقة هي $h(-1) = -2$

توجد قيمة عظمى مطلقة هي $h(3) = 3$

لا توجد قيمة قصوى محلية

**أجد القيمة العظمى المُطلقة والقيمة الصغرى المُطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة:**

**4)** $f(x) = 1 + 6x - 3x^2, [0, 4]$

$f(x) = 1 + 6x - 3x^2, [0, 4]$

$f'(x) = 6 - 6x = 0 \Rightarrow x = 1$

وتكون قيم $x$ الحرجة هي: $x = 1$

$f(0) = 1$

$f(1) = 4$

$f(4) = -23$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 4$ هي $f(4) = -23$

وله قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 1$ هي $f(1) = 4$

**5)** $f(x) = (x + 3)^{\frac{2}{3}} - 5, [-3, 3]$

$f(x) = (x + 3)^{\frac{2}{3}} - 5, [-3, 3]$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x + 3)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x + 3}}$$

$f'(x)$ لا تساوي صفرا لأي قيمة في الفترة (3 ,3-)، وهي غير موجودة عند $x = -3$

ولا توجد قيم حرجة في الفترة (3,3-).

$f(-3) = -5$

$f(3) = \sqrt[3]{36} - 5$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = -3$ هي $f(-3) = -5$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x = 3$ هي $f(3) = \sqrt[3]{36} - 5 \approx 1.7$

6) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, [-2, 2]$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, [-2, 2]$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x) - (x^2)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \ \Rightarrow x = 0$$

القيم الحرجة هي: $x = 0$

$$f(-2) = \frac{4}{5}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = \frac{4}{5}$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$

وله قيمة عظمى مطلقة عند $x = 2$ و $x = -2$ هي $\frac{4}{5}$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x}, [8, 64]$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, [8, 64]$$

$f'(x)$ موجودة ولا تساوي صفراً لأي عدد $x$ وهي موجبة لجميع قيم $x$ في $(8, 64)$، و $f(x)$ متزايد

$$f(8) = 2 , f(64) = 4$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 8$ هي $f(8) = 2$

وله قيمة عظمى مطلقة عند $x = 64$ هي $f(64) = 4$

8) $f(x) = 2\cos x + \sin 2s, [0, \frac{\pi}{2}]$

$$f(x) = 2\cos x + \sin 2s, [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$f'(x) = -2\sin x + 2\cos 2x = -2\sin x + 2(1 - 2\sin^2 x) = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$or\ \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$

القيمة الحرجة في الفترة $(0, \frac{\pi}{2})$ هي $x = \frac{\pi}{6}$ فقط.

$$f(0) = 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = \frac{\pi}{2}$ هي $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

وله قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = \frac{\pi}{6}$ هي $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.6$

9) $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}, [0, 3]$

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}, [0, 3]$$

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)e^x - 2xe^x}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow e^x(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow e^x(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

القيم الحرجة هي $x = 1$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{2}e$$

$$f(3) - \frac{1}{10}e^3$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 1$

وله قيمة عظمى مطلقة عند $x = 3$ هي $f(3) = \frac{1}{10}e^3 \approx 2.0$

**10)** $f(x)=\frac{\ln x}{x^2},[\frac{1}{2},4]$

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2},\left[\frac{1}{2},4\right]$$

$$f'(x)=\frac{(x^2)\left(\frac{1}{x}\right)-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}=0\Rightarrow \ln x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\sqrt{e}$$

القيمة الحرجة هي $x=\sqrt{e}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-4\ln 2\approx -2.8$$

$$f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}\approx 0.18$$

$$f(4)=\frac{1}{16}\ln 4=\frac{1}{8}\ln 2\approx 0.09$$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x=\frac{1}{2}$ هي $f\left(\frac{1}{2}\right)=-4\ln 2\approx -2.8$

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند $x=\sqrt{e}$ هي $f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}\approx 0.18$

**11)** $f(x)=cos\ x,[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$

$$f(x)=cos\ x,\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$$

$$f'(x)=-sin\ x=0\ \Rightarrow x=0$$

القيمة الحرجة هي $x=0$

$$f(0)=c0s\ (0)=1$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=cos\ \left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.87$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=cos\ \left(\frac{\pi}{3}\right)=0.5$$

للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x=0$ هي $f(0)=1$

وله قيمة صغرى مطلقة عند $x=\frac{\pi}{3}$ هي $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0.5$

**12)** $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, [-2, 2]$

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}, [-2, 2]$

$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0$

القيمة الحرجة هي $x = 0$

$f(-2) = 0$

$f(0) = 2$

$f(2) = 0$

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند $x = -2, x = 2$ هي $0$

للاقتران قيمة عظمى محلية ومطلقة عند $x = 0$ هي $f(0) = 2$

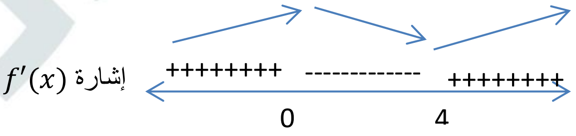
**أجد فترات التزايد وفترات التناقص لكل اقتران مما يأتي، ثم أجد القيم القصوى المحلية:**

**13)** $f(x) = x^3 - 6x^2 - 135$

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 135$

$f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad or\ x = 4$

القيم الحرجة هي $x = 0, x = 4$



$f$ متزايد على $(-\infty, 0), (4, \infty)$

$f$ متناقص على $(0, 4)$

له قيمة عظمى محلية هي $f(0) = -135$

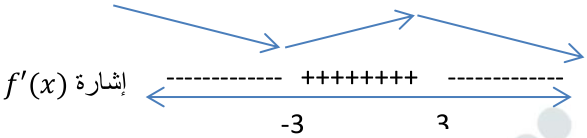
له قيمة صغرى محلية هي $f(4) = -167$

**14)** $f(x) = \frac{2x}{x^2+9}$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+9}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+9)(2)-(2x)(2x)}{(x^2+9)^2} = 0 \Rightarrow \frac{18-2x^2}{(x^2+9)^2} = 0 \Rightarrow x = 3 \;\; or \; x = -3$$

القيم الحرجة هي $x = 3 , x = -3$



$f$ متزايد على $(-\infty,-3),(3,\infty)$

$f$ متناقص على (-3,3)

له قيمة عظمى محلية هي $f(3) = \frac{1}{3}$

له قيمة صغرى محلية هي $f(-3) = -\frac{1}{3}$

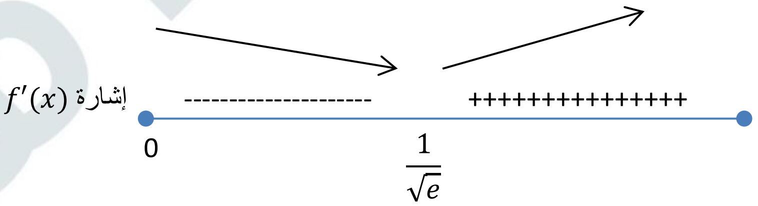
**15)** $f(x) = x^2 \ln x$

$$f(x) = x^2 \ln x\,, \quad x > 0$$

$$f'(x) = (x^2)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(2x) = 0 \Rightarrow x(1 + 2\ln x) = 0$$

$$\Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

القيمة الحرجة هي $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$



$f$ متزايد على $(\frac{1}{\sqrt{e}},\infty)$

$f$ متناقص على $(0,\frac{1}{\sqrt{e}})$

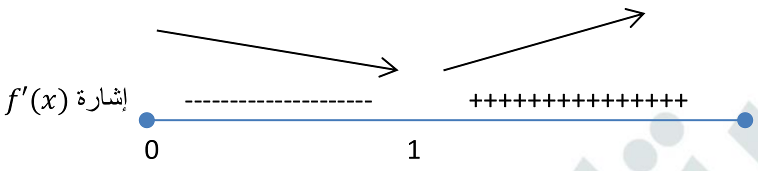
له قيمة صغرى محلية هي $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$

16) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

$$f'(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = 0 \Rightarrow x = 1$$

القيمة الحرجة هي $x = 1$



$f$ متزايد على $(1, \infty)$

$f$ متناقص على $(-\infty, 1)$

له قيمة صغرى محلية هي $f(1) = 1$

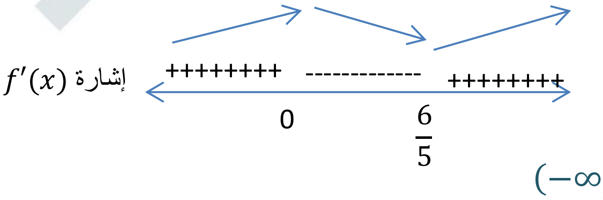
17) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x - 3)$

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x - 3) = x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{5x - 6}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$$

وكذلك $f'(x)$ غير موجودة عند $x = 0$

يوجد له قيمتان حرجتان هما $x = \frac{6}{5}, x = 0$



$f$ متزايد على $(-\infty, 0), (\frac{6}{5}, \infty)$

$f$ متناقص على $(0, \frac{6}{5})$

له قيمة صغرى محلية هي $f\left(\frac{6}{5}\right) = -\frac{9}{5}(\frac{6}{5})^{\frac{2}{3}}$

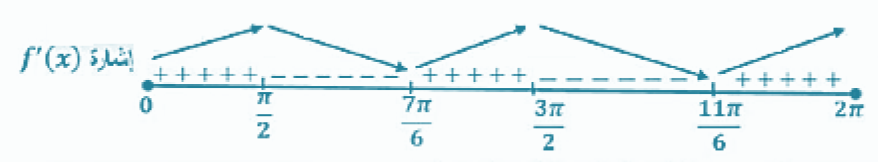
له قيمة عظمى محلية هي $f(0) = 0$

**18)** $\boldsymbol{f(x) = \sin^2 x + \sin x, [0, 2\pi]}$

$f(x) = \sin^2 x + \sin x, [0, 2\pi]$

$f'(x) = 2\cos x \sin x + \cos x = \cos x\,(2\sin x + 1) = 0$

$\Rightarrow \cos x = 0 \text{ or } \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$



$f$ متزايد على $\left(0,\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right)$

$f$ متناقص على $\left(\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6}\right), \left(\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6}\right)$

له قيمة صغرى محلية هي $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}, f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}$

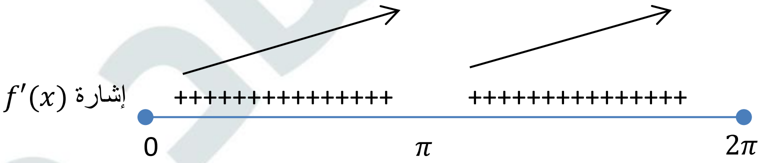
له قيمتان عظميان محليتان هي $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

**19)** $\boldsymbol{f(x) = x + \sin x, [0, 2\pi]}$

$f(x) = x + \sin x, [0, 2\pi]$

$f'(x) = 1 + \cos x = 0 \;\Rightarrow \cos x = -1 \;\Rightarrow x = \pi$

القيمة الحرجة هي $x = \pi$



$f$ متزايد على $(0, 2\pi)$

ليس له قيم قصوى محلية

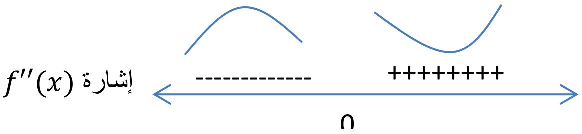
أجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي:

**20)** $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 12x + 1}$

$f(x) = x^3 - 12x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$



$f$ مقعر للأعلى في $(0, \infty)$

$f$ مقعر للاسفل في $(-\infty, 0)$

للاقتران $f$ نقطة انعطاف هي $(0, 1)$

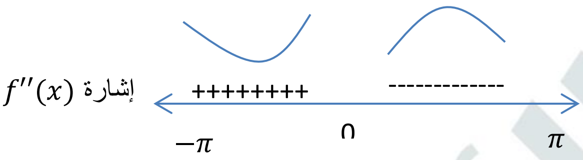
**21)** $f(x)=\sin x,[-\pi,\pi]$

$f(x)=\sin x,[-\pi,\pi]$

$f'(x)=xos\ x$

$f''(x)=\ -\sin x$

$f''(x)=0\ \Rightarrow x=-\pi, x=0\ , x=\pi$



إذن منحنى $f(x)$ مقعر لأعلى في $(-\pi,0)$، ومقعر لأسفل في $(0,\pi)$.

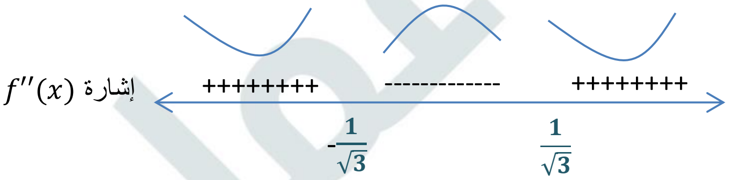
وتوجد له نقطة انعطاف هي $(0, 0)$

**22)** $f(x)=\frac{3}{x^2+1}$

$$f(x)=\frac{3}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{-6x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(x^2+1)^2(-6)-(-24x^2)(x^2+1)}{(x^2+1)^4}=\frac{18x^2-6}{(x^2+1)^3}=0\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$



$f$ مقعر للأعلى في $(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty)$، $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}})$

$f$ مقعر للاسفل في $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$

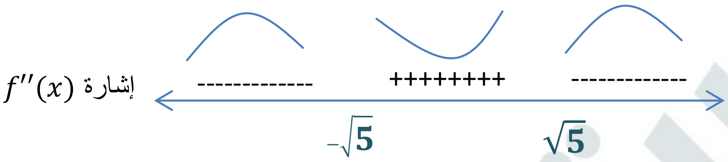
وله نقطتا انعطاف هما: $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{9}{4})$ و $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{9}{4})$

**23)** $f(x) = \ln(x^2+5)$

$$f(x) = \ln(x^2+5)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+5}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+5)(2)-(2x)(2x)}{(x^2+5)^2} = \frac{10-2x^2}{(x^2+5)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$



$f$ مقعر للأعلى على $(-\sqrt{5},\sqrt{5})$

$f$ مقعر للأسفل على $(\sqrt{5},\infty)$، $(-\infty,-\sqrt{5})$

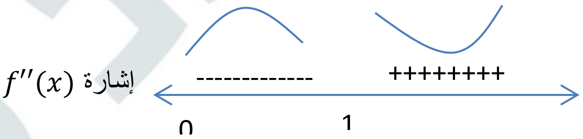
وله نقطتا انعطاف هما: $(\sqrt{5},\ln 10)$ و $(-\sqrt{5},\ln 10)$

**24)** $f(x) = \sqrt{x}(x+3)$

$$f(x) = \sqrt{x}(x+3) = x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}, x \geq 0$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}, x > 0$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{x\sqrt{x}}\right) = 0 \ \Rightarrow x = 1$$



$f$ مقعر للأعلى على $(1,\infty)$،

$f$ مقعر للأسفل على $(0,1)$

وله نقطة انعطاف هي: (1,4)

25) $f(x) = xe^x$

$f(x) = xe^x$

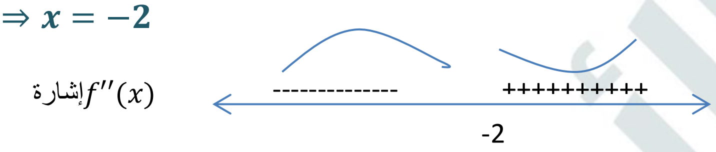
$f'(x) = xe^x + e^x$

$f''(x) = xe^x + e^x + e^x = e^x(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$

$f$ مقعر للأعلى على $(-2, \infty)$

$f$ مقعر للأسفل على $(-\infty, -2)$

وله نقطة انعطاف هي: $(-2, -2e^{-2})$



**أجد القيم القصوى المحلية لكل اقتران مما يأتي، مُستعملا اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن):**

26) $f(x) = 6x - x^2$

$f(x) = 6x - x^2$

$f'(x) = 6 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3$

$f''(x) = -2 \Rightarrow f''(3) = -2 < 0$

قيمة عظمى محلية هي $f(3) = 9$ للاقتران $f$

27) $f(x) = cosc - x, [0, 4\pi]$

$f(x) = cosc - x, [0, 4\pi]$

$f'(x) = -\sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{2}$

$f''(x) = -\cos x$

$\Rightarrow f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0\ , f''\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 0$

ويكون اختبار المشتقة الثانية قد فشل في تحديد نوع القيم $f(\frac{7\pi}{2})$، $f(\frac{3\pi}{2})$، لذا نستخدم اختبار المشتقة الأولى والذي يعتمد على دراسة إشارتها:

نلاحظ أن $f'(x)$ لا تغير إشارتها أبداً، إذن ليس للاقتران $f$ قيم قصوى محلية.

