الرياضيات

MATHEMATICS

توجيهي الفرع الأدبي والفندقي - الفصل الدراسي الثاني

5.500

5500

2024
جيل 2007

الوحدة الرابعة:

التكامل وتطبيقاته

إعداد المعلم :

ناجح الجمزاوي

0795656881

الرياضيات
الصف الثاني عشر – الفرع الادبي
الفصل الدراسي الثاني
الوحدة الرابعة
التكامل

ناجح الجمزاوي

0779192534 0795656881

أستعد لدراسة الوحدة

التحويل من الصورة الأسِّية إلى الصورة الجذرية والعكس

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

مثال (1)

أكتب الصورة الأُسِّية في صورة جذرية، وأكتب الصورة الجذرية في صورة أُسِّية، في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $y^{\frac{1}{4}}$

$y^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{y}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

c) $x^{\frac{3}{4}}$

$x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$ تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

b) $\sqrt[6]{w}$

$\sqrt[6]{w} = w^{\frac{1}{6}}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

d) $\sqrt[5]{b^2}$

$\sqrt[5]{b^2} = b^{\frac{2}{5}}$ تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

مثال (2)

أكتب الصورة الأُسِّية في صورة جذرية، وأكتب الصورة الجذرية في صورة أُسِّية، في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $p^{\frac{1}{6}}$

$p^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{p}$

2. $w^{\frac{8}{3}}$

$w^{\frac{8}{3}} = \sqrt[3]{w^8}$

3. $\sqrt[6]{v^5}$

$\sqrt[6]{v^5} = v^{\frac{5}{6}}$

4. $\sqrt[8]{u}$

$\sqrt[8]{u} = u^{\frac{1}{8}}$

إيجاد قيمة اقتران عند نقطة ما

مثال (1)

أجد قيمة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

a) $f(x) = x^3 - 3x - 1; x = -1$

بتعويض $x = -1$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 1$$

بالتبسيط

$$= 1$$

b) $f(x) = \sqrt{x} + e^{2x+3}; x = 0$

بتعويض $x = 0$

بالتبسيط

$$f(0) = \sqrt{0} + e^{2(0)+3}$$

$$= e^3$$

مثال (2)

أجد قيمة كلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة x المعطاة:

1)

$$f(x) = x^2 - 5x + 9; x = 1$$

الحل

$$f(1) = (1)^2 - 5(1) + 9 = 5$$

2)

$$h(x) = \sqrt{x} + 10; x = 49$$

$$h(49) = \sqrt{49} + 10 = 17$$

3)

$$g(x) = e^x + 3x; x = 0$$

$$g(x) = e^0 + 3(0) = 1 + 0 = 1$$

إيجاد مشتقة اقترانات مختلفة

مثال (1)

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \frac{6x-8}{x^2} + \ln x$

الاقتران المعطى $f(x) = \frac{6x-8}{x^2} + \ln x$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على x^2

$= \frac{6x}{x^2} - \frac{8}{x^2} + \ln x$

تعريف الأُسِّ السالب

$= 6x^{-1} - 8x^{-2} + \ln x$

قواعد اشــتقاق مضاعفات القــوَّة، والفرق، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

$f'(x) = -6x^{-2} + 16x^{-3} + \frac{1}{x}$

تعريف الأُسِّ السالب

$= -\frac{6}{x^2} + \frac{16}{x^3} + \frac{1}{x}$

---

b) $y = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} + \cos x + e^{2x}$

الاقتران المعطى

$y = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} + \cos x + e^{2x}$

$= (2x-3)^{-\frac{1}{2}} + \cos x + e^{2x}$

بكتابة الجذر في صورة أُسِّية

قاعدة سلسلة القوَّة، ومشتقة الاقتران الأُسّي الطبيعي، ومشتقة اقتران جيب التمام

$\frac{dy}{dx} =$

$-\frac{1}{2}(2x-3)^{-\frac{3}{2}} \times 2 - \sin x + 2e^{2x}$

تعريف الأُسِّ السالب

$= -\frac{1}{(2x-3)^{\frac{3}{2}}} - \sin x + 2e^{2x}$

مثال (1)

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1)

$f(x) = 2x^3$

$f'(x) = 6x^2$

2)

$f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3)

$$y = x + \sqrt[5]{2x-5}$$

الحل

$$y = x + (2x-5)^{\frac{1}{5}}$$

$$y' = 1 + \frac{1}{5}(2x-5)^{\frac{-4}{5}} \times 2$$

$$= 1 + \frac{2}{5\sqrt[5]{(2x-5)^4}}$$

4)

$$f(x) = (2x+3)(1-x^3)$$

الحل

مشتقة حاصل ضرب

$$f'(x) = (2x+3)(-3x^2) + (1-x^3)(2)$$

5)

$$y = 8x - \frac{x}{2x+8}$$

الحل

مشتقة القوة ومشتقة القسمة

$$y' = 8 - \frac{(2x+8)(8) - x(2)}{(2x+8)^2}$$

$$= 8 - \frac{14x+64}{(2x+8)^2}$$

6)

$$y = \frac{7}{x^3} + \frac{3}{x} - 2$$

الحل

$$y = 7x^{-3} + \frac{3}{x} - 2$$

$$y^{-} = -21x^{-4} - \frac{3}{x^2} = \frac{-21}{x^4} - \frac{3}{x^2}$$

7)

$$f(x) = 7x - e^{2x-1}$$

الحل

$$f'(x) = 7 - 2e^{2x-1}$$

8)

$$f(x) = x^4 \ln x$$

الحل

مشتقة ضرب

$$x^4 \frac{1}{x} + \ln x\,(4x^3) = x^3 + 4x^3 \ln x$$

9)

$$f(x) = \sin 2x + 4\cos 3x$$

الحل

$$f'(x) = a\cos 2x - 12\sin 3x$$

إعادة تعريف اقتران القيمة المُطلَقة

مثال (1)

أُعيد تعريف اقتران القيمة المُطلَقة: $f(x) = |3x - 9|$.

الحل

الخطوة 1:

أدرس إشارة ما في داخل القيمة المُطلَقة، وذلك بمساواته بالصفر ثم حَلِّ المعادلة الناتجة.

بمساواة ما في داخل القيمة المُطلَقة بالصفر $2x + 4 = 0$

بطرح 4 من طرفي المعادلة $2x + 4 - 4 = 0 - 4$

بقسمة طرفي المعادلة على 2 $\frac{2x}{2} = \frac{-4}{2}$

بالتبسيط $x = -2$

الخطوة 2:

أُعيِّن جذر المعادلة على خط الأعداد، ثم أُحدِّد الإشارة على جانبيه.

أُعيِّن العدد -2 على خط الأعداد، ثم أُحدِّد الإشارة على جانبيه بتعويض أيِّ قيمة أقل من -2 في المقدار الجبري: $2x + 4$، فيكون دائمًا ناتج التعويض سالبًا؛ ما يعني أنَّ إشارة المقدار سالبة يسار العدد -2. بعد ذلك أُعوِّض أيَّ قيمة أكبر من -2 في المقدار الجبري: $2x + 4$، فيكون دائمًا ناتج التعويض موجبًا؛ ما يعني أنَّ إشارة المقدار موجبة يمين العدد -2:

$$\begin{array}{ccc} - - - - - - - - & \Big| & + + + + + + + + \\ \longleftarrow & -2 & \longrightarrow \end{array}$$

الخطوة 3:

أكتب قاعدتي الاقتران بحسب إشارة يمين جذر المعادلة ويساره.

أكتب ما في داخل القيمة المُطلَقة كما هو في الجزء الموجب، ثم أكتب في الجزء السالب ما في داخل القيمة المُطلَقة مضروبًا في -1:

$$\begin{array}{ccc} -(2x+4) & & 2x+4 \\ - - - - - - - - & \Big| & + + + + + + + + \\ \longleftarrow & -2 & \longrightarrow \end{array}$$

الخطوة 4:

أكتب قاعدة الاقتران المُتشعِّب.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & , x < -2 \\ 2x + 4 & , x \geq -2 \end{cases}$$

الدرس 1

التكامل غير المحدود

الاقتران الأصلي

الاقتران الأصلي

إذا كانت مشتقة الاقتران معلومة، فكيف يُمكِن معرفة الاقتران؟
في هذه الحالة يتعيَّن استعمال طريقة عكسية تلغي المشتقة.

وبكلمات أُخرى، إذا عُلِم الاقتران $f(x)$، فيجب إيجاد اقتران ما وليكن: $F(x)$، بحيث $F'(x) = f(x)$

ويُسمّى $F(x)$ **اقترانًا أصليًّا** للاقتران $f(x)$.

فمثلًا، إذا كان: $f(x) = 3x^2$، فإنَّ الاقتران: $F(x) = x^3$ هو اقتران أصلي للاقتران $f(x)$، لكنَّها ليست الصورة الوحيدة له؛ فقد يكون في صورة: $F(x) = x^3 + 1$ أو صورة: $F(x) = x^3 - 3$

لأنَّ مشتقة كلٍّ منهما تساوي $3x^2$ (مشتقة الحدِّ الثابت تساوي صفرًا).

بوجه عام، فإنَّ أيَّ اقتران أصلي للاقتران: $f(x)= 3x^2$ يُكتَب في صورة: $G(x) = F(x) + C = x^3 + C$، حيث C ثابت.

مفهوم أساسي

إذا كان $F(x)$ اقترانًا أصليًّا للاقتران المتصل $f(x)$، فإنَّ أيَّ اقتران أصلي آخر للاقتران $f(x)$ يُكتَب في صورة: $G(x) = F(x) + C$، حيث C ثابت.

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C]$$

أتذكَّر

إذا كان: $y = x^n$، حيث n عدد حقيقي، فإنَّ: $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

مثال (1)

أجد اقترانًا أصليًّا لكلٍّ من الاقترانين الآتيين:

1) $f(x) = 6x^5$

الحل

عندما أبحث عن اقتران مشتقته $6x^5$، أتذكَّر أنَّ أُسَّ x في مشتقة اقتران القوَّة أقل بواحد من أُسِّ x في الاقتران الأصلي. وبذلك، فإنَّ أُسَّ المُتغيِّر x في الاقتران الأصلي هو 6. وبما أنَّ مشتقة x^6 تساوي $6x^5$، فإنَّ: $F(x) = x^6$ هو اقتران أصلي للاقتران $f(x)$. ومن ثَمَّ، فإنَّ أيَّ اقتران أصلي للاقتران $f(x)$ يُكتَب في الصورة الآتية: $G(x) = x^6 + C$

2) $f(x) = -3x^{-4}$

الحل

عندما أبحث عن اقتران مشتقته $-3x^{-4}$، أتذكَّر أنَّ أُسَّ x في مشتقة اقتران القوَّة أقل بواحد من أُسِّ x في الاقتران الأصلي. وبذلك، فإنَّ أُسَّ المُتغيِّر x في الاقتران الأصلي هو -3. وبما أنَّ مشتقة x^{-3} تساوي $-3x^{-4}$ فإنَّ: $F(x) = x^{-3}$ هو اقتران أصلي للاقتران $f(x)$.

ومن ثَمَّ، فإنَّ أيَّ اقتران أصلي للاقتران $f(x)$ يُكتَب في الصورة الآتية: $G(x) = x^{-3} + C$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 9

أجد اقترانًا أصليًّا لكلٍّ من الاقترانين الآتيين:

a) $f(x) = 5x^4$

الحل

$f(x) = 5x^4$

$G(x) = x^5 + C$

b) $f(x) = -9x^{-10}$

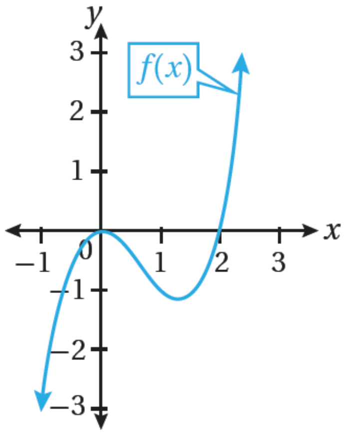
الحل

$f(x) = -9x^{-10}$

$G(x) = x^{-9} + C$

مسألة اليوم

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$، هل يُمكِنني تحديد قاعدة الاقتران إذا علمْتُ أنَّ مشتقته هي: $f'(x) = 3x^2 - 4x$؟



$f(x) = \int (3x^2 - 4x)\,dx = x^3 - 2x^2 + C$ لكن

منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0, 0)$، إذن: $C = 0$ ومنه قاعدة الاقتران هي: $f(x) = x^3 - 2x^2$

مثال (3)

أجد الاقتران الأصلي لكلٍّ من الاقترانين الآتيين:

1 $f(x) = 5x^4$

عند البحث عن اقتران مشتقته $5x^4$، أتذكَّر أنَّ أسَّ x في مشتقة اقتران القوَّة أقل بواحد من أُسِّ x في الاقتران الأصلي. وبذلك، فإنَّ أسَّ المُتغيِّر x في الاقتران الأصلي هو 5 وبما أنَّ مشتقة x^5 تساوي $5x^4$. فإنَّ الاقتران الأصلي للاقتران $f(x)$ هو:

$F(x) = x^5 + C$

2 $f(x) = -8x^{-9}$

عند البحث عن اقتران مشتقته $-8x^{-9}$، أتذكَّر أنَّ أسَّ x في مشتقة اقتران القوَّة أقل بواحد من أُسِّ x في الاقتران الأصلي. وبذلك، فإنَّ أسَّ المُتغيِّر x في الاقتران الأصلي هو -8 وبما أنَّ مشتقة x^{-8} تساوي $-8x^{-9}$، فإنَّ الاقتران الأصلي للاقتران $f(x)$ هو: $F(x) = x^{-8} + C$

التكامل غير المحدود

❖ المقدمة

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

تُسمّى المعادلة السابقة **التكامل غير المحدود** للاقتران $f(x)$، ويُسمّى $\int$ رمز التكامل، ويُسمّى الاقتران $f(x)$ **المُكامَل** ويُسمّى C **ثابت التكامل** أمّا dx فرمز يشير إلى أنَّ التكامل يتمُّ بالنسبة إلى المُتغيِّر x الذي يُسمّى **مُتغيِّر التكامل**

يُبيِّن المُخطَّط الآتي عناصر التكامل غير المحدود للاقتران: $f(x) = 3x^2$:

المُكامَل
ثابت التكامل

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

مُتغيِّر التكامل
رمز التكامل

ملاحظة :

التكامل والاشتقاق عمليتان عكسيتان. وقد سُمِّي التكامل غير المحدود بهذا الاسم؛ لأنَّه يتضمَّن الثابت C الذي يُمكِن تمثيله بأيِّ قيمة.

القواعد الأساسية للتكامل غير المحدود

مفهوم أساسي

إذا كان k عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

تكامل الثابت

1) $$\int k\,dx = kx + C$$

تكامل اقتران القوَّة

2) $$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ n \neq -1$$

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 7\,dx$

$$\int 7\,dx = 7x + C$$ قاعدة تكامل الثابت

2) $\int x^{18}\,dx$

قاعدة تكامل اقتران القوَّة

$$\int x^{18}\,dx = \frac{1}{18+1}x^{18+1} + C$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{19}x^{19} + C$$

3 $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

بكتابة المُكامَل في صورة أُسِّية

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$= \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$ تعريف الأُسِّ السالب

$$= \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}$$ قاعدة تكامل اقتران القوَّة

$$= 2\,x^{\frac{1}{2}} + C$$ بالتبسيط

$$= 2\sqrt{x} + C$$ الصورة الجذرية

مثال (2)

1 $\int 9\,dx$

تكامل الثابت

$$\int 9\,dx = 9x + C$$

2 $\int x^{10}\,dx$

تكامل اقتران القوَّة

$$\int x^{10}\,dx = \frac{1}{10+1}x^{10+1} + C$$

$$= \frac{1}{11}x^{11} + C$$ بالتبسيط

3 $\int \sqrt{x}\,dx$

بكتابة المُكامَل في صورة أُسِّية

تكامل اقتران القوَّة

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C$$

الصورة الجذرية

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

4 $\int \frac{1}{x^3}\,dx$

تعريف الأُسِّ السالب

$$\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + C$$

تعريف الأُسِّ السالب

$$= -\frac{1}{2x^2} + C$$

ملاحظة :

قبل البَدْء بعملية التكامل، أُعيد أوّلًا كتابة المُكامَل في صورة $x^{m/n}$، مُستذكِرًا العلاقة: $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$.

مثال (3) تحقق من فهمك صفحة 11

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int 6\ dx$

$$\int 6\ dx = 6x + C$$

---

b) $\int x^8\ dx$

$$\int x^8\ dx = \frac{1}{8+1}x^{8+1} + C$$

$$= \frac{1}{9}x^9 + C$$

c) $\int \sqrt[3]{x}\ dx$

الحل

$$\int \sqrt[3]{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{3}}\ dx$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + C$$

$$= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$$

---

d) $\int \frac{1}{x^5}\ dx$

الحل

$$\int \frac{1}{x^5}\ dx = \int x^{-5}\ dx$$

$$= -\frac{1}{4}x^{-4} + C$$

$$= -\frac{1}{4x^4} + C$$

خصائص التكامل غير المحدود

مفهوم أساسي

إذا كان k ثابتًا، فإنّ:

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

1) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

تكامل المجموع أو الفرق

2) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx$

$$= \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1 $\int (6x^2 + 2x)\,dx$

تكامل المجموع، واقتران القوّة المضروب في ثابت

$$\int (6x^2 + 2x)\,dx = 6\int x^2\,dx + 2\int x\,dx$$

تكامل اقتران القوّة

$$= 6\left(\frac{1}{3}x^3\right) + 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C$$

بالتبسيط

$$= 2x^3 + x^2 + C$$

2 $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^5}\right) dx$

تكامل الفرق، وتكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^5}\right) dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx - 3\int \frac{1}{x^5}\,dx$$

تعريف الأُسِّ السالب، والصورة الأُسِّية

$$= \int x^{-1/2}\,dx - 3\int x^{-5}\,dx$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= 2x^{1/2} - 3\left(-\frac{1}{4}x^{-4}\right) + C$$

بالتبسيط، والصورة الجذرية

$$= 2\sqrt{x} + \frac{3}{4x^4} + C$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 12

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a)

$$\int (x^3 - 2x^{\frac{5}{3}})\,dx = \int x^3\,dx - 2\int x^{\frac{5}{3}}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - 2\left(\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^8} + C$$

b)

الحل

$$\int (3x^2 - \frac{6}{\sqrt[5]{x}})\, dx$$

$$= 3\int x^2\, dx - 6\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\, dx$$

$$= 3\int x^2\, dx - 6\int x^{-\frac{1}{5}}\, dx$$

$$= x^3 - 6(\frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}}) + C$$

$$= x^3 - \frac{15}{2}\sqrt[5]{x^4} + C$$

مثال (3)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (8x^3 - 3x + 1)\, dx$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$\int (8x^3 - 3x + 1)\, dx$$

$$= \frac{8}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x + C$$

$$= 2x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x + C \quad \text{بالتبسيط}$$

b) $\int \frac{x^7 - 4x^3 + 8x}{2x}\, dx$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$\int \frac{x^7 - 4x^3 + 8x}{2x}\, dx$$

$$= \int \left(\frac{x^7}{2x} - \frac{4x^3}{2x} + \frac{8x}{2x}\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}x^6 - 2x^2 + 4\right) dx \quad \text{بالتبسيط}$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= \frac{1}{14}x^7 - \frac{2}{3}x^3 + 4x + C$$

---

c) $\int (\sqrt{x} + 1)\, dx$

بكتابة المُكامَل في صورة أُسِّية

$$\int (\sqrt{x} + 1)\, dx = (x^{1/2} + 1)\, dx$$

تكامل اقتران القوَّة، وتكامل الثابت

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} + x + C$$

الصورة الجذرية

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + x + C$$

ملاحظة :

تتطلَّب بعض التكاملات تبسيط المُكامَل إلى حدود جبرية، كلٌّ منها في صورة اقتران قوَّة، قبل البَدْء بعملية التكامل.

لا توجد قاعدة لتكامل الضرب؛ لذا أُبسِّط المُكامَل إلى حدود جبرية منفصلة، كلٌّ منها في صورة اقتران قوَّة، قبل البَدْء بعملية التكامل وفي هذه الحالة، أَضرِب المقدارين الجبريين أوَّلًا، ثم أُجري عملية التكامل.

لا توجد قاعدة لتكامل القسمة؛ لذا أُبسِّط المُكامَل إلى حدود جبرية منفصلة، كلٌّ منها في صورة اقتران قوَّة، قبل البَدْء بعملية التكامل. وفي هذه الحالة، أَقسِم كل حدٍّ في البسط على المقام أوَّلًا، ثم أُجري عملية التكامل.

مثال (3)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int (x+2)(x-2)\ dx$

بضرب المقدارين الجبريين

$$\int (x+2)(x-2)\ dx = \int (x^2-4)\ dx$$

تكامل اقتران القوَّة، وتكامل الثابت

$$= \frac{1}{3}x^3 - 4x + C$$

2) $\int \frac{8x^3+5x}{x}\ dx$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$\int \frac{8x^3+5x}{x}\ dx = \int \left(\frac{8x^3}{x} + \frac{5x}{x}\right)\ dx$$

بالتبسيط

$$= \int (8x^2+5)\ dx$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$= \frac{8}{3}x^3 + 5x + C$$

3) $\int x\left(x^2+\frac{2}{x}\right)\, dx$

بتوزيع الضرب على الجمع

$$\int x\left(x^2+\frac{2}{x}\right)\, dx = \int (x^3+2)\, dx$$

تكامل اقتران القوّة، وقاعدة تكامل الثابت

$$= \frac{1}{4}x^4 + 2x + C$$

مثال (4) تحقق من فهمك صفحة 13

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \frac{x^4-8x^3}{x^2}\, dx$

$$\int \frac{x^4-8x^3}{x^2}\, dx = \int \left(\frac{x^4}{x^2}-\frac{8x^3}{x^2}\right) dx$$

$$= \int (x^2-8x)\, dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + C$$

b) $\int (3x+2)(x-1)\, dx$

الحل

$$\int (3x+2)(x-1)\, dx$$

$$= \int (3x^2-3x+2x-2)\, dx$$

$$= \int (3x^2-x-2)\, dx$$

$$= x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$$

c) $\int x(x^3-7)\, dx$

الحل

$$\int x(x^3-7)\, dx = \int (x^4-7x)\, dx$$

$$= \frac{1}{5}x^5 - \frac{7}{2}x^2 + C$$

مثال (5)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{3x + 2x^4}{x}\, dx$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$\int \frac{3x + 2x^4}{x}\, dx = \int \left(\frac{3x}{x} + \frac{2x^4}{x}\right) dx$$

بالتبسيط

$$= \int (3 + 2x^3)\, dx$$

قاعدتا تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$= 3x + \frac{1}{2}x^4 + C$$

2) $\int \frac{(x+2)(x-2)}{\sqrt{x}}\, dx$

بالضرب

$$\int \frac{(x+2)(x-2)}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}\, dx$$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$= \int (x^{\frac{3}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}})\, dx$$

قاعدة تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}} + C$$

تدريب

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 3x^2\, dx$

2) $\int (2 + x^3 + 5x^{-2})\, dx$

3) $\int \left(2x^7 - \frac{4}{x^4}\right) dx$

4) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$

5) $\int x(4x^3 - 4x + 1)\, dx$

6) $\int \left(\frac{x^3 + 7x - 2x^2}{x}\right) dx$

7) $\int (x-1)(x+3)\, dx$

8) $\int (2x+5)^5\, dx$

9) $\int \frac{x^2 - 1}{x + 1}\, dx$

تكامل $(ax+b)^n$

مفهوم أساسي

إذا كان a و b عددين حقيقيين، و $a \neq 0$، فإنَّ

$$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1 $\int (x+7)^5\, dx$

تكامل $(ax+b)^n$

$$\int (x+7)^5\, dx$$

$$= \frac{1}{5+1}(x+7)^{5+1} + C$$

$$= \frac{1}{6}(x+7)^6 + C \quad \text{بالتبسيط}$$

2 $\int \frac{1}{\sqrt{4x-2}}\, dx$

بكتابة المُكامَل في صورة أُسِّية

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x-2}}\, dx = \int (4x-2)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

تكامل $(ax+b)^n$

$$= \frac{1}{4\times\frac{1}{2}}(4x-2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{2}(4x-2)^{\frac{1}{2}} + C \quad \text{بالتبسيط}$$

الصورة الجذرية

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4x-2} + C$$

مثال (2)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int (x-4)^6\, dx$ b) $\int \sqrt{x+1}\, dx$

الحل

a $\int (x-4)^6 dx = \frac{1}{7}(x-4)^7 + C$

b $\int \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C$

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد اقترانًا أصليًّا لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

1 $f(x) = x^7$

$f(x) = x^7$

$G(x) = \frac{1}{8}x^8 + C$

2 $f(x) = -2x^6$

$f(x) = -2x^6$

$G(x) = -\frac{2}{7}x^7 + C$

3 $f(x) = -10$

$f(x) = -10$

$G(x) = -10x + C$

4 $f(x) = 8x$

$f(x) = 8x$

$G(x) = 4x^2 + C$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

5 $\int 6x \, dx$

$\int 6x \, dx = 3x^2 + C$

6 $\int (7x - 5) \, dx$

$\int (7x - 5) \, dx = \frac{7}{2}x^2 - 5x + C$

7 $\int (3 - 4x) \, dx$

$\int (3 - 4x) \, dx = 3x - 2x^2 + C$

8 $\int \frac{10}{\sqrt{x}}\, dx$

$$\int \frac{10}{\sqrt{x}}\, dx = \int 10x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= 20x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 20\sqrt{x} + C$$

9 $\int 2x^{3/2}\, dx$

$$\int 2x^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

10 $\int (2x^4 - 5x + 10)\, dx$

$$\int (2x^4 - 5x + 10)\, dx$$

$$= \frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^2 + 10x + C$$

11 $\int (2x^3 - 2x)\, dx$

$$\int (2x^3 - 2x)\, dx = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + C$$

12 $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt{x^3}\right) dx$

$$= \int (3x^{-\frac{1}{3}} - x^{\frac{3}{2}})\, dx$$

$$= \frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$$

13 $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx$

$$= \int (x^{-2} - x^{-3})\, dx$$

$$= -x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2} + C$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

14 $\int \frac{4x^3-2}{x^3}\,dx$

$$\int \frac{4x^3-2}{x^3}\,dx = \int \left(\frac{4x^3}{x^3} - \frac{2}{x^3}\right) dx$$

$$= \int (4-2x^{-3})\,dx$$

$$= 4x + x^{-2} + C = 4x + \frac{1}{x^2} + C$$

15 $\int \frac{2x+8}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\int \frac{2x+8}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{8}{\sqrt{x}}\right) dx$$

$$= \int (2x^{\frac{1}{2}} + 8x^{-\frac{1}{2}})\,dx$$

$$= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 16x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + 16\sqrt{x} + C$$

16 $\int (x-1)^2\,dx$

$$\int (x-1)^2\,dx = \int (x^2-2x+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C$$

17 $\int \frac{x^3+8}{x+2}\,dx$

$$\int \frac{x^3+8}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}\,dx$$

$$= \int (x^2-2x+4)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x + C$$

18 $\int \sqrt{x}(x-1)\,dx$

$$= \int (x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}})\,dx$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

19 $\int (2x-3)(3x-1)\ dx$

$$= \int (6x^2 - 2x - 9x + 3)\ dx$$

$$= \int (6x^2 - 11x + 3)\ dx$$

$$= 2x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 3x + C$$

مهارات التفكير العليا

20 أكتشف الخطأ: أوجدت رنيم ناتج التكامل:

$\int (2x+1)(x-1)\ dx$،

وكان حَلُّها على النحو الآتي:

$$\int (2x+1)(x-1)\ dx$$

$$= \int (2x+1)\ dx \times \int (x-1)\ dx$$

$$= (x^2+x)\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) + C$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ رنيم، ثم أُصحِّحه.

$$\int f(x) \times g(x)\ dx \neq \int f(x)\ dx \times \int g(x)\ dx$$

$$\int (2x+1)(x-1)\ dx = \int (2x^2 - 2x + x - 1)\ dx$$

$$= \int (2x^2 - x - 1)\ dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

تحدٍّ: أجد كل تكامل ممّا يأتي:

21 $\int \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2\ dx$

$$= \int \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)^2 dx$$

$$= \int (1 + x^{-2})^2\ dx$$

$$= \int (1 + 2x^{-2} + x^{-4})\ dx$$

$$= x - 2x^{-1} - \frac{1}{3}x^{-3} + C$$

$$= x - \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3} + C$$

22 $\int (x-1)(x-3)(x+5)\,dx$

$$= \int (x^2 - 3x - x + 3)(x+5)\,dx$$

$$= \int (x^2 - 4x + 3)(x+5)\,dx$$

$$= \int (x^3 + 5x^2 - 4x^2 - 20x + 3x + 15)\,dx$$

$$= \int (x^3 + x^2 - 17x + 15)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{17}{2}x^2 + 15x + C$$

23 تبرير: إذا كان:

$$\int \left(\frac{P}{2x^2} + Q\right) dx = \frac{2}{x} + 10x + C$$

فأجد قيمة كلٍّ من الثابت P، والثابت Q مُبرِّرًا إجابتي.

$$\int \left(\frac{P}{2x^2} + Q\right) dx = \frac{2}{x} + 10x + C$$

$$\int \left(\frac{P}{2x^2} + Q\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{P}{2}x^{-2} + Q\right) dx$$

$$= -\frac{P}{2}x^{-1} + Qx + C$$

$$= -\frac{P}{2x} + Qx + C$$

$$\Rightarrow -\frac{P}{2} = 2 \quad , Q = 10$$

$$\Rightarrow P = -4 \quad gQ = 10$$

تمارين ومسائل كتاب التمارين صفحة 9

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int (4x+2)\,dx$

$$\int (4x+2)dx = 2x^2 + 2x + C$$

2) $\int 2x^{-4}\,dx$

$$\int 2x^{-4}dx = -\frac{2}{3x^3} + C$$

3) $\int (6x^2 - 4x)\,dx$

$$\int (6x^2-4x)dx = 2x^3 - 2x^2 + C$$

4) $\int (3 - x - 2x^5)\,dx$

$$\int (3-x-2x^5)dx = 3x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^6 + C$$

5) $\int \left(x^{-2} + x^{5/2}\right)dx$

$$\int (x^{-2} + x^{\frac{5}{2}})dx = -x^{-1} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$$

6) $\int \left(3x^2 - \frac{2}{x^2}\right)dx$

$$\int (3x^2 - \frac{2}{x^2})dx = x^3 + \frac{2}{x} + C$$

7) $\int (3x^{-2} + 6x^{-1/2} + x - 4)\,dx$

$$= -3x^{-1} + 12x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^2 - 4x + C$$

8) $\int \left(10x^4 + 8x^{-3}\right)dx$

$$\int (10x^4 + 8x^{-3})dx = 2x^5 - 4x^{-2} + C$$

9) $\int \left(\frac{2}{x^3} - 3\sqrt{x}\right)dx$

$$\int\left(\frac{2}{x^3}-3\sqrt{x}\right)dx=\int\left(2x^{-3}-3x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$=-x^{-2}-2x^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=-\frac{1}{x^2}-2\sqrt{x^3}+C$$

10 $\displaystyle\int\left(8x^3+6x-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$

$$=\int\left(8x^3+6x-4x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$=2x^4+3x^2-8x^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=2x^4+3x^2-8\sqrt{x}+C$$

11 $\displaystyle\int\left(\frac{7}{x^2}+\sqrt[3]{x^4}\right)dx$

$$\int\left(\frac{7}{x^2}+\sqrt[3]{x^4}\right)dx=\int\left(7x^{-2}+x^{\frac{4}{3}}\right)dx$$

$$=-7x^{-1}+\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+C$$

$$=-\frac{7}{x}+\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}+C$$

12 $\displaystyle\int\left(\frac{x^2}{3}+\frac{3}{x^2}\right)dx$

$$\int\left(\frac{x^2}{3}+\frac{3}{x^2}\right)dx=\int\left(\frac{1}{3}x^2+3x^{-2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{9}x^3-3x^{-1}+C$$

$$=\frac{1}{9}x^3-\frac{3}{x}+C$$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

13 $\displaystyle\int\frac{4+2\sqrt{x}}{x^2}\,dx$

$$=\int\left(\frac{4}{x^2}+\frac{2\sqrt{x}}{x^2}\right)dx$$

$$=\int\left(4x^{-2}+2x^{-\frac{3}{2}}\right)dx$$

$$=-4x^{-1}-4x^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$=-\frac{4}{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}+C$$

14 $\int \frac{4-x^2}{2+x}\,dx$

$$\int \frac{4-x^2}{2+x}dx = \int \frac{(2-x)(2+x)}{2+x}dx$$
$$= \int (2-x)dx$$
$$= 2x - \frac{1}{2}x^2 + C$$

15 $\int \frac{x^2-1}{x^2}\,dx$

$$\int \frac{x^2-1}{x^2}dx = \int \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$= \int (1-x^{-2})dx$$
$$= x + x^{-1} + C$$
$$= x + \frac{1}{x} + C$$

16 $\int x\sqrt{x}\,dx$

$$\int x\sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx$$
$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C \quad = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$$

17 $\int \frac{x^2-1}{x-1}\,dx$

$$\int \frac{x^2-1}{x-1}dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}dx$$
$$= \int (x+1)dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

18 $\int x^2(1-x^3)\,dx$

$$\int x^2(1-x^3)dx = \int (x^2 - x^5)dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6 + C$$

19 $\int (x+4)^2\,dx$

$$\int (x+4)^2 dx = \int (x^2 + 8x + 16)dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 16x + C$$

20 $\int \frac{5-x}{x^5}\,dx$

$$\int \frac{5-x}{x^5}dx = \int \left(\frac{5}{x^5} - \frac{x}{x^5}\right)dx$$
$$= \int (5x^{-5} - x^{-4})dx$$
$$= -\frac{5}{4}x^{-4} + \frac{1}{3}x^{-3} + C$$
$$= -\frac{5}{4x^4} + \frac{1}{3x^3} + C$$

21 $\int \frac{x^2+2x+1}{x+1}\,dx$

$$\int \frac{x^2+2x+1}{x+1}dx = \int \frac{(x+1)(x+1)}{x+1}dx$$
$$= \int (x+1)dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

22 $\int x(x+1)^2\,dx$

$$\int x(x+1)^2 dx$$
$$= \int x(x^2+2x+1)dx$$
$$= \int (x^3+2x^2+x)dx$$
$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$$

23 $\int \frac{(x+3)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

$$\int \frac{(x+3)^2}{\sqrt{x}}dx$$
$$= \int \frac{x^2+6x+9}{\sqrt{x}}dx$$
$$= \int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{6x}{\sqrt{x}} + \frac{9}{\sqrt{x}}\right)dx$$
$$= \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + 9x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{3}{2}} + 18x^{\frac{1}{2}} + C$$

24 $\int (x-5)(x+5)\,dx$

$$\int (x-5)(x+5)dx = \int (x^2-25)dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 - 25x + C$$

الدرس 2

الشرط الاولي

الشرط الأوَّلي، وإيجاد قاعدة الاقتران

من المهم في بعض التطبيقات إيجاد قيمة ثابت التكامل C، مثل إيجاد قاعدة اقتران عُلِمت مشتقته، لكنَّ ذلك يتطلّب إيجاد نقطة تُحقِّق الاقتران الأصلي، ويُمكِن بتعويضها إيجاد قيمة C وتُسمّى هذه النقطة **الشرط الأولي**

مثال (1)

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$، ومَرَّ منحناه بالنقطة $(2, 4)$

الحل

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران $f'(x)$.

$$f(x) = \int f'(x)\ dx$$

$$f(x) = \int (3x^2 + 4x - 3)\ dx$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + C$$

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل C.

لإيجاد قيمة ثابت التكامل C، أستعمل الشرط الأوَّلي المعطى في المسألة، وهو النقطة $(2, 4)$ التي يمرُّ بها منحنى الاقتران، وتُحقِّق قاعدة الاقتران؛ أيْ أُعوِّض $x = 2$ في قاعدة $f(x)$، ثم أحُلُّ المعادلة الناتجة لإيجاد قيمة C:

قاعدة الاقتران

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + C$$

بتعويض $x = 2, f(2) = 4$

$$4 = (2)^3 + 2(2)^2 - 3(2) + C$$

بحَلِّ المعادلة لـ C

$$C = -6$$

إذن، قاعدة الاقتران هي:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6.$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 16

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = 6x^2 + 5$، ومَرَّ منحناه بالنقطة $(1, 9)$.

الحل

$$f(x) = \int (6x^2 + 5)\, dx$$

$$f(x) = 2x^3 + 5x + C$$

$$9 = 2(1)^3 + 5(1) + C$$

$$C = 2$$

$$f(x) = 2x^3 + 5x + 2$$

مثال (3)

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = 2x + 3$، ومرَّ منحناه بالنقطة $(1, -2)$.

الحل

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران $f'(x)$.

$$f(x) = \int f'(x)\; dx$$

$$f(x) = \int (2x + 3)\; dx$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$f(x) = x^2 + 3x + C$$

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل C.

لإيجاد قيمة ثابت التكامل C، أستعمل الشرط الأولي المعطى في المسألة وهو النقطة $(1, -2)$ التي يمرُّ منحنى الاقتران بها، وتُحقِّق قاعدة الاقتران ولهذا أُعوِّض $x = 1$ في قاعدة $f(x)$، ثم أحُلُّ المعادلة الناتجة لإيجاد قيمة C:

$f(x) = x^2 + 3x + C$ قاعدة الاقتران

$x = 1, f(1) = -2$ بتعويض

$$-2 = (1)^2 + 3(1) + C$$

بحلِّ المعادلة

$$C = -6$$

إذن، قاعدة الاقتران هي:

$$f(x) = x^2 + 3x - 6.$$

مثال (4)

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = x-3$، ومَرَّ منحناه بالنقطة $(2, 9)$.

الحل

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران $f'(x)$.

$f(x) = \int f'(x)\, dx$

$$f(x) = \int (x-3)\, dx$$

تكامل اقتران القوَّة، وتكامل الثابت

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$$

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل C.

قاعدة الاقتران

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$$

بتعويض $x = 2, f(2) = 9$

$$9 = \frac{1}{2}(2)^2 - 3(2) + C$$

بحلِّ المعادلة لـ C

$$C = 13$$

إذن، قاعدة الاقتران هي: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 13$.

ملاحظة :

أتذكَّر

تُمثِّل التكلفة الحدِّية مشتقة اقتران التكلفة،

التكلفة الحدية $c'(x) =$

التكلفة $c(x) = \int c'(x)\, dx$

مثال (5)

من الحياة

التكلفة الحدِّية:

يُمثِّل الاقتران: $C'(x) = 3x^2 - 60x + 400$ التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل طابعة مُلوَّنة تُنتِجها إحدى الشركات حيث x عدد الطابعات المُنتَجة و $C(x)$ تكلفة إنتاج x طابعة بالدينار. أجد اقتران التكلفة $C(x)$، علمًا بأنَّ تكلفة إنتاج طابعة واحدة هي JD 583.

الحل

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران: $C'(x)$

$$C(x) = \int C'(x)\, dx$$

$$C(x) = \int (3x^2 - 60x + 400)\, dx$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت وتكامل الثابت

$$= x^3 - 30x^2 + 400x + K$$

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل K.

قاعدة الاقتران

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + K$$

بتعويض $x = 1, C(1) = 583$

$$583 = (1)^3 - 30(1)^2 + 400(1) + K$$

بحَلِّ المعادلة لـ K

$$K = 212$$

إذن اقتران التكلفة هو: $C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 212$.

مثال (6) تحقق من فهمك صفحة 17

التكلفة الحدِّية: يُمثِّل الاقتران: $C'(x) = 0.3x^2 + 2x$ التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل قطعة تُنتَج في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار أجد اقتران التكلفة $C(x)$ علمًا بأنَّ تكلفة إنتاج 10 قطع هي JD 2200.

الحل

$$C(x) = \int (0.3x^2 + 2x)\,dx$$
$$C(x) = 0.1x^3 + x^2 + K$$
$$2200 = 0.1(10)^3 + (10)^2 + K$$
$$2200 = 100 + 100 + K$$
$$K = 2000$$
$$C(x) = 0.1x^3 + x^2 + 2000$$

مثال (7)

مسألة اليوم

يُمثِّل الاقتران: $S'(t) = 500\sqrt[4]{t}$ مُعدَّل تغيُّر المبيعات الشهرية لهاتف جديد، حيث t عدد الأشهر منذ طرح الهاتف في الأسواق و $S(t)$ عدد الهواتف المَبيعة شهريًّا. أجد $S(t)$، علمًا بأنَّ $S(0) = 0$.

الحل

$$s(t) = \int 500\sqrt[4]{t}\,dt$$
$$= \int 500t^{\frac{1}{4}}\,dt$$
$$= 500 \times \frac{4}{5} t^{\frac{5}{4}} + C = 400t^{\frac{5}{4}} + C$$

بما أن $S(0) = 0$، إذن $C = 0$:

$$s(t) = 400\sqrt[4]{t^5}$$

مثال (8)

في دراسة تناولت نوعا معينا من البكتيريا تبين ان تكاثرها يتغير بمعدل يمكن نمذجتة بالاقتران
$$T'(t) = 5t^4 + 2t$$
حيث $T(t)$ عدد البكتيريا t الزمن بالثواني اذا كان عددها بعد ثانية واحدة يساوي 30 جد $T(t)$

الحل

$$T(t) = \int T(t)\,dt = \int (5t^4 + 2t)\,dt$$
$$= t^5 + t + c$$
$$T(1) = 1 + 1 + C = 30 \rightarrow C = 28$$
$$T(t) = t^5 + t + 28$$

الشرط الأوَّلي: الحركة في مسار مستقيم

الحالة الاولى

من التطبيقات المُهِمَّة على الشرط الأوَّلي، إيجاد موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم إذا عُلِم اقتران السرعة المتجهة.

معلومة:

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$

$$v(t) = \int a(t)\,dt$$

المسافة تساوي تكامل السرعة
السرعة تساوي تكامل التسارع

مثال (1)

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = t + 2$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 11 m فأجد موقع الجُسَيْم بعد 8 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

الحل

الخطوة 1: أجد اقتران الموقع.

بإيجاد تكامل اقتران السرعة المتجهة

$$s(t) = \int v(t)\ dt$$

بتعويض $v(t) = t + 2$

$$= \int (t+2)\ dt$$

تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{2}t^2 + 2t + C$$

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل C.

بما أنَّ الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 11 m، فإنَّ $s(0) = 11$، وهذا يُعَدُّ شرطًا أوَّليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C:

اقتران الموقع $\quad s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t + C$

بتعويض $t = 0, s(0) = 11$

$$11 = \frac{1}{2}(0)^2 + 2(0) + C$$

بحَلِّ المعادلة $\quad C = 11$

إذن، اقتران الموقع بعد t ثانية من بَدْء الحركة هو: $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t + 11$.

الخطوة 3: أجد موقع الجُسَيْم بعد 8 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

اقتران الموقع $\quad s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t + 11$

بتعويض $t = 8 \quad s(8) = \frac{1}{2}(8)^2 + 2(8) + 11$

بالتبسيط $\quad = 59$

إذن، موقع الجُسَيْم بعد 8 ثوانٍ من بَدْء الحركة هو: 59 m

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 18

يتحرَّك جُسَـيْم في مسار مسـتقيم، وتعطى سـرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 36t - 3t^2$ حيث t الزمن بالثواني، و v سـرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

الحل

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$

$$= \int (36t - 3t^2)\,dt = 18t^2 - t^3 + C$$

$$0 = 18(0)^2 - (0)^3 + C$$

$$C = 0$$

$$s(t) = 18t^2 - t^3$$

$$s(3) = 18(3)^2 - (3)^3$$

$$= 135$$

مثال (3)

يتحرك جسم في مسار مستقيم وتعطى سرعتة المتجهه بالاقتران $v(t) = 6 - 2t + 6t^2$ جد موقع الجسم بعد مرور 3 ثوان علما بان موقعة الابتدائي $s(0) = 4$

a)18m b)67m c)-18m d)85m

الحل

$$S(t) = \int (6 - 2t + 6t^2)\,dt$$

$$= 6t - t^2 + 2t^3 + c$$

$$S(0) = 0 - 0 + 0 + c = 4 \rightarrow c = 4$$

$$S(3) = 18 - 9 + 54 + 4 = 67$$

الإجابة b

الحالة الثانية

يُمكِن إيجاد موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم إذا عُلِم اقتران التسارع له. ولكنْ، يجب في هذه الحالة توافر شرطين أوَّليين لحَلِّ المسألة، هما: إيجاد ثابت التكامل الناتج من تكامل اقتران التسارع وإيجاد ثابت التكامل الناتج من تكامل اقتران السرعة المتجهة

1) نجد اقتران السرعه

$v(t) = \int a(t)\,dt$

نجد قيمة الثابت C

2) نجد اقتران الموقع

$S(t) = \int v(t)\,dl$

ونجد ثابت التكامل C

مثال (1)

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 6t$، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 4 m وكانت سرعته المتجهة هي 1 m/s بعد ثانية واحدة من بَدْء حركته، فأجد موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

الحل

الخطوة 1: اجد اقتران السرعة المتجهة.

- بما أنَّ اقتران السرعة المتجهة هو اقتران أصلي لاقتران التسارع، فإنَّه يُمكِنني إيجاد سرعة الجُسَيْم بعد t ثانية عن طريق التكامل:

بإيجاد تكامل اقتران التسارع

$$v(t) = \int a(t)\ dt$$

$$= \int 6t\ dt \qquad \text{بتعويض } a(t) = 6t$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= 3t^2 + C_1$$

- أجد قيمة ثابت التكامل C_1.

بما أنَّ سرعة الجُسَيْم المتجهة بعد ثانية واحدة من بَدْء حركته هي 1 m/s، فإنَّ: $v(1) = 1$، وهذا يُعَدُّ شرطًا أوَّليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1:

$$v(t) = 3t^2 + C_1 \qquad \text{اقتران السرعة المتجهة}$$

$$\text{بتعويض } t = 1,\ v(1) = 1$$

$$1 = 3\,(1)^2 + C_1$$

$$C_1 = -2 \qquad \text{بحَلِّ المعادلة}$$

إذن، اقتران السرعة المتجهة هو:

$v(t) = 3t^2 - 2$.

الخطوة 2: أجد اقتران الموقع.

بإيجاد تكامل اقتران السرعة المتجهة

$$s(t) = \int v(t)\ dt$$

بتعويض $v(t) = 3t^2 - 2$

$$= \int (3t^2 - 2)\ dt$$

تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= t^3 - 2t + C_2$$

- أجد قيمة ثابت التكامل C_2.

بما أنَّ الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 4 m،

فإنَّ: $s(0) = 4$، وهذا يُعَدُّ شرطًا أوَّليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2:

اقتران الموقع $\quad s(t) = t^3 - 2t + C_2$

بتعويض $t = 0, s(0) = 4$

$$4 = (0)^3 - 2(0) + C_2$$

بحَلِّ المعادلة $\quad C_2 = 4$

إذن، اقتران الموقع بعد t ثانية من بَدْء الحركة هو: $s(t) = t^3 - 2t + 4$.

الخطوة 3: أجد موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

اقتران الموقع $\quad s(t) = t^3 - 2t + 4$

بتعويض $t = 2 \quad s(2) = (2)^3 - 2(2) + 4$

بالتبسيط $\quad = 8$

إذن، موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة هو: 8 m

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 20

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 4t - 4$، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها 5 m/s، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

الحل

$$v(t)=\int a(t)\,dt$$
$$=\int(4t-4)\,dt$$
$$=2t^2-4t+C_1$$

بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها $5\ m/s$، فإن $v(0)=5$ وهذا يعد شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1 .

$$5=2(0)^2-4(0)+C_1$$
$$C_1=5$$
$$v(t)=2t^2-4t+5$$
$$s(t)=\int v(t)\,dt$$
$$=\int(2t^2-4t+5)\,dt$$
$$=\frac{2}{3}t^3-2t^2+5t+C_2$$

بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، فإن $S(0)=0$، وهذا يعد شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2

$$s(t)=\frac{2}{3}t^3-2t^2+5t+C_2$$
$$0=\frac{2}{3}(0)^3-2(0)^2+5(0)+C_2$$
$$C_2=0$$
$$s(t)=\frac{2}{3}t^3-2t^2+5t$$
$$s(3)=\frac{2}{3}(3)^3-2(3)^2+5(3)=15$$

إذن موقع الجسيم بعد 4 ثوانٍ من بدء الحركة $15\ m$:

مثال (3)

يتحرك جسم على خط مستقيم بتسارع ثابت $a(t)=6m/s^2$ اذا كانت السرعة الابتدائية للجسم $v(0)=8$ فاوجد سرعة الجسم بعد t ثانية

الحل

$$v(t)=\int a(t)\,dt$$
$$=\int 6\cdot dt=6t+c$$
$$v(0)=0$$
$$0+c=8\rightarrow c=8$$
$$v(t)=6t+8$$

مثال (4)

يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث ان تسارعة a بعد t يعطى بالقاعدة $a(t)=12m/s^2$ فجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور t ثانية من بدء الحركة علما بان السرعة الابتدائية $4m/s$ وموقعة الابتدائي 6m

الحل

$$v(t)=\int a(t)\cdot dt=\int 12\cdot dt$$
$$=12t+c$$
$$v(0)=4$$
$$v(t)=0+C=4\rightarrow C=4$$
$$S(t)=\int v(t)\cdot dt=\int(12t+4)\cdot dt$$
$$=6t^2+6t+C$$

$$s(0)=6s(0)=0+0+c=6\rightarrow c=6$$

$$s(t)=6t^2+4t+6$$

أتدرّب وأحُلّ المسائل

في كلٍّ ممّا يأتي المشـتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أسـتعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1) $f'(x) = x-3;\ (2, 9)$

$$f(x)=\int(x-3)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2-3x+C$$
$$9=\frac{1}{2}\times(2)^2-3(2)+C$$
$$C=13$$
$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+13$$

2) $f'(x) = x^2-4;\ (0, 7)$

$$f(x)=\int(x^2-4)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-4x+C$$
$$7=\frac{1}{3}\times(0)^3-4(0)+C$$
$$C=7$$
$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+7$$

3) $f'(x) = 6x^2-4x+2;\ (1, 9)$

$$f(x)=\int(6x^2-4x+2)\,dx$$
$$=2x^3-2x^2+2x+C$$
$$9=2(1)^3-2(1)^2+2(1)+C$$
$$C=7$$
$$f(x)=2x^3-2x^2+2x+7$$

4) $f'(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{4}x^2;\ (4, 11)$

$$f(x)=\int(\sqrt{x}+\frac{1}{4}x^2)\,dx$$
$$=\int(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^2)\,dx$$
$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}x^3+C$$
$$11=\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}(4)^3+C$$
$$C=11$$
$$f(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}x^3+11$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{12}x^3+11$$

5 $f'(x) = (x+2)^2 ; (1, 7)$

$$f(x) = \int (x+2)^2 \, dx$$

$$= \int (x^2 + 4x + 4) \, dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + C$$

$$7 = \frac{1}{3}(1)^3 + 2(1)^2 + 4(1) + C$$

$$C = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + \frac{2}{3}$$

---

6 $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - x ; (4, 0)$

$$f(x) = \int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - x\right) dx$$

$$= \int (3x^{-\frac{1}{2}} - x) \, dx$$

$$= 6x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$= 6\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2$$

$$0 = 6\sqrt{4} - \frac{1}{2}(4)^2 + C$$

$$C = -4$$

$$f(x) = 6\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 - 4$$

---

7 إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 0.4x + 3$

فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 5)$.

الحل

$$y = \int (0.4x + 3) \, dx$$

$$= 0.2x^2 + 3x + C$$

$$5 = 0.2(0)^2 + 3(0) + C$$

$$C = 5$$

$$y = 0.2x^2 + 3x + 5$$

---

8 إذا كان ميـــل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هـــو: $f'(x) = \frac{x^2 + 10}{x^2}$،

فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$، علمًا بأنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(5, 2)$.

الحل

$$f(x) = \int \frac{x^2 + 10}{x^2} dx$$

$$= \int \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{10}{x^2}\right) dx$$

$$= \int (1 + 10x^{-2}) dx$$

$$=x-10x^{-1}+C \quad =x-\frac{10}{x}+C$$

$$2=5-\frac{10}{5}+C$$

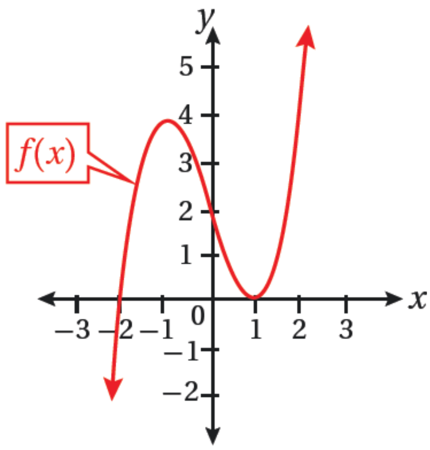
$$C=-1$$

$$f(x)=x-\frac{10}{x}-1$$

---

9 يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$، حيث: $f'(x)=3x^2-3$.

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$.



الحل

$$f(x)=\int(3x^2-3)\,dx$$

$$=x^3-3x+C$$

منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0, 2)$، إذن:

$$2=(0)^3-3(0)+C$$

$$C=2$$

$$f(x)=x^3-3x+2$$

بالــون: عند نفخ بالون كروي الشــكل يصبح نصــف قُطْره y ســنتيمترًا بعد t ثانية. إذا كان: $\frac{dy}{dt}=4t^{-\frac{2}{3}}, t>0$، وكان نصــف قُطْــر البالون بعــد 8 ثوانٍ من بَدْء نفخه 30 cm، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

10 قاعدة العلاقة y بدلالة t.

$$y=\int 4t^{-\frac{2}{3}}\,dt \quad =12t^{\frac{1}{3}}+C$$

$$=12\sqrt[3]{t}+C$$

$$30=12\sqrt[3]{8}+C \qquad C=6$$

$$y=12\sqrt[3]{t}+6$$

---

11 نصف قُطْر البالون بعد 27 ثانية من بَدْء نفخه.

$$y=12\sqrt[3]{27}+6$$

$$=42$$

12 أشجار: في دراسة تناولت نوعًا مُعيَّنًا من الأشجار، تبيَّن أنَّ ارتفاع هذه الأشجار يتغيَّر بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $h'(t) = 0.2t^{\frac{2}{3}} + \sqrt{t}$، حيث $h(t)$ ارتفاع الشجرة بالأقدام، و t عدد السنوات منذ لحظة زراعة الشجرة. إذا كان ارتفاع إحدى هذه الأشجار عند زراعتها هو 2 ft، فأجد $h(t)$.