**28) $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$**

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)(2x)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow x=0,x=2$$

$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$

$$f''(0)=-2<0,f''(2)=2>0$$

للاقتران $f$ قيمة عظمى محلية هي $f(0)=0$، وله قيمة صغرى محلية هي $f(2)=4$

**29) $f(x)=x\ \ln x$**

$$f(x)=x\ \ln x$$

$$f'(x)=(x)\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x=1+\ln x=0\Rightarrow\ln x=-1\Rightarrow x=e^{-1}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}$$

$$\rightarrow f''(e^{-1})=e>0$$

للاقتران $f$ قيمة صغرى محلية هي $f'(e^{-1})=e^{-1}$

**30) $f(x)=\frac{x}{2^x}$**

$$f(x)=\frac{x}{2^x}$$

$$f'(x)=\frac{2^x-(x)(2^x\ln 2)}{2^{2x}}=2^{-x}-(x)(2^{-x}\ln 2)=2^{-x}(1-x\ln 2)=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{\ln 2}$$

$$f''(x)=(2^{-x})(-\ln 2)+(1-x\ln 2)(-2^{-x}\ln 2)$$

$$=-2^{-x}\ln 2(2-x\ln 2)$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{1}{\ln 2}\right)=-2^{-\frac{1}{\ln 2}}\ln 2\left(2-\frac{1}{\ln 2}\times\ln 2\right)==-2^{-\frac{1}{\ln 2}}\ln 2<0$$

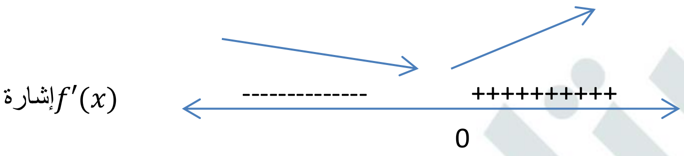
للاقتران $f$ قيمة عظمى محلية هي $f\left(\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{\frac{1}{\ln 2}}{2^{\frac{1}{\ln 2}}}$

**31) $f(x) = x^{2/3} - 3$**

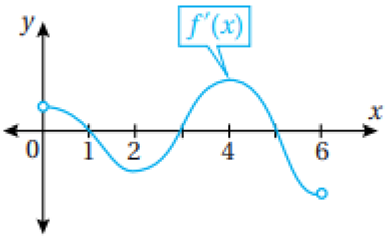
$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 3$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{3}}$$

$f'(x)$ لا تساوي صفرا أبدا، لكنها غير موجودة عند $x = 0$، فلا يمكن تطبيق اختبار المشتقة الثانية لمعرفة القيم القصوى، لذا نستخدم اختبار المشتقة الأولى بدراسة إشارتها:



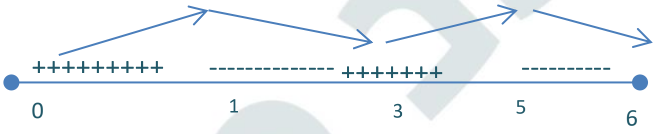
للاقتران $f$ قيمة صغرى محلية هي $f(0) = -3$



يُبين الشكل المجاور منحنى المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ المتصل على الفترة $[0, 6]$. استعمل التمثيل البياني لإيجاد كل مما يأتي:

32) قيم $x$ التي يكون عندها للاقتران $f$ قيم قصوى محلية، مبينا نوعها.

نلاحظ من الرسم المعطى أن $f'(x) = 0$ عند $x = 1, x = 3, x = 5$، وأن إشارة $f'(x)$ على النحو الآتي :



للاقتران $f$ قيمة صغرى محلية عند $x = 3$

للاقتران $f$ قيمة عظمى محلية عند $x = 1, x = 5$

33) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران $f$

الاقتران $f$ متزايد على $(0,1)$, $(3,5)$ ومتناقص على $(1,3)$, $(5,6)$

34) إذا كان للاقتران: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ قيمة عظمى محلية عندما $x = -3$، وقيمة صغرى محلية عند النقط (1, -14)، فأجد قيمة كل من الثوابت: .c, b, a

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

الاقتران $f$ كير حدود فهو قابل للاشتقاق على R، بما أن كل نقطة قيمة قصوى هي نقطة حرجة،

فإن $f'(-3) = 0, f'(1) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(-3) = 27 - 6a + b = 0 \ldots\ldots(1)$$

$$f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \ldots\ldots(2)$$

النقطة (1,-14) تقع على منحنى الاقتران، لذا فإن $f(1) = -14$

$$f(1) = 1 + a + b + c = -14 \ldots\ldots(3)$$

بطرح المعادلتين (1) و (2) نجد أن: $a = 3$

ثم بتعويض قيمة $a$ في المعادلة (2) نجد أن: $b = -9$

ثم بتعويض قيمة كل من a و b في المعادلة (3) نجد أن: $c = -9$

35) إذا كان للاقتران: $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{b}{x}$ نقطة انعطاف عندما $x = 3$، فأجد قيمة الثابت b

$$f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{b}{x}$$

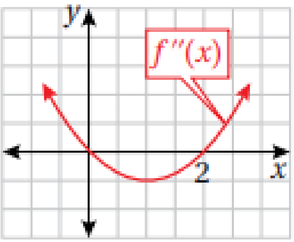
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{b}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{4(x+1)\sqrt{x+1}} + \frac{2b}{x^3}$$

بما أنه يوجد نقطة انعطاف عند $x = 3$ فإما أن يكون $f''(3) = 0$ أو $f''(3)$ غير موجودة،

لكن بالنظر إلى قاعدة الاقتران $f''$ فإن $f''(x)$ غير موجودة عند $x = -1$ و $x = 0$، إذن $f''(3) = 0$، ومنه:

$$f''(3) = \frac{-1}{32} + \frac{2b}{27} = 0 \ \Rightarrow b = \frac{27}{64}$$



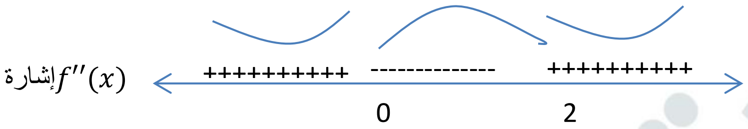
أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f''(x)$ لإيجاد كل مما يأتي:

36) فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران $f$

نلاحظ من الشكل أن $f''(x) = 0$ عند $x = 2, x = 0$، وأن إشارة $f''(x)$ على النحو الآتي:

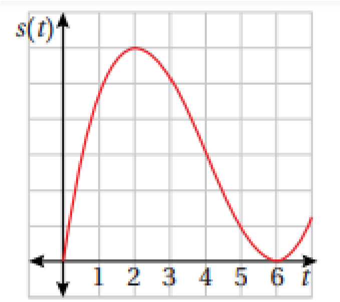
$f$ مقعر للأسفل على $(0, 2)$

$f$ مقعر للأعلى على $(2, \infty), (-\infty, 0)$



37) الإحداثي $x$ لنقاط انعطاف منحنى الاقتران $f$

توجد نقطتا انعطاف عند $x = 2, x = 0$



يمثل الاقتران $s(t)$ المبين منحناه في الشكل المجاور

موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم،

حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

38) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

يكون الجسم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$ أي: $s'(t) = 0$ وهذا يحدث عندما يكون لمنحنى $s(t)$ مماس أفقي، أي عند $t = 2$ و $t = 6$

39) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟

يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب أو السالب تبعا لإشارة $s'(t) = v(t)$، وهذه الإشارة ترتبط بكون منحنى $s(t)$ متزايدا أو متناقصا:

يتحرك الجسم بالاتجاه الموجب في كل من الفترتين: (6,7) , (0,2) لأن اقتران الموقع متزايد فيهما.

ويتحرك في الاتجاه السالب في الفترة (2,6) لأن اقتران الموقع متناقص فيها.

40) إذا كان تسارع الجسم صفرا عندما $t = 4$، فما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم؟

تتزايد $v(t)$ عندما $s''(t) = v'(t)$ يكون موجبا

أي عندما يكون منحنى $s(t)$ مقعرا للأعلى، أي في الفترة (4,7)

تتناقص $v(t)$ عندما $s''(t) = v'(t)$ يكون سالبا

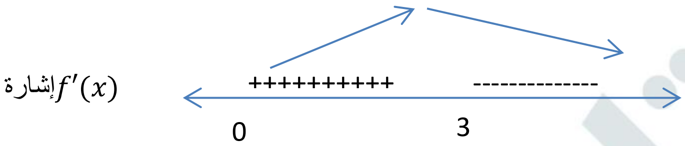
أي عندما يكون منحنى $s(t)$ مقعرا للأسفل، أي في الفترة (0, 4)

**41) مكبرات صوت: يُمثل الاقتران: $f(x) = \frac{1500}{x^2-6x+10} - 150$ الربح الأسبوعي (بالدينار) لأحد المصانع من إنتاجه، حيث $x$ عدد مكبرات الصوت المبيعة. أجد عدد مكبرات الصوت الذي يحقق أكبر ربح ممكن.**

$$f(x) = \frac{1500}{x^2-6x+10} - 150$$

$$f'(x) = \frac{-1500(2x-6)}{(x^2-6x+10)^2} = 0 \Rightarrow x = 3$$

القيمة الحرجة الوحيدة هي $x = 3$ لأن المقام لا يساوي صفرا



بدراسة إشارة $f'(x)$ نلاحظ أن للاقتران $f$ قيمة عظمى عندما $x = 3$،

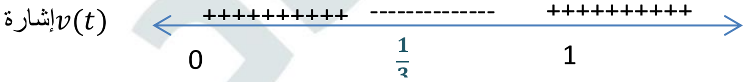
أي أن عدد مكبرات الصوت اللازم إنتاجها وبيعها لتحقيق أكبر ربح أسبوعي ممكن هو 3

**يُمثل الاقتران: $s(t) = t^3 - 2t^2 + t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:**

**42) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب والاتجاه السالب؟**

$$s(t) = t^3 - 2t^2 + t, t \geq 0$$

$$v(t) = 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow (3t-1)(t-1) = 0 \Rightarrow t = 1, t = \frac{1}{3}$$



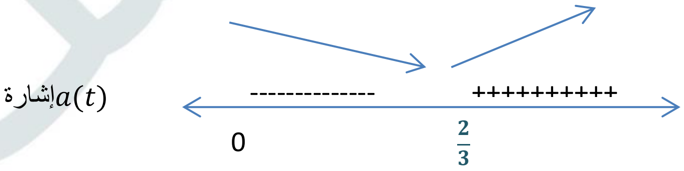
يتحرك الجسم بالاتجاه الموجب في كل من الفترتين: $(0, \frac{1}{3}), (1, \infty)$

ويتحرك في الاتجاه السالب في الفترة $(\frac{1}{3}, 0)$

**43) ما الفترات التي تتزايد فيها سرعة الجسم؟ وما الفترات التي تتناقص فيها سرعة الجسم؟**

تتزايد $v(t)$ وتتناقص وفقا لإشارة $a(t) = v'(t)$

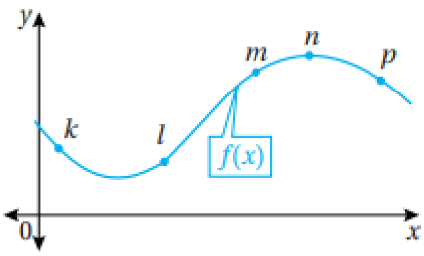
$$a(t) = 6t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$$



تتزايد سرعة الجسم في الفترة $(\frac{2}{3}, \infty)$ وتتناقص على الفترة $(0, \frac{2}{3})$

## مهارات التفكير العليا

**تبرير:** يُبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$ أحدد النقطة (النقاط) من بين مجموعة النقاط: $\{k, l, m, n, p\}$ على منحنى الاقتران التي تُحقق كلا من الشروط الآتية، مبررا إجابتي:



**44) أن تكون إشارة كل من $f'(x)$ و $f''(x)$ موجبة**

تكون $f'(x) > 0$، و $f''(x) > 0$ عند النقاط التي يكون عندها الاقتران $f$ متزايدا ومنحناه مقعرا للأعلى.

النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي: $l$

**45) أن تكون إشارة كل من $f'(x)$، و $f''(x)$ سالبة.**

تكون $f'(x) < 0$، و $f''(x) < 0$ عند النقاط التي يكون عندها الاقتران $f$ متناقصا ومنحناه مقعرا للأسفل.

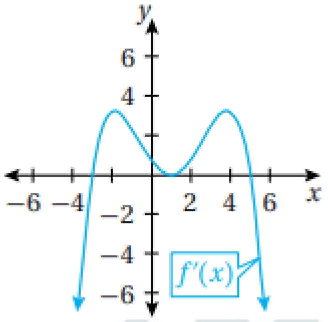
النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي: $p$

**46) أن تكون إشارة $f'(x)$ سالبة، وإشارة $f''(x)$ موجبة.**

تكون $f'(x) < 0$، و $f''(x) > 0$ عند النقاط التي يكون عندها الاقتران $f$ متناقصا ومنحناه مقعرا للأعلى.

النقطة التي تحقق هذين الشرطين من بين النقاط المحددة على الرسم هي: $k$

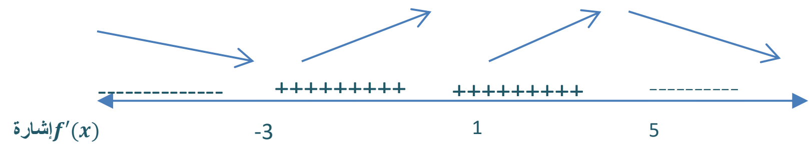
**تبرير:** أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f'(x)$ لإيجاد كل مما يأتي، مبررا إجابتي:



**47) قيم $x$ التي يكون عندها للاقتران $f$ قيم قصوى محلية، مبينا نوعها**

نلاحظ من الرسم أن $f'(x) = 0$ عند $x = -3, x = 1, x = 5$،

وأن إشارة $f'(x)$ على النحو الآتي:



للاقتران $f$ قيمة صغرى محلية عند $x = -3$

وله قيمة عظمى محلية عند $x = 5$

**48) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران $f$.**

الاقتران $f$ متزايد على (-3,5) ومتناقص على $(-\infty, -3), (5, \infty)$

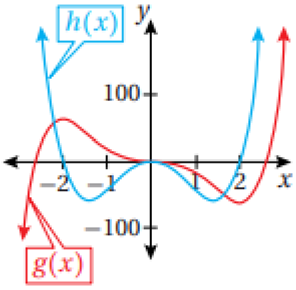
**49) فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران $f$**

يكون منحنى $f$ مقعرا للأعلى في الفترة (أو الفترات) التي يكون فيها $f'$ متزايدا حيث تكون في هذه الفترات مشتقة $f'$ أي $f''$ موجبة.
يتضح من الرسم أن $f'$ متزايدة في الفترتين: $(-\infty,-2),(1,4)$ وعندما تكون $f'$ متناقصة في فترة ما تكون $f''$ سالبة ويكون منحنى $f$ مقعرا للأسفل، ويتضح من الرسم أن $f'$ متناقصة في الفترتين: $(4,\infty),(-2,1)$
إذن، منحنى $f$ مقعر للأسفل في الفترتين $(4,\infty),(-2,1)$ ومقعر للأعلى في الفترتين $(-\infty,-2),(1,4)$

**50) الإحداثي $x$ لنقاط الانعطاف**

$f$ له ثلاث نقاط انعطاف عند $x=-2, x=1, x=4$ لأن للاقتران $f'$ قيم قصوى عندها.

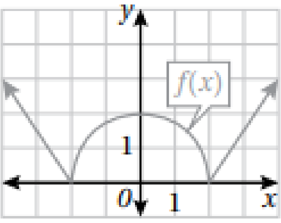
**51) تحدٍ: أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى الاقترانين: $h(x)$ و $g(x)$**
**لتحديد الاقتران الذي يُمثل مشتقة للآخر، مبررا إجابتي.**



$h(x)$ هو مشتقة $g(x)$ أي $g'(x)=h(x)$ وليس العكس.
التبرير: بما أن أحدهما هو مشتقة الآخر (من المعطيات)،
يكفي ملاحظة الفترة $x=-2$ حيث g متزايد و h أكبر من الصفر،
وهذا ينسجم مع كون h هو مشتقة g
بينما في هذه الفترة نفسها h متناقص و g لا يحافظ على الإشارة السالبة، وهذا يؤكد أن g ليس مشتقة h والنظر لباقي الفترات بالمنهجية نفسها يؤدي إلى ذات النتيجة.
كذلك للاقتران g قيمة عظمى محلية عند $x=-2$، ونلاحظ أن $h(-2)=0$، ما يؤكد أن $g'(x)=h(x)$.

## كتاب التمارين

## الدرس الثاني- القيم القصوى والتقعر



**1) أجد القيم الحرجة والقيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت) للاقتران $f(x)$ الممثل بيانيا في الشكل المجاور.**

القيم الحرجة هي: $x = -2, x = 2$ لأن المشتقة الأولى غير موجودة عند كل منها، وكذلك $x = 0$ لأن المشتقة الأولى تساوي صفرا عندها

للاقتران قيمة عظمى محلية هي: $f(0) = 2$،

وله قيمة صغرى محلية ومطلقة هي: $f(-2) = f(2) = 0$

**أجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة:**

**2)** $f(x) = 1 + cos^2 x, [\frac{\pi}{4}, \pi]$

$$f'(x) = -2\, cos\, x\, sin\, x = -sin\, 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow sin\, 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$$

يوجد قيمة حرجة وحيدة في الفترة $(\frac{\pi}{4}, \pi)$ هي $x = \frac{\pi}{2}$

نقارن قيمة الاقتران عند النقطة الموجبة مع قيمته عند طرفي المجال

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + cos^2\frac{\pi}{2} = 1$$

$$f(\pi) = 1 + cos^2\pi = 2$$

القيمة العظمى المطلقة للاقتران $f$ هي: $f(\pi) = 2$

القيمة الصغرى المطلقة للاقتران $f$ هي: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

3) $f(x) = (x^2 - 4)^3, [-2, 3]$

$f(x) = 6x(x^2 - 4)^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x(x^2 - 4)^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 2$

يوجد قيمتان حرجتان في الفترة (-2,3) هما $x = 0, x = 2$

نقارن قيم الاقتران عند النقط الحرجة مع قيمته عند طرفي المجال

$f(-2) = 0$

$f(0) = -64$

$f(2) = 0$

$f(3) = 125$

القيمة العظمى المطلقة للاقتران $f$ هي: $f(3) = 125$

القيمة الصغرى المطلقة للاقتران $f$ هي: $f(0) = -64$

4) $f(x) = x - 2\sin x, [-2\pi, 2\pi]$

$f'(x) = 1 - 2\cos x$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}, x = -\frac{\pi}{3}, x = -\frac{5\pi}{3}$$

نقارن قيم الاقتران عند النقط الحرجة مع قيمته عند طرفي المجال.

$f(-2\pi) = -2\pi \approx -6.28$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 0.68$$

$$f\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{5\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -6.97$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx= 0.68$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6.97$$

$f(2\pi) = 2\pi \approx 6.28$

القيمة العظمى المطلقة للاقتران $f$ هي: $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) \approx 6.97$

القيمة الصغرى المطلقة للاقتران $f$ هي: $f\left(-\frac{5\pi}{3}\right) \approx 6.97$

5) $f(x)=x\ln(x+3), [0,3]$

$$f'(x)=\frac{x}{x+3}+\ln(x+3)$$

بدراسة إشارة كل من $\frac{x}{x+3}$ و $\ln(x+3)$ نجد أن $\frac{x}{x+3}+\ln(x+3)>0$ مما يعني أن $f'(x)\neq 0$، لذا نبحث عن قيم يكون عندها $f'(x)$ غير موجودة في الفترة المعطاة

$\frac{x}{x+3}$ غير معرف عندما $x=-3$، $\ln(x+3)$ غير معرف عندما $x<-3$ وهما خارج مجال الاقتران، وبما أن $f'(x)>0$، والاقتران متصل في مجاله، فإنه يأخ1 القيم القصوى عند طرفي مجاله.

نقارن قيمتي الاقتران عند $x=0, x=3$

$$f(0)=0$$
$$f(3)=3\ln 6$$

القيمة العظمى المطلقة للاقتران $f$ هي: $f(3)=3\ln 6$

القيمة الصغرى المطلقة للاقتران $f$ هي: $f(0)=0$

6) $f(x)=x+\frac{4}{x}, [-8,-1]$

$$f'(x)=1-\frac{4}{x^2}$$
$$f'(x)=0\ \Rightarrow x=\pm 2$$

$f'(x)$ غير موجودة عندما $x=0$ والاقتران غير معرف عندها فلا تعد قيمة حرجة

إذن القيمة الحرجة الوحيدة في الفترة (-8,-1) هي: $x=-2$

نقارن قيمة الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

$$f(-8)=-8-\frac{1}{2}=-8.5$$
$$f(-2)=-2-2=-4$$
$$f(-1)-1-4=-5$$

القيمة العظمى المطلقة للاقتران $f$ هي: $f(-2)=-4$

القيمة الصغرى المطلقة للاقتران $f$ هي: $f(-8)=-8.5$

7) $f(x) = 5e^{x} - e^{2x}, [-1, 2]$

$$f'(x) = 5e^{x} - e^{2x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{x}(5 - 2e^{x}) = 0 \ \Rightarrow e^{x} = \frac{5}{2} \rightarrow x = \ln\frac{5}{2}$$

أذن القيمة الحرجة الوحيدة في مجاله هي: $x = \ln\frac{5}{2}$

نقارن قيمة الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمته عند طرفي المجال.

$$f(-1) = 5e^{-1} - e^{-2} = \frac{5}{e} - \frac{1}{e^{2}} \approx 1.70$$

$$f(\ln\frac{5}{2}) = 5\,e^{\ln\frac{5}{2}} - e^{2\ln\frac{5}{2}} = 5e^{\ln\frac{5}{2}} - e^{\ln\frac{25}{2}} = \frac{25}{2} - \frac{25}{4} = \frac{25}{4} = 6.25$$

$$f(2) = 5e^{2} - e^{4} \approx -17.65$$

القيمة العظمى المطلقة للاقتران $f$ هي: $f(\ln\frac{5}{2}) = \frac{25}{4}$

القيمة الصغرى المطلقة للاقتران $f$ هي: $f(2) = 5e^{2} - e^{4} \approx -17.65$

**أجد فترات التزايد وفترات التناقص، ثم أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي:**

8) $f(x) = \sin x + \cos x, [0, 2\pi]$

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

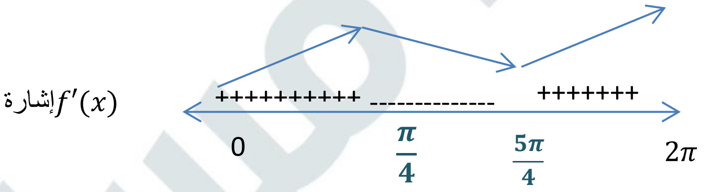
$$f'(x) = 0 \ \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$$

للاقتران قيمة عظمى محلية هي: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

وله قيمة صغرى محلية هي: $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

الاقتران $f$ متزايد على $(0, \frac{\pi}{4})$، و $(\frac{5\pi}{4}, 2\pi)$

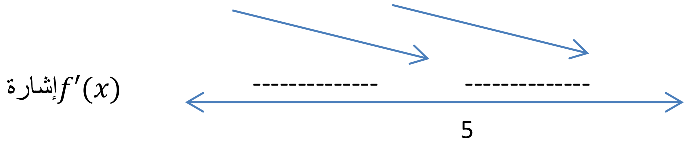
الاقتران $f$ متناقص على $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$



9) $f(x)=\frac{x}{x-5}$

$$f'(x)=\frac{x-5-x}{(x-5)^2}=\frac{-5}{(x-5)^2}$$

$f'(x)\neq 0$ وإشارتها سالبة لجميع الأعداد الحقيقية في مجال الاقتران لأن البسط سالب والمقام موجب، $f'(x)$ غير موجودة عندما $x=5$ و $f$ غير معرف عندها.



الاقتران $f$ متناقص على $(5,\infty)$، و $(-\infty,5)$

ولا يوجد له قيم قصوى.

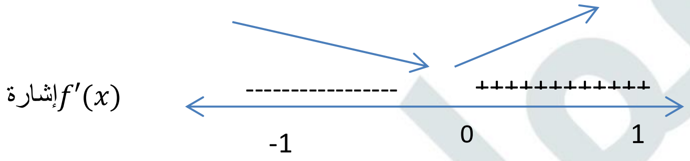
10) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

$$f'(x)=\frac{2}{3}x\,(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=0$$

$f'(x)$ غير موجودة عندما $x=\pm1$

إذن القيم الحرجة هي: $x=0, x=\pm1$



للاقتران قيمة صغرى محلية هي: $f(0)=-1$

الاقتران $f$ متزايد على $(0,\infty)$ ومتناقص على $(-\infty,0)$

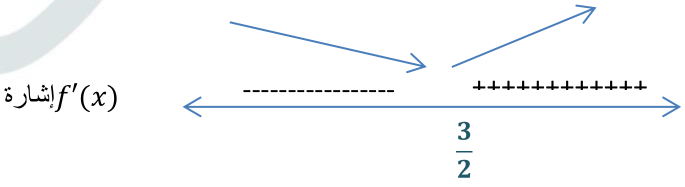
11) $f(x)=\ln(x^2-3x+4)$

مجال $f$ هو $R$ لأن العبارة $(x^2-3x+4)$ مميزها سالب، وإشارتها موجبة لكل عدد حقيقي $x$

$$f'(x)=\frac{2x-3}{x^2-3x+4}$$

$$f(x)=0\ \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

إذن القيمة الحرجة هي: $x=\frac{3}{2}$



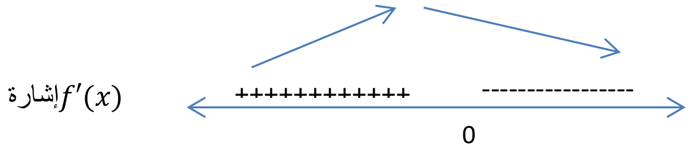
للاقتران قيمة صغرى محلية هي: $f\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\left(\frac{7}{4}\right)$

الاقتران $f$ متزايد على $\left(\frac{3}{2},\infty\right)$ ومتناقص على $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$

$f(x) = e^{-x^2}$ (12

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

إذن القيمة الحرجة هي: $x = 0$



للاقتران قيمة عظمى محلية هي: $f(0) = 1$

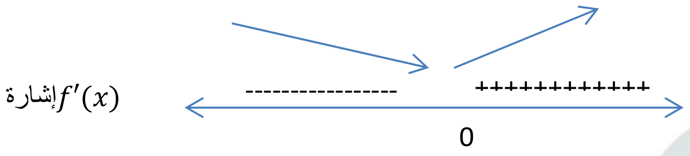
الاقتران $f$ متزايد على $(-\infty, 0)$ ومتناقص على $(0, \infty)$

$f(x) = 2^{x^2-3}$ (13

$f'(x) = 2x(\ln 2)2^{x^2-3}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

إذن القيمة الحرجة هي: $x = 0$



للاقتران قيمة صغرى محلية هي: $f(0) = \frac{1}{8}$

الاقتران $f$ متزايد على $(0, \infty)$ ومتناقص على $(-\infty, 0)$

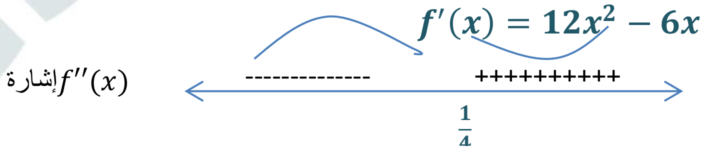
أجد فترات التقعر إلى الأعلى وإلى الأسفل ونقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي:

$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 12$ (14

$f'(x) = 12x^2 - 6x - 6$

$f''(x) = 24x - 6$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

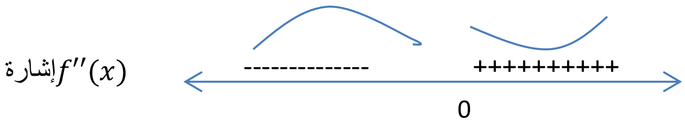


الاقتران $f$ مقعر للأعلى في $(\frac{1}{4}, \infty)$ ومقعر للأسفل في $(-\infty, \frac{1}{4})$

وله نقطة انعطاف هي: $(\frac{1}{4}, \frac{83}{8})$

$f(x) = x^3 - 3x$ (15

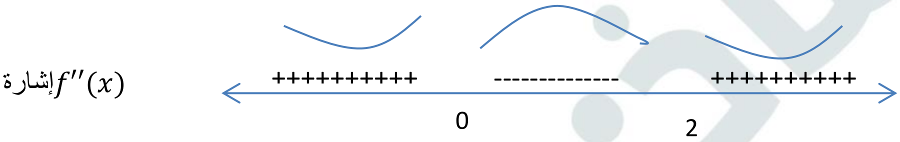
$$f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$



الاقتران $f$ مقعر للأعلى في $(0, \infty)$، ومقعر للأسفل في $(-\infty, 0)$ وله نقطة انعطاف هي: $(0, 0)$

$f(x) = 2 + 2x - x^2)^2$ (16

$$f'(x) = (4 - 4x)(2 + 2x - x^2)$$
$$f''(x) = -4(2 + 2x - x^2) + (4 - 4x)(2 - 2x) = 12x^2 - 24x$$
$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$



الاقتران $f$ مقعر للأعلى في $(2, \infty)$ و $(-\infty, 0)$ ومقعر للأسفل في $(0,2)$

وله نقطتا انعطاف هما: $(2. 4), (0, 4)$

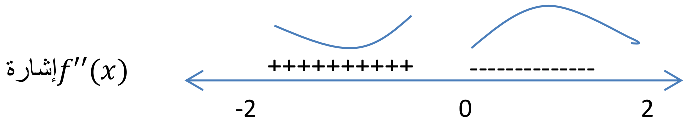
$f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ (17

$$f'(x) = \frac{-x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + \sqrt{4 - x^2} = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{-4x\sqrt{4 - x^2} - (4 - 2x^2) \times \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}}{4 - x^2} = \frac{-12x + 2x^3}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2x(x^2 - 6) = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{6}$$

مجال هذا الاقتران هو [-2, 2]، فالعددان $\pm\sqrt{6}$ خارج مجاله.



الاقتران $f$ مقعر للأعلى في $(-2, 0)$

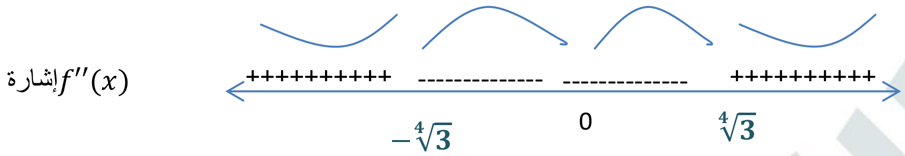
ومقعر للأسفل في $(0, 2)$ وله نقطة انعطاف هي $(0,0)$

$f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ (18

$$f'(x) = 2x + \frac{2}{x^3}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{6}{x^4}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^4 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{3}$$



**الاقتران f مقعر للأعلى في $(\sqrt[4]{3},\infty),(-\infty,-\sqrt[4]{3})$ ومقعر للأسفل في $(-\sqrt[4]{3},0)$ و $(0,\sqrt[4]{3})$**

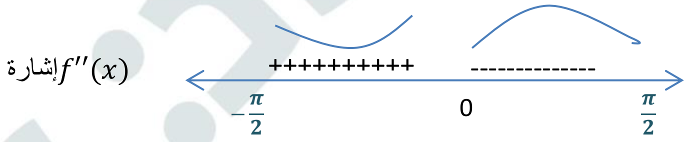
**وله نقطتا انعطاف هما: $(\sqrt[4]{3},\frac{2}{\sqrt{3}}),(-\sqrt[4]{3},\frac{2}{\sqrt{3}})$**

$f(x) = 2x - \tan x, (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ (19

$$f'(x) = 2 - \sec^2 x$$

$$f''(x) = -2\sec^2 x \tan x = -\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$$f''(x) = 0 \to \sin x = 0 \to x = 0$$



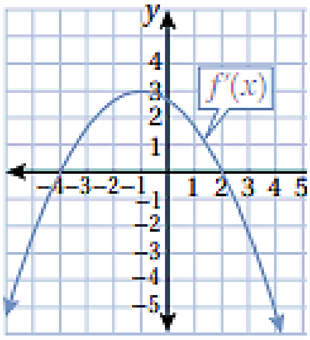
**$f''(x)$ غير موجودة عندما $\cos x = 0$، لكن $\cos x \neq 0$ في الفترة المحددة بالسؤال**

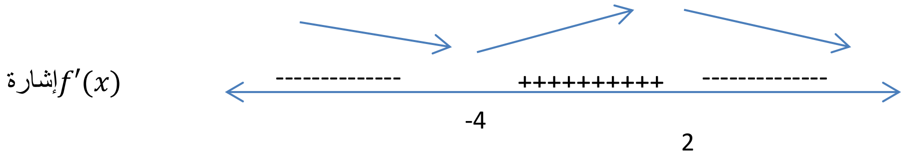
**الاقتران f مقعر للأعلى في $(-\frac{\pi}{2},0)$ ومقعر للأسفل في $(0,\frac{\pi}{2})$**

**وله نقطة انعطاف هي (0,0)**

**أستعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f'(x)$ لإيجاد كل مما يأتي:**

**20) قيم x التي يكون عندها للاقتران f قيم قصوى محلية، مُبينا نوعها.**





**للاقتران قيمة صغرى محلية عند: $x = -4$**

**للاقتران قيمة عظمى محلية عند: $x = 2$**

**21) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران $f$.**

الاقتران $f$ متزايد على $(-4, 2)$ ومتناقص على $(-\infty, -4)$و $(2, \infty)$

**أجد القيم القصوى المحلية لكل اقتران مما يأتي، مستعملاً اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن):**

**22)** $f(x) = 2\sin x + \cos 2x\,, [0, 2\pi]$

$$f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x - 4\sin x\cos x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\cos x\,(1 - 2\sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = 0 \text{ or } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$$

إذن القيمة الحرجة هي: $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$

$$f''(x) = -2\sin x - 4\cos 2x$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 + 4 = 2 > 0$$

$$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 + 4 > 0$$

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1 - 2 > 0$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -1 - 2 < 0$$

للاقتران قيم صغرى محلية هي: $\mathrm{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \mathrm{f}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$

للاقتران قيمة عظمى محلية هي: $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$

**23) $f(x) = x^3 + \frac{48}{x}$**

$$f(x) = x^3 + \frac{48}{x}, x \neq 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{48}{x^2} = \frac{3x^4 - 48}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm 2$$

إذن القيم الحرجة هي: $x = \pm 2$

$$f''(x) = 6x + \frac{96}{x^3}$$

$$f''(-2) = -12 - 12 < 0$$

$$f''(2) = 12 + 12 > 0$$

للاقتران قيمة صغرى محلية هي: $f(2) = 32$

للاقتران قيمة عظمى محلية هي: $f(-2) = -32$

**24) $f(x) = (x^2 - 3)e^x$**

$$f'(x) = (x^2 - 3)e^x + 2xe^x = e^x(x^2 + 2x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 1, x = -3$$

إذن القيم الحرجة هي: $x = 1, x = -3$

$$f''(x) = e^x(2x+2) + e^x(x^2 + 2x - 3) = e^x(x^2 + 4x - 1)$$

$$f''(-3) = -\frac{4}{e^3} < 0$$

$$f''(1) = 4e > 0$$

للاقتران قيمة صغرى محلية هي: $f(1) = -2e$

للاقتران قيمة عظمى محلية هي: $f(-3) = 6/e^3$

**25)إذا كان للاقتران: $f(x) = ax^2 + bx + c$ قيمة عظمى محلية عند النقطة $(3, 12)$، وقطع المحور $y$ في النقطة (0,1)، فأجد قيمة كل الثوابت: $c, b, a$.**

$$f'(x) = 2ax + b$$

عند النقطة (3,12) توجد قيمة عظمى محلية، إذن هي نقطة حرجة، ومنه $f'(3) = 0$

$$f'(3) = 6a + b = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

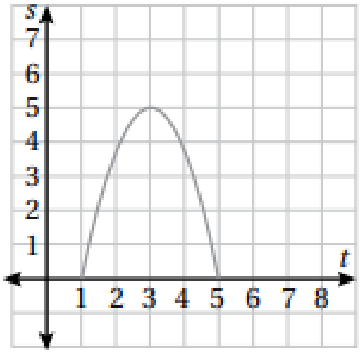
$$f(0) = 1 \ \Rightarrow c = 1$$

$$f(3) = 9a + 3b + c = 12 \ \Rightarrow 9a + 3b = 11 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

بطرح المعادلة (2) من ناتج ضرب المعادلة (1) في 3 نجد أن:

$$9a = -11 \to a = -\frac{11}{9}, b = \frac{22}{3}$$

**يُمثل الاقتران s(t) المبين منحناه في الشكل المجاور موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمثار، و t الزمن بالثواني:**



**26)أجد قيم $t$ التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.**

يكون الجسم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$،

أي عندما يوجد مماس أفقي لمنحنى $s(t)$

نلاحظ من الشكل أنه يوجد مماس أفقي عندما $t = 3s$

**27) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب؟ وما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب؟**

يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب عندما $v(t) > 0$ أي $s'(t) > 0$، وهذا يتحقق عندما يكون $s(t)$ متزايدا أي في الفترة $(1, 3)$، ويتحرك الجسم في الاتجاه السالب عندما يكون $s(t)$ متناقصا أي في الفترة (3,5)

**28)ما الفترات الزمنية التي تتزايد فيها سرعة الجسم؟ وما الفترات الزمنية التي تتناقص فيها سرعة الجسم؟**

تتزايد $v(t)$ عندما يكون $a(t) = s''(t) > 0$، وهذا يحصل عندما يكون منحنى $s$ مقعراً للأعلى ، لكن حسب الشكل فإن منحنى s مقعر للأسفل على مجاله، إذن سرعة الجسم لا تتزايد إبداً، بل تتناقص على (1,5)

إذا كان الاقتران: $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعا:

29)إذا كان لمنحنى الاقتران $f$ مماس أفقي عند كل من النقطة (-2, -73) والنقطة (0,-9)، فأجد قيمة كل من الثوابت: $a, b, c, d$.