الحل

$$h(t) = \int (0.2t^{\frac{2}{3}} + \sqrt{t})\,dt$$

$$= \int (0.2t^{\frac{2}{3}} + t^{\frac{1}{2}})\,dt$$

$$= 0.12t^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= 0.12\sqrt[3]{t^5} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C$$

بما أن ارتفاع الشجرة عند زراعتها 2 ft، فإن $h(0) = 2$، وهذا يُعدّ شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C .

$$2 = 0.12\sqrt[3]{(0)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(0)^3} + C$$

$$C = 2$$

$$h(t) = 0.12\sqrt[3]{t^5} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + 2$$

13 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 2t + 3$، حيث t الزمن بالثواني و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

الحل

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$

$$= \int (2t+3)\,dt$$

$$= t^2 + 3t + C$$

بما أن الجُسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$، وهذا يُعدّ شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C .

$$s(t) = t^2 + 3t + C$$

$$0 = (0)^2 + 3(0) + C$$

$$C = 0$$

$$s(t) = t^2 + 3t$$

$$s(3) = (3)^2 + 3(3)$$

$$= 18$$

إذن موقع الجُسيم بعد 3ثوان من بدء الحركة هو: 18 m

14 يتحرَّك جُسَـيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = t^2$، حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَـيْم هو 3 m، وكانت سرعته المتجهة هي 1 m/s بعد ثانية واحدة من بَدْء حركته، فأجد موقع الجُسَيْم بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

الحل

$$v(t) = \int a(t)\,dt = \int t^2\,dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 + C_1$$

بما أن السرعة المتجهة بعد ثانية واحدة من بدء الحركة هي $1\ m/s$، فإن $v(1) = 1$، و هذا يُعدّ شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1 .

$$1 = \frac{1}{3}(1)^3 + C_1$$

$$C_1 = \frac{2}{3}$$

$$v(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{3}$$

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{3}\right)dt$$

$$= \frac{1}{12}t^4 + \frac{2}{3}t + C_2$$

بما أن الموقع الابتدائي للجُسيم هو $3\ m$، فإن $s(0) = 3$، و هذا يُعدّ شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2

$$s(t) = \frac{1}{12}t^4 + \frac{2}{3}t + C_2$$

$$3 = \frac{1}{12}(0)^4 + \frac{2}{3}(0) + C_2$$

$$C_2 = 3$$

$$s(t) = \frac{1}{12}t^4 + \frac{2}{3}t + 3$$

$$s(2) = \frac{1}{12}(2)^4 + \frac{2}{3}(2) + 3 = 4$$

إذن موقع الجُسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة هو: $4\ m$

---

15 يتحرَّك جُسَيْم من السكون، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 9-2t$، حيث t الزمن بالثواني و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَـيْم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها 2 m/s فأجد موقعه بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

الحل

$$v(t)=\int a(t)dt=\int(9-2t)dt$$

$$=9t-t^2+C_1$$

بما أن السرعة المتجهة الابتدائية هي $2\ m/s$، فإن $v(0)=2$، و هذا يُعدّ شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1 .

$$v(t)=9t-t^2+C_1$$

$$2=9(0)-(0)^2+C_1$$

$$C_1=2$$

$$v(t)=9t-t^2+2$$

$$s(t)=\int v(t)dt=\int(9t-t^2+2)dt$$

$$=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3+2t+C_2$$

بما أن الحركة من نقطة الأصل، فإن $s(0)=0$، و هذا يُعدّ شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2 .

$$s(t)=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3+2t+C_2$$

$$0=\frac{1}{2}(0)^2-\frac{1}{3}(0)^3+2(0)+C_2$$

$$C_2=0$$

$$s(t)=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3+2t$$

$$s(2)=\frac{1}{2}(2)^2-\frac{1}{3}(2)^3+2(2)=\frac{58}{3}$$

مهارات التفكير العليا

16

تبرير: تعطى مشـــتقة الاقتران $f(x)$ بالقاعدة: $f'(x)=ax+b$، حيث a و b ثابتان. إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطــة $(-2, 8)$ هو 7 وقطع منحنى الاقتران المحور y عند النقطة $(0, 18)$، فأجد قاعدة هذا الاقتران، مُبرِّرًا إجابتي.

الحل

$$f'(x)=ax+b$$

$$f(x)=\int(ax+b)dx$$

$$=\frac{a}{2}x^2+bx+C$$

ميل المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(-2, 8)$ هو 7 معناه: $f'(-2)=7$ وكذلك $f(-2)=8$

منحنى الاقتران يقطع المحور y عند النقطة $(0, 18)$ معناه: $f(0)=$

$$f'(-2)=7\Rightarrow a(-2)+b=7$$

$$\Rightarrow -2a+b=7............$$

$$f(-2)=8\Rightarrow$$

$$\frac{a}{2}(-2)^2+b(-2)+C=8$$

$$\Rightarrow 2a - 2b + C = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(0) = 18 \Rightarrow$$

$$\frac{a}{2}(0)^2 + b(0) + C = 18$$

$$\Rightarrow C = 18$$

نعوّض قيمة C في المعادلة (2) فنحصل على:

$$2a - 2b + 18 = 8 \Rightarrow 2a - 2b = -10$$

$$\Rightarrow a - b = -5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

نجمع طرفي المعادلتين (1) و (4) فنحصل على:

$$-a = 2 \Rightarrow a = -2$$

نعوّض قيمة a في المعادلة (4) فنحصل على: $b = 3$

قاعدة الاقتران هي: $f(x) = -x^2 + 3x + 18$

---

17 تحدٍّ: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $\left(4 - \frac{100}{x^2}\right)$ وكان للاقتران نقطة حرجة عند النقطة $(a, 10)$، حيث: $a > 0$، فأجد قاعدة هذا الاقتران.

الحل

$$f'(x) = 4 - \frac{100}{x^2}$$

$$f(x) = \int \left(4 - \frac{100}{x^2}\right) dx$$

$$= \int (4 - 100x^{-2})\, dx$$

$$= 4x + 100x^{-1} + C$$

$$= 4x + \frac{100}{x} + C$$

للاقتران f نقطة حرجة عند $(a, 10)$ إذن $f'(a) = 0$ وكذلك $f(a) = 10$:

$$f'(a) = 0 \Rightarrow 4 - \frac{100}{a^2} = 0$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{100}{a^2} \quad \Rightarrow 4a^2 = 100$$

$$\Rightarrow a^2 = 25 \quad \Rightarrow a = \pm 5$$

لكن $a > 0$ إذن: $a = 5$ ومنه: $f(5) = 10$

$$10 = 4(5) + \frac{100}{5} + C$$

$$\Rightarrow C = -30$$

وتكون قاعدة الاقتران:

$$f(x) = 4x + \frac{100}{x} - 30$$

تمارين ومسائل كتاب التمارين صفحة 10

في كلٍّ ممّا يأتي المشتــقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1 $f'(x) = 3x - 2; (-1, 2)$

$$f(x) = \int (3x-2)\,dx = \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$$

$$f(-1) = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} + 2 + C = 2 \Rightarrow C = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{2}$$

2 $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}; (4, 5)$

$$f(x) = \int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + C$$

$$f(4) = 5 \Rightarrow \frac{16}{3} + 4 + C = 5 \Rightarrow C = -\frac{13}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} - \frac{13}{3}$$

3 $f'(x) = -x(x+1); (-1, 5)$

$$f(x) = \int -x(x+1)\,dx = \int (-x^2 - x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 +$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$f(-1) = 5 \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + C = 5 \Rightarrow C = \frac{31}{6}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{31}{6}$$

4 $f'(x) = x^3 - \dfrac{2}{x^2} + 2; (1, 3)$

$$f(x) = \int (x^3 - \frac{2}{x^2} + 2)dx$$

$$= \int_0 (x^3 - 2x^{-2} + 2)dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{x} + 2x + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{x} + 2x + C$$

$$f(1) = 3 \Rightarrow \frac{1}{4} + 2 + 2 + C = 3$$

$$\Rightarrow C = -\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{x} + 2x - \frac{5}{4}$$

5 $f'(x) = x + \sqrt{x}; (1, 2)$

$$f(x) = \int (x + \sqrt{x})dx$$

$$= \int (x + x^{\frac{1}{2}})dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + C = 2 \Rightarrow C = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{5}{6}$$

6 $f'(x) = -\dfrac{10}{x^2}; (1, 15)$

$$f(x) = \int -\frac{10}{x^2}dx = \int -10x^{-2}dx$$

$$= 10x^{-1} + C \qquad = \frac{10}{x} + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{10}{x} + C$$

$$f(1) = 15 \Rightarrow 10 + C = 15 \Rightarrow C = 5$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{10}{x} + 5$$

7 إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو $f'(x)=\sqrt{x}$، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$، علمًا بأنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(9, 25)$.

الحل

$$f(x)=\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$$
$$f(9)=25\Rightarrow\frac{54}{3}+C=25\Rightarrow C=7$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+7$$

8 إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x^2}$ فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(2, 4)$.

الحل

$$f(x)=\int\frac{2}{x^2}dx=\int 2x^{-2}dx$$
$$=-2x^{-1}+C=-\frac{2}{x}+C$$
$$\Rightarrow f(x)=-\frac{2}{x}+C$$
$$f(2)=4\Rightarrow -1+C=4\Rightarrow C=5$$
$$\Rightarrow f(x)=-\frac{2}{x}+5$$

9 إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{ay}{dx}=3x^2-12x+8$، ومرَّ منحناها بنقطة الأصل، فأجد الإحداثي x لجميع نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x، مُبرِّرًا إجابتي.

الحل

$$f(x)=\int(3x^2-12x+8)dx$$
$$=x^3-6x^2+8x+C$$
$$\Rightarrow f(x)=x^3-6x^2+8x+C$$
$$f(0)=0\Rightarrow x^3-6x^2+8x+C=0$$
$$\Rightarrow C=0$$
$$\Rightarrow f(x)=x^3-6x^2+8x$$

لإيجاد الإحداثيات لنقاط تقاطع المنحني مع محور x نفرض $y=0$

$$0 = x^3 - 6x^2 + 8x \Rightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$\Rightarrow x(x-2)(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 2, x = 4$$

10 الإيراد الحـدِّي: يُمثِّل الاقتـران:

$R'(x) = x^2 - 3$ الإيراد الحدِّي (بالدينار)

لكل قطعة تبـاع من مُنتَجات إحدى الشركات حيث x عدد القطع المَبيعة، و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$، علمًا بأنَّ $R(0) = 0$.

إرشاد: يُمثِّل الإيراد الحدِّي مشتقة اقتران الإيراد.

الحل

$$R(x) = \int (x^2 - 3)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - 3x + C$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x + C$$

$$R(0) = 0 \Rightarrow 0 - 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$$

11 يتحرَّك جُسَـيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$v(t) = 3t^2 - 12t + 11$ حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية

إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

الحل

$$s(t) = \int (3t^2 - 12t + 11)\,dt$$

$$= t^3 - 6t^2 + 11t + C$$

$$\Rightarrow s(t) = t^3 - 6t^2 + 11t + C$$

$$s(0) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = t^3 - 6t^2 + 11t$$

$$\Rightarrow s(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 11(2)$$

$$= 8 - 24 + 22 = 6\text{m}$$

12 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران $a(t) = 6t - 30$، حيث t الزمن بالثواني، وa التسارع بالمتر لكل ثانية تربيع إذا بدأ الجُسَـيْم حركته من نقطة الأصل بسـرعة متجهة مقدارها $72\ \text{m/s}$، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

الحل

$$v(t) = \int (6t-30)\,dt = 3t^2 - 30t + C$$
$$\Rightarrow v(t) = 3t^2 - 30t + C$$
$$v(0) = 72 \Rightarrow 0+0+0+C = 72$$
$$\Rightarrow C = 72$$
$$\Rightarrow v(t) = 3t^2 - 30t + 72$$
$$s(t) = \int (3t^2 - 30t + 72)\,dt$$
$$= t^3 - 15t^2 + 72t + C$$
$$\Rightarrow s(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + C$$
$$s(0) = 0 \Rightarrow 0+0+0+C = 0$$
$$\Rightarrow C = 0$$
$$\Rightarrow s(t) = t^3 - 15t^2 + 72t$$
$$\Rightarrow s(3) = (3)^3 - 15(3)^2 + 72(3)$$
$$= 27 - 135 + 216 = 108m$$

الدرس
3

التكامل المحدود

يُسمّى $\int_a^b f(x)\, dx$ **التكامل المحدود** للاقتران $f(x)$، حيث a الحدُّ السفلي للتكامل، و b الحدُّ العلوي للتكامل ويُمكِن إيجاد قيمة $\int_a^b f(x)\, dx$ على النحو الآتي:

قيمة الاقتران الأصلي عند الحدِّ السفلي

حدود التكامل من a إلى b

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

قيمة الاقتران الأصلي عند الحدِّ العلوي

مفهوم أساسي

إذا كان الاقتران $f(x)$ متصلًا على الفترة $[a, b]$، و $F(x)$ يُمثِّل أيَّ اقتران أصلي للاقتران $f(x)$، فإنَّ التكامل المحدود للاقتران $f(x)$ من a إلى b هو

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

ويُمكِن التعبير عن الفرق $F(b)-F(a)$ باستعمال الرمز: $F(x)\Big|_a^b$.

مثال (1)

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

1 $\int_0^1 (2x-5)\, dx$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$\int_0^1 (2x-5)\, dx = (x^2-5x)\Big|_0^1$$

بالتعويض

$$= ((1)^2-5(1)) - ((0)^2-5(0))$$

بالتبسيط

$$= -4$$

2 $\int_{-4}^3 x(4-3x)\, dx$

بتوزيع الضرب على الجمع

$$\int_{-4}^3 x(4-3x)\, dx = \int_{-4}^3 (4x-3x^2)\, dx$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= (2x^2-x^3)\Big|_{-4}^3$$

بالتعويض

$$= (2(3)^2-(3)^3) - (2(-4)^2-(-4)^3)$$

بالتبسيط

$$= -105$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 23

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

a) $\int_1^4 (8x-\sqrt{x})\, dx$

b) $\int_{-1}^2 (1-x)(1+3x)\, dx$

الحل

a)

$= \int_1^4 (8x - x^{\frac{1}{2}})dx$

$= (4x^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})\Big|_1^4$

$= (4x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3})\Big|_1^4$

$= (4(4)^2 - \frac{2}{3}\sqrt{4^3}) - (4(1)^2 - \frac{2}{3}\sqrt{1^3})$

$= \frac{166}{3}$

b)

$= \int_{-1}^2 (1+3x-x-3x^2)dx$

$= \int_{-1}^2 (1+2x-3x^2)dx$

$= (x+x^2-x^3)\Big|_{-1}^2$

$= (2+2^2-2^3)-(-1+(-1)^2-(-1)^3)$

$= -3$

مثال (3)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1 $\int_0^1 x^2\, dx$

تكامل اقتران القوّة، والتكامل المحدود

$$\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1$$

$a=0, b=1$

$$= \left(\frac{1}{3}(1)^3\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3\right)$$

$$= \frac{1}{3}$$ بالتبسيط

2 $\int_1^3 (x+2)\, dx$

تكامل اقتران القوّة، والتكامل المحدود

$$\int_1^3 (x+2)\, dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_1^3$$

$a=1, b=3$

$$= \left(\frac{1}{2}(3)^2 + 2(3)\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2 + 2(1)\right)$$

بالتبسيط

$$= 8$$

مثال (4)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int_{-1}^{1} x^4\, dx$

b) $\int_{-2}^{3} (3x^2 - 4x + 1)\, dx$

الحل

a

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right) - \left(\frac{-1}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

b

$$\int_{-2}^{3} (3x^2 - 4x + 1)dx$$

$$= x^3 - 2x^2 + x\Big|_{-2}^{3}$$

$$= (27 - 18 + 3) - (-8 - 8 - 2)$$

$$= 30$$

مثال (5)

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

1 $\int_{0}^{1} (2x - 5)\, dx$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$\int_{0}^{1} (2x - 5)\, dx = (x^2 - 5x)\Big|_{0}^{1}$$

بالتعويض

$$= ((1)^2 - 5(1)) - ((0)^2 - 5(0))$$

بالتبسيط

$$= -4$$

2 $\int_{-4}^{3} x(4 - 3x)\, dx$

بتوزيع الضرب على الجمع

$$\int_{-4}^{3} x(4 - 3x)\, dx = \int_{-4}^{3} (4x - 3x^2)\, dx$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= (2x^2 - x^3)\Big|_{-4}^{3}$$

بالتعويض

$$= (2(3)^2 - (3)^3) - (2(-4)^2 - (-4)^3)$$

بالتبسيط

$$= -105$$

مثال (6)

جد قيمة كل من التكاملات التالية

1) $\int_1^8 x^{\frac{-4}{3}}\,dx$

الحل

$$\int_1^8 x^{\frac{-4}{3}}\,dx = -3\,x^{\frac{-1}{3}}\Big|_1^8 = \frac{-3}{\sqrt[3]{x}}\Big|_1^8 = \frac{-3}{2}+\frac{3}{1}$$
$$=\frac{3}{2}$$

2) $\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

الحل

$$\int_1^8 x^{\frac{-2}{3}}\,dx = 3\frac{1}{x^3}\Big|_1^8 = 3\sqrt[3]{x}\Big|_1^8$$
$$= 3\sqrt[3]{8} - 3\sqrt[3]{1} = 6-3 = 3$$

3) $\int_3^5 \frac{x^2-1}{x-1}\,dx$

الحل

$$\int_3^5 \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\,dx = \int_3^5 (x+1)\,dx$$
$$\frac{1}{2}x^2+x\Big|_3^5 = \frac{25}{2}+5-\frac{9}{2}-3 = 8+5-3$$
$$=10$$

4) $\int_2^4 \frac{2x^3-x^2}{x^2}\,dx$

الحل

$$\int_2^4 \frac{2x^3}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}\,dx = \int_2^4 (2x-1)\,dx$$
$$= x^2 - x\Big|_2^4$$
$$=(16-4)-(4-2)=10$$

5) $\int_0^3 \frac{x^3+8}{x+2}\,dx$

a)12 b) 19 c) 27 d)30

الحل

$$\int_0^3 \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)}\,dx$$
$$=\int_0^3 (x^2-2x+4)\,dx$$
$$=\frac{x^3}{3}-x^2-4x\Big|_0^3$$
$$9-9+12-0=12$$

الإجابة a

مثال (7)

اذا كانت $F(2) = 5$, $F(6) = -4$

فان قيمة $\int_2^6 f(x)\,dx$

a) 9 b) -9 c) 10 d) -10

الحل

$$\int_2^6 f(x)\,dx = F(6) - F(2) = -4 - 5$$
$$= -9$$

الإجابة b

إيجاد الثوابت

يُمكِن إيجاد قيمة مجهولة في تكامل محدود، مِثْل حدٍّ من حدوده، إذا عُلِمت قيمة هذا التكامل

مثال (1)

إذا كان: $\int_1^k \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 3$، فأجد قيمة الثابت k.

الحل

التكامل المعطى $\int_1^k \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 3$

الصورة الأُسِّية $\int_1^k x^{-1/2}\,dx = 3$

تكامل اقتران القوَّة $2x^{1/2}\Big|_1^k = 3$

الصورة الجذرية $2\sqrt{x}\Big|_1^k = 3$

بالتعويض $2\sqrt{k} - 2\sqrt{1} = 3$

بالتبسيط $2\sqrt{k} - 2 = 3$

بجمع 2 لطرفي المعادلة $2\sqrt{k} = 5$

بقسمة طرفي المعادلة على 2 $\sqrt{k} = \frac{5}{2}$

بتربيع طرفي المعادلة $k = \frac{25}{4}$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 24

إذا كان: $\int_0^k 6x^2\, dx = 2$ ، فأجد قيمة الثابت k.

الحل

$\int_0^k 6x^2 dx = 2$

$2x^3|_0^k = 2$

$2k^3 - 2(0)^3 = 2$

$2k^3 = 2$

$k^3 = 1$

$k = 1$

مثال (3)

اذا كان $\int_0^k x\, dx = 32$ جد قيمة الثابت k

الحل

$\int_0^k x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^k = \frac{k^2}{2} - 0 = 32 \rightarrow k^2$

$= 64 \rightarrow k = \pm\sqrt{64} = \pm 8$

مثال (4)

اذا كان $\int_0^k 4x^3\, dx = 16$ جد قيمة الثابت k

الحل

$= x^4|_0^k = 16 \rightarrow k^4 = 16$

$\rightarrow k = \sqrt[4]{16} = \pm 2$

مثال (5)

اذا كان $\int_k^3 4 \cdot dx = 20$ جد قيمة الثابت k

الحل

$4(3-k) = 20$

بالقسمة على 4

$\rightarrow 3 - k = 5$

$\rightarrow k = -2$

مثال (6)

اذا كان $\int_k^{2k+1} 2 \cdot dx = 4$ جد قيمة الثابت k

الحل

$2(2k+1-k) = 4$

$\rightarrow 2(k+1) = 4$

بالقسمة على 2

$\rightarrow k + 1 = 2 \rightarrow k = 1$

خصائص التكامل المحدود

مفهوم أساسي

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين متصلين على الفترة $[a, b]$، وكان k ثابتًا، فإنَّ:

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

$$1)\ \int_a^b k f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$$

تكامل المجموع أو الفرق

$$2)\ \int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$$

التكامل عند نقطة

$$3)\ \int_a^a f(x)\, dx = 0$$

التبديل بين حدَّي التكامل

$$4)\ \int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

تجزئة التكامل

$$5)\ \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

مثال (1)

إذا كان:

$$\int_5^7 f(x)\, dx = 3,\ \int_0^5 g(x)\, dx = -4,$$
$$\int_0^5 f(x)\, dx = 10$$

فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1) $\int_0^5 (4 f(x) + g(x))\ dx$

$$\int_0^5 (4 f(x) + g(x))\ dx$$

تكامل المجموع

$$= \int_0^5 4 f(x)\, dx + \int_0^5 g(x)\, dx$$

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

$$= 4 \int_0^5 f(x)\ dx + \int_0^5 g(x)\, dx$$

$= 4(10) + (-4)$ بالتعويض

$= 36$ بالتبسيط

2 $\int_{5}^{0} 5g(x)\ dx$

بالتبديل بين حدَّي التكامل

$$\int_{5}^{0} 5g(x)\ dx = -\int_{0}^{5} 5g(x)\ dx$$

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

$$= -5\int_{0}^{5} g(x)\, dx$$

بالتعويض

$$= -5 \times -4$$

بالتبسيط

$$= 20$$

3 $\int_{0}^{7} f(x)\ dx$

بتجزئة التكامل

$$\int_{0}^{7} f(x)\ dx = \int_{0}^{5} f(x)\ dx + \int_{5}^{7} f(x)\ dx$$

بالتعويض

$$= 10 + 3$$

بالتبسيط

$$= 13$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 26

إذا كان:

$$\int_{4}^{1} f(x)\ dx = 2, \int_{-1}^{1} h(x)\ dx = 7$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = 5$$

فأجـــد قيمـــة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\int_{-1}^{1} (f(x) + 3h(x))\ dx$

b) $\int_{-1}^{4} f(x)\ dx$

c) $\int_{1}^{-1} 4h(x)\ dx$

الحل

a)

$$\int_{-1}^{1} (f(x) + 3h(x))dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} 3h(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)dx + 3\int_{-1}^{1} h(x)dx$$

$$= 5 + 3(7)$$

$$= 26$$

b)

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx$$
$$= \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{4}^{1} f(x)dx$$
$$= 5 - 2$$
$$= 3$$

c)

$$\int_{1}^{-1} 4h(x)dx = -\int_{-1}^{1} 4h(x)dx$$
$$= -4\int_{-1}^{1} h(x)dx$$
$$= -4(7)$$
$$= -28$$

مثال (3)

إذا كان:

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = 3, \int_{-2}^{5} g(x)\,dx = -4,$$

$$\int_{3}^{5} f(x)\,dx = 7$$

فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 $\int_{-2}^{5} (2f(x) - 3g(x))\,dx$

قاعدة تكامل الفرق

$$\int_{-2}^{5} (2f(x) - 3g(x))\,dx$$
$$= \int_{-2}^{5} 2f(x)dx - \int_{-2}^{5} 3g(x)dx$$

قاعدة تكامل الاقتران المضروب في ثابت

$$= 2\int_{-2}^{5} f(x)dx - 3\int_{-2}^{5} g(x)dx$$

$= 2(3) - 3(-4)$ بالتعويض

$= 18$ بالتبسيط

2 $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$

قاعدة تجزئة التكامل

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx =$$
$$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx + \int_{5}^{3} f(x)\,dx$$

قاعدة عكس حدود التكامل

$$= \int_{-2}^{5} f(x)\,dx - \int_{3}^{5} f(x)\,dx$$

$= 3 - 7$ بالتعويض

$= -4$ بالتبسيط

مثال (4)

إذا كان:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5, \int_{4}^{1} f(x)\,dx = 2$$

$$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 7$$

فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $\int_{-1}^{1} (f(x) + 3h(x))\,dx$

b) $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$

الحل

a

$$\int_{-1}^{1} (f(x) + 3h(x))dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)dx + 3\int_{-1}^{1} h(x)dx$$

$$= 5 + 3(7) = 26$$

---

b $\int_{-1}^{4} f(x)dx$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{4} f(x)dx$$

$$= 5 - 2 = 3$$

مثال (5)

اذا كان

$$\int_{-1}^{2} (2f(x) - 1)\,dx = 18$$

فاوجد $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

الحل

توزيع التكامل

$$2\int_{-1}^{2} f(x)\,dx - \int_{-1}^{2} dx = 18$$

$$2\int_{1}^{2} f(x)\,dx - 1(2 - (-1)) = 18$$

$$2\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 21 \rightarrow \int_{-1}^{2} f(x)\,dx$$

$$= \frac{21}{2}$$

مثال (6)

قيمة التكامل

$$\int_{3}^{3} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

a)3 b) -3 c) 0 d) -2

الحل

الجواب c التكامل عند نقطة يساوي صفر

مثال (7)

اذا كان

$$\int_{-1}^{2} 3f(x)\,dx = -9$$

فان قيمة

$$\int_{2}^{-1} f(x)\,dx =$$

a)-3 b)3 c)9 d) -9

الحل

$$-3\int_{2}^{-1} f(x)\,dx = -9 \rightarrow \int_{2}^{-1} f(x)\,dx = 3$$

الإجابة b

مثال (8)

اذا كان

$$\int_{2}^{2} f(x)\,dx = 4k - 8$$

فاوجد قيمة الثابت k

الحل

$$\int_{2}^{2} f(x)\,dx = 0 \rightarrow 4k - 8 = 0$$

$$\rightarrow 4k = 8 \rightarrow k = 2$$

مثال (9)

اذا كان

$$\int_{1}^{4} (f(x) + 3)\,dx = 15$$

$\int_{4}^{1} kf(x)\,dx = 12$ جد قيمة الثابت k

الحل

$$\int_{1}^{4} f(x)\,dx + \int_{1}^{4} 3\,dx = 15$$

$$\rightarrow \int_{1}^{4} f(x)\,dx + 3(4-1) = 15$$

$$\int_{1}^{4} f(x)\,dx = \sigma \rightarrow k\int_{4}^{1} f(x)\,dx = 12$$

$$\rightarrow k(-6) = 12 \rightarrow k = -2$$

مثال (10)

إذا كان

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5 \text{ و } \int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 7$$

$$\text{و } \int_{1}^{4} f(x)\,dx = -2$$

أوجد كل تكامل مما يلي

A. $\int_{4}^{1} f(x)\, dx$ B. $\int_{-1}^{4} f(x)\, dx$

C. $\int_{-1}^{1} [2f(x) + 3h(x)]\, dx$

الحل

A. $\int_{4}^{1} f(x)\, dx = -\int_{1}^{4} f(x)\, dx$

$= -(-2) = 2$

B. $\int_{-1}^{4} f(x)\, dx$

$= \int_{-1}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{4} f(x)\, dx$

$= 5 + (-2) = 3$

C. $\int_{-1}^{1} [2f(x) + 3h(x)]\, dx$

$= 2\int_{-1}^{1} f(x)\, dx + 3\int_{-1}^{1} h(x)\, dx$

$= 2(5) + 3(7) = 31$

مثال (11)

إذا كان

$\int_{2}^{5} f(x)\,dx = 2$ و $\int_{1}^{5} f(x)\,dx = 1$

$\int_{2}^{7} f(x)\,dx = 3$ و

a. أوجد $\int_{1}^{2} f(x)\,dx$

b. أوجد $\int_{5}^{7} f(x)\,dx$

الحل

a. $\int_{1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{5} f(x)\,dx = \int_{1}^{5} f(x)\,dx$

إذن

$\int_{1}^{2} f(x)\,dx = \int_{1}^{5} f(x)\,dx - \int_{2}^{5} f(x)\,dx$

$= 1 - 2 = -1$

b. $\int_{5}^{7} f(x)\,dx$

$= \int_{2}^{7} f(x)\,dx - \int_{2}^{5} f(x)\,dx$

$= 3 - 2 = 1$

مثال (12)

إذا كان

$\int_0^1 f(x)dx = 3$ و $\int_3^1 f(x)dx = 2$

أوجد $\int_0^3 f(x)\,dx.$

a	-5	b	-1
c	1	d	5

الحل

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx$$
$$= 3 - 2 = 1$$

الإجابة c

مثال (13)

إذا كانت:

$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}$ ، أوجد قيمة

$\int_0^1 (4 + 3f(x))\,dx$

a	1	b	5
c	$\frac{7}{3}$	d	7

الحل

$$\int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 f(x)\,dx = 4 + 3\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= 4 + 1 = 5$$

الإجابة b

تكاملات الاقترانات المُتشعِّبة

تستعمل قواعد التكامل المحدود إيجاد التكامل المحدود للاقترانات المُتشعِّبة إذا احتوت فترة التكامل على قواعد مُختلِفة للاقتران؛ إذ أُجزِّئ التكامل عند نقاط التشعُّب، ثم أجد تكامل كل قاعدة على فترتها الجزئية.