$f'(x) = 12x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

$f(0) = -9 \Rightarrow d = -9$

$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$f''(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$f(-2) = -73 \Rightarrow 48 - 8a + 4b - 9 = -73 \Rightarrow -2a + b = -28 \ldots.(1)$

$f'(-2) = 0 \Rightarrow -96 + 12a - 4b = 0 \Rightarrow 3a - b = 24 \ldots \ldots.(2)$

بجمع المعادلتين نجد أن:

$a = -4, b = -36$

30)إذا وجدت نقطة ثالثة على منحنى الاقتران لها مماس أفقي، فأجد إحداثيي هذه النقطة.

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 72x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x(x^2 - x - 6) = 6$

$\Rightarrow 12x(x - 3)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow x = 0, x3, x = -2$

النقطة الثالثة على منحنى الاقتران التي لها مماس أفقي هي (3, -198)

31)أصنف كلا من النقاط الثلاث إلى صغرى محلية، وعظمى محلية (إن أمكن)

$f''(x) = 36x^2 - 24x - 72$

$f''(-2) = 120 > 0$

$f''(0) = -72 < 0$

$f''(3) = 180 > 0$

إذن النقطة (-2,-73) هي نقطة قيمة صغرى محلية

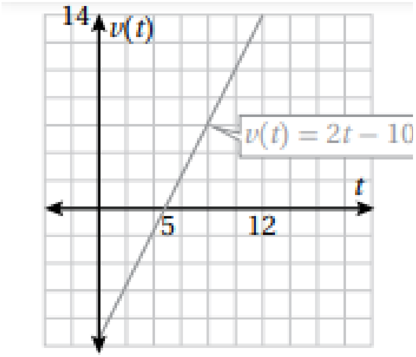
والنقطة (0,-9) هي نقطة قيمة عظمى محلية

والنقطة (3, -198) هي نقطة قيمة صغرى محلية

يُمثل الاقتران $v(t)$ المبين منحناه في الشكل المجاور

سرعة جسم يتحرك في مسار مستقيم،

حيث $v$ السرعة بالمتر لكل ثانية، و t الزمن بالثواني:



32) أجد قيم $t$ التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

يكون الجسم في حالة سكون عندما $v(t) = 0$،

أي عندما $t = 5s$

33) ما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه الموجب؟ وما الفترات الزمنية التي يتحرك فيها الجسم في الاتجاه السالب؟

يتحرك الجسم في الاتجاه الموجب عندما $v(t) > 0$ أي في الفترة (5,12)، ويتحرك الجسم في الاتجاه السالب عندما يكون $v(t) < 0$ أي في الفترة (0,5)

34) ما الفترات الزمنية التي تتزايد فيها سرعة الجسم؟ وما الفترات الزمنية التي تتناقص فيها سرعة الجسم؟

كما هو واضح من الشكل فإن $v(t)$ تتزايد دوما على الفترة (0,12)

35) إذا كان للاقتران: $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ قيمة قصوى محلية عند النقطة (2,11)، ونقطة انعطاف عند النقطة (1,5)، فأجد قيمة كل من الثوابت: a, b, c.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f(2) = 11 \Rightarrow 8a + 4b + c = 11 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$f'(2) = 0 \;\Rightarrow 12a + 4b = 0 \;\Rightarrow 3a + b = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$f(1) = 5 \;\Rightarrow a + b + c = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$f''(1) = 0 \quad \Rightarrow 6a + 2b = 0 \quad \Rightarrow 3a + b = 0 \quad (2)$$

بطرح المعادلة (3) من المعادلة (1) نجد أن:

$$7a + 3b = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

بطرح 3 أمثال المعادلة (2) من المعادلة (4) نجد أن:

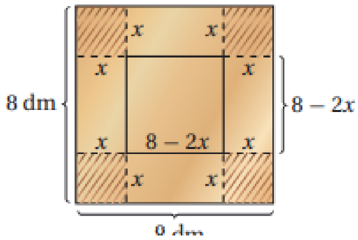
$$-2a = 6 \Rightarrow a = -3$$

وبتعويض قيمة $a$ في المعادلة (2) نجد أن: $b = 9$

وبتعويض قيمة كل من a و b في المعادلة (3) نجد أن : $c = -1$

## كتاب الطالب

## الدرس الثالث ـ تطبيقات القيم القصوى

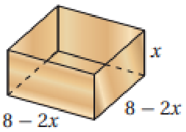


**مثال 1:**

**صندوق على شكل متوازي مستطيلات، صنع من قطعة كرتون رقيقة، مربعة الشكل، طولها 8dm، وذلك بقطع 4 مربعات متطابقة من زواياها، وطي الجوانب إلى الأعلى. أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يُمكن.**

**الخطوة 1:** أرسم مخططا.

أفترض أن $x$ هو طول كل مربع قطع من زوايا قطعة الكرتون الأصلية. وبما أن طول القطعة هو 8 dm، فإن طول كل جانب من جوانبها بعد قطع المربعات الصغيرة منها هو $(8-2x)dm$ كما يظهر في المُخطط المجاور.



**الخطوة 2:** أكتب الاقتران الذي أريد أن أجد قيمته القصوى بدلالة مُتغير واحد، ثم أُحدد مجاله.

يُبين الشكل المجاور أبعاد الصندوق الناتج بعد إزالة المربعات الأربعة الصغيرة وطي الجوانب.

**أجد حجم هذا الصندوق:**

صيغة حجم متوازي المستطيلات $V=l\times w\times h$

بتعويض $l=8-2x, w=8-2x, h=x$   $V(x)=(8-2x)\times(8-2x)\times x$

باستعمال خاصية التوزيع $=4x^3-32x^2+64x$

إذن، الاقتران الذي يُمثل حجم الصندوق هو: $V(x)=4x^3-32x^2+64x$، ومجاله هو: $0\le x\le 4$

**الخطوة 3:** أجد القيم الحرجة للاقتران وقيمته عند طرفي الفترة.

بإيجاد مشتقة الاقتران $V'(x)=12x^2-64x+64$

بمساواة المشتقة بالصفر $12x^2-64x+64=0$

بقسمة طرفي المعادلة على 4 $3x^2-16x+16=0$

بتحليل العبارة التربيعية $(3x-4)(x-4)=0$

خاصية الضرب الصفري $3x-4=0 \quad or \quad x-4=0$

بحل كل معادلة لـ $x$   $x=\frac{4}{3} \qquad x=4$

توجد قيمة حرجة واحدة في الفترة $(0, 4)$، هي: $x=\frac{4}{3}$، وهذا يعني وجود 3 قيم يُمكن المقارنة بينها بحسب نظرية القيم القصوى، وهي: القيمة الحرجة، وقيمتا طرفي الفترة.

$$V(0)=0, V\left(\frac{4}{3}\right)=4(\frac{4}{3})^3-32(\frac{4}{3})^2+64\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1024}{27}, V(4)=0$$

إذن، أكبر حجم للصندوق هو عند قطع 4 مربعات متطابقة من زواياه، طول كل منها $\frac{3}{4}dm$ ومن ثم، فإن أبعاد الصندوق هي:

$$l = 8 - 2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3}dm, w = 8 - 2\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3}dm, h = \frac{4}{3}dm$$

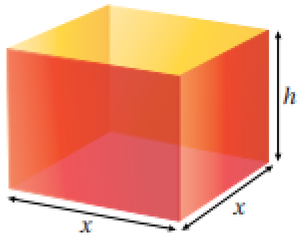
**طريقة بديلة:**

يُمكنني استعمال اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = \frac{4}{3}$:

بإيجاد المشتقة الثانية $V''(x) = 24x - 64$

بتعويض $x = \frac{4}{3}$ $V''(\frac{4}{3}) = 24(\frac{4}{3}) - 64 = -32 < 0$

**أتحقق من فهمي:**



**ترغب شركة في تصميم صندوق مفتوح من الأعلى، وقاعدته مربعة الشكل، ومساحة سطحه الكلية $1080\ \text{cm}^2$ كما في الشكل، أجد أبعاد الصندوق ليكون حجمه أكبر ما يُمكن.**

ليكن حجم الصندوق $V$ ومساحة سطحه الكلية $A$

$$A = 4xh + x^2 = 1080 \Rightarrow h = \frac{1080 - x^2}{4x}$$

$$V = x^2h$$

$$V(x) = x^2\left(\frac{1080 - x^2}{4x}\right) = \frac{1}{4}(1080x - x^3), 0 \le x \le \sqrt{1080}$$

$$V'(x) = \frac{1}{4}(1080 - 3x^2)$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{360}$$

القيمة الحرجة هي: $\sqrt{360}$

أجد حجم الصندوق عند القيمة الحرجة وعند طرفي المجال.

$$V(0) = 0$$

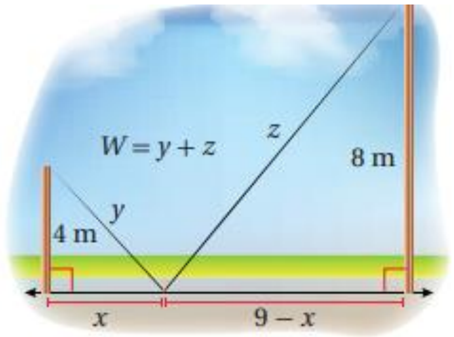
$$V(\sqrt{360}) = \frac{1}{4}(1080\sqrt{360} - 360\sqrt{360}) = 180\sqrt{360} = 1080\sqrt{10}$$

$$V(\sqrt{1080}) = 0$$

إذن يكون الحجم أكبر ما يمكن عندما $x = 6\sqrt{10}cm$ وعندما يكون الارتفاع $h = 3\sqrt{10}cm$

**مثال 2:**

عمودان طول أحدهما 8m، وطول الآخر 4m، والمسافة بينهما 9m، وهما مُثبتان بسلكين يصلان قمة كل عمود بوتد عند سطح الأرض كما في الشكل المجاور. أجد الموقع المناسب لتثبيت الوتد بين العمودين بحيث يكون طول السلك المستعمل أقل ما يمكن.



**الخطوة 1:** ارسم مخططا.

أرسم مخططا للعمودين، والسلكين، والوتد، مُفترضا أن $W$ هو طول السلك الذي يصل العمودين بالوتد.

بناء على الشكل المجاور، فإن: $W = y + z$

**الخطوة 2:** أكتب الاقتران الذي أريد أن أجد قيمته القصوى بدلالة مُتغير واحد، ثم أحدد مجاله.

بما أن المسافة بين العمودين هي 9m، فإن بعد الوتد عن أحدهما (الأصغر مثلا) هو $x$، وبعده عن العمود الآخر هو $9 - x$

أكتب الاقتران $W$ بدلالة متغير واحد:

| | |
|---|---|
| نظرية فيثاغورس | $y^2 = x^2 + 4^2$ |
| بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة | $y = \sqrt{x^2 + 16}$ |
| نظرية فيثاغورس | $z^2 = (9 - x)^2 + 8^2$ |
| بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة | $z = \sqrt{(9 - x)^2 + 64}$ |
| الاقتران المطلوب إيجاد قيمته القصوى | $W = y + z$ |
| بكتابة الاقتران بدلالة $x$ | $W(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(9 - x)^2 + 64}$ |

إذن، الاقتران الذي يُمثل طول السلك هو: $W(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(9 - x)^2 + 64}$، ومجاله هو: $0 \le x \le 9$

**الخطوة 3:** أجد القيم الحرجة للاقتران وقيمته عند طرفي الفترة.

| | |
|---|---|
| بإيجاد مشتقة الاقتران | $W'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{-(9-x)}{\sqrt{(9-x)^2+64}}$ |
| بمساواة المشتقة بالصفر | $\frac{x}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{-(9-x)}{\sqrt{(9-x)^2+64}} = 0$ |
| بإعادة كتابة المعادلة | $x\sqrt{(9-x)^2+64} = (9-x)\sqrt{x^2+16}$ |
| بتربيع طرفي المعادلة | $x^2((9-x)^2+64) = (9-x)^2(x^2+16)$ |
| باستعمال خاصية التوزيع | $x^2(9-x)^2 + 64x^2 = x^2(9-x)^2 + 16(9-x)^2$ |
| بالاختصار | $4x^2 = (9-x)^2$ |
| بإيجاد المفكوك للطرف الثاني | $4x^2 = 81 - 18x + x^2$ |
| بإعادة كتابة المعادلة | $3x^2 + 18x - 81 = 0$ |
| بقسمة طرفي المعادلة على 3 | $x^2 + 6x - 27 = 0$ |
| بتحليل العبارة التربيعية | $(x-3)(x+9) = 0$ |
| خاصية الضرب الصفري | $x - 3 = 0 \quad or \quad x + 9 = 0$ |
| بحل كل معادلة لـ $x$ | $x = 3 \qquad x = -9$ |

بما أن $x = -9$ خارج المجال، فإنها تُهمل.

بناء على ذلك، توجد 3 قيم يُمكن المقارنة بينها بحسب نظرية القيم القصوى، وهي: القيمة الحرجة، وقيمتا طرفي الفترة.

$$W(0) \approx 16, \quad W(3) = 15, \quad W(9) \approx 17.8$$

إذن، يجب تثبيت الوتد على بُعد 3m من العمود الأقصر؛ ليكون طول السلك المُستعمل لتثبيت العمودين أقل ما يُمكن، وهو 15 m.

**أتحقق من فهمي:**

خطط مزارع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل المجاور، وحدد مساحة الحظيرة بـ $245000\ \text{m}^2$؛ لتوفير كمية عشب كافية لأغنامه. أجد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يُمكن، علماً بأن الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.

ليكن طول السياج L ومساحة الحظيرة A

$$A = xy = 245000 \Rightarrow y = \frac{245000}{x}$$

$$L = x + 2y$$

$$L(x) = x + \frac{490000}{x}, x > 0$$

$$L'(x) = 1 - \frac{490000}{x^2}$$

$$L'(x) = 0 \Rightarrow x = 700$$

قيمة $x$ الحرجة هي: 700

$$L''(x) = \frac{980000}{x^3} \Rightarrow L''(700) = 980000/(700)^3 > 0$$

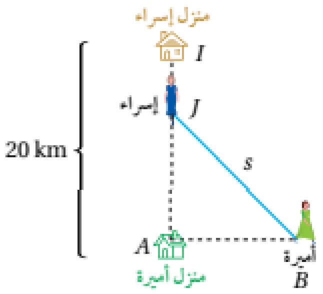
إذن، يكون طول سياج أقل ما يمكن عندما $x = 700\ m$ و $y = \frac{245000}{700} = 350\ m$

### مثال 3:

**تتدرب إسراء وأميرة يوميا استعداداً لسباق العدو (المارثون). في أحد الأيام، انطلقت إسراء من منزلها الذي يقع على بُعد 20 km شمال منزل أميرة الساعة 9:00 am، واتجهت جنوبا بسرعة 8 km/h. وفي الوقت نفسه، انطلقت أميرة في اتجاه الشرق بسرعة 6 km/h.**

**في أي ساعة تكون إسراء وأميرة أقرب ما يُمكن إلى بعضهما، علماً بأن كُلا منهما ركضت مدة 2.5 h؟**

**الخطوة 1:** أرسم مُخططاً.



أفترض أن إسراء بدأت الركض من النقطة $I$، ووصلت إلى النقطة $J$ بعد t ساعة،

وأن أميرة انطلقت – في الوقت نفسه- من النقطة A، ووصلت إلى النقطة B بعد t ساعة.

وبذلك، فإن بُعد إسراء عن أميرة بعد t ساعة هو: $s = JB$

باستعمال نظرية فيثاغورس، فإن:

$$s = JB = \sqrt{JA^2 + AB^2}$$

**الخطوة 2:** أكتب الاقتران الذي أريد أن أجد قيمته القصوى بدلالة مُتغير واحد، ثم أحدد مجاله.

أكتب اقتران المسافة بين إسراء وأميرة بدلالة الزمن $t$:

المسافة $JA$
$$JA = 20 - 8t$$

المسافة AB
$$AB = 6t$$

الاقتران المطلوب إيجاد قيمته القصوى
$$s = JB = \sqrt{JA^2 + AB^2}$$

بكتابة الاقتران بدلالة t
$$s(t) = \sqrt{(20 - 8t)^2 + (6t)^2}$$

بالتبسيط
$$= \sqrt{100t^2 - 320t + 400}$$

إذن، الاقتران الذي يُمثل المسافة بين إسراء وأميرة هو:
$$s(t) = \sqrt{100t^2 - 320t + 400}$$

ومجاله هو: $0 \leq t \leq 2.5$

**الخطوة 2:** أجد القيم الحرجة للاقتران وقيمته عند طرفي الفترة.

بإيجاد مشتقة الاقتران
$$s'(t) = \frac{100t - 160}{\sqrt{100t^2 - 320t + 400}}$$

بمساواة المشتقة بالصفر
$$\frac{100t - 160}{\sqrt{100t^2 - 320t + 400}} = 0$$

بمساواة البسط بالصفر
$$100t - 160 = 0$$

بحل المعادلة لـ $t$
$$t = 1.6$$

توجد 3 قيم يُمكن المقارنة بينها بحسب نظرية القيم القصوى، وهي: القيمة الحرجة، وقيمتا طرفي الفترة.

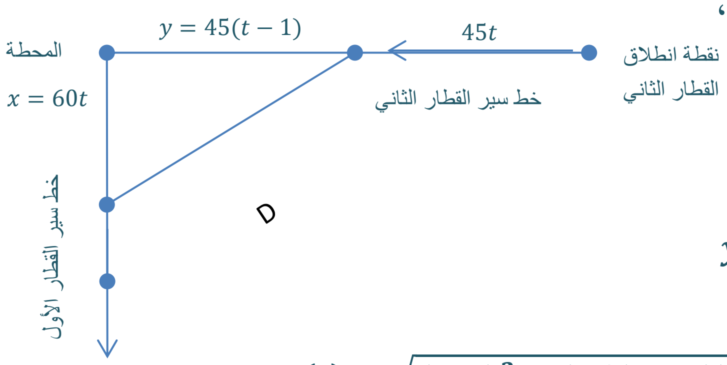
$$s(0) = 20, \quad s(1.6) = 12, \quad s(2.5) = 15$$

إذن، تكون إسراء وأميرة أقرب ما يُمكن إلى بعضهما بعد 1.6 ساعة من بدء كل منهما الركض؛ أي الساعة 10:36 am

**أتحقق من فهمي:**

**انطلق قطار من إحدى المحطات الساعة 10:00 am، وتحرك في اتجاه الجنوب بسرعة 60 km/h، وفي الوقت نفسه، انطلق قطار آخر نحو الغرب بسرعة 45 km/h، ثم وصل إلى محطة انطلاق القطار الأول الساعة 11:00 am**

**في أي ساعة يكون القطاران أقرب ما يُمكن إلى بعضهما؟**



نفرض $x$ بعد القطار الأول عن المحطة، $y$ بعد القطار الثاني عن المحطة ونفرض $D$ البعد بين القطارين،

القطار الثاني استغرق ساعة واحدة للوصول إلى المحطة،

إذن فقد انطلق من نقطة تبعد 45 كيلومترا عنها،

بعد $t$ ساعة من انطلاقهما يكون:

$x = 60t$، ويكون $y = 45 - 45t = 45(1 - t)$

$$D(t) = \sqrt{(60t)^2 + (45(1-t))^2} = \sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2}, 0 \le t \le 1$$

$$D'(t) = \frac{7200t - 4050(1-t)}{2\sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2}} = \frac{11250t - 4050}{2\sqrt{3600t^2 + 2025(1-t)^2}}$$

$$D'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{4050}{11250} = \frac{9}{25}$$

القيمة الحرجة هي: $t = \frac{9}{25}$

أجد المسافة D عند القيمة الحرجة وعند طرفي المجال.

$$D(0) = \sqrt{2025} = 45$$

$$D(1) = \sqrt{3600} = 60$$

$$D\left(\frac{9}{25}\right) = \sqrt{3600(\frac{9}{25})^2 + 2025(1 - \frac{9}{25})^2 = 36}$$

إذن يكون القطاران أقرب ما يمكن إلى بعضهما عندما $t = \frac{9}{25}h$ أي بعد 21 دقيقة و 36 ثانية وتكون الساعة حينئذ 10:21:36

**مثال 4: من الحياة**

**لاحظت إدارة أحد المسارح أن متوسط عدد الحضور لعرض ما هو 1000 شخص إذا كان سعر بيع التذكرة JD 26، وأن عدد الحضور يزيد بمقدار 50 شخصا مُقابل كل دينار يُخصم من سعر التذكرة. إذا كان متوسط ما ينفقه كل شخص JD 4 على الخدمات داخل المسرح، فما سعر بيع التذكرة الذي يُحقق للمسرح أعلى إيراد؟**

**الخطوة 1: أجد اقتران الإيراد.**

أفترض أولا أن $x$ هو المبلغ الذي خصمته إدارة المسرح من سعر التذكرة الأصلي. وبما أن عدد الحضور يزيد بمقدار 50 شخصا مقابل كل دينار يُخصم، فإن عدد الحضور يزيد بمقدار $50x$ دينار:

اقتران الإيراد $R(x) =$ (الإيراد من التذاكر) + (الإيراد من انفاق كل شخص)

بالتعويض = ( عدد الأشخاص x سعر التذكرة ) + ( عدد الأشخاص x 4 )

بالتعويض $= (1000 + 50x)(26 - x) + (1000 + 50x) \times 4$

بالتبسيط $= -50x^2 + 500\,x + 30000$

إذن، الاقتران الذي يُمثل الإيراد هو: $R(x) = \ -50x^2 + 500x + 30000$

**الخطوة 2: أجد قيمة $x$ التي يكون عندها الإيراد أعلى ما يُمكن.**

أجد الإيراد الحدِّي $R'(x)$، ثم أجد القيمة الحرجة للاقتران $R(x)$ عندما $R'(x) = 0$:

الإيراد الحدِّي $R'(x) = \ -100x + 500$

بمساواة الإيراد الحدي بالصفر $-100x + 500 = 0$

بحل المعادلة لـ $x$ $\quad x = 5$

أستعمل اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة الحرجة عندما $x = 5$:

بإيجاد المشتقة الثانية لاقتران الإيراد $R''(x) = \ -100$

بتعويض $x = 5$ $\quad R''(5) = \ -100 < 0$

ألاحظ أنه توجد قيمة عظمى مُطلقة عندما $x = 5$

إذن، يُحقق المسرح أعلى إيراد إذا خُفض سعر التذكرة بمقدار JD5؛ أي إذا أصبح سعرها JD 21.

**أتحقق من فهمي:**

**يبيع متجر 200 شاشة تلفاز شهريا بسعر JD 350 للشاشة الواحدة. وقد أشار مسح للسوق أعده خبير التسويق في المتجر إلى أن عدد الشاشات المبيعة شهريا يزيد بمقدار 20 شاشة عند كل خصم مقداره JD10 من سعر الشاشة الواحدة. أجد سعر بيع الشاشة الواحدة الذي يحقق للمتجر أعلى إيراد مُمكن.**

ليكن سعر بيع الشاشة الواحدة هو $x$ دينار

أي أن مقدار الخصم من سعر بيع الشاشة الواحدة هو $350-x$ دينار

وبالتالي تحصل زيادة في عدد الشاشات المبيعة مقدارها:

$$\frac{20}{10}(350-x)=700-2x \text{ شاشة}$$

إذن عدد الشاشات المبيعة سيكون: $200+700-2x=900-2x$

الإيراد = عدد الشاشات المبيعة x سعر بيع الشاشة الواحدة بعد الخصم:

$$R(x)=(900-2x)x=900x-2x^2$$

$$R'(x)=900-4x$$

$$R'(x)=0\Rightarrow x=225$$

توجد قيمة حرجة وحيدة هي 225

$$R''(x)=-4\rightarrow R''(225)=-4<0$$

نلاحظ أن اقتران الإيراد له قيمة عظمى عندما $x=225$

إذن يحقق المتجر أعلى إيراد ممكن عندما يكون سعر بيع الشاشة الواحدة هو 225 دينارا

**حل آخر:**

نفرض أنه تم إجراء الخصم $x$ مرة، فسيكون سعر بيع الشاشة $(350-10x)$، وسيكون عدد الشاشات المبيعة $(200+20x)$ وليكن الإيراد $R(x)$، فإن:

$$R(x)=(350-10x)(200+20x),0\le x\le 35$$

$$=70000+5000x-200x^2$$

$$R'(x)=5000-400x=0\Rightarrow x=12.5$$

قيمة $x$ الحرجة هي 12.5، ولإيجاد السعر الذي يحقق أعلى إيراد نقارن قيمة الإيراد عند القيمة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

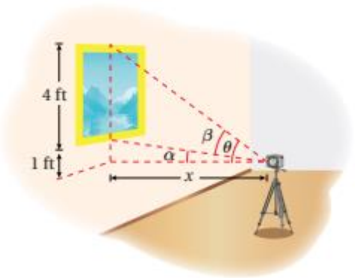
$$R(0)=70000,R(35)=0$$

$$R(12.5)=(350-125)(200+250)=101250$$

إذن، يكون الإيراد أعلى ما يمكن عندما $x=12.5$، ويكون سعر بيع الشاشة (350-125) أي 225 دينارا.

مثال 5: من الحياة

**يريد مُصور التقاط صورة للوحة ارتفاعها 4ft، وهي مُعلقة في معرض فني. إذا كانت عدسة الكاميرا تقع أسفل الحافة السفلية للوحة بمقدار 1 ft كما يظهر في الشكل المجاور، فأجد بُعد الكاميرا اللازم عن اللوحة لتكون زاوية تصوير عدستها $(\beta)$ أكبر ما يمكن.**



**الخطوة 1: أكتب الاقتران الذي أريد أن أجد قيمته القصوى بدلالة متغير واحد.**

يظهر من الشكل أن ظل الزاوية β التي يراد إيجاد أكبر قيمة لها يعطى بالمعادلة الآتية:

$$\tan \beta = \tan(\theta - \alpha)$$

أكبر ظل الزاوية β بدلالة المتغير $x$ الذي يُمثل بُعد العدسة عن اللوحة:

الاقتران المطلوب إيجاد قيمته القصوى

$$\tan \beta = \tan(\theta - \alpha)$$

متطابقة ظل الفرق بين زاويتين

$$= \frac{\tan\theta - \tan\alpha}{1 + \tan\theta\tan\alpha}$$

بتعويض $\tan\theta = \frac{5}{x}, \tan\alpha = \frac{1}{x}$

$$= \frac{\frac{5}{x} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{5}{x} \times \frac{1}{x}}$$

بتوحيد المقامات

$$= \frac{\frac{4}{x}}{\frac{x^2+5}{x^2}}$$

بالتبسيط

$$= \frac{4x}{x^2+5}$$

إذن: $\beta = \frac{4x}{x^2+5}$

الخطوة 2: أجد القيم الحرجة، مُحددا نوعها.

بإيجاد مشتقة الاقتران

$$\sec^2\beta \times \frac{d\beta}{dx} = \frac{(x^2+5)(4)-(4x)(2x)}{(x^2+5)^2}$$

بالتبسيط

$$\sec^2\beta \times \frac{d\beta}{dx} = \frac{20-4x^2}{(x^2+5)^2}$$

بقسمة طرفي المعادلة على $\sec^2\beta$

$$\frac{d\beta}{dx} = \cos^2\beta \times \frac{20-4x^2}{(x^2+5)^2}$$

بمساواة المشتقة بالصفر

$$\frac{20-4x^2}{(x^2+5)^2} = 0$$

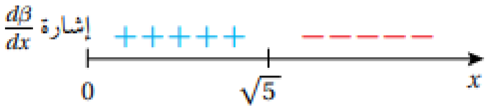
بمساواة البسط بالصفر

$$20 - 4x^2 = 0$$

بحل المعادلة لـ $x$، وإهمال قيم $x$ السالبة

$$x = \sqrt{5}$$

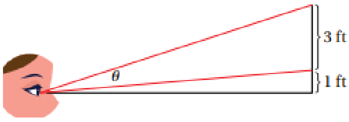
أستعمل اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع القيمة الحرجة:



ألاحظ من اختبار المشتقة الأولى وجود قيمة عظمى مُطلقة عندما $x = \sqrt{5}$.

إذن، يجب أن يكون بُعد الكاميرا عن اللوحة $\sqrt{5}ft$؛ لكي تكون زاوية تصوير عدستها أكبر ما يمكن.

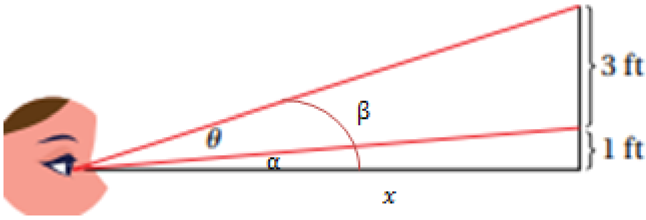
## أتحقق من فهمي:



**نظرت سارة إلى لوحة مُعلقة على حائط في منزلها، ارتفاعها 3ft ، وارتفاع حافتها السفلية 1ft فوق عينها كما في الشكل المجاور.**

**كم قدماً يجب أن تبتعد سارة عن الجدار لتكون زاوية نظرها $\theta$ أكبر ما يُمكن؟**

نسمي الأبعاد وقياسات الزوايا كما في الشكل:



$$\tan\theta = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha} = \frac{\frac{4}{x}-\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x^2}}, x>0$$

$$= \frac{3x}{x^2+4}$$

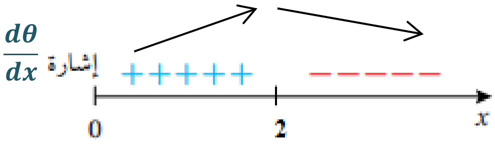
$$\sec^2\theta \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{(x^2+4)(3)-3x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{-3x^2+12}{(x^2+4)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{-3x^2+12}{(x^2+4)^2}\cos^2\theta = 0 \Rightarrow 3x^2+12=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2$$

لكن $\cos^2\theta \neq 0$ لأن $\theta < \frac{\pi}{2}$

إذن، يوجد قيمة حرجة وحيدة هي $x = 2$

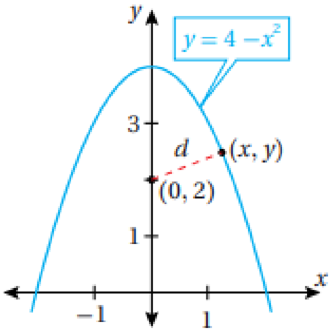
نستخدم اختبار المشتقة الأولى، وندرس إشارة $\frac{d\theta}{dx}$



إذن، يجب أن تبتعد سارة عن الجدار مسافة 2 ft لتكون زاوية نظرها $\theta$ أكبر ما يمكن.

**مثال 6:**

أجد النقط (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = 4 - x^2$، التي هي أقرب ما يُمكن إلى النقطة $(0, 2)$



الخطوة 1: أرسم مخططا

أفترض أن النقطة الواقعة على منحنى الاقتران $f(x)$ هي $(x, y)$،

وأن d هي المسافة بينها وبين النقطة $(0, 2)$.

باستعمال قانون المسافة بين نقطتين، فإن الاقتران الذي يُمثل المسافة d يُكتب كما يأتي:

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}$$

الخطوة 2: أكتب الاقتران الذي أريد أن أجد قيمته القصوى بدلالة مُتغير واحد.

بما أن النقطة $(x, y)$ تقع على منحنى الاقتران $f(x)$، فإن: $y = f(x) = 4 - x^2$.

أكتب الاقتران $d$ بدلالة متغير واحد:

الاقتران المطلوب إيجاد قيمته القصوى

$$d = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

بكتابة الاقتران بدلالة $x$

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (2-x^2)^2}$$

إذن، الاقتران الذي يمثل المسافة بين النقتين هو: $d(x) = \sqrt{x^2 + (2-x^2)^2}$

الخطوة 3: أجد القيم الحرجة، محددا نوعها.

بإيجاد مشتقة الاقتران

$$d'(x) = \frac{x-2x(2-x^2)}{\sqrt{x^2+(2-x^2)^2}}$$

بمساواة المشتقة بالصفر

$$\frac{x-2x(2-x^2)}{\sqrt{x^2+(2-x^2)^2}} = 0$$

بمساواة البسط بالصفر

$$x - 2x(2-x^2) = 0$$

باستعمال خاصية التوزيع

$$x - 4x + 2x^3 = 0$$

بالتبسيط

$$-3x + 2x^3 = 0$$

بإخراج $x$ عاملا مشتركا

$$x(-3 + 2x^2) = 0$$

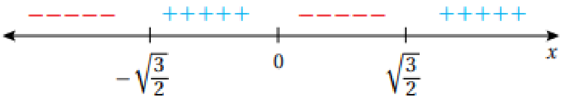
خاصية الضرب الصفري

$$x = 0 \quad or \quad -3 + 2x^2 = 0$$

بحل كل المعادلة لـ $x$

$$x = 0 \qquad x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

أستعمل اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع كل قيمة حرجة:



توجد قيمة عظمى محلية عندما $x = 0$، وتوجد قيمة صغرى محلية ومُطلقة عندما $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$، و $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$.