تعلَّمْتُ سابقًا بعض قواعد التكامل المحدود مثل قاعدة تجزئة التكامل. فإذا كان $f(x)$ اقترانًا متصلًا على الفترة $[a, b]$، فإنَّ:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

يُمكِن استعمال هذه القاعدة لإيجاد التكامل المحدود لبعض الاقترانات، التي من أهمها الاقترانات المُتشعِّبة في حال احتوت فترة التكامل على قواعد مختلفة للاقتران. ومن ثَمَّ أُجزِّئ التكامل عند نقاط التشعُّب، ثم أجد تكامل كل قاعدة على فترتها الجزئية.

مثال (1)

إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 12 & , x < 2 \\ 3x^2 & , x \geq 2 \end{cases}$،

فأجد قيمة: $\int_1^4 f(x)\ dx$.

قاعدة تجزئة التكامل

$$\int_1^4 f(x)\ dx = \int_1^2 12\ dx + \int_2^4 3x^2\ dx$$

تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوَّة

$$= 12x \Big|_1^2 + x^3 \Big|_2^4$$

بالتعويض

$$= 12(2) - 12(1) + ((4)^3 - (2)^3)$$

بالتبسيط

$$= 68$$

ملاحظة :

لايجاد تكامل اقتران القيمه المطلقة يجب إعادة تعريفها

يُطلَق على إعادة كتابة اقتران القيمة المُطلَقة في صورة اقتران مُتشعِّب **إعادةُ تعريف اقتران القيمة المُطلَقة**، ويكون ذلك بدراسة إشارة المقدار داخل القيمة المُطلَقة.

مثال (2)

إذا كان: $f(x) = |x-1|$، فأجد قيمة:

$\int_0^5 f(x)\,dx$.

الخطوة 1: أُعيد تعريف اقتران القيمة المُطلَقة.

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} 1-x & , x<1 \\ x-1 & , x\ge 1 \end{cases}$$

الخطوة 2: أجد قيمة التكامل المحدود.

قاعدة تجزئة التكامل

$$\int_0^5 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^5 (x-1)\,dx$$

تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوَّة

$$= \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_1^5$$

بالتعويض

$$= \left(\left(1-\frac{1}{2}(1)^2\right)-\left(0-\frac{1}{2}(0)^2\right)\right)$$

$$+\left(\left(\frac{1}{2}(5)^2-5\right) -\left(\frac{1}{2}(1)^2-1\right)\right)$$

بالتبسيط

$$= \frac{17}{2}$$

مثال (3) تحقق من فهمك صفحة 27

a) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 1+x & , x<1 \\ 2x & , x\ge 1 \end{cases}$،

فأجد قيمة: $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

الحل

a)

$$= \int_{-2}^{1}(1+x)dx + \int_1^2 2x\,dx$$

$$= \left(x+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^{1} + x^2\Big|_1^2$$

$$= \left(1+\frac{1}{2}(1)^2\right)$$

$$-\left(-2+\frac{1}{2}(-2)^2\right)+\left(2^2-1^2\right)$$

$$= \frac{9}{2}$$

---

b) إذا كان: $f(x) = |x-3|$،

فأجد قيمة: $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$.

الحل

اعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة:

$$f(x)=|x-3|=\begin{cases}3-x, & x<3\\ x-3, & x\geq 3\end{cases}$$

بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزىء التكامل عنده:

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(3-x)dx+\int_{3}^{4}(x-3)dx$$

$$=\left(3x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{3}+\left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)\Big|_{3}^{4}$$

$$=\left(3(3)-\frac{1}{2}(3)^2\right)-\left(3(-1)-\frac{1}{2}(-1)^2\right)+\left(\frac{1}{2}(4)^2-3(4)\right)-\left(\frac{1}{2}(3)^2-3(3)\right)=\frac{17}{2}$$

مثال (4)

أوجد قيمة $\int_0^2 f(x)dx$ حيث

$$f(x)=\begin{cases}2x-1\ , & x\geq 1\\ x^2\ , & x<1\end{cases}$$

a	1	b	$\frac{7}{3}$
c	2	d	$\frac{10}{3}$

الحل

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1(2x-1)\,dx+\int_1^2 x^2\,dx$$

$$=x^2-x\Big|_0^1+\frac{x^3}{3}\Big|_1^2$$

$$(1^2-1)-(0-0)+\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

الإجابة b

مثال (5)

إذا كان: $f(x) = |x|$، فأجد قيمة: $\int_{-2}^{6} f(x)dx$.

الخطوة 1: أُعيد تعريف اقتران القيمة المُطلَقة.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$$

الخطوة 2: أجد قيمة التكامل المحدود.

قاعدة تجزئة التكامل

$$\int_{-2}^{6} f(x)\, dx = \int_{-2}^{0} -x\, dx + \int_{0}^{6} x\, dx$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= -\frac{1}{2}x^2 \Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{2}x^2 \Big|_{0}^{6}$$

بالتعويض

$$= -\frac{1}{2}((0)^2 - (-2)^2) + \frac{1}{2}(6^2 - 0^2)$$

بالتبسيط

$$= 20$$

مثال (6)

إذا كان: $f(x) = |4 - x^2|$، فأجد قيمة: $\int_{0}^{3} f(x)dx$.

الخطوة 1: أُعيد تعريف اقتران القيمة المُطلَقة.

$$f(x) = |4 - x^2| = \begin{cases} x^2 - 4 & , x \leq -2 \\ 4 - x^2 & , -2 < x < 2 \\ x^2 - 4 & , x \geq 2 \end{cases}$$

الخطوة 2: أجد قيمة التكامل المحدود.

قاعدة تجزئة التكامل

$$\int_{0}^{3} f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{2} (4 - x^2)\, dx + \int_{2}^{3} (x^2 - 4)\, dx$$

تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوَّة

$$= (4x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{0}^{2} + (\frac{1}{3}x^3 - 4x)\Big|_{2}^{3}$$

بالتعويض

$$= \left(4(2) - \frac{1}{3}(2)^3\right) - \left(4(0) - \frac{1}{3}(0)^3\right) +$$

$$\left(\frac{1}{3}(3)^3 - 4(3)\right) - \left(\frac{1}{3}(2)^3 - 4(2)\right)$$

بالتبسيط

$$= \frac{23}{3}$$

مثال (7)

a) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 1+x & , x<1 \\ 2x & , x \geq 1 \end{cases}$،

فأجد قيمة: $\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

b) إذا كان: $f(x) = |1-x|$، فأجد قيمة: $\int_{-2}^{2} f(x)dx$.

c) إذا كان: $f(x) = |x^2-1|$، فأجد قيمة: $\int_{-4}^{0} f(x)dx$.

الحل

a)

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}(1+x)\,dx + \int_{1}^{3} 2x\,dx$$

$$= (x+\frac{1}{2}x^2)\Big|_{-1}^{1} + x^2\Big|_{1}^{3}$$

$$= (1+\frac{1}{2}) - (-1+\frac{1}{2}) + 9 - 1 = 10$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{1}(1-x)\,dx + \int_{1}^{2}(x-1)\,dx$$

$$= (x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_{-2}^{1} + (\frac{1}{2}x^2 - x)\Big|_{1}^{2}$$

$$= (1-\frac{1}{2}) - (-2-2) + (2-2) - (\frac{1}{2}-1) = 5$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x < -1 \\ 1-x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2-1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\int_{-4}^{0} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-4}^{-1}(x^2-1)\,dx + \int_{-1}^{0}(1-x^2)\,dx$$

$$= (\frac{1}{3}x^3 - x)\Big|_{-4}^{-1} + (x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{0}$$

$$= (-\frac{1}{3}+1) - (-\frac{64}{3}+4) + (0-0) - (-1+\frac{1}{3}) = \frac{56}{3}$$

مثال (8)

$f(x)=x^2|x|$ لكل x في $[-2,2]$، فأوجد ناتج

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$$

الخطوة 1 : أعد تعريف الدالة خلال الفترة المعطاة.

تعريف القيمة المطلقة

$$f(x)=\begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

اضرب في x^2

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -x^3 & , \quad -2 \leq x < 0 \end{cases}$$

الخطوة 2 :

أوجد ناتج التكامل $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

الحل

$$= \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{0} -x^3\,dx + \int_{0}^{2} x^3\,dx$$

$$= \left[\frac{-x^4}{4}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2}$$

$$= \frac{-1}{4}(0-16) + \frac{1}{4}(16-0)$$

$$= \frac{-1}{4}(-16) + \frac{1}{4}(16) = 4 + 4$$

$$= 8$$

مثال (9)

اوجد قيمة

$$\int_{-1}^{1} |x+1|\,dx$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$$

الحل

$$\int_{-1}^{1} |x+1|\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1}$$

$$\left[\frac{1}{2}+1\right] - \left[\frac{1}{2}-1\right] = 1 + 1 = 2$$

مثال (10)

إذا كان $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \quad x \geq 0 \\ 1 & , \quad x < 0 \end{cases}$

أوجد $\int_{-2}^{3} f(x)\, dx$

a	-24
b	25
c	29
d	35

الحل

$$\int_{-2}^{0} 1\, d\lambda + \int_{0}^{3} 3x^2\, dx$$

$$= |(0-(-2)) + x^3|_0^3$$

$$= 2 + 27 - 0 = 29$$

الإجابة c

مثال (11)

إذا كان $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , \quad x < 1 \\ \frac{x}{2}+3 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$.

أوجد $\int_{1}^{4} f(x)\, dx$

a	$\frac{41}{4}$
b	$\frac{51}{4}$
c	12
d	$\frac{99}{4}$

الحل

$$\int_{1}^{4} \left(\frac{x}{2}+3\right) dx = \frac{x^2}{4} + 3x|_1^4$$

$$= (4+12) - \left(\frac{1}{4}+3\right)$$

$$= 16 - \frac{13}{4} = \frac{51}{4}$$

الإجابة b

التكامل المحدود، ومقدار التغيُّر

مقدار التغيُّر

مفهوم أساسي

إذا كان $f'(x)$ متصلًا على الفترة $[a, b]$

فإنَّ مقدار التغيُّر في $f(x)$ عند تغيُّر x من $x = a$ إلى $x = b$ هو:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx$$

مثال (1)

من الحياة

التغيُّــر في الأرباح:

يُمثِّــل الاقتــران: $P'(x) = 165 - 0.1x$ الربح الحدِّي الشــهري (بالدينار) لكل جهاز لوحي تبيعه إحدى الشركات، حيث x عدد الأجهزة اللوحية المَبيعة شهريًّا و$P(x)$ ربح بيع x قطعة شــهريًّا بالدينار. أجد مقدار التغيُّر في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشــهرية إلى 1100 جهــاز، علمًا بأنَّ عدد الأجهــزة المَبيعة الآن هو 1000 جهاز.

الحل

صيغة مقدار التغيُّر

$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(x)\, dx$$

بتعويض $a = 1000, b = 1100$

$$P(1100) - P(1000)$$

$$= \int_{1000}^{1100} (165 - 0.1x)\, dx$$

تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= (165x - 0.05x^2)\Big|_{1000}^{1100}$$

بالتعويض

$$= (165(1100) - 0.05(1100)^2)$$
$$-(165(1000) - 0.05(1000)^2)$$

بالتبسيط

$$= 6000$$

إذن، عند زيادة مبيعات الشــركة من 1000 جهاز إلى 1100 جهاز، فإنَّ أرباح الشــركة ستزيد شهريًّا بمقدار JD 6000.

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 29

مُعتمِدًا المعلومات الوارد ذكرها في المثال 5، أجد مقدار التغيُّر الشهري في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية إلى 1500 جهاز، علمًا بأنَّ عدد الأجهزة المَبيعة الآن هو 1400 جهاز

الحل

$$P'(x) = 165 - 0.1x$$

مقدار التغير الشهري في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشهرية من 1400جهاز إلى 1500جهاز هو:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b C'(x)\,dx$$

$$f(1500) - f(1400)$$

$$= \int_{1400}^{1500} (165 - 0.1x)\,dx$$

$$= (165x - 0.05x^2)\Big|_{1400}^{1500}$$

$$= (165(1500) - 0.05(1500)^2)$$

$$- (165(1400) - 0.05(1400)^2)$$

$$= 2000$$

إذن، عند زيادة مبيعات الشركة من 1400جهاز إلى 1500جهاز، فإن أرباح الشركة ستزيد شهرياً بمقدار 2000دينار.

مثال (3)

مسألة اليوم

يُمثِّل الاقتران: $C'(x) = 500 - \frac{x}{3}$ التكلفة الحدِّية الشهرية (بالدينار) لكل درّاجة نارية يُنتِجها أحد مصانع الدرّاجات، حيث x عدد الدرّاجات المُنتَجة شهريًّا، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x درّاجة شهريًّا بالدينار أجد مقدار التغيُّر في التكلفة عند زيادة الإنتاج من 300 درّاجة إلى 600 درّاجة شهريًّا.

الحل

$$C'(x) = 500 - \frac{x}{3}$$

مقدار التغير في التكلفة عند زيادة الإنتاج من 300دراجة إلى 600دراجة شهرياً هو:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b C'(x)\,dx$$

$$f(600) - f(300)$$

$$= \int_{300}^{600} (500 - \frac{x}{3})\,dx$$

$$= (500x - \frac{x^2}{6})\Big|_{300}^{600}$$

$$= (500(600) - \frac{(600)^2}{6})$$

$$- (500(300) - \frac{(300)^2}{6}) = 105000$$

إذن، عند زيادة الإنتاج من 300إلى 600دراجة، فإن تكلفة الإنتاج ستزيد شهرياً بمقدار 105000دينار.

مثال (4)

اذا كان $f(5) = 3 \cdot f(2) = 7$ فان

$$\int_{2}^{5} f'(x)\,dx$$

a)-4 b) 4 c) 10 d) 3

الحل

$$\int_{2}^{5} f'(x)\,dx = f(5) - f(2)$$

$=7- 3 = - 4$

الإجابة a

مثال (5)

اذا كان الاقتران $f(x)$ معرفا على الفترة $[1, 5]$

$f'(x) = 2x + 1$ جد $f(5) - f(1)$

الحل

$$f(5) - f(1) = \int_{1}^{5} f'(x)\,dx$$

$$= \int_{1}^{5} (2x + 1)\,dx$$

$$= x^2 + x\Big|_1^5$$

$$(25 + 5) - (1 + 1) = 28$$

مثال (6)

اذا كان $f(x)$ متصلا وكان

$f(1) = 4 \cdot f(2) = 12$ وكان

$\int_1^2 kf'(x)\,dx = 16$ جد قيمة الثابت k

الحل

$$\int_{1}^{2} kf'(x)\,dx = 16$$

$$k\big(f(2) - f(1)\big) = 16$$

$$\rightarrow k(12 - 4) = 16$$

$$\rightarrow 8k = 16 \rightarrow k = 2$$

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1) $\int_{-1}^{3} 3x^2\, dx$

$$\int_{-1}^{3} 3x^2\, dx = x^3\Big|_{-1}^{3}$$
$$= (3)^3 - (-1)^3$$
$$= 28$$

2) $\int_{-3}^{-2} 6\, dx$

$$\int_{-3}^{-2} 6\, dx = 6x\Big|_{-3}^{-2}$$
$$= 6(-2) - 6(-3)$$
$$= 6$$

3) $\int_{0}^{2} (3x^2 + 4x + 3)\, dx$

$$\int_{0}^{2} (3x^2 + 4x + 3)\, dx$$
$$= (x^3 + 2x^2 + 3x)\Big|_0^2$$
$$= ((2)^3 + 2(2)^2 + 3(2)) - ((0)^3 + 2(0)^2 + 3(0))$$
$$= 22$$

4) $\int_{1}^{8} 8\sqrt[3]{x}\, dx$

الحل

$$\int_{1}^{8} 8\sqrt[3]{x}\, dx = \int_{1}^{8} 8x^{\frac{1}{3}}\, dx$$
$$= 6x^{\frac{4}{3}}\Big|_1^8$$
$$= 6\sqrt[3]{x^4}\Big|_1^8$$
$$= 6\sqrt[3]{8^4} - 6\sqrt[3]{0^4}$$
$$= 96$$

5) $\int_{1}^{9} \left(\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$

الحل

$$= \int_{1}^{9} (x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}})\, dx$$
$$= (\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}})\Big|_1^9$$
$$= (\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 8\sqrt{x})\Big|_1^9$$
$$= (\frac{2}{3}\sqrt{9^3} - 8\sqrt{9}) - (\frac{2}{3}\sqrt{1^3} - 8\sqrt{1})$$
$$= \frac{4}{3}$$

6 $\int_{-2}^{3}(-x^2+4x-5)\,dx$

الحل

$$=(-\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x)\Big|_{-2}^{3}$$

$$=(-\frac{1}{3}(3)^3+2(3)^2-5(3))-(-\frac{1}{3}(-2)^3+2(-2)^2-5(-2))$$

$$=-\frac{80}{3}$$

7 $\int_{1}^{3}(x-2)(x+2)\,dx$

الحل

$$=\int_{1}^{3}(x^2-4)\,dx$$

$$=(\frac{1}{3}x^3-4x)\Big|_{1}^{3}$$

$$=(\frac{1}{3}(3)^3-4(3))-(\frac{1}{3}(1)^3-4(1))$$

$$=\frac{2}{3}$$

8 $\int_{-3}^{3}(9-x^2)\,dx$

الحل

$$=(9x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-3}^{3}$$

$$=(9(3)-\frac{1}{3}(3)^3)-(9(-3)-\frac{1}{3}(-3)^3)=36$$

9 $\int_{1}^{4}\frac{2+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$

الحل

$$\int_{1}^{4}\frac{2+\sqrt{x}}{x^2}\,dx=\int_{1}^{4}(\frac{2}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x^2})\,dx$$

$$=\int_{1}^{4}(2x^{-2}+x^{-\frac{3}{2}})\,dx$$

$$=(-2x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}})\Big|_{1}^{4}$$

$$=(\frac{-2}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}})\Big|_{1}^{4}$$

$$=(\frac{-2}{4}-\frac{2}{\sqrt{4}})-(\frac{-2}{1}-\frac{2}{\sqrt{1}})$$

$$=\frac{5}{2}$$

10 $\int_{1}^{4} x^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right) dx$

الحل

$= \int_{1}^{4} x^3(x^{\frac{1}{2}} + x^{-1})dx$

$= \int_{1}^{4} (x^{\frac{7}{2}} + x^2)dx$

$= (\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} + \frac{1}{3}x^3)\Big|_1^4$

$= (\frac{2}{9}\sqrt{x^9} + \frac{1}{3}x^3)\Big|_1^4$

$= (\frac{2}{9}\sqrt{4^9} + \frac{1}{3}(4)^3) - (\frac{2}{9}\sqrt{1^9} + \frac{1}{3}(1)^3)$

$= \frac{1211}{9}$

11 $\int_{1}^{8} (x^{1/3} - x^{-1/5})\, dx$

الحل

$= (\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}})\Big|_1^8$

$= (\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4})\Big|_1^8$

$= (\frac{3}{4}\sqrt[3]{8^4} + \frac{5}{4}\sqrt[5]{8^4}) - (\frac{3}{4}\sqrt[3]{1^4} + \frac{5}{4}\sqrt[5]{1^4})$

$= 10 + \frac{5}{4}\sqrt[5]{8^4}$

12 $\int_{1}^{9} (2+\sqrt{x})^2\, dx$

الحل

$= \int_{1}^{9} (4 + 4\sqrt{x} + x)dx$

$= \int_{1}^{9} (4 + 4x^{\frac{1}{2}} + x)dx$

$= (4x + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2)\Big|_1^9$

$= (4(9) + \frac{8}{3}(9)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(9)^2) - (4(1) + \frac{8}{3}(1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(1)^2)$

$= \frac{424}{3}$

13 $\int_{-1}^{4} |3x-6|\, dx$

الحل

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة:

$$|3x-6| = \begin{cases} 6-3x, & x<2 \\ 3x-6, & x \geq 2 \end{cases}$$

بما أن الاقتران تشعب عند 2؛ فإنني أجزىء التكامل عنده:

$$\int_{-1}^{4} |3x-6|\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (6-3x)dx + \int_{2}^{4} (3x-6)dx$$

$$= (6x - \frac{3}{2}x^2)\Big|_{-1}^{2} + (\frac{3}{2}x^2 - 6x)\Big|_{2}^{4}$$

$$= (6(2) - \frac{3}{2}(2)^2) - (6(-1) - \frac{3}{2}(-1)^2)$$

$$+ \ (\frac{3}{2}(4)^2 - 6(4)) - (\frac{3}{2}(2)^2 - 6(2))$$

$$= \frac{39}{2}$$

---

14 $\displaystyle\int_{0}^{3} |x-2|\, dx$

الحل

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة:

$$|x-2| = \begin{cases} 2-x, & x < 2 \\ x-2, & x \geq 2 \end{cases}$$

بما أن الاقتران تشعب عند 2؛ فإنني أجزىء التكامل عنده:

$$\int_{0}^{3} |x-2|dx = \int_{0}^{2} (2-x)dx + \int_{2}^{3} (x-2)dx$$

$$= (2x - \frac{1}{2}x^2)\Big|_{0}^{2} + (\frac{1}{2}x^2 - 2x)\Big|_{2}^{3}$$

$$= (2(2) - \frac{1}{2}(2)^2) - (2(0) - \frac{1}{2}(0)^2)$$

$$+ (\frac{1}{2}(3)^2 - 2(3)) - (\frac{1}{2}(2)^2 - 2(2)) = \frac{5}{2}$$

---

15 $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{x^2-1}{x+1}\, dx$

$$= \int_{2}^{3} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} dx$$

$$= \int_{2}^{3} (x-1)dx$$

$$= (\frac{1}{2}x^2 - x)\Big|_{2}^{3}$$

$$= (\frac{1}{2}(3)^2 - 3) - (\frac{1}{2}(2)^2 - 2) = \frac{3}{2}$$

---

16 إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x \leq 3 \\ 10-x & , x > 3 \end{cases}$

فأجد قيمة: $\displaystyle\int_{0}^{4} f(x)\, dx$.

بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده:

$$\int_{0}^{4} f(x)dx =$$

$$\int_{0}^{3} (2x+1)dx + \int_{3}^{4} (10-x)dx$$

$$= (x^2 + x)\Big|_{0}^{3} + \left(10x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{3}^{4}$$

$$= ((3)^2 + 3) - ((0)^2 + 0) +$$

$$\left(10(4) - \frac{1}{2}(4)^2\right) - \left(10(3) - \frac{1}{2}(3)^2\right)$$

$$= \frac{37}{2}$$

17 إذا كان: $f(x)=\begin{cases}-x^2+5 &, x<0\\ x+5 &, x\geq 0\end{cases}$ ،

فأجد قيمة: $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$.

الحل

بما أن الاقتران تشعب عند 0، فإنني أجزئ التكامل عنده:

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx =$$

$$\int_{-1}^{0}(-x^2+5)dx+\int_{0}^{2}(x+5)dx$$

$$\left(-\frac{1}{3}x^3+5x\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{1}{2}x^2+5x\right)\Big|_{0}^{2}$$

$$\left(-\frac{1}{3}(0)^3+5(0)\right)$$

$$-\left(\frac{-1}{3}(-1)^3+5(-1)\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2}(2)^2+5(2)\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}(0)^2+5(0)\right)=\frac{50}{3}$$

إذا كان: $\int_{1}^{5} f(x)\,dx=6, \int_{1}^{5} g(x)\,dx=8$ ، $\int_{1}^{2} f(x)\,dx=-4$ ، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

18 $\int_{2}^{2} g(x)\,dx$

$$\int_{2}^{2} g(x)dx=0$$

---

19 $\int_{5}^{1}(g(x)-2)\,dx$

$$\int_{5}^{1}(g(x)-2)\,dx$$

$$=\int_{5}^{1} g(x)\,dx-\int_{5}^{1} 2\,dx$$

$$=(-8)-(2x)|_{5}^{1}=0$$

---

20 $\int_{1}^{2}(3f(x)+x)\,dx$

$$\int_{1}^{2}(3f(x)+x)dx$$

$$=\int_{1}^{2}3f(x)dx+\int_{1}^{2}xdx$$

$$3\int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2$$
$$= 3(-4) + \left(\frac{1}{2}(2)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2\right) = -\frac{21}{2}$$

---

21 $\int_2^5 f(x)\,dx$

$$\int_2^5 f(x)dx$$
$$= \int_2^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx$$
$$= -(-4) + 6$$
$$= 10$$

---

22 $\int_1^5 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$

$$\int_1^2 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$
$$= \int_1^5 f(x)\,dx - \int_1^5 9\langle x\rangle\,dx$$
$$= 6 - 8 = -2$$

---

23 $\int_1^5 \big(4f(x) + g(x)\big)\,dx$

$$\int_1^5 \big(4f(x) + g(x)\big)dx$$
$$= \int_1^5 4f(x)dx + \int_1^5 g(x)dx$$
$$= 4\int_1^5 f(x)dx + \int_1^5 g(x)dx$$
$$=4(6) + 8 = 32$$

---

24 إذا كان: $\int_1^m (6x - 10)\,dx = 4$

فأجد قيمة الثابت m.