إذن، أقرب نقطتين إلى النقطة $(0, 2)$ هما: $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ و $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$

### أتحقق من فهمي:

**أجد النقط (النقاط) الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{8x}$، والتي هي أقرب ما يُمكن إلى النقطة (4, 2).**

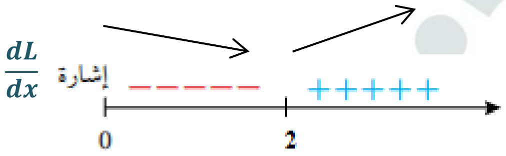
لتكن النقطة $(x, y)$ على منحنى $f(x) = \sqrt{8x}$، ولتكن المسافة بينها وبين النقطة (4, 2) هي L حيث:

$$L = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{8x}-2)^2}$$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x - 4 + (\sqrt{8x} - 2)(\frac{4}{\sqrt{8x}})}{\sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{8x}-2)^2}} = \frac{x - \frac{8}{\sqrt{8x}}}{\sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{8x}-2)^2}}$$

$$\frac{dL}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{\sqrt{8x}} \Rightarrow x\sqrt{8x} = 8 \Rightarrow 8x^3 = 64 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

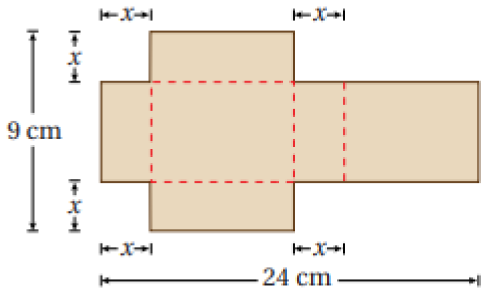
نستخدم اختبار المشتقة الأولى وندرس إشارة $\frac{dL}{dx}$



لأن أقرب نقطة من نقاط المنحنى $f$ للنقطة (4, 2) هي: (2,4)

### أتدرب وأحل المسائل:

**قطعة كرتون طولها 24 cm، وعرضها 9 cm، أُزيل منها مربعان متطابقان ومستطيلان متطابقان كما في الشكل المجاور، بحيث أمكن طيها، وتكوين صندوق له غطاء منها:**



**1) أكتب الاقتران $V(x)$ الذي يُمثل حجم الصندوق.**

$$V(x) = (12 - x)(9 - 2x)x = 2x^3 - 33x^2 + 108x$$

**2) أحدد مجال الاقتران $V$.**

أصفار الاقتران $V(x)$ هي: $x = 0, x = \frac{9}{2}, x = 12$

مجال اقتران الحجم هو قيم $x$ التي تجعل $V(x) \geq 0$، ومجال هذا الاقتران هنا هو: $0 \leq x \leq \frac{9}{2}$ لأنه عندما يكون $\frac{9}{2} < x < 12$، يكون $V(x) < 0$.

**3) أجد أبعاد الصندوق بحيث يكون حجمه أكبر ما يُمكن.**

$$V'(x) = 6x^2 - 66x + 108$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 6(x-9)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 9, x = 2$$

القيمة 9 خارج المجال، إذن تُهمل، فتكون القيمة الحرجة الوحيدة ضمن المجال هي $x = 2$

$$V''(x) = 12x - 66$$

$$V''(2) = 12(2) - 66 = -42 < 0$$

وعليه فإن حجم الصندوق يكون أكبر ما يمكن عندما تكون أبعاده: $2\ cm, 5\ cm, 10\ cm$ ويكون حجمه عندئذ

$$V(2) = 100\ cm^3$$

**4) أجد النقطة الواقعة على منحنى العلاقة: $4x^2 + y^2 = 4$، التي هي أقرب ما يُمكن إلى النقطة (0, 1).**

لتكن النقطة $(x, y)$ على منحنى العلاقة $4x^2 + y^2 = 4$، ولتكن المسافة بينها وبين النقطة (0, 1) هي L حيث:

$$L = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{\frac{4-y^2}{4} + y^2 - 2y + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}y^2 - 2y + 2}, y \in [-2, 2]$$

$$\frac{dL}{dy} = \frac{\frac{3}{4}y - 1}{\sqrt{\frac{3}{4}y^2 - 2y + 2}}$$

$$\frac{dL}{dy} = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

إذن توجد قيمة حرجة وحيدة ضمن مجال $L(y)$ هي $y = \frac{4}{3}$

وبمقارنة $L(\frac{4}{3})$، مع $L(-2)$، و $L(2)$ نجد أن $L\left(\frac{4}{3}\right)$ قيمة صغرى مطلقة لأن:

$$L(-2) = \sqrt{3 + 4 + 2} = 3$$

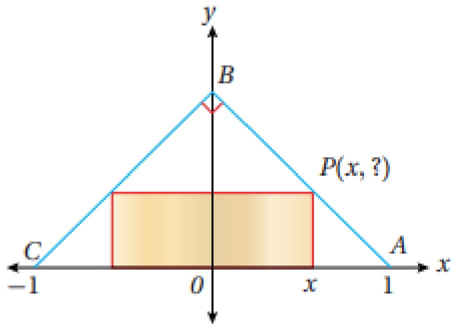
$$L(2) = \sqrt{3 - 4 + 2} = 1$$

$$L\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.82$$

تكون L قيمة صغرى محلية ومطلقة عندما $y = \frac{4}{3}$، وتكون $x = \mp\sqrt{\frac{4-y^2}{4}} = \mp\sqrt{\frac{4-\frac{16}{9}}{4}} = \mp\frac{\sqrt{5}}{3}$

إذن أقرب نقطتين من نقاط المنحنى إلى النقطة (0, 1) هما: $(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3})$ و $(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3})$

يُبين الشكل المجاور مستطيلاً مرسوما داخل مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين، وطول قاعدته 2 وحدة طول:



5) أجد الإحداثي $y$ للنقطة $P$ بدلالة $x$.

المثلث قائم ومتطابق الضلعين، إذن قياس كل زاوية من زوايا قاعدته $\frac{\pi}{4}$

ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هو $-1 = \tan\frac{3\pi}{4}$ وهو يمر بالنقطة $A(1,0)$

معادلة $\overleftrightarrow{AB}$ هي: $y-0=-1(x-1) \Rightarrow y=1-x$

إذن، الإحداثي $y$ للنقطة P هو $1-x$.

6) أكتب مساحة المستطيل بدلالة $x$.

مساحة المستطيل = طوله x عرضه

$$A=2xy=2x(1-x)=2x-2x^2, 0 \le x \le 1$$

7) أجد أكبر مساحة مُمكنة للمستطيل.

$$A'(x)=2-4x$$

$$A'(x)=0 \Rightarrow 2-4x=0 \;\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$A(0)=A(1)=0, A\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

للاقتران A قيمة عظمى مطلقة هي: $A\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$، إذن أكبر مساحة ممكنة للمستطيل هي $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.

8) أجد أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يُمكن.

الأبعاد التي تجعل مساحة المستطيل أكبر ما يمكن هي: الطول: $2x=1$، والعرض: $y=1-x=\frac{1}{2}$

**يُمثِّل الاقتران: $s(x) = 150 = 0.5x$ سعر البدلة الرجالية (بالدينار) الذي حددته إحدى الشركات، حيث $x$ عدد البدلات المبيعة. ويًمثل الاقتران: $C(x) = 4000 + 0.25x^2$ تكلفة إنتاج $x$ بدلة"**

**9) أجد اقتران الإيراد.**

$$R(x) = x \times s(x) = 150x - 0.5x^2$$

**10) أجد اقتران الربح**

$$P(x) = R(x) - C(x) = 150x - 0.5x^2 - 4000 = 0.5x^2$$
$$= 150x - 0.75x^2 - 4000$$

**11) أجد عدد البدلات اللازم بيعها لتحقيق أكبر ربح مُمكن، ثم أجد أكبر ربح مُمكن.**

$$P'(x) = 150 - 1.5x$$
$$P'(x) = 0 \Rightarrow 150 - 1.5x = 0 \Rightarrow x = 100$$
$$P''(x) = -1.5 \ \Rightarrow P''(100) = -1.5 < 0$$

إذن لتحقيق أكبر ربح ممكن يلزم بيع 100 بدلة، وتكون عندها قيمة الربح:

$$P(100) = 15000 - 7500 - 4000 = 3500\, JD$$

**12) أجد سعر البدلة الواحدة الذي يُحقق أعلى ربح مُمكن.**

عندما $x = 100$ فإن سعر البدلة الواحدة يساوي:

$$s(100) = 15{-}= -.5(100) = 100\, JD$$

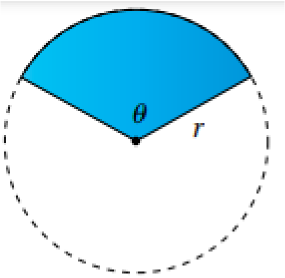
**13) تُنتج مزرعة للتفاح 30 صندوقا من الشجرة الواحدة تقريبا عند زراعة 20 شجرة في كل فدان من الأرض. ويقل إنتاج الشجرة الواحدة بمقدار صندوق عند زراعة شجرة إضافية في كل فدان بسبب قرب الأشجار الشديد بعضها من بعض. ما عدد الأشجار التي يجب زراعتها في كل فدان لتحقيقي أكبر إنتاج مُمكن؟**

نفرض زراعة $x$ شجرة إضافية في كل فدان، فسيكون عدد الأشجار في الفدان $(20 + x)$ شجرة، ويصبح إنتاج كل شجرة $(30 - x)$ صندوقا.

ليكن $T(x)$ اقتران الانتاج الذي يساوي عدد الأشجار مضروبا في إنتاج كل شجرة، فإن:

$$T(x) = (20 + x)(30 - x)$$
$$= 600 + 10x - x^2$$
$$T'(x) = 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$$
$$T''(x) = -2 \Rightarrow T''(5) = -2 < 0$$

إذن، يكون الانتاج أكبر ما يمكن عندما يكون عدد الشجرات الإضافية في الفدان 5 شجرا، أي عند زراعة 25 شجرة في كل فدان.



لدى مزارع P مترا طوليا من سياج، يرغب في استعماله كاملا لتسييج حقل رعي على شكل قطاع دائري، زاويته $\theta$ بالراديان، في دائرة نصف قطرها r مترا كما في الشكل المجاور:

14)أثبت أن طول السياج اللازم إحاطة الحقل به هو: $P = r(\theta + 2)$.

ليكن L طول قوس القطاع الدائري المظلل، إذن:

$$P = r + L = 2r + r\theta = r(2 + \theta)$$

15) أثبت أن مساحة القطاع هي: $A = \frac{1}{2}Pr - r^2$

لتكن $A$ مساحة القطاع الدائري المظلل، إذن: $A = \frac{1}{2}r^2\theta$

وبما أن $P = r(2 + \theta)$ فإن $\theta = \frac{P-2R}{r} = \frac{P}{r} - 2$

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{P}{r} - 2\right) = \frac{1}{2}Pr - r^2$$

16)أجد نصف قطر القطاع بدلالة P الذي تكون عنده مساحة الحقل أكبر ما يُمكن.

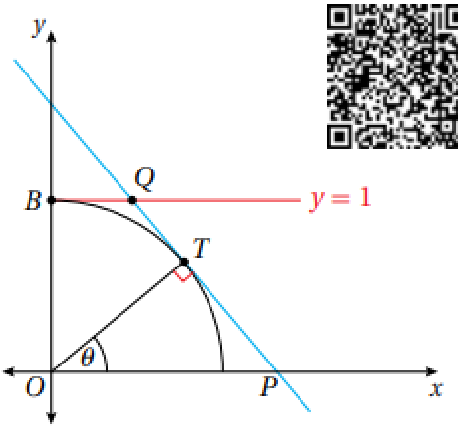
$$A'(r) = \frac{1}{2}P - 2r$$

$$A'(r) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}P - 2r = 0 \ \Rightarrow r = \frac{1}{4}P$$

$$A''(r) = \ -2 \ \Rightarrow A''\left(\frac{1}{4}P\right) = -2 < 0$$

تكون مساحة الحقل أكبر ما يمكن عندما $r = \frac{1}{4}P$

تقع النقطة T على دائرة الوحدة التي معادلتها: $x^2 + y^2 = 1$ حيث تصنع القطعة المستقيمة OT الزاوية $\theta$ مع محور $x$ الموجب، و $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ كما في الشكل المجاور:



17) أثبت أن معادلة المستقيم $PT$ هي: $x\cos\theta + y\sin\theta = 1$

$$\sin\theta = \frac{y}{1}, \cos\theta = \frac{x}{1} \to T(\cos\theta, \sin\theta)$$

ميل OT يساوي $\tan\theta$ لأن زاوية ميله $\theta$، ومنه فإن ميل TP يساوي $\frac{-1}{\tan\theta} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}$ لأنه يعامد OT معادلة TP:

$$y - \sin\theta = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}(x - \cos\theta) \Rightarrow y\sin\theta - \sin^2\theta = -\cos\theta(x - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow y\sin\theta - \sin^2\theta = -x\cos\theta + \cos^2\theta$$

$$\Rightarrow y\sin\theta + x\cos\theta = 1$$

18) أثبت أن مساحة شبه المنحرف $QBQP$ تعطى بالاقتران الآتي: $A = \frac{2\sin\theta}{2\cos\theta}$

$$A = \frac{1}{2}(OP + BQ)(OB)$$

لإيجاد OP نضع $y = 0$ في معادلة المستقيم TP فنجد أن:

$$0 + x\cos\theta = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\cos\theta} = OP$$

لإيجاد BQ نضع $y = 1$ في معادلة المستقيم TP فنجد أن:

$$\sin\theta + x\cos\theta = 1 \Rightarrow x = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} = BQ$$

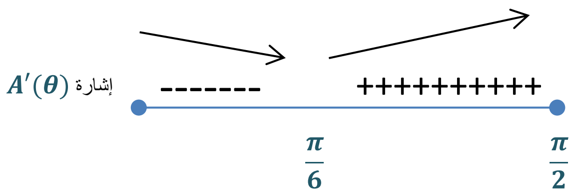
ومنه تكون مساحة شبه المنحرف هي:

$$A(\theta) = \frac{1}{2}(OP + BQ)(OB) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}\right)(1) = \frac{2 - \sin\theta}{2\cos\theta}$$

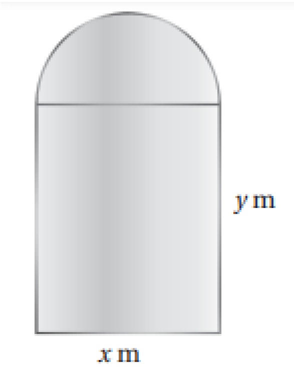
**19) أجد قياس الزاوية $\theta$ الذي تكون عنده مساحة شبه المنحرف أقل ما يُمكن.**

$$A'(\theta) = \frac{(2\cos\theta)(-\cos\theta) - (2-\sin\theta)(-2\sin\theta)}{4\cos^2\theta} = \frac{2\sin\theta - 1}{2\cos^2\theta}$$

$$A'(\theta) = 0 \Rightarrow 2\sin\theta - 1 = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$



تكون مساحة شبه المنحرف أقل ما يمكن عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$



**20) يُبين الشكل المجاور نافذة مكونة من جزأين؛ أحدهما علوي على شكل نصف دائرة قطرها $x$ m، والآخر سفلي على شكل مستطيل عرضه $x$ m وارتفاعه $y$ m. صُنع الجزء العلوي من زجاج مُلون يسمح بمرور 1 وحدة ضوء لكل متر مربع، وصُنع الجزء السفلي من زجاج شفاف يسمح بمرور 3 وحدات ضوء لكل متر مربع. أجد قيمة كل من $x$ و $y$ التي تجعل كمية الضوء المار خلال النافذة أكبر ما يُمكن، علما بأن 10m من المعدن الرقيق استعمل في تشكيل إطار النافذة كاملاً، بما في ذلك القطعة الفاصلة بين الجزأين.**

لتكن كمية الضوء المارة خلال النافذة كاملة $Q$

$$Q = 3xy + \frac{1}{2} \times \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 3xy + \frac{1}{8}\pi x^2$$

محيط النافذة بالإضافة إلى القطعة الفاصلة بين الجزأين هو L

$$L = 2x + 2y + \pi\frac{x}{2} = 10 \Rightarrow y = 5 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x$$

ومنه فإن كمية الضوء تصبح:

$$Q(x) = 3x\left(5 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x\right) + \frac{1}{8}\pi x^2$$

$$= 15x - \left(3 + \frac{5\pi}{8}\right)x^2$$

$$Q'(x) = 15 - \left(6 + \frac{5\pi}{4}\right)x$$

$$Q'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{60}{24 + 5\pi}$$

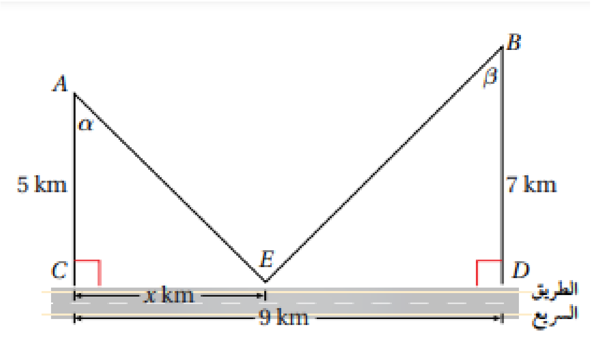
$$Q''(x) = -\left(6 + \frac{5\pi}{4}\right) \Rightarrow Q''\left(\frac{60}{24+5\pi}\right) = -\left(6 + \frac{5\pi}{4}\right) < 0$$

إذن تكون كمية الضوء المار خلال النافذة أكبر ما يمكن عندما:

$$x = \frac{60}{24 + 5\pi}, y = \frac{60 + 10\pi}{24 + 5\pi}$$

**يُمارس يوسف هواية ركوب الدراجات.**

**وفي أحد الأيام، انطلق على دراجته من البيت عند النقطة A إلى المدرسة عند النقطة B، ماراً بالنقطة E الواقعة على حافة الطريق السريع كما في الشكل المجاور:**



**21)إذا كان الاقتران L يُمثل المسافة التي يقطعها يوسف من البيت إلى المدرسة، فأكتب L بدلالة $x$.**

$$L=AE+EB=\sqrt{x^2+25}+\sqrt{(9-x)^2+49},0\le x\le 9$$

**22)أثبت أنه إذا كان: $\frac{dL}{dx}=0$، فإن: $\sin\alpha=\sin\beta$.**

$$\frac{dL}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+25}}+\frac{-(9-x)}{\sqrt{(9-x)^2+49}}$$

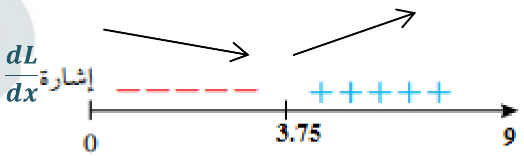
$$\frac{dL}{dx}=0\ \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+25}}=\frac{9-x}{\sqrt{(9-x)^2+49}}\Rightarrow \sin\alpha=\sin\beta$$

**23) أجد قيمة $x$ التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف أقل ما يُمكن.**

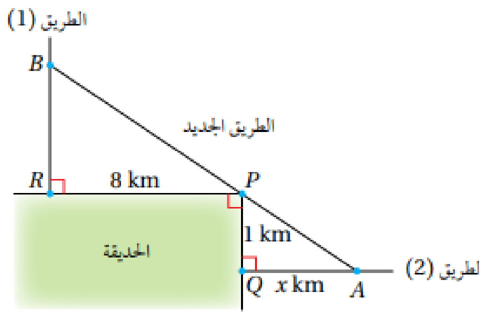
من السؤال السابق، بما أن $\sin\alpha=\sin\beta$، والزاويتان $\alpha$ و $\beta$ حادتان، إذن $\beta=\alpha$

ومنه فإن $\tan\alpha=\tan\beta$ أي:

$$\frac{x}{5}=\frac{9-x}{7}\Rightarrow 7x=45-5x\Rightarrow 12x=45\Rightarrow x=\frac{15}{4}=3.75$$



إذن قيمة $x$ التي تجعل المسافة التي يقطعها يوسف أقل ما يمكن هي 3.75 km



24)يبين الشكل المجاور مدخلين لحديقة عامة عند النقطة R والنقطة Q، ويمكن الوصول إلى هذين المدخلين من طريقين عموديين على ضلعي الحديقة. أرادت البلدية إنشاء طريق جديد يصل بين الطريقين القديمين، ويمر بالنقطة P التي تُمثل زاوية الحديقة، فاختارت النقطة A والنقطة B على الطريقين ليكون طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن، علما بأن النقطة A تقع على بعد $x\ km$ من النقطة Q.

أجد قيمة $x$ التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن.

ليكن L طول AB، النقاط A و B و P على استقامة واحدة، إذن المثلثان القائمان AQP, PRB متشابهان، ينتج عن ذلك:

$$\frac{BR}{1} = \frac{8}{x} \to BR = \frac{8}{x}$$

$$L = AP + PB = \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{64 + (\frac{8}{x})^2}$$

$$= \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{\frac{64x^2 + 64}{x^2}}$$

$$= \sqrt{1 + x^2} + \frac{8}{x}\sqrt{1 + x^2}$$

$$= \sqrt{1 + x^2}\left(1 + \frac{8}{x}\right), x > 0$$

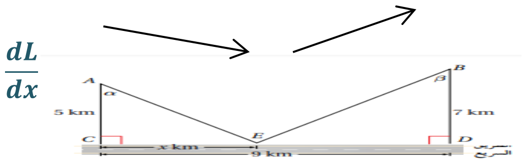
$$\frac{dL}{dx} = \sqrt{1 + x^2}\left(-\frac{8}{x^2}\right) + \left(1 + \frac{8}{x}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)$$

$$= \frac{-8\sqrt{1 + x^2}}{x^2} + \frac{8 + x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\frac{dL}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{8\sqrt{1 + x^2}}{x^2} = \frac{8 + x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\Rightarrow 8(1 + x^2) = 8x^2 + x^3$$

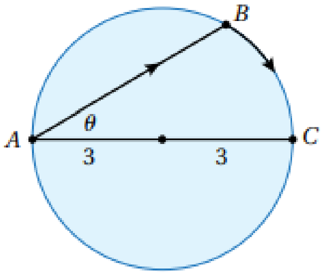
$$\Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$



إذن قيمة $x$ التي تجعل طول الطريق الجديد أقصر ما يمكن هي: $x = 2\ km$

**مهارات التفكير العليا:**

**25)تبرير: يقف رجل عند النقطة A على شاطئ بحيرة دائرية نصف قطرها 3 km، وهو يريد الوصول إلى النقطة C المقابلة تماما للنقطة A، على الجانب الآخر من البحير، في أقصر وقت ممكن كما في الشكل المجاور. يُمكن للرجل أن يجدف بزورق من النقطة A إلى النقطة B بسرعة 3 km/h، ثم يركض حول حافة البحيرة بسرعة 6 km/h. أحدد موقع النقطة B ليصل الرجل من النقطة A إلى النقطة C في أقل وقت ممكن؟ أبرر إجابتي.**



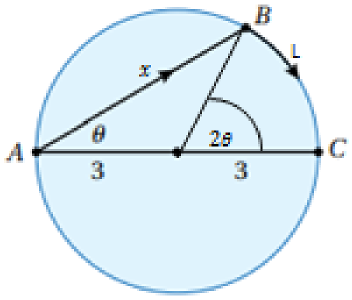
المثلث ABC قائم الزاوية في B لأن الزاوية ABC محيطية على قطر،

ومنه فإن: $\cos\theta = \frac{x}{6}$

قياس الزاوية COB يساوي $2\theta$ لأنها مركزية

مشتركة مع المحيطية CAB بالقوس نفسه.

ليكن الزمن الكلي الذي يحتاجه الرجل للوصول إلى النقطة C هو T



$$T = T_{A\to B} + T_{B\to C} = \frac{x}{3} + \frac{L}{6}$$

$$= \frac{6\cos\theta}{3} + \frac{3(2\theta)}{6} = 2\cos\theta + \theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dT}{d\theta} = 1 - 2\sin\theta$$

$$\frac{dT}{d\theta} = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

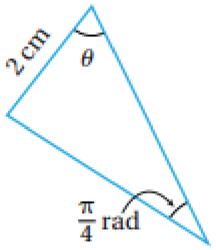
نقارن الزمن عند النقطة الحرجة مع الزمن عند طرفي المجال وهما $0, \frac{\pi}{2}$

$$T(0) = 2h$$

$$T\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \approx 2.25\ h$$

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1.57\ h$$

**إذن القيمة الصغرى للزمن تكون عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$، أي عندما تنطبق B على A ويقطع الرجل القوس $\widehat{AB}$ كاملا راكضا على اليابسة دون تجديف في الماء.**



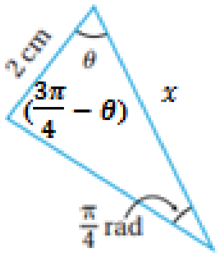
**تحد: يُبين الشكل المجاورمثلثاً، قياس إحدى زواياه $\frac{\pi}{4}\ rad$، ومقابلها ضلع طوله 2 cm:**

**26)أثبت أن مساحة المثلث A تعطى بالاقتران: $A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$**

ليكن طول الضلع الآخر من ضلعي الزاوية $\theta$ هو $x$، فيكون قياس الزاوية المقابلة له هو $(\pi - \theta - \frac{\pi}{4})$ أي $(\frac{3\pi}{4} - \theta)$

ولتكن مساحة هذا المثلث A، فإن: $A = \frac{1}{2} \times 2 \times x \times \sin\theta$

وبتطبيق قانون الجيوب على هذا المثلث ينتج أن:



$$\frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{x}{\sin(\frac{3\pi}{4} - \theta)}$$

$$x = 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{3\pi}{4}\cos\theta - \cos\frac{3\pi}{4}\sin\theta\right)$$

$$2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)$$

$$= 2(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$A = \frac{1}{2} \times 2 \times 2(\cos\theta + \sin\theta) \times \sin\theta$$

$$= 2(\cos\theta + \sin\theta) \times \sin\theta$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta + 2\sin^2\theta$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta + 2\sin^2\theta + 1 - \cos^2\theta$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 1$$

$$= \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$$

إذن، مساحة المثلث المعطى هي: $A = \sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$

**27)أجد مجال الاقتران في السؤال السابق.**

المجال هو الفترة التي تكون فيها مساحة المثلث عدداً حقيقياً موجباً وهو هنا الفترة $(0,\frac{3\pi}{4})$ التي طرفاها جذري اقتران المساحة لأن المساحة عند هذين الحدين تكون صفرا وعند أي عدد بينهما تكون عددا موجبا، فإذا كانت $\theta=\frac{\pi}{6}$، تكون مساحة المثلث:

$$A=\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}+1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+1\ \approx 1.37>0$$

**28) أثبت أن أكبر مساحة ممكنة للمثلث هي: $(1+\sqrt{2})cm^2$**

$$A'(\theta)=2\cos 2\theta+2\sin 2\theta=0$$

$$2\sin 2\theta=-2\cos 2\theta$$

$$\tan 2\theta=-1\ \Rightarrow 2\theta=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\theta=\frac{3\pi}{8}$$

توجد قيم حرجة وحيدة ضمن مجال الاقتران هي $\theta=\frac{3\pi}{8}$

لذلك نقارن قيمة الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمته عند طرفي المجال.

$$A(0)=\sin 0-\cos 0+1=0$$

$$A\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\frac{3\pi}{4}-\cos\frac{3\pi}{4}+1=\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1=\frac{2}{\sqrt{2}}+1=\sqrt{2}+1$$

$$A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}-\cos\frac{3\pi}{2}+1=-1-0+1=0$$

إذن، أكبر قيمة ممكنة (العظمى المطلقة) لمساحة المثلث هي: $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=(1+\sqrt{2})cm^2$

## كتاب التمارين

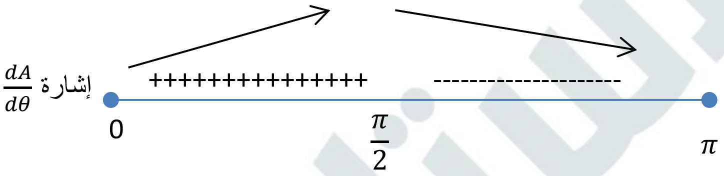
## الدرس الثالث- تطبيقات القيم القصوى

**1) إذا كان $a\ cm$ و $b\ cm$ هما طولي ضلعين ثابتين في مثلث، وكانت الزاوية بينهما $\theta$، فأجد قيمة $\theta$ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يُمكن.**

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\theta, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2}ab\cos\theta$$

$$\frac{dA}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$



إذن مساحة المثلث تكون أكبر ما يمكن عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$

**2) ترغب شركة في تصميم خزان من الفولاذ الرقيق المقاوم للصدأ على شكل متوازي مستطيلات، حجمه $500\ m^3$، وقاعدته مربعة الشكل، ومفتوح من الأعلى. أجد الأبعاد التي تجعل مساحة سطح الخزان أقل ما يمكن.**

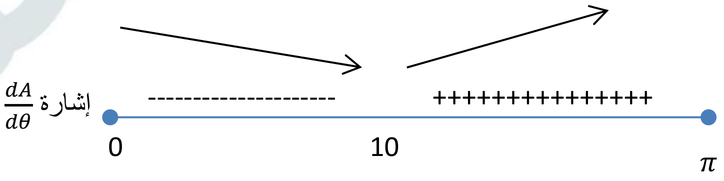
ليكن $x$ طول ضلع القاعدة المربعة، h ارتفاع الخزان، A مساحة سطحه، V حجمه.

$$V = x^2h = 500 \rightarrow h = \frac{500}{x^2}$$

$$A = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \times \frac{500}{x^2} = x^2 + \frac{2000}{x}$$

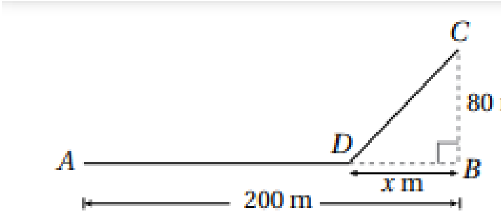
$$\frac{dA}{dx} = 2x - \frac{2000}{x^2}$$

$$\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 2x^3 = 2000 \Rightarrow x = 10$$



إذن تكون مساحة سطح الخزان أقل ما يمكن عندما تكون الأبعاد كالآتي:

$$x = 10m, h = 5m$$



**يمتد مسار للركض شرقا من النقطة A إلى النقطة B مسافة 200m، وتقع النقطة C على بعد 80 m شمال النقطة B. انطلق راكب على دراجة من النقطة A إلى النقطة D بسرعة 10m/s، حيث تقع النقطة D على بعد $x$ مترا غرب النقطة B، ثم سار في طريق مستقيم وعر من النقطة D إلى النقطة C بسرعة 6m/s:**

**3) أجد اقترانا بدلالة $x$ يمثل الزمن الذي سيستغرقه راكب الدراجة في الانتقال من النقطة A إلى النقطة C.**

ليكن الزمن اللازم للوصول من A إلى D هو $T_{AD}$، والزمن اللازم للوصول من D إلى C هو $T_{DC}$، فإن الزمن الكلي $T(x)$ هو:

$$T(x) = T_{AD} + T_{DC} = \frac{200 - x}{10} + \frac{\sqrt{x^2 + 6400}}{6}$$

**4) بافتراض أن $x$ قيمة متغيرة، أجد قيمة $x$ التي يكون عندها الزمن اللازم للانتقال من النقطة A إلى النقطة C أقل ما يمكن.**

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{1}{10} + \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 6400}}$$

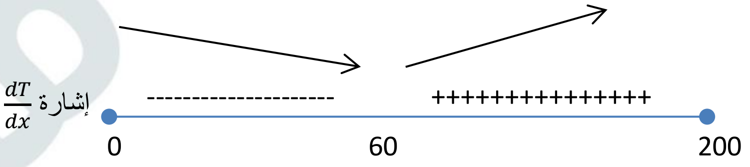
$$\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 6400}} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow 10x = 6\sqrt{x^2 + 6400}$$

$$\Rightarrow 25x^2 = 9(x^2 + 6400)$$

$$\Rightarrow 16x^2 = 9(6400)$$

$$\Rightarrow x = 60\ cm$$



إذن قيمة $x$ التي يكون عندها الزمن T أقل ما يمكن هي: $x = 60\ m$

**سلك يبلغ طوله 24 cm، ويراد قصه إلى قطعتين لصنع دائرة ومربع:**

**5) أحدد مكان القص، بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أصغر ما يُمكن.**

لتكن A مجموع مساحتي الدائرة والمربع، r طول نصف قطر الدائرة

ليكن طول الجزء الذي تصنع منه الدائرة $x\ cm$، فإن:

$$x = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$$

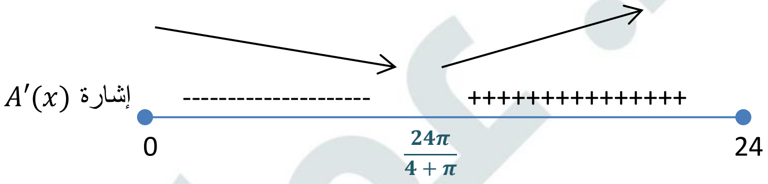
$$A(x) = \pi(\frac{x}{2\pi})^2 + (\frac{24-x}{4})^2$$

$$A'(x) = 2\pi\frac{x}{2\pi} \times \frac{1}{2\pi} + 2\left(6 - \frac{1}{4}x\right) \times -\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2\pi}x - 3 + \frac{1}{8}x$$

$$=(\frac{1}{2\pi} + 1/8)x - 3$$

$$A'(X) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8}} = \frac{24\pi}{4+\pi}$$



إذن يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أصغر ما يمكن عندما نقطع للدائرة من السلك طولا مقداره $\frac{24\pi}{4+\pi}\ cm$

**6) أحدد مكان القص، بحيث يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أكبر ما يُمكن.**

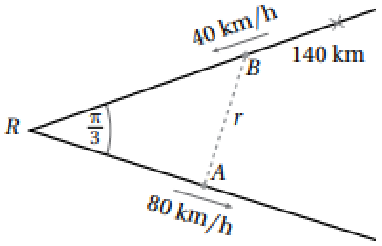
للحصول على أكبر قيمة للاقتران A نقارن القيمتين $A(0)$ و $A(24)$:

$$A(0) = \pi(\frac{0}{2\pi})^2 + (\frac{24-0}{4})^2 = 36\ cm^2$$

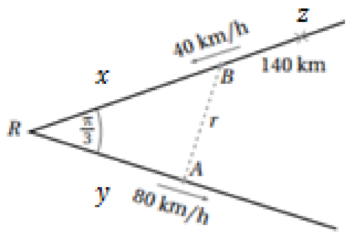
$$A(24) = \pi(\frac{24}{2\pi})^2 + (\frac{24-24}{4})^2 = \frac{144}{\pi} \approx 45.8\ cm^2$$

إذن للحصول على أكبر مجموع للمساحتين نخصص السلك كله للدائرة، ولا نقطع للمربع شيئا منه.

7) يلتقي طريقان مستقيمان عند النقطة R بزاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$، إذا انطلقت السيارة A من النقطة R على أحد الطريقين بسرعة 80 km/h، وفي الوقت نفسه انطلقت السيارة B بسرعة 40 km/h على الطريق الآخر في اتجاه النقطة R من نقطة تبعد عنها مسافة 140 km، فأجد أقصر مسافة ممكنة بين السيارتين.