الحل

$$\int_1^m (6x - 10)dx = 4$$
$$(3x^2 - 10x)\Big|_1^m = 4$$
$$(3m^2 - 10m) - \big(3(1)^2 - 10(1)\big) = 4$$
$$3m^2 - 10m + 7 = 4$$
$$3m^2 - 10m + 3 = 0$$
$$(3m - 1)(m - 3) = 0$$
$$3m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$
$$m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$$

25 تغيُّر التكلفة:

يُمثِّل الاقتران: $C'(x) = 6x + 1$ التكلفة الحدِّية (بالدينار) لكل قطعة تُنتِجها إحدى الشركات حيث x عدد القطع المُنتَجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد مقدار التغيُّر في التكلفة عند زيادة الشركة إنتاجها من 10 قطع إلى 20 قطعة شهريًّا.

الحل

$$C'(x) = 6x + 1$$

مقدار التغير في التكلفة عند زيادة الشركة إنتاجها من 10 قطع إلى 20 قطعة شهريًّا هو:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b C'(x)dx$$

$$f(20) - f(10) = \int_{10}^{20} (6x+1)dx$$

$$= (3x^2 + x)\Big|_{10}^{20}$$

$$= (3(20)^2 + 20) - (3(10)^2 + 10)$$

$$= 910$$

إذن، عند زيادة الإنتاج من 10 قطع إلى 20 قطعة، فإن تكلفة الإنتاج ستزيد شهريًّا بمقدار 910 دينار.

26 تلوُّث: يُلوِّث مصنعٌ بحيرةً بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $N'(t) = 280t^{3/2}$، حيث t عدد الأشهر منذ الآن و $N(t)$ عدد الكيلوغرامات من المُلوِّثات التي يطرحها المصنع في البحيرة. كم كيلوغرامًا من المُلوِّثات يدخل البحيرة منذ الآن حتى 4 أشهر؟

الحل

$$N'(t) = 280t^{\frac{3}{2}}$$

$$N(t) = \int_0^4 280\, t^{\frac{3}{2}}\, dx$$

$$112\, t^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4 = 112\sqrt{t^5}\Big|_0^4$$

$$= 112\sqrt{4^5} - 112\sqrt{0^5}$$

$$= 3584$$

إذن، يدخل البحيرة 3584 كيلوغرامًا من الملوثات في 4 أشهر.

مهارات التفكير العليا

27 أكتشف الخطأ: أوجد خالد ناتج التكامل: $\int_0^2 (x^2+x)\,dx$، وكان حَلُّه على النحو الآتي:

$$\int_0^2 (x^2+x)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^2$$

$$= \left(\frac{1}{3}(0)^3+\frac{1}{2}(0)^2\right)-\left(\frac{1}{3}(2)^3+\frac{1}{2}(2)^2\right)$$

$$= -\frac{14}{3}$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ خالد، ثم أُصحِّحه.

الحل

خالد لم يراعي ترتيب حدودالتكامل عند التعويض

$$\left(\frac{1}{3}(2)^3+\frac{1}{2}(2)^2\right)-\left(\frac{1}{3}(0)^3+\frac{1}{2}(0)^2\right)=\frac{14}{3}$$

28 تبرير: أُثبِت أنَّ:

$$\int_0^1 x^n(1-x)\,dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

حيث $n > 0$، مُبرِّرًا إجابتي.

الحل

$$\int_0^1 x^n(1-x)\,dx = \int_0^1 (x^n - x^{n+1})\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+2}x^{n+2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{n+1}(1)^{n+1} - \frac{1}{n+2}(1)^{n+2}\right)$$

$$- \left(\frac{1}{n+1}(0)^{n+1} - \frac{1}{n+2}(0)^{n+2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - (0)$$

$$= \frac{n+2-n-1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

29 تحدٍّ:

إذا كان: $\int_1^5 (2ax+7)\,dx = 4a^2$

فأجد قيمة الثابت a.

الحل

$$\int_1^5 (2ax+7)\,dx = 4a^2$$

$$(ax^2+7x)\Big|_1^5 = 4a^2$$

$$\left(a(5)^2+7(5)\right)-\left(a(1)^2+7(1)\right) = 4a^2$$

$$25a+35-a-7 = 4a^2$$

$$24a+28 = 4a^2$$

$$4a^2-24a-28 = 0$$

$$a^2-6a-7 = 0$$

$$(a-7)(a+1) = 0$$

$$a-7 = 0 \Rightarrow a = 7$$

$$a+1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

تمارين ومسائل كتاب التمارين صفحة 11

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1 $\int_{1}^{5} 10x^{-2}\, dx$

الحل

$$\int_{1}^{5} 10x^{-2}dx = -10x^{-1}\Big|_{1}^{5}$$

$$= -\frac{10}{x}\Big|_{1}^{5} = (-2)-(-10) = 8$$

2 $\int_{0}^{2} (2x^3 - 4x + 5)\, dx$

الحل

$$\int_{0}^{2}(2x^3-4x+5)dx$$

$$= (\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 5x)\Big|_{0}^{2}$$

$$= 8 - 8 + 10 = 10$$

3 $\int_{1}^{4} \frac{x^3 + 2x^2}{\sqrt{x}}\, dx$

الحل

$$= \int_{1}^{4}(\frac{x^3}{\sqrt{x}} + \frac{2x^2}{\sqrt{x}})dx$$

$$= \int_{1}^{4}(x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}})dx$$

$$= (\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}})\Big|_{1}^{4}$$

$$= (\frac{256}{7} + \frac{128}{5}) - (\frac{2}{7} + \frac{4}{5})$$

$$= \frac{254}{7} + \frac{124}{5} = \frac{2138}{35}$$

4 $\int_3^6 \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 dx$

$$\int_3^6 \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 dx = \int_3^6 \left(x^2 - 6 + \frac{9}{x^2}\right) dx$$

$$= \int_3^6 (x^2 - 6 + 9x^{-2}) dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - 6x - 9x^{-1}\right)\Big|_3^6$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - 6x - \frac{9}{x}\right)\Big|_3^6$$

$$= \left(72 - 36 - \frac{3}{2}\right) - (9 - 18 - 3)$$

$$= \frac{93}{2}$$

5 $\int_0^5 (|x+3| - 5)\, dx$

$$|x+3| = \begin{cases} -x-3, x < -3 \\ x+3, x \ge -3 \end{cases}$$

$$\int_0^5 (|x+3| - 5) dx = \int_0^5 (x + 3 - 5) dx$$

$$= \int_0^5 (x - 2) dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_0^5$$

$$= \left(\frac{25}{2} - 10\right) - (0 - 0) = \frac{5}{2}$$

6 $\int_0^6 x(6 - x)\, dx$

الحل

$$\int_0^6 x(6-x) dx = \int_0^6 (6x - x^2) dx$$

$$= \left(3x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^6$$

$$= \left(108 - \frac{216}{3}\right) - (0) = \frac{108}{3} = 36$$

7 $\int_1^2 \left(6x - \frac{12}{x^4} + 3\right) dx$

الحل

$$= \int_1^2 (6x - 12x^{-4} + 3) dx$$

$$= (3x^2 + 4x^{-3} + 3x)\Big|_1^2$$

$$= \left(3x^2 + \frac{4}{x^3} + 3x\right)\Big|_1^2$$

$$= \left(12 + \frac{1}{2} + 6\right) - (3 + 4 + 3) = \frac{17}{2}$$

8 $\displaystyle\int_0^7 |2x-1|\,dx$

الحل

$$|2x-1| = \begin{cases} -2x+1, & x<\frac{1}{2} \\ 2x-1, & x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^7 |2x-1|\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (-2x+1)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^7 (2x-1)\,dx$$

$$= (-x^2+x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + (x^2-x)\Big|_{\frac{1}{2}}^7$$

$$= (-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}) - (0) + (49-7) - (\frac{1}{4}-\frac{1}{2})$$

$$= \frac{85}{2}$$

9 $\displaystyle\int_{-3}^4 |x|\,dx$

الحل

$$|x| = \begin{cases} -x & x<0 \\ x & x \ge 0 \end{cases}$$

$$\int_{-3}^4 |x|\,dx = \int_{-3}^0 -x\,dx + \int_0^4 x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\Big|_{-3}^0 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^4$$

$$= (0) - (-\frac{9}{2}) + (8) - (0) = \frac{25}{2}$$

10 $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+x^3}{x}\,dx$

الحل

$$= \int_1^2 (\frac{x^2}{x} + \frac{x^3}{x})\,dx$$

$$= \int_1^2 (x+x^2)\,dx$$

$$= (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3)\Big|_1^2$$

$$= (2+\frac{8}{3}) - (\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) = \frac{3}{2} + \frac{7}{3}$$

$$= \frac{23}{6}$$

11 $\int_{3}^{4} (6x^2 - 4x)\, dx$

$\int_{3}^{4}(6x^2-4x)dx=(2x^3+2x^2)|_3^4$

$=(128+32)-(54+18)=88$

12 $\int_{10}^{10} \frac{x+1}{x^2}\, dx$

$\int_{10}^{10}\frac{x+1}{x^2}dx=0$

إذا كان:

$$\int_{-3}^{1} f(x)\, dx = 4, \int_{-3}^{2} g(x)\, dx = -2$$

$\int_{-3}^{2} f(x)\, dx = 5$ ، فأجد كُلًّا ممّا يأتي

13 $\int_{2}^{2} f(x)\, dx$

$\int_{2}^{2}f(x)dx=0$

14 $\int_{1}^{2} (f(x) - 5)\, dx$

$=\int_{1}^{2}f(x)dx-\int_{1}^{2}5dx$

$=\int_{1}^{-3}f(x)dx+\int_{-3}^{2}f(x)dx+\int_{1}^{2}-5dx$

$=-4+5+(-5x)|_1^2$

$=1+(-10)-(-5)$

$=-4$

15 $\int_{-3}^{2}\big(-2f(x)+5g(x)\big)dx$

$=-2\int_{-3}^{2}f(x)dx+5\int_{-3}^{2}g(x)dx$

$=-2(5)+5(-2)=-20$

16 $\int_{2}^{-3} \big(g(x) + 2x\big)\, dx$

$=\int_{2}^{-3}g(x)dx+\int_{2}^{-3}2xdx$

$=-(-2)+(x^2)|_2^{-3}=2+9-4=7$

17 $\int_{2}^{-3} \left(f(x)+g(x)\right) dx$

$= \int_{2}^{-3} f(x)dx + \int_{2}^{-3} g(x)dx$

$= -5+2 = -3$

18 $\int_{-3}^{2} \left(4f(x)-3g(x)\right) dx$

$= 4\int_{-3}^{2} f(x)dx - 3\int_{-3}^{2} g(x)dx$

$= 4(5)-3(-2) = 26$

19 إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x^2 & ,x<2 \\ 8-x & ,x\geq 2 \end{cases}$،

فأجد قيمة: $\int_{-3}^{6} f(x)\, dx$

$= \int_{-3}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{6} f(x)dx$

$= \int_{-3}^{2} x^2dx + \int_{2}^{6} (8-x)dx$

$= (\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-3}^{2} + (8x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_{2}^{6}$

$= (\frac{8}{3})-(-9)+(48-18)-(16-2)$

$= \frac{83}{3}$

20 سكّان: أشارت دراسة إلى أنَّ عدد السكّان في إحدى القرى يتغيَّر شهريًّا بمُعدَّل يُمكِن نمذجته بالاقتران $P'(t) = 5+3t^{2/3}$، حيث t عدد الأشهر من الآن و $P(t)$ عدد السكّان. أجد مقدار الزيادة في عدد سكّان القرية في الأشهر الثمانية القادمة.

الحل

$P(t) = \int_{0}^{8} (5+3t^{\frac{2}{3}})dt$

$= (5t+\frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}})\Big|_{0}^{8}$

$= (40+\frac{288}{5})-(0)$

$= \frac{488}{5}$

21 إذا كان: $\int_{2}^{3} (x^2 - a)\, dx = 5$

فأجد قيمة الثابت a.

الحل

$$\int_{2}^{3} (x^2 - a)\, dx = 5$$

$$\left(\frac{1}{3}x^3 - ax\right)\Big|_{2}^{3} = 5$$

$$(9 - 3a) - \left(\frac{8}{3} - 2a\right) = 5$$

$$\frac{17}{3} - a = 5$$

$$a = \frac{2}{3}$$

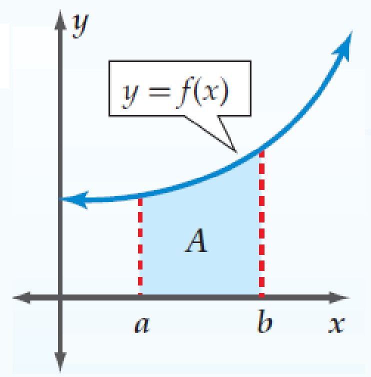
الدرس 4

المساحة

المساحة

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)$ والمحور x والمستقيمين $x=a, x=b$ تعطى بالصيغة:

$$A=\int_a^b f(x)dx$$



مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x. تنقسم إلى ثلاث حالات، هي:

1) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x وتقع فوق هذا المحور.

2) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x وتقع أسفل هذا المحور.

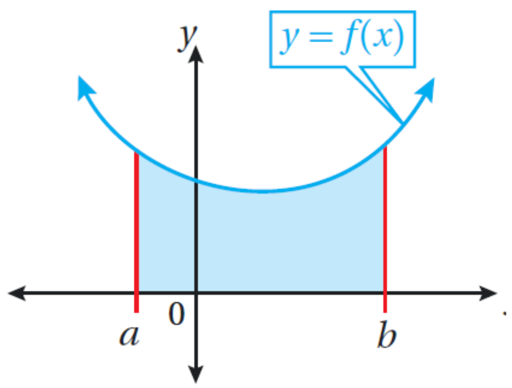
3) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x ويقع أحد جزأيها فوق المحور x، ويقع الجزء الآخر أسفل هذا المحور.

المساحة فوق المحور x ومنحنى اقتران ومستقيمين

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، وتقع فوق هذا المحور

يُمكِن إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمحور x، والمستقيمين $x=a$، و$x=b$، وتقع فوق المحور x عن طريق التكامل الآتي:

$$A=\int_a^b f(x)\ dx\ ;\ a<b$$



مثال (1)

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 1$، والمحور x والمستقيمين : $x = 1$، و $x = 4$.

الحل

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x في الفترة المعطاة (إنْ وُجِدت) لإيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران $f(x)$ مع المحور x في الفترة $[1, 4]$، أساوي أوّلًا قاعدة الاقتران بالصفر، ثم أحُلّ المعادلة الناتجة:

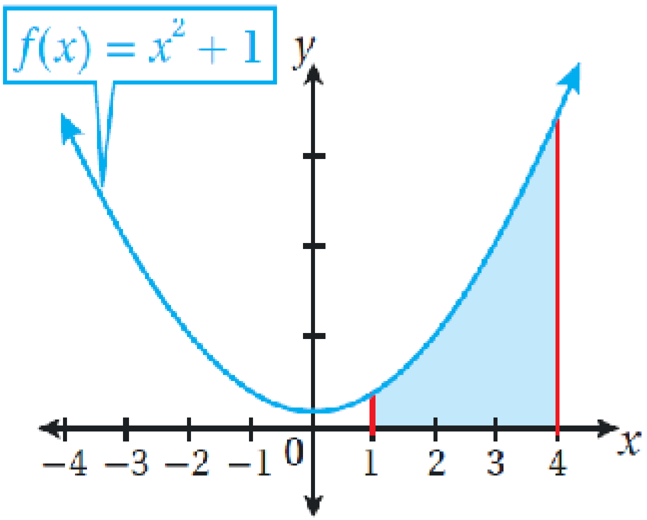
$f(x) = 0$ بمساواة قاعدة الاقتران بالصفر

$x^2 + 1 = 0$ بتعويض $f(x) = x^2 + 1$

بما أنَّ $x^2 + 1 \neq 0$، فإنَّ منحنى الاقتران لا يتقاطع مع المحور x كما في الشكل المجاور.

الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ المساحة المطلوبة تقع فوق المحور x كما في الشكل المجاور؛ لذا أجد هذه المساحة كالآتي:



قانون المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x، وتقع فوق هذا المحور

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

بالتعويض $f(x) = x^2 + 1, a = 1, b = 4$

$$= \int_1^4 (x^2 + 1)\, dx$$

تكامل اقتران القوّة، وتكامل الثابت

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right) \Big|_1^4$$

بالتعويض

$$= \left(\frac{1}{3}(4)^3 + 4\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 + 1\right)$$

$$= 24$$ بالتبسيط

إذن، المساحة هي: 24 وحدة مربعة.

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 33

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x + 3$، والمحور x والمستقيمين $x = -1$، و $x = 3$.

الحل

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة

$$f(x) = 0 \Rightarrow x + 3 = 0$$
$$\Rightarrow x = -3$$

وبما أن 3- لا ينتمي إلى الفترة [1,3-] إذن نهملها.

نختار عدداً ضمن الفترة [1,3-]، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = 0 + 3 = 3 > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحورx

$$A = \int_{-1}^{3} (x+3)\,dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x\right)\Big|_{-1}^{3}$$

$$= \left(\frac{1}{2}(3)^2 + 3(3)\right) - \left(\frac{1}{2}(-1)^2 + 3(-1)\right)$$

$$= \frac{9}{2} + 9 - \frac{1}{2} + 3 = 16$$

إذن، المساحة هي: 8 وحدات مربعة.

ملاحظة :

يُمكِن تحديد أنَّ منحنى الاقتران هو فوق المحور x في فترة ما لا يقطع فيها محور x من دون تمثيله بيانيًّا، عن طريق تعويض إحدى قِيَم المُتغيِّر x في تلك الفترة في الاقتران؛ فإذا كانت النتيجة موجبة دلَّ ذلك على أنَّ منحنى الاقتران هو فوق المحور x.

مثال (3)

اوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^3$ والمستقيمين $x = 2$, $x = 1$

الحل

$$x^3 = 0 \rightarrow x = 0$$

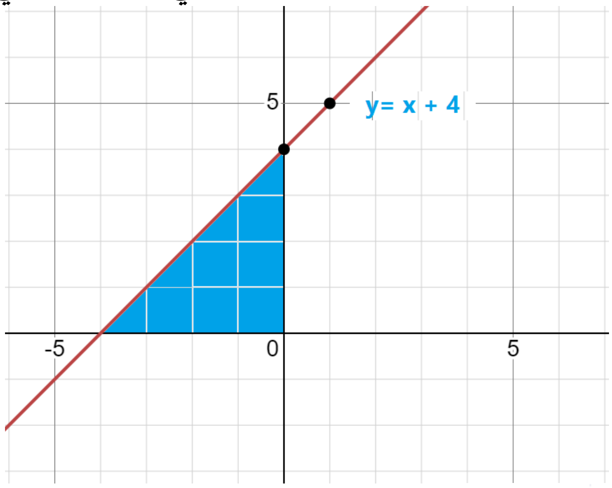
$x = 0$ لا تنتمي الى الفترة $[1,2]$

الاقتران فوق المحور x

$$A = \int_{1}^{2} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{F}^{2} \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

مثال (4)

اوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل التالي



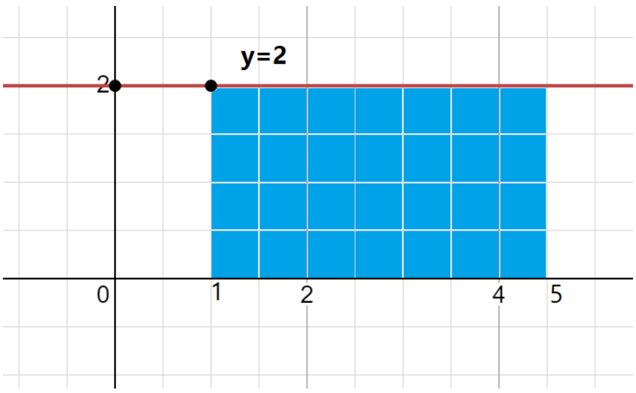
الحل

$$A = \int_{-4}^{0} (x+4)\, dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_{-4}^{0}$$

$$= 0 - (8 - 16) = 8$$

مثال (5)

وجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل التالي



الحل

$$A = \int_{1}^{5} 2\, dx = 2(5-1) = 8$$

مثال (6)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

$f(x) = x^2 - 2x - 3$ والمحور x

والمستقيمين $x = 5$, $x = 3$

الحل

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x-3)(x+1) = 0$$
$$x = -1 \quad , \quad x = 3$$

الاقتران فوق المحور x

$$A = \int_{3}^{5} (x^2 - 2x - 3)\, dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\Big|_3^5 = \frac{32}{3}$$

مثال (7)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

$f(x) = \sqrt{x}$ والمستقيمين $x = 1$, $x = 4$

الحل

$$0 = \sqrt{x}$$

بالتربيع

$$x = 0$$

لا تنتمي للفترة $[1 \;,\; 4]$

الاقتران فوق المحور x

$$A = \int_{1}^{4} x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3\Big|_1^4$$

$$= \frac{2}{3}(8) - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

مثال (8)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى $g(x) = 3x^2 + 1$ والمحور x، والمستقيمين $x = -1, x = 2$

الحل

$$g(x) = 3x^2 + 1$$

لا يحلل والاقتران فوق المحور x

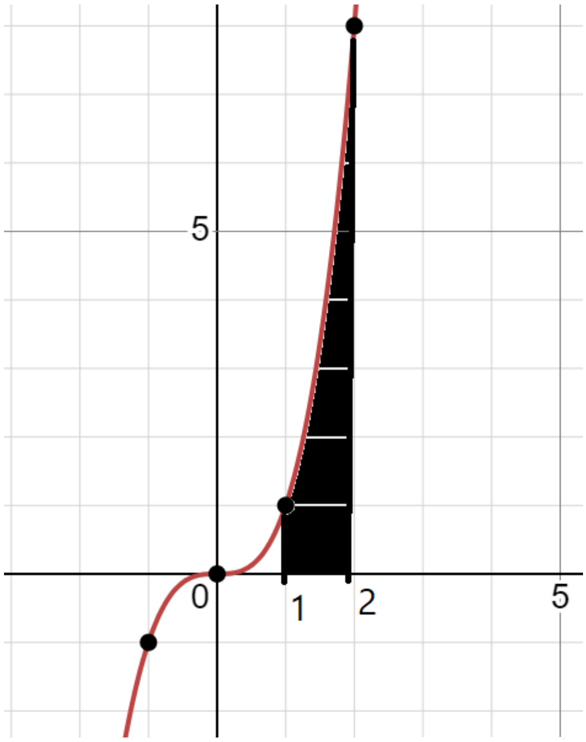
$$A = \int_{-1}^{2} (3x^2 + 1)\, dx = x^3 + x|_{-1}^{2}$$

$$= (8 + 1) - (-1 - 1)$$

$$= 9 + 2 = 11$$

مثال (9)

اذا كانت المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = ax^2$ والمحور x والمستقيمين $x = 1$, $x = 2$ تساوي 15 جد قيمة الثابت a



الحل

$$A = \int_{1}^{2} ax^2\, dx = \frac{a}{4} x^2 |_1^4 = 15$$

$$4a - \frac{a}{4} = 15$$

$$a = 4$$

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، وتقع أسفل هذا المحور

يُمكِن إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمحور x، والمستقيمين: $x = a$، و$x = b$ وتقع أسفل المحور x عن طريق التكامل الآتي:

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx\,;\, a < b$$

ملاحظة :

بما أنَّ المنطقة التي يراد إيجاد مساحتها تقع أسفل المحور x، فإنَّ قيمة التكامل الناتج ستكون عددًا سالبًا؛ لذا يُختار معكوس ناتج التكامل؛ لأنَّ المساحة لا يُمكِن أنْ تكون سالبة.

ملاحظة :

تحديد نقاط التقاطع مع المحور x يساعد على تحديد إذا كانت المنطقة فوق المحور x أو أسفل هذا المحور.

مثال (1)

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 8x$، والمحور x والمستقيمين: $x = 5$، و$x = 2$.

الحل

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x في الفترة المعطاة (إنْ وُجِدت).

لإيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران $f(x)$ مع المحور x في الفترة $[2, 5]$، أُساوي أوَّلًا قاعدة الاقتران بالصفر، ثم أُحُلّ المعادلة الناتجة:

$f(x) = 0$ بمساواة قاعدة الاقتران بالصفر

$x^2 - 8x = 0$ بتعويض $f(x) = x^2 - 8x$

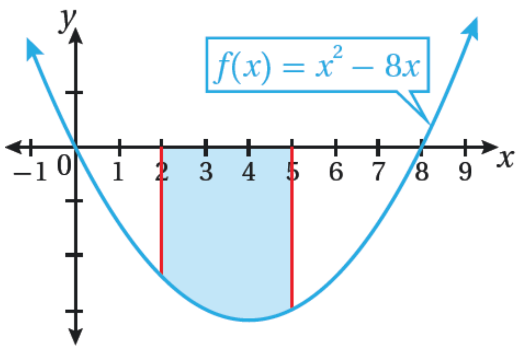
$x(x - 8) = 0$ بإخراج العامل المشترك الأكبر

خاصية الضرب الصفري

$x = 0 \quad \text{or} \quad x - 8 = 0$

$x = 8$ بحَلِّ المعادلة لـ x

إذن، الإحداثي x لنقطتي تقاطع الاقتران $f(x)$ مع المحور x ليس ضمن الفترة المعطاة كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ المســاحة المطلوبة تقع أســفل المحور x كما في الشــكل المجاور؛ لذا أجد هذه المساحة كالآتي:

قانون المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x، وتقع أسفل هذا المحور

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

بالتعويض $f(x) = x^2 - 8x,\ a = 2,\ b = 5$

$$= -\int_2^5 (x^2 - 8x)\,dx$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= -\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x^2\right)\Big|_2^5$$

بالتعويض

$$= -\left(\left(\frac{1}{3}(5)^3 - 4(5)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(2)^3 - 4(2)^2\right)\right)$$

بالتبسيط

$$= 45$$

مثال (2)

تحقق من فهمك

مثال (2) صفحة 34

أجد مســاحة المنطقــة المحصورة بيــن منحنــى الاقتــران: $f(x) = x^2 - 4$، والمحور x والمستقيمين: $x = -1$، و $x = 1$.

الحل

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$$
$$\Rightarrow (x-2)(x+2) = 0$$
$$\Rightarrow x = 2, \quad x = -2$$

وبما أن كلا العددين 2,2- لا ينتمي إلى الفترة [-1,1] إذن نهملهما.نختار عدداً ضمن الفترة [-1,1]، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = 0 - 4 = -4 < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحورx

$$A = -\int_{-1}^{1} (x^2 - 4)\,dx$$

$$= -\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= -\left(\left(\frac{1}{3}(1)^3 - 4(1)\right) - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 - 4(-1)\right)\right)$$

$$= \frac{22}{3}$$

مثال (3)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 4x$ والمحور x

والمستقيمين $x = 1$, $x = 3$

الحل

نجد نقط التقاطع

$$x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x-4) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = 4$$

لا تقع ضمن الفترة

الاقتران تحت المحور x

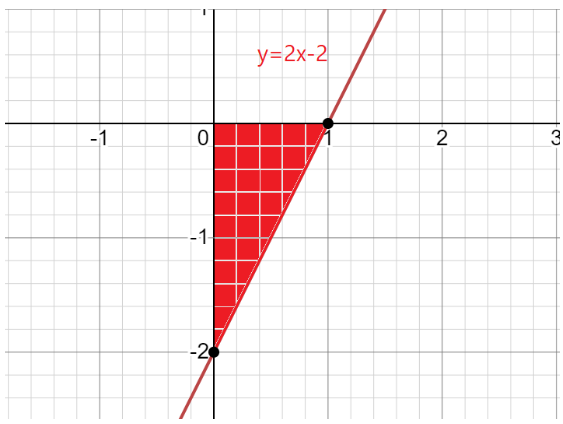
$$A = -\int_1^3 (x^2 - 4^x)\, dx = \int_1^3 4x{\_}x^2\, dx$$

$$= 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{22}{3}$$

مثال (4)

جد مساحة المنطقة المظللة لكل مما ياتي

a)

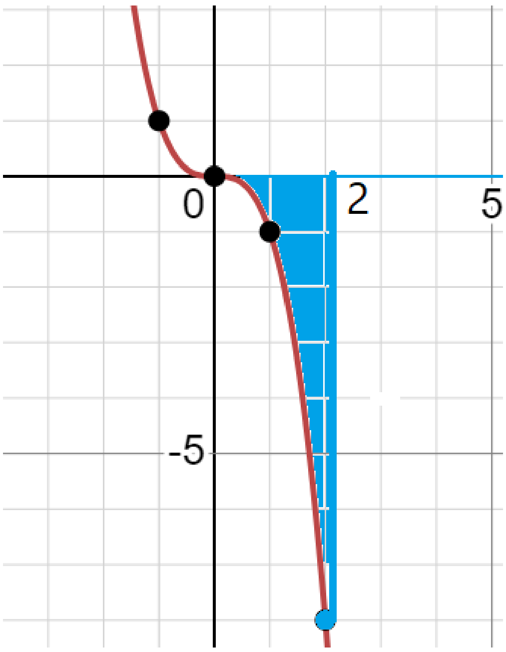


الحل

$$A = \int_0^1 -(2x-2)dx = -(x^2-2x)\Big|_0^1$$

$$= 1$$

b)



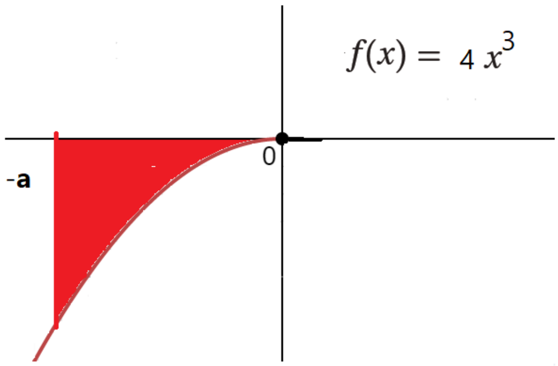
الحل

$$A = -\int_0^1 (-x^3)\, dx = \int_0^1 x^3\, dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{4}$$

مثال (5)

بالاعتماد على الشكل التالي اذا كانت المساحة المظللة = 1 وحدة مساحة فاوجد قيمة الثابت a



الحل

$$A = -\int_{-a}^{0} 4x^3\,dx = -(x^4)\Big|_{-a}^{0} = 1$$

$$\rightarrow -(0-(a)^4) = 1$$

$$a^4 = 1$$

باخذ الجذر الرابع

$$a = 1$$

مثال (5)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 6-3x$ والمحور x والمستقيمين $x=5$, $x=3$

الحل

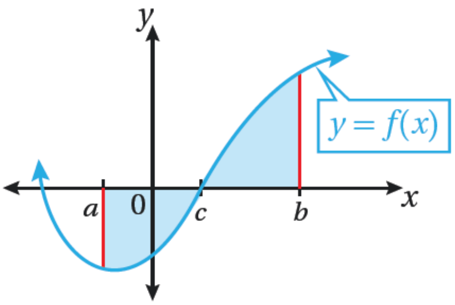
$$A = -\int_{3}^{5} (6-3x)\,dx$$

$$= -\left(6x - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_{3}^{5} = 12$$

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، ويقع أحد جزأيها فوق المحور x، ويقع الجزء الآخر أسفل هذا المحور

قد يقع جزء من المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x أسفل هذا المحور ويقع الجزء الآخر المُتبقّي منها فوقه كما في الشكل المجاور. وفي هذه الحالة، يُمكِن إيجاد المساحة بين منحنى هذا الاقتران والمحور x بتحديد المقطع x للاقتران، ثم إيجاد المساحة باستعمال القاعدة الآتية:

$$A = -\int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$



مثال (1)

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 3x^2 - 12$، والمحور x، والمستقيمين: $x=1$، و $x=3$.

الحل

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x في الفترة المعطاة (إنْ وُجِدت).

لإيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران $f(x)$ مع المحور x في الفترة $[1, 3]$، أُساوي أوَّلًا قاعدة الاقتران بالصفر، ثم أَحُلُّ المعادلة الناتجة:

بمساواة قاعدة الاقتران بالصفر

$$f(x) = 0$$

بتعويض $f(x) = 3x^2 - 12$

$$3x^2 - 12 = 0$$

بقسمة طرفي المعادلة على 3

$$x^2 - 4 = 0$$

بتحليل الفرق بين مربعين

$$(x+2)(x-2) = 0$$

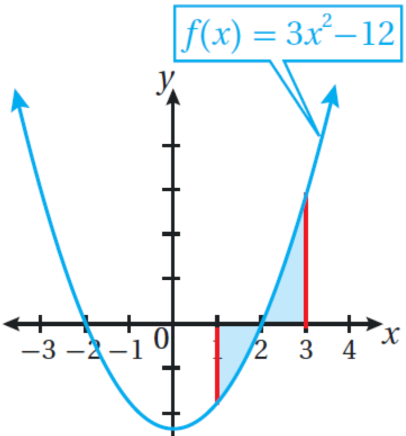
خاصية الضرب الصفري

$$x+2=0 \quad \text{or} \quad x-2=0$$

بحَلِّ كل معادلة لـ x

$$x = -2 \qquad x = 2$$

إذن، $x = 2$ يقع ضمن الفترة $[1, 3]$ كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ جزءًا من المساحة المطلوبة يقع فوق المحور x

وأنَّ الجزء الآخر المُتبقِّي منها يقع أسفل هذا المحور لذا أجد المساحة الكلية المطلوبة كالآتي:

بتجزئة المساحة إلى مجموع مساحتين فوق المحور x وأسفله

$$A = -\int_1^2 (3x^2 - 12)\, dx + \int_2^3 (3x^2 - 12)\, dx$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$= -(x^3 - 12x)\Big|_1^2 + (x^3 - 12x)\Big|_2^3$$

بالتبسيط

$$= (12x - x^3)\Big|_1^2 + (x^3 - 12x)\Big|_2^3$$

بالتعويض

$$= (12(2) - 2^3) - (12(1) - 1^3) + (3^3 - 12(3)) - (2^3 - 12(2))$$

بالتبسيط

$$= 12$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 36

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 2x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = -3$.

الحل

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0$$
$$\Rightarrow x(x+2) = 0$$
$$\Rightarrow x = 0, x = -2$$

وبما أن كلا العددين -2 ينتمي إلى الفترة [-3,-1] إذن تقسم الفترة إلى فترتين:

[-3,-2] و [-2,-1]

نختار عدداً ضمن الفترة [-3,-2]،مثلا $\frac{-5}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(-\frac{5}{2}) = (-\frac{5}{2})^2 + 2(-\frac{5}{2}) = \frac{5}{4} > 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة[-2,-1]

$$A = \int_{-3}^{-2}(x^2+2x)dx - \int_{-2}^{-1}(x^2+2x)dx$$
$$= (\frac{1}{3}x^3 + x^2)\Big|_{-3}^{-2} - (\frac{1}{3}x^3 + x^2)\Big|_{-2}^{-1}$$
$$= ((\frac{1}{3}(-2)^3 + (-2)^2) - (\frac{1}{3}(-3)^3 +$$
$$(-3)^2)) - ((\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2)$$
$$-(\frac{1}{3}(-2)^3 + (-2)^2)) = 2$$

مثال (4)

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = 2x - 4$ والمحور x والمستقيمين $x = -2, x = 4$

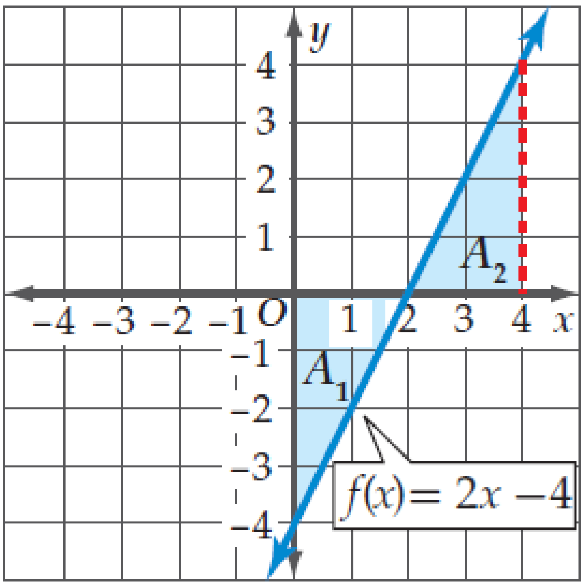
الحل

الخطوة 1 :

أوجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى $f(x)$ مع المحور x $f(x) = 0$

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

وبما أن $2 \in [-2, 4]$ فإنه ينشأ عنها فترتان جزئيتان $[2, 4]$ $[-2, 2]$ كما في التمثيل البياني المجاور.



الخطوة 2 : أوجد المساحة

$A = A_1 + A_2$

$$A = \left|\int_{-2}^{2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{2}^{4} f(x)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_{-2}^{2} (2x-4)\,dx\right| + \left|\int_{2}^{4} (2x-4)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[x^2 - 4x\right]_{-2}^{2}\right| + \left|\left[x^2 - 4x\right]_{2}^{4}\right|$$

$$= |(4-8) - (4-(-8))|$$

$$+ |(16-16) - (4-8)|$$

$$= 16 + 4$$

$$= 20$$

إذن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = 2x - 4$ والمحور x والمستقيمين $x = -2, x = 4$ تساوي 20 units^2

مثال (5)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 8 - 2x$ والمحور x

والمستقيمين $x = 1$, $x = 6$

الحل

$8 \to x = 0 \to 2x = 8 \to x = 4$

العدد 4 ينتمي للفترة $[1, 6]$

++++++++ ---------
1 4 6

نختار عدد في الفترة $[1, 4]$ ونعوضة في $f(x)$ الناتج سالب

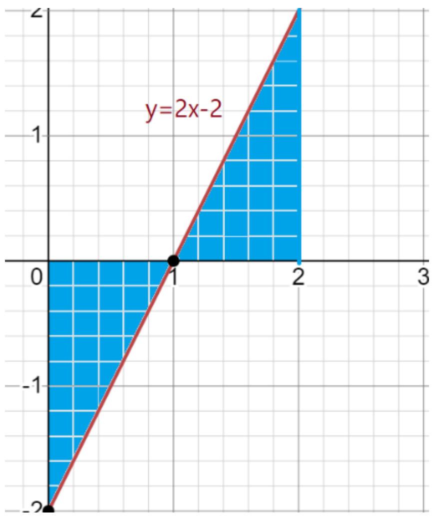
نختار عدد في الفترة $[4, 6]$ الناتج موجب

$$A = \int_{1}^{4} (8-2x)\,dx + \int_{4}^{6} -(8-2x)\,dx$$

$$A = (8x - x^2)\big|_1^4 - (8x - x^2)\big|_4^6$$
$$= (16-7) - (12-16)$$
$$= 9 + 4 = 13$$

مثال (6)

اوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل التالي



الحل

$$A=-\int_{0}^{1}(2x-2)\,dx$$

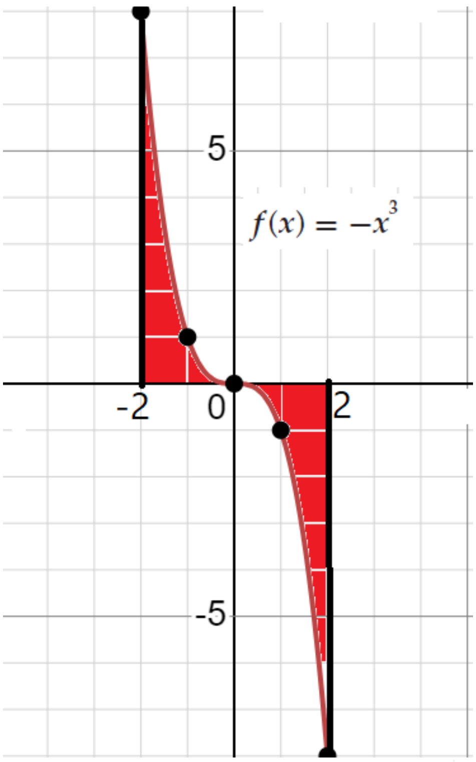
$$+\int_{1}^{2}(2x-2)\,dx$$

$$=-(x^2-2x)\Big|_0^1+(x^2-2x)\Big|_1^2$$

$$-(1-2)+(4-4)-(1-2)=2$$

مثال (7)

اوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل التالي



الحل

$$A=\int_{-2}^{0}-x^3\,dx-\int_{0}^{2}(-x^3)\,dx$$

$$=-\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0}+\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2}$$

$$=-(0-4)+4=8$$

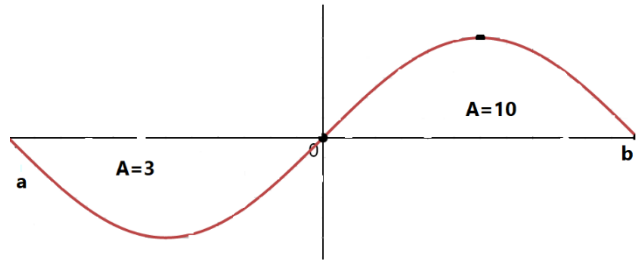
ملاحظة :

1) المساحة دائما موجبة سواء فوق المحور x او تحت المحور x

2) التكامل فوق المحور x موجب
التكامل تحت المحور x سالب

مثال (8)

يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$ في الفترة [a,b]



اوجد مايلي

1) $\int_a^b f(x)\,dx$

الحل

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx$$

فوق المحور x موجب   تحت المحور x سالب

$$-3+10=7$$

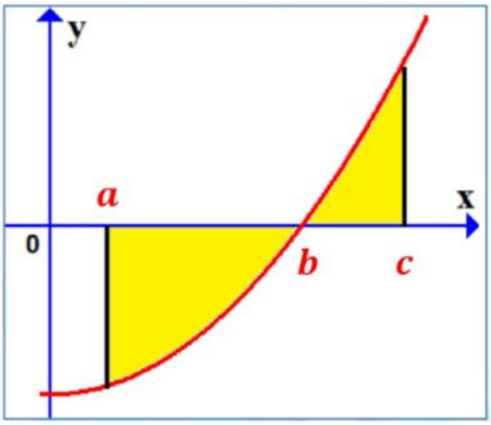
2) مساحة المنطقة المظللة

$$A = 3+10 = 13$$

مثال (9)

معتمداً على الشكل أدناه و الذي يمثل $f(x)$ على الفترة $[a, c]$ إذا علمت أن مساحة المنطقة المظللة تساوي 16 وحدة مربعة و كان $\int_b^c f(x)\,dx = 6$

ما قيمة $\int_a^b f(x)\,dx$ ؟



a	-10	b	-6	c	6	d	10

الحل

$$-\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = 16$$

$$\rightarrow -\int_a^b f(x)\,dx + 6$$

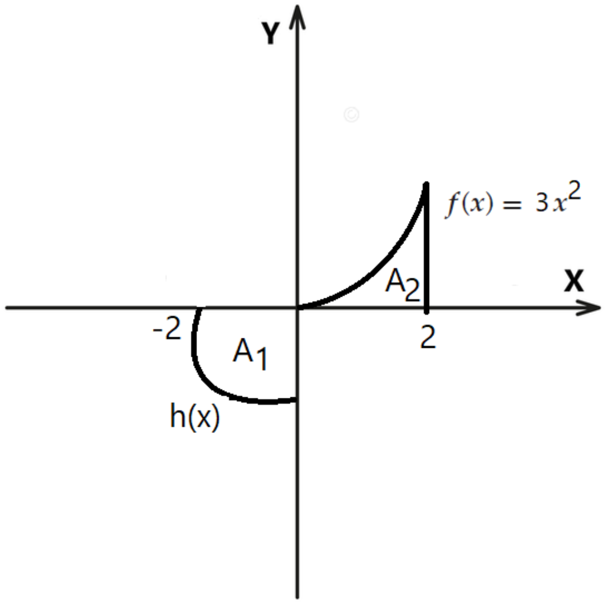
$$= 16$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -10$$

الإجابة a

مثال (10)

اذا كان $\int_{-2}^{0} h(x)\,dx = -7$ احسب مساحة المنطقة المظللة قي الشكل التالي



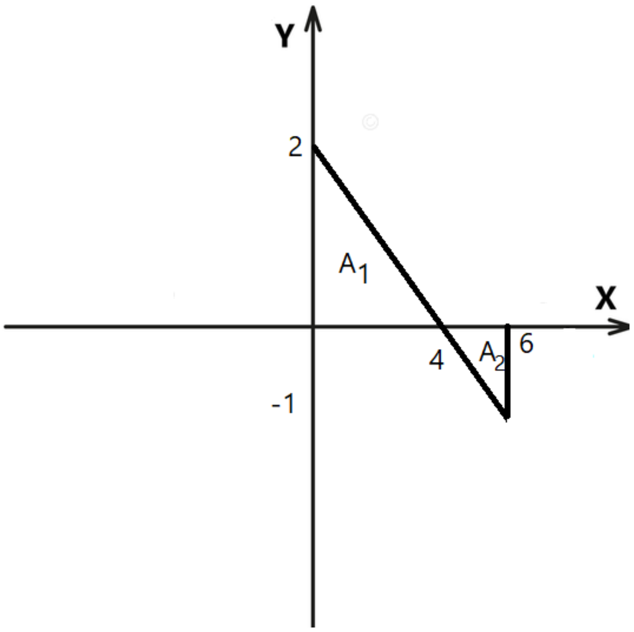
$$A_1 = 7$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} 3x^2\,dx = x^3\Big|_0^2 = 8$$

$$A_1 + A_2 = 7 + 8 = 15$$

اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $f(x)$ المعرف على الفترة $[0, 6]$

جد $\int_0^6 f(x)\,dx$



الحل

الاقتران ليس معطى قاعدته لذلك نستخدم مساحة المثلث = $\frac{1}{2}\times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$$\int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^4 f(x)\,dx + \int_4^6 f(x)\,dx$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\times 4 \times 2 = 4$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\times 2 \times 2 = 2$$

$$\int_0^6 f(x)\,dx = 4 - 1 = 3$$

مثال (11)

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x، ولا تكون محدودة بمستقيمين

إذا كانت هـذه المنطقة محصورة فقط بين منحنى الاقتران والمحور x، فإنَّه يَلـزم عندئذٍ إيجاد الإحداثي x لنقـاط تقاطع الاقتران مع المحور x؛ لأنَّها تُمثِّل حدود التكامل.

مثال (1)

1 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 3x$، والمحور x.

الحل

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x.

أُساوي أوَّلًا قاعدة الاقتران بالصفر، ثم أَحُلُّ المعادلة الناتجة:

بمساواة الاقتران بالصفر

$$f(x) = 0$$

بتعويض $f(x) = x^2 - 3x$

$$x^2 - 3x = 0$$

بإخراج العامل المشترك الأكبر

$$x(x-3) = 0$$

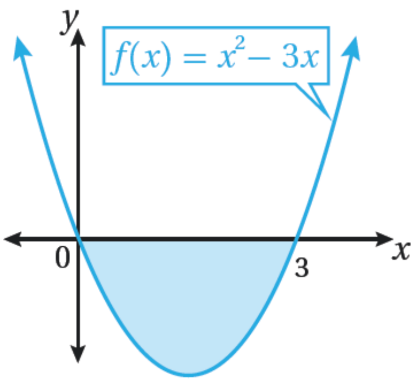
خاصية الضرب الصفري

$$x = 0 \quad \text{or} \quad x - 3 = 0$$

بحَلِّ المعادلة لـ x

$$x = 3$$

إذن، الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران $f(x)$ مـع المحـور x هـو: $x = 0, x = 3$، كما في الشـكل المجاور، وهذان الإحداثيان يُمثِّلان حدَّي التكامل.



الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ المساحة المطلوبة تقع أسـفل المحور x كما في الشكل السابق؛ لذا أجد مساحتها كالآتي:

قانون المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x، وتقع أسفل هذا المحور

$$A = -\int_a^b f(x)\, dx$$

بالتعويض $f(x) = x^2 - 3x, a = 0, b = 3$

$$= -\int_0^3 (x^2 - 3x)\, dx$$

تكامل اقتران القوّة

$$= -\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^3$$

بالتعويض

$$= -\left(\left(\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{3}{2}(3)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3 - \frac{3}{2}(0)^2\right)\right)$$

بالتبسيط

$$= 4\frac{1}{2}$$

إذن، المساحة هي: $4\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.

---

2 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - x$، والمحور x.

الحل

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x أُساوي أوَّلًا قاعدة الاقتران بالصفر، ثم أحُلُّ المعادلة الناتجة:

بمساواة الاقتران بالصفر

$$f(x) = 0$$

بتعويض $f(x) = x^2 - x$

$$x^3 - x = 0$$

بإخراج العامل المشترك الأكبر

$$x(x^2 - 1) = 0$$

بتحليل الفرق بين مربعين

$$x(x+1)(x-1) = 0$$

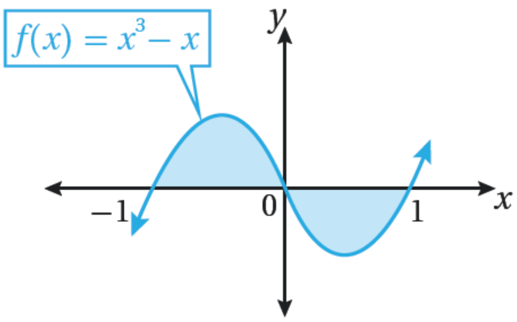
خاصية الضرب الصفري

$$x = 0 \quad \text{or} \quad x+1 = 0 \quad \text{or} \quad x-1 = 0$$

بحَلِّ كل معادلة لـ x

$$x = -1 \quad \text{or} \quad x = 1$$

إذن، الإحداثي x لنقاط تقاطــع منحنى الاقتران $f(x)$ مــع المحــور x هــو: $x = -1, x = 0,$ $x = 1$، كمــا فــي الشــكل المجــاور، وهــذه الإحداثيات تُمثِّل حدود التكامل.



الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

أُلاحِظ أنَّ جزءًا من المساحة المطلوبة يقع فوق المحور x، وأنَّ الجزء الآخر المُتبقِّي منها يقع أسفل هذا المحور؛ لذا أجد المساحة الكلية المطلوبة كالآتي:

بتجزئة المساحة إلى مجموع مساحتين فوق المحور x وأسفله

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx + \left(-\int_{0}^{1} (x^3 - x)\, dx\right)$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{0} - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{1}$$

بالتعويض

$$= \left((0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - (0)\right)$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}$$

مثال (2)

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 29

a) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 5x + 4$، والمحور x.

الحل

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$$
$$\Rightarrow (x+4)(x+1) = 0$$
$$\Rightarrow x = -4, x = -1$$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل

نختار عدداً ضمن الفترة [-4,-1]، وليكن -2 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(-2) = (-2)^2 + 5(-2) + 4 = -2 < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة[-4,-1]

$$A = -\int_{-4}^{-1} (x^2 + 5x + 4)dx$$
$$= -(\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x)\Big|_{-4}^{-1}$$
$$= -((\frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{5}{2}(-1)^2 + 4(-1)) - (\frac{1}{3}(-4)^3 + \frac{5}{2}(-4)^2 + 4(-4)))$$
$$= \frac{9}{2}$$

b) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 9x$، والمحور x.