لتكن الأبعاد كما في الشكل أدناه:



بعد مرور t ساعة من انطلاق السيارتين يكون:

$$y = 80t, z = 40t \Rightarrow x = 140 - 40t$$

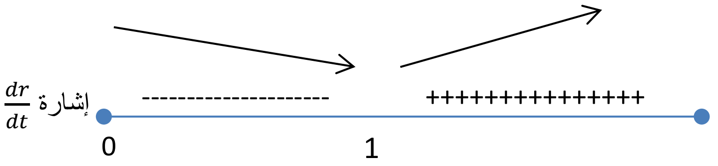
$$r^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 - xy$$

$$\Rightarrow r^2 = (140 - 40t)^2 + (80t)^2 - (140 - 40t)(80t)$$

$$= 19600 - 22400t + 11200t^2$$

$$\Rightarrow 2r\frac{dr}{dt} = -22400 + 22400t \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{-22400 + 22400t}{2r}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow -22400 + 22400t = 0 \Rightarrow t = 1h$$



أقصر مسافة ممكنة بين السيارتين هي:

$$r = \sqrt{19600 - 22400 + 11200} = \sqrt{8400} \approx 91.7\ km$$

## اختبار نهاية الوحدة

اختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) مثلث قائم الزاوية، ساقاه $x$ و $y$، ووتره $z$. إذا كان: $\frac{dz}{dt} = 1$، وكان $\frac{dy}{dt} = 3\frac{dx}{dt}$، فإن $\frac{dx}{dt}$ عندما $x = 4$، و $y = 3$ هي:

a) $\frac{1}{3}$ [✓ b) 1] c) 2 d) 5

2) القيمة العظمى المُطلقة للاقتران: $f(x) = 4x - x^2 + 6$ في الفترة $[0, 4]$ هي:

a) 6 b) 2 [✓ c) 10] d) 12

3) الإحداثي $x$ لنقطة انعطاف الاقتران: $f(x) = x^5 - 5x^4 + 3x + 7$ هو:

a) 0 b) 1 [✓ c) 3] d) -1

4) قيمة $x$ التي تكون عندها قيمة عظمى محلية للاقتران $f(x) = (x - 2)(x - 3)^2$ هي:

a) 3 b) $-\frac{7}{3}$ c) $-\frac{5}{3}$ [✓ d) $\frac{7}{3}$]

5) إذا كانت الفترة $[1, 25]$ هي مجال الاقتران المتصل $f$، الذي مداه $[3, 30]$، وكان: $f'(x) = 0$ لجميع قيم $x$ بين 25, 1، فإن $f(25)$ تساوي:

a) 1 [✓ b) 3] c) 25 d) 30

6) القيمة العظمى (بالوحدات المربعة) لمساحة مثلث قائم الزاوية، طول وتره 10 وحدات هي:

a) 24 [✓ b) 25] c) 48 d) 50

7) إذا زاد حجم مكعب بمعدل $24\ cm^3/min$، وزادت مساحة سطحه بمعدل $12\ cm^2/min$، فإن طول ضلعه في تلك اللحظة هو:

a) 2 cm b) $2\sqrt{2}$ cm c) 4 cm [✓ d) 8 cm]

**8) عدد النقاط الحرجة للاقتران: $f(x) = (x-2)^5(x+3)^4$ هو:**

a) 1

b) 2

$\boxed{\text{c) 3}}$

d) 5

**أجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة (إن وجدت) لكل اقتران مما يأتي في الفترة المعطاة:**

**9)** $f(x) = 3x^2 - 2x^3, [-5, 1]$

$$f(x) = 3x^2 - 2x^3, [-5, 1]$$

$$f'(x) = 6x - 6x^2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x(1-x) = 0 \ \Rightarrow x = 0, x = 1$$

مجموعة قيم $x$ الحرجة ضمن الفترة (1 ,5-) هي: $x = 0$

نقارن قيم الاقتران عند النقطة الحرجة مع قيمته عند طرفي الفترة:

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1$$

$$f(-5) = 75 + 250 = 325$$

إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي $f(-5) = 325$ وصغرى مطلقة هي $f(0) = 0$

**10)** $f(x) = \frac{x}{x+3}, [-1, 6]$

$$f(x) = \frac{x}{x+3}, [-1, 6]$$

$$f'(x) = \frac{x+3-x}{(x+3)^2} = \frac{3}{(x+3)^2}$$

$f'(x) > 0$ لجميع قيم $x$ ولذا فإن $f(x)$ متصل ومتزايد عل مجاله.

ولا يوجد له قيم حرجة ضمن (6 ,1-)، قيمة القصوى تكون عند طرفي مجاله.

$$f(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$f(6) = \frac{2}{3}$$

إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي $f(6) = \frac{2}{3}$ وقيمة صغرى مطلقة هي $f(-1) = -\frac{1}{2}$

**11) $f(x) = xe^{x/2}, [-3, 1]$**

$$f(x) = xe^{x/2}, [-3, 1]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow x = -2$$

له قيمة حرجة وحيدة هي: $x = -2$

نقارن قيمته عند النقطة الحرجة مع قيمتيه عند طرفي المجال.

$$f(-3) = \; -3e^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{\sqrt{e^3}} \approx= 0.6694$$

$$f(-2) = \; -2e^{-1} = -\frac{2}{e} \approx -0.7358$$

$$f(1) = \; e^{\frac{1}{2}} \approx 1.6487$$

إذن لهذا الاقتران قيمة عظمى مطلقة هي $f(1) = \; e^{\frac{1}{2}}$ وقيمة صغرى مطلقة هي $f(-2) = -\frac{2}{e}$

**12) $f(x) = 3\cos x, [0, 2\pi]$**

$$f(x) = 3\cos x, [0, 2\pi]$$

$$f'(x) = \; -3\sin x$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow \sin x = 0 \;\Rightarrow x = 0, x = \pi, 2\pi$$

له قيمة حرجة وحيدة هي: $x = \pi$

نقارن قيمته عند النقطة الحرجة مع قيمته عند طرفي المجال.

$$f(0) = 0$$

$$f(\pi) = -3$$

$$f(2\pi) = 3$$

إذن لهذا الاقتران قيمة غظمى مطلقة هي $f(0) = f(2\pi) = 3$، وقيمة صغرى مطلقة هي $f(\pi) = -3$

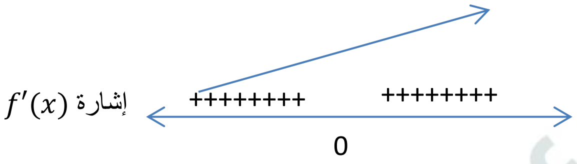
**أجد فترات التزايد وفترات التناقص لكل اقتران مما يأتي، ثم أجد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) لكل اقتران:**

**13)** $f(x) = x^5 + x^3$

$$f(x) = x^5 + x^3$$

$$f'(x) = 5x^5 + 3x^3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2(5x^2 + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$$



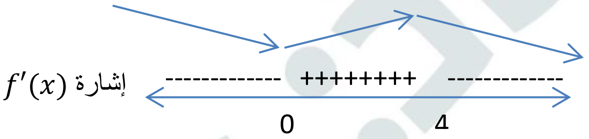
الاقتران $f$ متزايد على R وليس له قيم قصوى محلية ولا مطلقة.

**14)** $f(x) = x^4e^{-x}$

$$f(x) = x^4e^{-x}$$

$$f'(x) = -x^4e^{-x} + 4x^3e^{-x} = e^{-x}x^3(4 - x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$$



الاقتران $f$ متزايد على $(0, 4)$ ومتناقص على $(-\infty, 0)$ و $(4, \infty)$

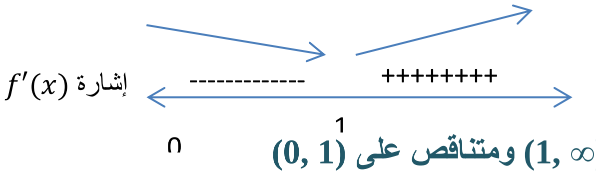
وله قيمة عظمى محلية هي $f(4) = \frac{256}{e^4}$، وقيمة صغرى محلية ومطلقة هي: $f(0) = 0$

**15)** $f(x) = \frac{x^3}{3} - \ln x$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \ln x, \quad x > 0$$

$$f'(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{x} \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$



الاقتران $f$ متزايد على $(1, \infty)$ ومتناقص على $(0, 1)$

وله قيمة صغرى محلية ومطلقة هي $f(1) = \frac{1}{3}$

**أجد فترات التقعر للأعلى وفترات التقعر للأسفل ونقاط الانعطاف (إن وجدت) لمنحنى كل اقتران مما يأتي:**

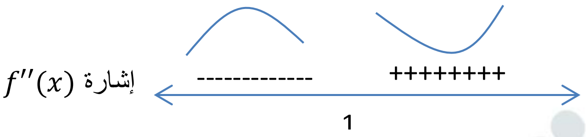
**16)** $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$



الاقتران مقعر للأعلى في $(1, \infty)$ ومقعر للأسفل في $(-\infty, 1)$

وله نقطة انعطاف هي: (1, -7)

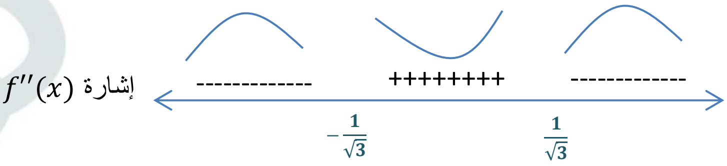
**17)** $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x) - (x^2)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2 - 6x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$



الاقتران مقعر للأعلى في $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ومقعر للأسفل في $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ و $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$

وله نقطتا انعطاف هما: $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4})$ $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4})$

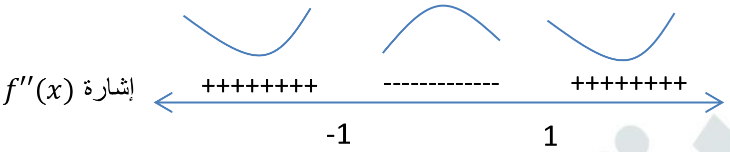
**18)** $f(x) = (3 - x^2)^2$

$$f(x) = (3 - x^2)^2$$

$$f'(x) = 2(3 - x^2)(-2x) = 4x^3 - 12x$$

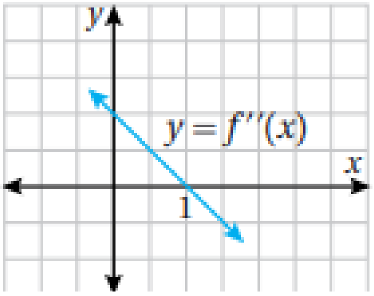
$$f''(x) = 12x^2 - 12$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$



الاقتران مقعر للأسفل في (-1, 1) ومقعر للأعلى في $(-\infty, -1)$ و $(1, \infty)$

وله نقطتا انعطاف هما: (-1, 4) (1, 4)

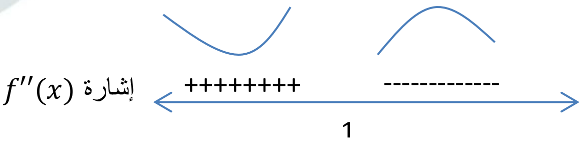


استعمل التمثيل البياني المجاور لمنحنى $f''(x)$

لإيجاد كل مما يأتي:

**19)** فترات التقعر للأعلى وللأسفل لمنحنى الاقتران $f$.

نلاحظ من الشكل أن إشارة الاقتران $f''$ كالآتي



إذن منحنى $f$ مقعر للأعلى في الفترة $(-\infty, 1)$ ومقعر للأسفل في الفترة $(1, \infty)$

**20)** الإحداثي $x$ لنقاط انعطاف منحنى الاقتران $f$

للاقتران $f$ نقطة انعطاف عند $x = 1$

يُمثل الاقتران: $s(x) = 5.00 = 0.002x$ سعر منتج (بالدينار) في إحدى الشركات، حيث $x$ عدد القطع من المنتج. ويمثل الاقتران: $C(x) = 3.00 + 1.10x$ تكلفة إنتاج $x$ قطعة (بالدينار) من المنتج.

**21)** أجد اقتران الإيراد.

سعر المنتج الواحد هو: $s(x) = 5 - 0.002x$

إذن اقتران الإيراد: $R(x) = x \times s(x) = 5x = 0.002x^2$

22) أجد اقتران الربح.

$$P(x) = R(x) - C(x) = 5x = 0.002x^2 - 3 = 1.1x$$
$$= 3.9x - 0.002x^2 - 3$$

23) أجد عدد القطع اللازم بيعها من المنتج لتحقيق أكبر ربح ممكن، ثم أجد أكبر ربح ممكن.

$$P'(x) = 3.9 - 0.004x$$
$$P'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3.9}{0.004} = \frac{3900}{4} = 975$$
$$P''(x) = \ -0.004 \ \Rightarrow P''(975) = -0.004 < 0$$

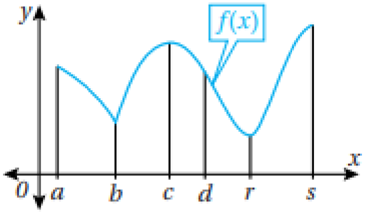
إذن أكبر ربح ممكن يتحقق عند إنتاج وبيع 975 قطعة

أكبر ربح ممكن يساوي: $P(975) = 3.9(975) - 0.002(975)^2 - 3 = 1898.25\,JD$

24) أجد سعر المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن.

$$s(975) = 5 - 0.002(975) = 5 - 1.950 = 3.05JD$$

25) يُبين الشكل التالي منحنى الاقتران $f(x)$ أي النقاط الواقعة على المنحنى تُمثل نقطة صغرى أو نقطة عظمى محلية؟ أيها تُمثل قيمة صغرى أو قيمة عظمى مطلقة؟ أُبرر إجابتي.



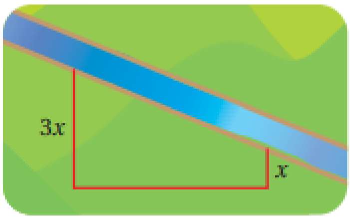
$(b, f(b))$ نقطة قيمة صغرى محلية

$(c, fc)$ نقطة قيمة عظمى محلية

$(r, f(rb))$ نقطة قيمة صغرى محلية ومطلقة

$(s, fs)$ نقطة قيمة عظمى مطلقة

**26) لدى مُزارع 400m من السياج، وهو يريد تسييج حقله الذي يأخذ شكل شبه منحرف، ويوجد على حافة النهر كما في الشكل التالي. إذا كان طول أحد الضلعين المتوازيين يساوي 3 أمثال طول الضلع الآخر، فأجد أكبر مساحة يُمكن للمزارع أن يحيطها بهذا السياج، علما بأن الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.**



ليكن $y$ طول الضلع الثالث لهذا الحقل

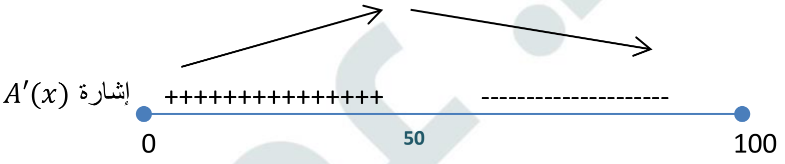
$$400 = x + 3x + y \Rightarrow 4x + y = 400$$

$$A = \frac{1}{2}(x + 3x)(y) = \frac{1}{2}(4x)(400 - 4x)$$

$$A(x) = 800x - 8x^2, 0 \le x \le 100$$

$$A'(x) = 800 - 16x$$

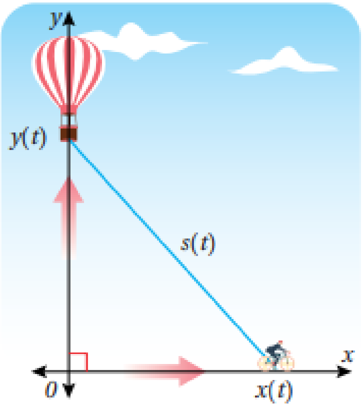
$$A'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{800}{16} = 50$$



إذن أكبر مساحة ممكنة هي: $A(50)$

$$A(50) = 800(50) - 8(50)^2 = 20000\ m^2$$

27)يرتفع بالون رأسيا فوق مستوى طريق مستقيم بمعدل 1 ft/s. وفي اللحظة التي كان فيها البالون على ارتفاع 65 ft فوق سطح الأرض، مرَّت أسفله دراجه تتحرك بسرعة 17 ft/s كما في الشكل التالي. أجد سرعة تغير المسافة بين البالون والدراجة بعد 3 ثوان من هذه اللحظة.



المعدلات المعطاة: سرعة البالون $\frac{dy}{dt} = 1\ ft/s$،

وسرعة الدراجة $\frac{dx}{dt} = 17\ ft/s$

المطلوب: $\frac{ds}{dt}|_{t=3}$

بعد t ثانية من مرور الدراجة يكون ارتفاع البالون
فوق سطح الأرض هو: $y = 65 + t$ وتكون الدراجة قطعت مسافة
أفقية هي: $x = 17t$ وتكون المسافة بين الدراجة والبالون s
ومن نظرية فيثاغورش نجد أن:

$$s^2 = x^2 + y^2$$

$$s^2 = (17)^2 + (65 + t)^2$$

$$s = \sqrt{(17)^2 + (65 + t)^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2(17t)(17) + 2(65 + t)(1)}{2\sqrt{(17)^2 + (65 + t)^2}} = \frac{289t + 65 + t}{\sqrt{(17)^2 + (65 + t)^2}} = \frac{290t + 65}{\sqrt{(17)^2 + (65 + t)^2}}$$

$$\frac{ds}{dt}|_{t=3} = \frac{290t + 65}{\sqrt{(17)^2 + (65 + t)^2}} = \frac{935}{85} = 11\ ft/s$$

إذن تتزايد المسافة بين البالون والدراجة بمعدل 11 قدماً في الثانية وذلك بعد مرور 3 ثوان من لحظة مرور الدراجة تحت البالون.