الحل

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 9x = 0$$
$$\Rightarrow x(x^2 - 9) = 0$$
$$\Rightarrow x(x+3)(x-3) = 0$$
$$\Rightarrow x = 0, x = -3, x = 3$$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عدداً ضمن الفترة [-3,0]، وليكن -1 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(-1) = (-1)^3 - 9(-1) = 8 > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران فوق المحور x في الفترة [-3,0]

نختار عدداً ضمن الفترة [0,3]، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران

$$f(1) = (1)^3 - 9(1) = -8 < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران تحت المحور x في الفترة[0,3]

$$A = \int_{-3}^{0} (x^3 - 9x)dx - \int_{0}^{3} (x^3 - 9x)dx$$
$$= (\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2)\Big|_{-3}^{0} - (\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2)\Big|_{0}^{3}$$
$$= ((0) - (\frac{1}{4}(-3)^4 - \frac{9}{2}(-3)^2))$$
$$-((\frac{1}{4}(3)^4 - \frac{9}{2}(3)^2) - (0)) \quad = \frac{81}{2}$$

مثال (3)

اجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران

$f(x) = 2x - 3x^2$ والمحور x

الحل

$$2x - 3x^2 = x(2 - 3x)$$

$$x = 0 \quad or \quad x = \frac{2}{3}$$

--------++++++++---------

$0 \qquad \frac{2}{3}$

$$A = \int_0^{\frac{2}{3}} (2x - 3x^2)\,dx = x^2 - x^3 \Big|_0^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}$$

مثال (3)

اجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران

$f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ والمحور x

الحل

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2)$$
$$= x(x + 2)(x - 1)$$

$$x = 0 \quad or \quad x = 1 \quad or \quad x = -2$$

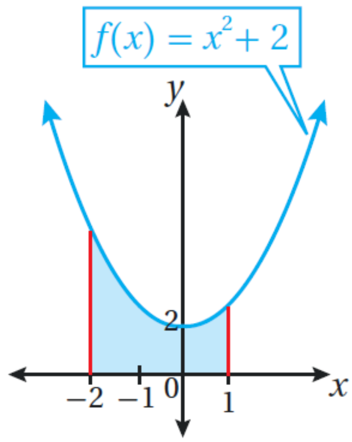
$$A = \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)\,dx$$

$$- \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x)\,dx = \frac{37}{12}$$

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

1



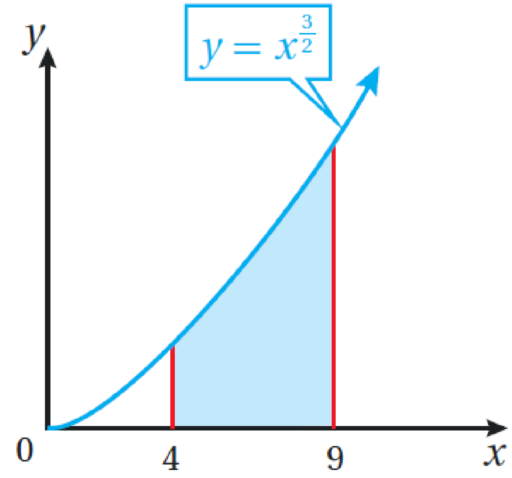
الحل

$$A = \int_{-2}^{1}(x^2+2)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3+2x\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{3}(1)^3+2(1)\right) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3+2(-2)\right)$$

$$= 9$$

2



الحل

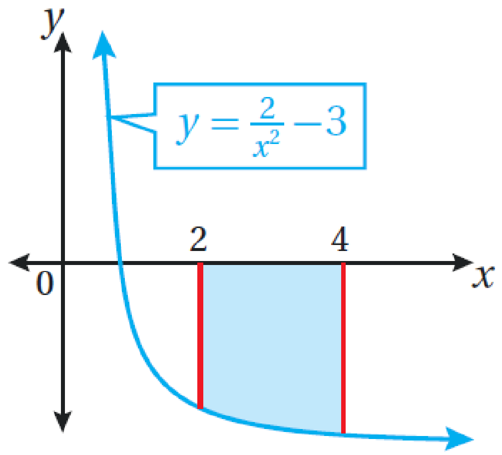
$$A = \int_4^9 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_4^9$$

$$= \left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{x^5}\right)\Big|_4^9$$

$$= \left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{9^5}\right) - \left(\frac{2}{5}\sqrt[2]{4^5}\right)$$

$$= \frac{422}{5}$$

3



الحل

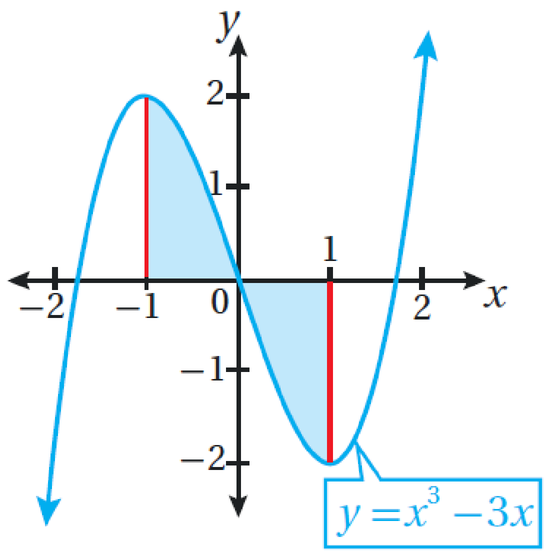
$$A = -\int_2^4\left(\frac{2}{x^2}-3\right)dx = -\int_2^4(2x^{-2}-3)\,dx$$

$$= \int_2^4(-2x^{-2}+3)\,dx \quad = (2x^{-1}+3x)\Big|_2^4$$

$$= \left(\frac{2}{x}+3x\right)\Big|_2^4 \quad = \left(\frac{2}{4}+3(4)\right) - \left(\frac{2}{2}+3(2)\right)$$

$$= \frac{11}{2}$$

4



الحل

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - 3x)\,dx - \int_{0}^{1} (x^3 - 3x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - 3x)\,dx + \int_{0}^{1} (-x^3 + 3x)\,dx$$

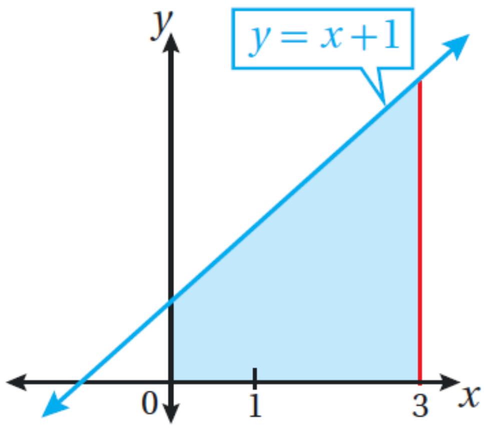
$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$= (0) - \left(\frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{3}{2}(-1)^2\right) +$$

$$\left(-\frac{1}{4}(1)^4 + \frac{3}{2}(1)^2\right) - (0)$$

$$= \frac{5}{2}$$

5

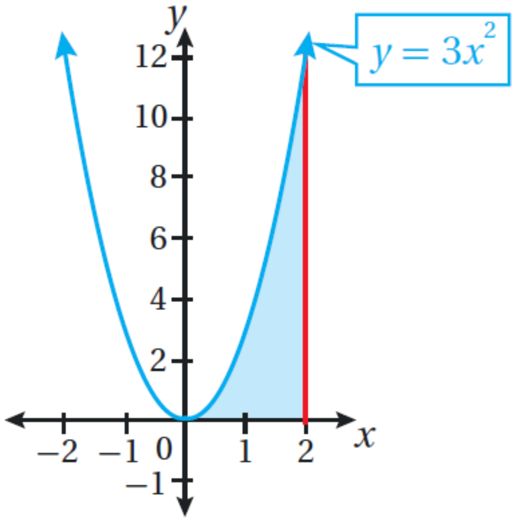


$$A = \int_{0}^{3} (x+1)\,dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_{0}^{3}$$

$$= \left(\frac{1}{2}(3)^2 + 3\right) - \left(\frac{1}{2}(0)^2 + 0\right)$$

$$= \frac{15}{2}$$

6



$$A = \int_{0}^{2} 3x^2\,dx = x^3\Big|_{0}^{3}$$

$$= (3^3) - (0^3)$$

$$= 27$$

7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = 2$.

الحل

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x + 2 = 0$$

نحسب المميز:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(2) = -20$$

بما أن المميز سالب، إذن لا يوجد حلول لهذه المعادلة، وتكون حدود التكامل هي 0 و 2 نختار عدداً ضمن الفترة [0,2]، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران

$$f(1) = 3(1)^2 - 2(1) = 1 > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة [2,0]

$$A = \int_0^2 (3x^2 - 2x + 2)\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right)\Big|_0^2$$

$$= \left(\frac{1}{3}(2)^3 - (2)^2 + 2(2)\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3 - (0)^2 + 2(0)\right)$$

$$= \frac{8}{3}$$

8 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 9 - x^2$، والمحور x.

الحل

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 9 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow (3 + x)(3 - x) = 0$$

$$\Rightarrow x = -3, x = 3$$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عدداً ضمن الفترة [-3,3]، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = 9 - (0)^2 = 9 > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة [3,3-]

$$A = \int_{-3}^{3} (9 - x^2)\,dx = \left(9x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-3}^{3}$$

$$= \left(9(3) - \frac{1}{3}(3)^3\right) - \left(9(-3) - \frac{1}{3}(-3)^3\right)$$

$$= 36$$

9 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 + 4x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = -1$، و $x = 2$.

الحل

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 4x = 0$$
$$\Rightarrow x(x^2 + 4) = 0$$
$$\Rightarrow x = 0$$

مميز العبارة التربيعية $x^2 + x$ سالب، لذا لا أصفار لها.

نختار عدداً ضمن الفترة [-1,0]، وليكن $-\frac{1}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^3 + 4(-\frac{1}{2}) = -\frac{17}{2} < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع في الفترة $[-1,0]$ تحت المحور x

ونعوضه في نختار عدداً ضمن الفترة [0,2]، وليكن 1 قاعدة الاقتران:

$$f(1) = (1)^3 + 4(1) = 5 > 0$$

$$A$$
$$= -\int_{-1}^{0}(x^3 + 4x)dx + \int_{0}^{2}(x^3 + 4x)dx$$
$$= \int_{-1}^{0}(-x^3 - 4x)dx + \int_{0}^{2}(x^3 + 4x)dx$$
$$= (-\frac{1}{4}x^4 - 2x^2)\Big|_{-1}^{0} + (\frac{1}{4}x^4 + 2x^2)\Big|_{0}^{2}$$
$$= ((0) - (-\frac{1}{4}(-1)^4 - 2(-1)^2))$$
$$+ ((-\frac{1}{4}(2)^4 + 2(2)^2) - (0)) \quad = \frac{25}{4}$$

---

10 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = -7 + 2x - x^2$، والمحور x، والمستقيمين $x = 1$، و $x = 4$.

الحل

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \ -7 + 2x - x^2 = 0$$

نحسب المميز:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(-7) = -24$$

بما أن المميز سالب، إذن لا يوجد حلول لهذه المعادلة، وتكون حدود التكامل هي 1 و 4 نختار عدداً ضمن الفترة [1,4]، وليكن 2 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(1) = -7 + 2(1) - (1)^2 = -6 < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة [1,4]

$$A = -\int_{1}^{4}(-7 + 2x - x^2)dx$$
$$= \int_{1}^{4}(7 - 2x + x^2)dx$$

$$= (7x - x^2 + \frac{1}{3}x^3)\Big|_1^4$$

$$= (7(4) - (4)^2 + \frac{1}{3}(4)^3)$$

$$- (7(1) - (1)^2 + \frac{1}{3}(1)^3)$$

$$= 27$$

---

11 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 5 - x$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 3$، و $x = 5$.

الحل

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 5 - x = 0$$

$$\Rightarrow x = 5$$

نختار عدداً ضمن الفترة [3,5]، وليكن 4 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(4) = 5 - (4) = 1 > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة [3,5]

$$A = \int_3^5 (5 - x)dx = (5x - \frac{1}{2}x^2)\Big|_3^5$$

$$= ((5(5) - \frac{1}{2}(5)^2) - (5(3) - \frac{1}{2}(3)^2))$$

$$= 2$$

12 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = (x+1)(x-4)$ والمحور x.

الحل

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x+1)(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1, x = 4$$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل

نختار عدداً ضمن الفترة [-1,4]، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = (0+1)(0-4) = -4 < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة [-1,4]

$$A = -\int_{-1}^4 (x+1)(x-4)dx$$

$$= -\int_{-1}^4 (x^2 + x - 4x - 4)dx$$

$$= -\int_{-1}^4 (x^2 - 3x - 4)dx$$

$$= \int_{-1}^4 (-x^2 + 3x + 4)dx$$

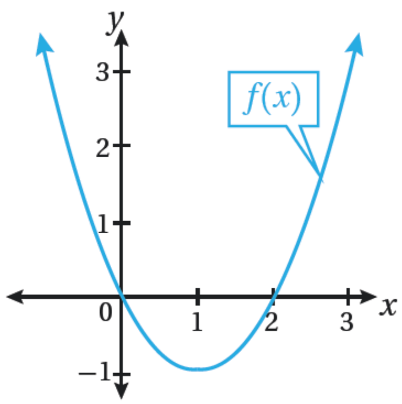
$$= (-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x)\Big|_{-1}^4$$

$$=(-\frac{1}{3}(4)^3+\frac{3}{2}(4)^2+4(4))-$$

$$(-\frac{1}{3}(-1)^3+\frac{3}{2}(-1)^2+4(-1))$$

$$=\frac{125}{6}$$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x)=x^2-2x$:



13 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x.

الحل

حسب الشكل، فإن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة[0,2]

$$A=-\int_0^2(x^2-2x)dx=\int_0^2(-x^2+2x)dx$$

$$=(-\frac{1}{3}x^3+x^2)\Big|_0^2$$

$$=(-\frac{1}{3}(2)^3+(2)^2)-(-\frac{1}{3}(0)^3+(0)^2)$$

$$=\frac{4}{3}$$

14 أجد مساحـــة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x، والمستقيم $x=3$.

الحل

$$A=\int_2^3(x^2-2x)dx$$

$$=(\frac{1}{3}x^3-x^2)\Big|_2^3$$

$$=((9-9)-(\frac{8}{3}-4))$$

$$=\frac{4}{3}$$

15 أجد مســاحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران، والمحور x، والمستقيم $x=-1$.

الحل

$$A=\int_{-1}^0(x^2-2x)dx$$

$$=(\frac{1}{3}x^3-x^2)\Big|_{-1}^0$$

$$=(0)-(-\frac{1}{3}-1)$$

$$=\frac{4}{3}$$

16 يُبيِّن التمثيل البياني المجاور شكل السطح العلوي لجناح طائرة، مُمثَّلًا بالمعادلة: $y = 8 + 8\sqrt{x} - 6x$، حيث: $0 \leq x \leq 4$. أجد مساحة السطح العلوي لجناح الطائرة.

الحل

$$A = \int_0^4 (8 + 8\sqrt{x} - 6x)\,dx$$

$$= \int_0^4 (8 + 8x^{\frac{1}{2}} - 6x)\,dx$$

$$= (8x + \frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x^2)\Big|_0^4$$

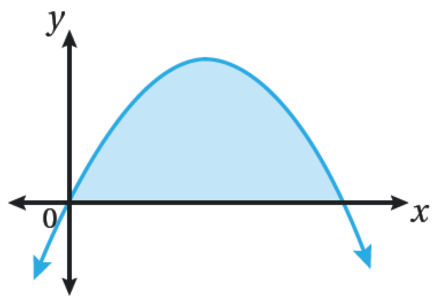
$$= (8x + \frac{16}{3}\sqrt{x^3} - 3x^2)\Big|_0^4$$

$$= (8(4) + \frac{16}{3}\sqrt{4^3} - 3(4)^2) - (0)$$

$$= \frac{80}{3}$$

مهارات التفكير العليا

17 تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران $y = kx(4-x)$. إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x هي 32 وحدة مربعة فأجد قيمة الثابت k.



الحل

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$y = 0 \Rightarrow kx(4-x) = 0$$
$$\Rightarrow x = 0 \text{ or } x = 4$$

حسب الشكل، فإن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة[0,4]

$$A = \int_0^4 (kx(4-x))\,dx$$

$$= \int_0^4 (4kx - kx^2)\,dx$$

$$= (2kx^2 - \frac{k}{3}x^3)\Big|_0^4$$

$$= \left(2k(4)^2 - \frac{k}{3}(4)^3\right)$$

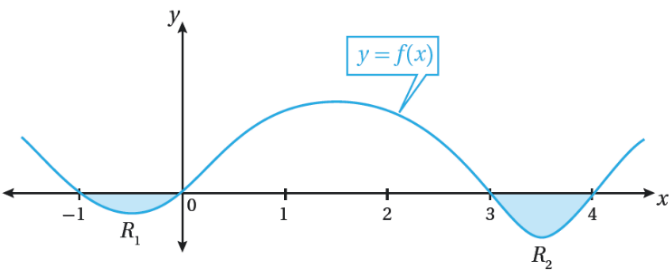
$$- \left(2k(0)^2 - \frac{k}{3}(0)^3\right)$$

$$= \frac{32}{3}k$$

$$\frac{32}{3}k = 32 \Rightarrow k = 3$$

---

18 تبرير: يُبيِّن الشــكل التالي منحنى الاقتران $f(x)$. إذا كانت مســاحة المنطقة R_1 هي وحدتين مربعتين، ومســاحة المنطقة R_2 هي 3 وحدات مربعة، وكان: $\int_0^4 f(x)\, dx = 10$، فأجد $\int_{-1}^3 f(x)\, dx$ مُبرِّرًا إجابتي.



الحل

$$R_1 = 2 \quad \Rightarrow -\int_{-1}^{0} f(x)dx = 2$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} f(x)dx = -2$$

$$R_2 = 3 \quad \Rightarrow -\int_{3}^{4} f(x)dx = 3$$

$$\Rightarrow \int_{3}^{4} f(x)dx = -3$$

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx$$

$$\Rightarrow 10 = \int_0^3 f(x)dx + (-3)$$

$$\Rightarrow \int_0^3 f(x)dx = 13$$

$$\int_{-1}^3 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx$$

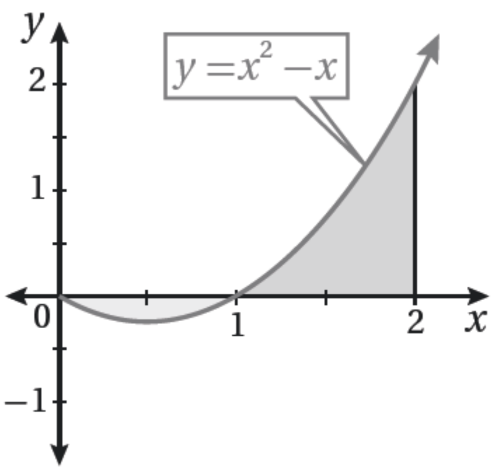
$$= -2 + 13$$

$$= 11$$

تمارين ومسائل كتاب التمارين صفحة12

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

1



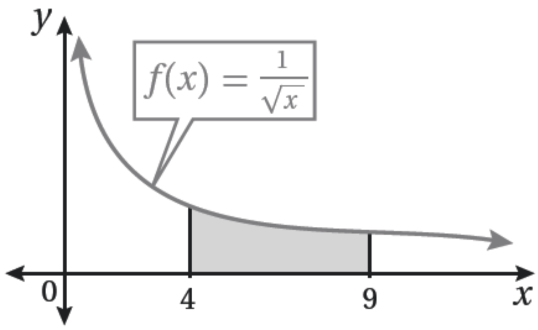
الحل

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx + \int_1^2 (x^2 - x)\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = 1$$

2



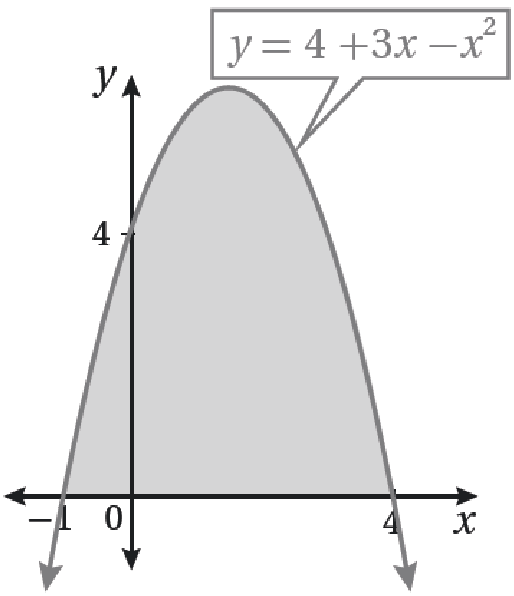
الحل

$$A = \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \int_4^9 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_4^9 = 6 - 4 = 2$$

3



الحل

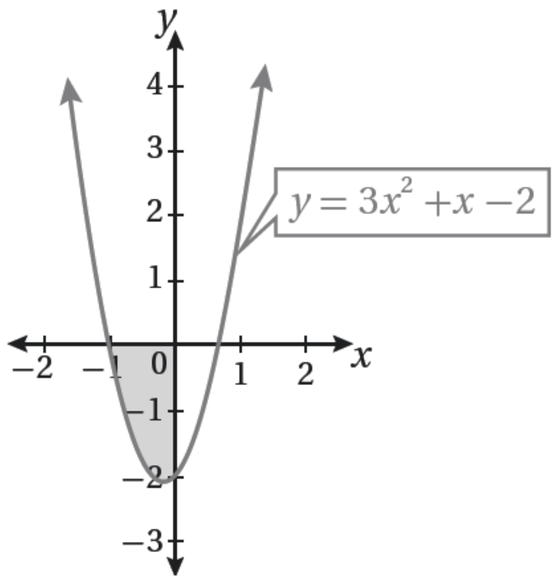
$$A = \int_{-1}^{4} (4 + 3x - x^2)\, dx$$

$$= (4x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{4}$$

$$= (16 + 24 - \frac{64}{3}) - (-4 + \frac{3}{2} + \frac{1}{3})$$

$$= \frac{125}{6}$$

4



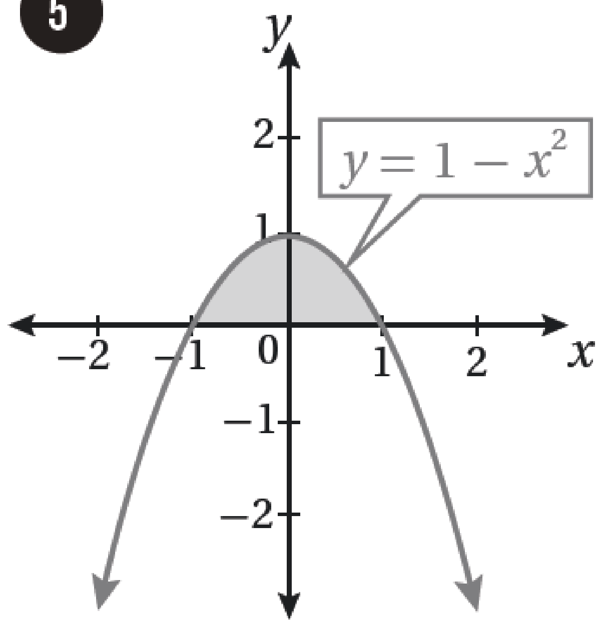
الحل

$$A = -\int_{-1}^{0} (3x^2 + x - 2)\, dx$$

$$= -(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x)\Big|_{-1}^{0}$$

$$= -((0) - (-1 + \frac{1}{2} + 2)) = \frac{3}{2}$$

5



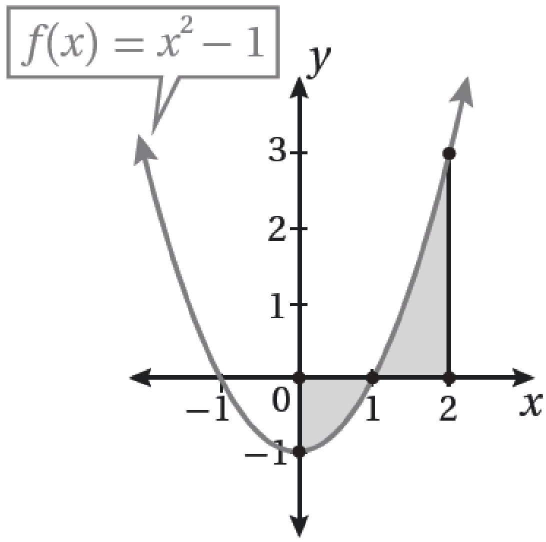
الحل

$$A = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx$$

$$= (x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= (1 - \frac{1}{3}) - (-1 + \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$$

6



الحل

$$A = \int_0^1 (1 - x^2)dx + \int_1^2 (x^2 - 1)dx$$

$$= (1 - x^2)|_0^1 + (x^2 - 1)|_1^2 = 2$$

---

7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 3$، والمحور x.

الحل

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$A = \int_{-1}^1 (3 - 3x^2)dx$$

$$= (3x - x^3)|_{-1}^1$$

$$= (3 - 1) - (-3 + 1) = 4$$

8 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 - 6x$ والمحور x.

الحل

$$x^3 - 5x^2 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 5x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow x(x-6)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 6, x = -1$$

$$A = \int_{-1}^0 (x^3 - 5x^2 - 6x)dx +$$

$$\int_0^6 (-x^3 + 5x^2 + 6x)dx$$

$$= (\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - 3x^2)|_{-1}^0 +$$

$$(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 3x^2)|_0^6$$

$$= (0) - (\frac{1}{4} + \frac{5}{3} - 3) +$$

$$(-324 + 360 + 108) - (0)$$

$$= \frac{1741}{12}$$

9 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 (2 - x)$ والمحور x.

الحل

$$x^2(2-x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

$$A = \int_0^2 x^2(2-x)\,dx$$

$$= \int_0^2 (2x^2 - x^3)\,dx$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^2$$

$$= \left(\frac{16}{3} - 4\right) - (0) = \frac{4}{3}$$

الدرس 5

تكامل اقترانات خاصة

تكامل الاقتران الأُسّي الطبيعي، واقتران الجيب، واقتران جيب التمام

تكامل اقترانات أساسية

مفهوم أساسي

إذا كان e هو العدد النيبيري، فإنَّ:

2) $\int \sin x \; dx = -\cos x + C$

1) $\int e^x \; dx = e^x + C$

3) $\int \cos x \; dx = \sin x + C$

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int (e^x + 8)\, dx$

$$\int (e^x + 8)\, dx = e^x + 8x + C$$

2 $\int (5\cos x + \sqrt{x})\, dx$

$$\int (5\cos x + \sqrt{x})\, dx$$

$$= \int (5\cos x + x^{1/2})\, dx$$

$$= 5\sin x + \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

$$= 5\sin x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

3 $\int \left(4\sin x - \frac{1}{x^2}\right) dx$

$$\int \left(4\sin x - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \int (4\sin x - x^{-2})\; dx$$

$$= -4\cos x + x^{-1} + C$$

$$= -4\cos x + \frac{1}{x} + C$$

مثال (2)

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 43

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (5x^2 + 7e^x)\, dx$

$$\int (5x^2 + 7e^x) dx = \frac{5}{3}x^3 + 7e^x + C$$

b) $\int \left(9\cos x + \frac{4}{x^3}\right) dx$

$$\int \left(9\cos x + \frac{4}{x^3}\right) dx = \int (9\cos x + 4x^{-3}) dt$$

$$= 9\sin x - 2x^{-2} + C$$

$$= 9\sin x - \frac{2}{x^2} + C$$

c) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \sin x\right) dx$

$$\int (\sqrt[3]{x} - \sin x) dx = \int (x^{\frac{1}{3}} - \sin x) dx$$

$$= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \cos x + C$$

مثال (4)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int (e + 4x)\, dx =$

$$ex + 2x^2 + C$$

---

2) $\int \left(4\sin x - 3e^x + \frac{2}{x^5}\right) dx$

$$= \int \left(4\sin x - 3e^x + 2x^{-5}\right) dx$$

$$-4\cos x_{-3}e^x - \frac{2}{4}x^{-4} + C$$

---

3) $\int \left(2\cos x - \sqrt[3]{x} - e^x\right) dx$

$$= \int \left(2\cos x - x^{\frac{1}{3}} - e^x\right) dx$$

$$2\sin x - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - e^x + c$$

تكامل الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

تكامل الاقتران: $\frac{1}{x}$

مفهوم أساسي

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,\ x \neq 0$$

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \left(\frac{1}{x} + 6\sin x\right) dx$

$$\int \left(\frac{1}{x} + 6\sin x\right) dx$$

$$= \ln|x| - 6\cos x + C$$

2) $\int \left(2e^{x} + \frac{3}{x}\right) dx$

$$\int \left(2e^{x} + \frac{3}{x}\right) dx$$

$$= 2e^{x} + 3\ln|x| + C$$

3) $\int \frac{2x^5 - 4}{x}\,dx$

$$\int \frac{2x^5 - 4}{x}\,dx$$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$= \int \left(\frac{2x^5}{x} - \frac{4}{x}\right) dx$$

$$= \int \left(2x^4 - \frac{4}{x}\right) dx$$

$$= \frac{2}{5}x^5 - 4\ln|x| + C$$

مثال (2)

تحقق من فهمك مثال (2) صفحة 45

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \left(\frac{1}{x} + 8e^{x}\right) dx$

$$\int \left(\frac{1}{x} + 8e^{x}\right) dx = \ln|x| + 8e^{x} + C$$

b) $\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right) dx$

$$\int (\sin x - \frac{5}{x}) dx = -\cos x - 5\ln|x| + C$$

c) $\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2} dx$

$$\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2} dx$$

$$= \int (\frac{x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{2}{x^2}) dx$$

$$= \int (1 - \frac{7}{x} + 2x^{-2}) dx$$

$$= x - 7\ln|x| - x^{-1} + C$$

$$= x - 7\ln|x| - \frac{1}{x} + C$$

مثال (3)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{2x^3+5x^2+x}{x^2} dx =$

الحل

$$\int \frac{2x^3}{x^2} + \frac{5x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} dx$$

$$\int \left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= x^2 + 5x + \ln|x| + C$$

---

2) $\int \left(5e^x + 3\sin x + \frac{5}{x}\right) dx$

الحل

$$5e^x - 3\cos x + 5\ln|x| + c$$

مثال (4)

اذا كان

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$$

جد قاعدة الاقتران $f(x)$ علما بان $f(1) = 0$

الحل

$$f(x) = \int \left(e^x + \frac{1}{x}\right) dx$$
$$= e^x + \ln|x| + c$$

$$f(1) = e^1 + \ln(1) + c = 0 \rightarrow c = -e$$

$$f(x) = e^x + \ln|x| - e$$

تكامل اقترانات أساسية في صورة $f(ax+b)$

تكامل اقترانات في صورة: $f(ax+b)$

مفهوم أساسي

إذا كان a, b عددين حقيقيين، و $a \neq 0$، و e هو العدد النيبيري، فإنّ:

1) $$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

2) $$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$$

3) $$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

4) $$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

5) $$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C,\ x \neq -\frac{b}{a}$$

ملاحظة :

$$\int \frac{d}{ax+b}\,dx = \frac{d}{a}\ln|ax+b| + c$$

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int (2x+7)^5\,dx$

$$\int (2x+7)^5\,dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}(2x+7)^6 + C$$
$$= \frac{1}{12}(2x+7)^6 + C$$

---

2 $\int \frac{1}{\sqrt{4x-2}}\,dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x-2}}\,dx = \int (4x-2)^{-1/2}\,dx$$
$$= \frac{2}{4}(4x-2)^{1/2} + C$$
$$= \frac{1}{2}(4x-2)^{1/2} + C$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{4x-2} + C$$

3 $\int 2e^{4x+3}\, dx$

$$\int 2e^{4x+3}\, dx = 2 \times \frac{1}{4} e^{4x+3} + C$$
$$= \frac{1}{2} e^{4x+3} + C$$

4 $\int 2\sin(4x+3)\, dx$

$$\int 2\sin(4x+3)\, dx$$
$$= -2 \times \frac{1}{4} \cos(4x+3) + C$$
$$= -\frac{1}{2}\cos(4x+3) + C$$

5 $\int \left(5\cos(2x+3) + \sqrt[3]{x}\right) dx$

الحل

$$\int \left(5\cos(2x+3) + \sqrt[3]{x}\right) dx$$
$$= \int \left(5\cos(2x+3) + x^{1/3}\right) dx$$
$$= 5 \times \frac{1}{2}\sin(2x+3) + \frac{3}{4} x^{4/3} + C$$
$$= \frac{5}{5}\sin(2x+3) + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$$

6 $\int \frac{1}{8x-1}\, dx$

الحل

$$\int \frac{1}{8x-1}\, dx = \frac{1}{8} \ln|8x-1| + C$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 47

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (7x-5)^6\, dx$

$$\int (7x-5)^6 dx = \frac{1}{7} \times \frac{1}{7}(7x-5)^7 + C$$
$$= \frac{1}{49}(7x-5)^7 + C$$

b) $\int \sqrt{2x+1}\, dx$

$$\int \sqrt{2x+1}\, dx = \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

c) $\int 4\cos(3x-7)\ dx$

$$\int 4\cos(3x-7)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\times 4\sin(3x-7)+C$$

$$=\frac{4}{3}\sin(3x-7)+C$$

d) $\int (\sin 5x + e^{2x})\ dx$

$$\int(\sin 5x+e^{2x})\,dx$$

$$=\frac{1}{5}x-\cos 5x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

$$=-\frac{1}{5}\cos 5x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

e) $\int (6x^2 - 3e^{7x+1})\ dx$

$$\int(6x^2-3e^{7x+1})\,dx=2x^3-\frac{3}{7}e^{7x+1}+C$$

f) $\int \frac{5}{3x+2}\ dx$

$$\int\frac{5}{3x+2}\,dx=\frac{5}{3}\ln|3x+2|+C$$

مثال (3)

أوجد التكامل غير المحدود التالي

$$\int \sin(\sqrt{2}x)\,dx$$

a	$\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)+C$
b	$-\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)+C$
c	$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}x)+C$
d	$-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}x)+C$

d

مثال (4)

أوجد التكامل غير المحدود التالي

$$\int \frac{2}{e^x}\,dx$$

a	$\frac{2}{e^x}+C$
b	$\frac{-2}{e^x}+C$
c	$\frac{2}{e^{-x}}+C$
d	$\frac{-2}{e^{-x}}+C$

b

مثال (5)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int 2e^{4x+3}\,dx$

تكامل الاقتران الأُسّي الطبيعي المضروب في ثابت

$$\int 2e^{4x+3}\,dx = 2\times\frac{1}{4}e^{4x+3}+C$$

$$=\frac{1}{2}e^{4x+3}+C$$ بالتبسيط

2 $\int_0^2 (6e^{-3x}+x^3)\,dx$

تكامل الاقتران الأُسّي الطبيعي المضروب في ثابت، وتكامل اقتران القوّة

$$\int_0^2 (6e^{-3x}+x^3)dx$$

$$=\left(\frac{6}{-3}e^{-3x}+\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^2$$

بالتعويض

$$=\left(\frac{6}{-3}e^{-3(2)}+\frac{1}{4}(2)^4\right)$$

$$-\left(\frac{6}{-3}e^{-3(0)}+\frac{1}{4}(0)^4\right)$$

$$=-2e^{-6}+6$$ بالتبسيط

مثال (6)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1)

$$\int 4(2x+1)^{-1}\,dx=\int\frac{4}{2x+1}dx$$
$$=\frac{4}{2}\ln|2x+1|+c$$
$$=2\ln|2x+1|+c$$

2)

$$\int\frac{1}{e^{-2x}}dx=\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

3)

$$\int\left(\frac{e^x}{2}+\frac{4}{5x}+x^{-1}\right)dx$$
$$=\int\left(\frac{e^x}{2}+\frac{4}{5x}+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$\frac{1}{2}e^x+\frac{4}{5}\ln|x|+\ln|x|+c$$

4)

$$\int e^{2x-1}+\sin(2x-1)\,dx$$
$$=\frac{e^{2x-1}}{2}-\frac{\cos(2x-1J}{2}$$
$$+C$$

الشرط الأوَّلي

مثال (1)

من الحياة

بيئة: في دراسة أجرتها شركة نفطية، تبيَّن أنَّ مُعدَّل إنتاج إحدى الآبار النفطية يُنمذَج بالاقتران: $R'(t) = \frac{100}{t+1} + 5$، حيث $R(t)$ عدد البراميل المُنتَجة (بالآلاف) في السنة، و t عدد السنوات منذ بَدْء ضَخِّ النفط من البئر. أجد عدد براميل النفط المُنتَجة بعد 9 سنوات من بَدْء عملية الضَّخِّ من البئر، علمًا بأنَّ $R(0) = 0$

الحل

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران: $R'(t)$.

$$R(t) = \int \left(\frac{100}{t+1} + 5\right) dt$$

$$= 100 \ln|t+1| + 5t + C$$

الخطوة 2: أجد ثابت التكامل C.

$$R(t) = 100 \ln|t+1| + 5t + C$$

$$0 = 100 \ln|0+1| + 5(0) + C$$

$$C = 0$$

إذن، الاقتران الذي يُمثل عدد براميل النفط المُنتَجة (بالآلاف) في السنة هو: $R(t) = 100 \ln|t+1| + 5t$.

5)

$$\int \frac{6}{e^{1-2x}} dx = \int 6e^{-1+2x} dx$$

$$= \frac{6}{2} e^{-1+2x} + C$$

$$3e^{-1+2x} + c$$

مثال (7)

اذا كان $\int_1^k e^x \, dx = 0$ اوجد قيمة k تساوي

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2

الحل

K=1 لان $\int_1^1 e^x \, dx = 0$ الإجابة C

مثال (8)

جد قيمة

$$\int \frac{x^2 - xe^{-x} + 1}{x} dx$$

الحل

$$= \int \left(\frac{x^2}{x} - \frac{xe^{-x}}{x} + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$\int \left(x - e^{-x} + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + e^{-x} + \ln|x| + c$$

الخطوة 3: أجد $R(9)$.

$$R(t) = 100 \ln |t+1| + 5t$$

$$R(9) = 100 \ln |9+1| + 5(9)$$

$$\approx 275$$

إذن، عدد براميل النفط المُنتَجة بعد 9 سنوات من بَدْء عمليـة الضَّخِّ من البئر هو: 275 ألف برميل تقريبًا.

مثال (2)

مثال (2) تحقق من فهمك **صفحة 49**

سكّان: أشارت دراسة إلى أنَّ عدد السكّان في إحدى القرى يتغيَّر سنويًّا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = 105e^{0.03t}$، حيث t عدد السنوات منذ عام 2010م، و $P(t)$ عدد السكّان. أجد عدد سكّان القرية عام 2020م، علمًا بأنّ عدد سكّانها عام 2010م هو 3500 شخص.

الحل

أولاً نجد تكامل الاقتران

$$P(t) = \int 105e^{0.03t}dt = \frac{105}{0.03}e^{0.03t} + C$$

$$= 3500e^{0.03t} + C$$

ثانياً، نجد ثابت التكامل C:

بما أن عدد سكان المدينة عام 2010 هو 3500 شخص إذن

$$P(0) = 3500$$

$$P(t) = 3500e^{0.03t} + C$$

$$P(0) = 3500e^{0} + C$$

$$3500 = 3500 + C$$

$$C = 0$$

$$P(t) = 3500e^{0.03t}$$

ثالثاً، نجد سكان المدينة عام 2020 (أي بعد 10 سنوات)

$$P(10) = 3500e^{0.03(10)}$$

$$\approx 4725$$

إذن، عدد سكان المدينة عام 2020 هو 4725 ساكناً.

مثال (3)

مسألة اليوم

يتغيَّر عدد الطلبة الذين يلتحقون بإحدى الجامعات الجديدة سنويًّا بمُعدَّل: $P'(t) = \frac{5000}{\sqrt{(t+1)^3}}$، حيث $P(t)$ عدد الطلبة المُلتحِقين بالجامعة، و t الزمن بالسنوات منذ تأسيس الجامعة. أجد عدد الطلبة الذين درسوا في الجامعة بعد 3 سنوات من تأسيسها، علمًا بأنَّ عددهم عند تأسيس الجامعة بلغ 2000 طالب.

الحل

أولاً نجد تكامل الاقتران

$$P(t) = \int \frac{5000}{\sqrt{(t+1)^3}} dt = \int \frac{5000}{(t+1)^{\frac{3}{2}}} dt$$

$$= \int 5000(t+1)^{-\frac{3}{2}} dt$$

$$= -10000(t+1)^{-\frac{1}{2}} + C$$

ثانياً، نجد ثابت التكامل:C

$$P(t) = -10000(t+1)^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$P(0) = -10000(0+1)^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$2000 = -10000 + C$$

$$C = 12000$$

$$P(t) = -10000(t+1)^{-\frac{1}{2}} + 12000$$

ثالثاً، نجد عدد الطلبة بعد 3 سنوات من التأسيس:

$$P(3) = -10000(3+1)^{-\frac{1}{2}} + 12000$$

$$\approx 7000$$

اذن، عدد الطلبة بعد 3 سنوات من التأسيس هو 7000 طالب.

مثال (4)

مراجعين : إذا كانت الاقتران $y = 30\,e^{0.1t}$ تمثل معدل تغير عدد المراجعين في مركزٍ صحيٍّ بعد t شهرًا من افتتاحه وكان عدد المراجعين في يوم افتتاحه 300 مراجعٍ كم كان عدد مراجعي المركز بعد 5 أشهرٍ من افتتاحه؟

الحل

$$p(t) = \int 30e^{0.1t}\, dt = \frac{30}{0 \cdot 1} e^{0.1t} + c$$
$$= 300e^{0.1t} + c$$

$$p(0) = 300 \rightarrow 3\infty = 300e^{0.1(0)} + C$$
$$\rightarrow C = 0$$

$$p(t) = 300e^{0.1t}$$
$$p(5) = 300e^{\frac{1}{2}} \approx 495$$

مثال (5)

تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم بحيث ان سرعتها تعطى بالعلاقة

$$v(t) = \frac{3}{t+1} \qquad t \neq -1$$

جد الاقتران الذي يمثل موقع النقطة بعد مرور t ثانية

الحل

$$S(t) = \int v(t)\, dt$$

$$S(t) = \int \frac{3}{t+1} dt = 3\, ln|t+1| + c$$

مثال (6)

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة (x, y) يساوي $\left(2-\frac{1}{x}\right)$ اوجد قاعدة الاقتران $f(x)$ علما بانه يمر بالنقطة $(1, 2)$

الحل

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(2-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$f(x)=2x-ln|x|+C$$

$$f(1)=2-ln(1)+C=2\to C=0$$
$$f(x)=2x-ln|x|$$

مثال (7)

اذا كانت $f'(x)=3e^x-\frac{1}{x+e}$ جد قاعدة الاقتران $f(x)$ علما بانه يمر بالنقطة $(0, 4)$

الحل

$$f(x)=\int\left(3e^x-\frac{1}{x+e}\right)dx$$

$$f(x)=3e^x-ln|x+e|+C\to f(0)$$
$$=3e^0-ln|0+e|+C=4$$

$$c=2\to f(x)=3e^x-ln|x+e|+2$$

تكامل اقترانات في صورة:

$$k\frac{f'(x)}{f(x)}$$

تكامل اقترانات في صورة: $\frac{f'(x)}{f(x)}$

مفهوم أساسي

إذا كان $f(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، حيث $f(x)\neq 0$ فإنَّ

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$$

ملاحظة :

يُمكِن التعبير عن المفهوم الأساسي المجاور بالكلمات على النحو الآتي:
إذا كان المُكامَل كسرًا بسطه هو مشتقة مقامه، فإنَّ التكامل هو لوغاريتم القيمة المُطلَقة للمقام.

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $$\int \frac{3x^2}{x^3+5}\,dx$$

تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

ألاحِظ أنَّ البسط $(3x^2)$ هو مشتقة المقام: $\frac{d}{dx}(x^3+5) = 3x^2$.

$$\int \frac{3x^2}{x^3+5}\,dx = \ln|x^3+5| + C$$

2 $$\int \frac{6x}{x^2+9}\,dx$$

بإعادة كتابة الاقتران في صورة: $k\,\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$\int \frac{6x}{x^2+9}\,dx = 3\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx$$

$$= 3\ln|x^2+9| + C$$

3 $$\int \frac{x-1}{x^2-2x+2}\,dx$$

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\times(x-1)}{x^2-2x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + C$$

4 $$\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$$

$$\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx = \ln|e^x-1| + C$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 50

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx = \ln|x^2+3x| + C$$

مثال (3)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx$

تكامل e^x المضروب في ثابت،

وتكامل $\frac{1}{x}$ المضروب في ثابت

$$\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx = 2e^x + 3\ln|x| + C$$

2 $\int \frac{1}{4x-1} dx$

تكامل $\frac{1}{ax+b}$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx = \frac{1}{4}\ln|4x-1| + C$$

3 $\int \frac{2x^5 - 4}{x} dx$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$\int \frac{2x^5-4}{x} dx = \int \left(\frac{2x^5}{x} - \frac{4}{x}\right) dx$$

بالتبسيط

$$= \int \left(2x^4 - \frac{4}{x}\right) dx$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت،

وتكامل $\frac{1}{x}$ المضروب في ثابت

$$= \frac{2}{5}x^5 - 4\ln|x| + C$$

b) $\int \frac{9x^2}{x^3+8} dx$

$$\int \frac{9x^2}{x^3+8} dx = \int \frac{3(3x^2)}{x^3+8} dx$$

$$= 3\int \frac{3x^2}{x^3+8} dx$$

$$= 3\ln|x^3+8| + C$$

c) $\int \frac{x+1}{4x^2+8x} dx$

$$\int \frac{x+1}{4x^2+8x} dx = \int \frac{\frac{1}{8}(8x+8)}{4x^2+8x} dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{8x+8}{4x^2+8x} dx$$

$$= \frac{1}{8}\ln|4x^2+8x| + C$$

d) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5} dx$

$$= \int \frac{\frac{1}{3}(3e^{3x})}{e^{3x}+5} dx = \frac{1}{3}\ln|e^{3x}+5| + C$$

التكاملات المحدودة للاقترانات الخاصة

يُمكِنني إيجاد التكامل المحدود لكلٍّ من الاقترانات الخاصة التي تعلَّمْتُ إيجاد تكاملاتها غير المحدودة في هذا الدرس.

مثال (1)

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1 $\int_0^1 (6e^{-3x} + 12x^3)\ dx$

$$\int_0^1 (6e^{-3x} + 12x^3)\ dx = (-2e^{-3x} + 3x^4)\Big|_0^1$$

$$= (-2e^{-3(1)} + 3(1)^4) - (-2e^{-3(0)} + 3\ (0)^4)$$

$$= -2e^{-3} + 5$$

4 $\int \frac{2x}{x^2 - 1}\ dx$

تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$\int \frac{2x}{x^2 - 1}\ dx = \ln|x^2 - 1| + C$$

---

5 $\int \frac{6x}{x^2 + 9}\ dx$

بإعادة كتابة الاقتران في صورة: $k\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$\int \frac{6x}{x^2 + 9}\ dx = 3\int \frac{2x}{x^2 + 9}\ dx$$

تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$= 3\ln|x^2 + 9| + C$$

$|x^2 + 9| = x^2 + 9$

$$= 3\ln(x^2 + 9) + C$$

b) $$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6x+1}}\,dx$$

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6x+1}}\,dx = \int_0^4 (6x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{6} \times 2(6x+1)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^4$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{6x+1}\Big|_0^4$$

$$= \left(\frac{1}{3}\sqrt{6(4)+1}\right) - \left(\frac{1}{3}\sqrt{6(0)+1}\right)$$

$$= \frac{4}{3}$$

c) $$\int_0^4 \frac{8x}{x^2+1}\,dx$$

$$\int_0^4 \frac{8x}{x^2+1}\,dx = \int_0^4 \frac{4(2x)}{x^2+1}\,dx$$

$$= 4\int_0^4 \frac{(2x)}{x^2+1}\,dx$$

$$= 4\ln|x^2+1|\Big|_0^4$$

$$= (4\ln|(4)^2+1|) - (4\ln|(0)^2+1|)$$

$$= 4\ln 17$$

2 $$\int_{-1}^2 (x+1)^3\,dx$$

$$\int_{-1}^2 (x+1)^3\,dx = \frac{1}{4}(x+1)^4\Big|_{-1}^2$$

$$= \frac{1}{4}\left((2+1)^4 - (-1+1)^4\right)$$

$$= \frac{81}{4}$$

3 $$\int_2^3 \frac{1}{7-2x}\,dx$$

$$\int_2^3 \frac{1}{7-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|7-2x|\Big|_2^3$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\ln|7-2(3)| - \ln|7-2(2)|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3$$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

a) $$\int_0^2 (4e^{2x}+7)\,dx$$

$$= (2e^{2x}+7x)\Big|_0^2$$

$$= (2e^{2(2)}+7(2)) - (2e^{2(0)}+7(0))$$

$$= 2e^4+12$$

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \left(\frac{1}{2}e^{x} + 3x\right) dx$

$$\int\left(\frac{1}{2}e^{x}+3x\right)dx=\frac{1}{2}e^{x}+\frac{3}{2}x^{2}+C$$

2 $\int \left(\frac{x^{2}+2x+1}{x^{2}}\right) dx$

$$=\int\left(\frac{x^{2}}{x^{2}}+\frac{2x}{x^{2}}+\frac{1}{x^{2}}\right)dx$$

$$=\int\left(1+\frac{2}{x}+x^{-2}\right)dx$$

$$=x+2\ln|x|-x^{-1}+C$$

3 $\int (e^{x}+1)^{2}\, dx$

$$\int(e^{x}+1)^{2}dx=\int(e^{2x}+2e^{x}+1)dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}+2e^{x}+x+C$$

4 $\int \frac{1}{x}(x+2)\ dx$

$$\int\left(\frac{4}{x^{3}}+\frac{5}{x}\right)dx=\int\left(4x^{-3}+\frac{5}{x}\right)dx$$

$$=-2x^{-2}+5\ln|x|+C$$

5 $\int \left(\frac{4}{x^{3}}+\frac{5}{x}\right) dx$

$$\int\left(\frac{4}{x^{3}}+\frac{5}{x}\right)dx=\int\left(4x^{-3}+\frac{5}{x}\right)dx$$

$$=-2x^{-2}+5\ln|x|+C$$

6 $\int \left(\sqrt{x}+3e^{6x}-\frac{7}{x}\right) dx$

$$=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+3e^{6x}-\frac{7}{x}\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}e^{6x}-7\ln|x|+C$$

7 $\displaystyle\int \left(\frac{3}{x+1} - 5e^{-2x} \right) dx$

$$\int \left(\frac{3}{x+1} - 5e^{-2x}\right) dx$$

$$= 3\ln|x+1| + \frac{5}{2}e^{-2x} + C$$

---

8 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\, dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\, dx = \int (2x-3)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= (2x-3)^{\frac{1}{2}} + C$$

---

9 $\displaystyle\int \left(\sin(2x-3) + e^{6x-4}\right) dx$

$$\int \left(\sin(2x-3) + e^{6x-4}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2x-3) + \frac{1}{6}e^{6x-4} + C$$

10 $\displaystyle\int 4\cos(6x+1)\, dx$

$$\int 4\cos(6x+1)\, dx = \frac{2}{3}\sin(6x+1) + C$$

11 $\displaystyle\int \frac{\sin x + 3\cos x}{4}\, dx$

$$\int \frac{\sin x + 3\cos x}{4}\, dx$$

$$= \int \left(\frac{\sin x}{4} + \frac{3\cos x}{4}\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{4}\sin x + \frac{3}{4}\cos x\right) dx$$

$$= -\frac{1}{4}\cos x + \frac{3}{4}\sin x + C$$

12 $\displaystyle\int \left(e^{6x} + (1-2x)^6\right) dx$

$$\int \left(e^{6x-4} + (1-2x)^6\right) dx$$

$$= \frac{1}{6}e^{6x-4} - \frac{1}{14}(1-2x)^7 + C$$

13 $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x)}{x^2+1}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$$

14 $\int \frac{x^2}{x^3-3}\,dx$

$$\int \frac{x^2}{x^3-3}dx = \int \frac{\frac{1}{3}(3x^2)}{x^3-3}dx$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-3}dx$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x^3-3| + C$$

15 $\int \frac{x^2-x}{2x^3-3x^2+12}\,dx$

$$= \int \frac{\frac{1}{6}(6x^2-6x)}{2x^3-3x^2+12}dx$$
$$= \frac{1}{6}\int \frac{6x^2-6x}{2x^3-3x^2+12}dx$$
$$= \frac{1}{6}\ln|2x^3-3x^2+12| + C$$

16 $\int \frac{e^x+7}{e^x}\,dx$

$$\int \frac{e^x+7}{e^x}dx = \int \left(\frac{e^x}{e^x} + \frac{7}{e^x}\right)dx$$
$$= \int (1+7e^{-x})dx$$
$$= x - 7e^{-x} + C$$

17 $\int \frac{1}{5-\frac{1}{4}x}\,dx$

$$\int \frac{1}{5-\frac{1}{4}x}dx = \int \frac{-4(-\frac{1}{4})}{5-\frac{1}{4}x}dx$$
$$= -4\ln|5-\frac{1}{4}x| + C$$

18 $\int \left(4x^3+2+3\sin(5-3x)\right)\,dx$

$$\int (4x^3+2+3\sin(5-3x))dx$$
$$= x^4 + 2x + \cos(5-3x) + C$$

19 $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2e^{2x})}{e^{2x}+3}dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|e^{2x}+3| + C$$

20 $\displaystyle\int \frac{3}{(1-4x)^2}\,dx$

$$\int \frac{3}{(1-4x)^2}dx = \int 3(1-4x)^{-2}dx$$
$$= \frac{3}{4}(1-4x)^{-1} + C$$
$$= \frac{3}{4(1-4x)} + C$$

21 $\displaystyle\int \frac{1+xe^x}{x}\,dx$

$$\int \frac{1+xe^x}{x}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{xe^x}{x}\right)dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{x} + e^x\right)dx$$
$$= \ln|x| + e^x + C$$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

22 $\displaystyle\int_1^2 \left(2x + 3e^x - \frac{4}{x}\right)\,dx$

$$= (x^2 + 3e^x - 4\ln|x|)\Big|_1^2$$
$$= ((2)^2 + 3e^2 - 4\ln|2|)$$
$$- ((1)^2 + 3e^1 - 4\ln|1|)$$
$$= 3 + 3e^2 - 4\ln 2 - 3e$$

23 $\displaystyle\int_0^5 \frac{x}{x^2+10}\,dx$

$$= \int_0^5 \frac{\frac{1}{2}(2x)}{x^2+10}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^5 \frac{2x}{x^2+10}dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+10|\Big|_1^2$$
$$= \frac{1}{2}\ln|(2)^2+10| - \frac{1}{2}\ln|(1)^2+10|$$
$$= \frac{1}{2}\ln 14 - \frac{1}{2}\ln 11$$

24 $\int_3^4 (2x-6)^4 \, dx$

$= \frac{1}{10}(2x-6)^5 \Big|_3^4$

$= \frac{1}{10}(2(4)-6)^5 - \frac{1}{10}(2(3)-6)^5$

$= \frac{32}{10}$

---

25 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = e^{-2t}$ حيث t الزمن بالثواني و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم 2 m، فأجد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة

$v(t) = e^{-2t}$

$s(t) = \int e^{-2t} dt$

$= -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$

$s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$

$s(0) = 2$

$s(0) = -\frac{1}{2}e^{0} + C$

$2 = -\frac{1}{2}e^{0} + C$

$2 = -\frac{1}{2} + C$

$C = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{5}{2}$

في كلٍّ ممّا يأتي المشـــتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أســتعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

26 $f'(x) = 5e^x ; \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$f(x) = \int 5e^x dx$

$= 5e^x + C$

$\left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$f(x) = 5e^{x} + C \Rightarrow f(0) = 5e^{0} + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = 5 + C$$

$$\Rightarrow C = -\frac{9}{2}$$

$$f(x) = 5e^{x} - \frac{9}{2}$$

---

27 $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2};\ (1, -1)$

$$f(x) = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{2}{x} - x^{-2}\right) dx$$

$$= 2\ln|x| + x^{-1} + C$$

$$= 2\ln|x| + \frac{1}{x} + C$$

لايجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(1, -1)$

$$f(x) = 2\ln|x| + \frac{1}{x} + C$$

$$\Rightarrow f(1) = 2\ln 1 + 1 + C$$

$$\Rightarrow -1 = 1 + C$$

$$\Rightarrow C = -2$$

$$f(x) = 2\ln|x| + \frac{1}{x} - 2$$

28 $f'(x) = e^{-x} + x^2;\ (0, 4)$

$$f(x) = \int (e^{-x} + x^2) dx$$

$$= -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

لايجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(0, 4)$

$$f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C \Rightarrow$$

$$f(0) = -e^{0} + \frac{1}{3}(0)^3 + C$$

$$\Rightarrow \quad 4 = -1 + C$$

$$\Rightarrow C = 5$$

$$f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + 5$$

---

29 إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{3}{x+e}$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة (e, e^2).

$$y = \int \left(2x + \frac{3}{x+e}\right) dx$$

$$= x^2 + 3\ln|x+e| + C$$

لايجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة (e, e^2)

$$f(x) = x^2 + 3\ln|x+e| + C \Rightarrow$$

$$f(e) = e^2 + 3\ln|e+e| + C$$

$$\Rightarrow e^2 = e^2 + 3\ln 2e + C$$

$$\Rightarrow C = -3\ln 2e$$

$$f(x) = x^2 + 3\ln|x+e| - 3\ln 2e$$

بيئة: في دراسة تناولت أسماكًا في بحيرة، تبيَّن أنَّ عدد الأسماك $P(t)$ يتغيَّر بمُعدَّل: $P'(t) = -0.51e^{-0.03t}$ حيث t الزمن بالسنوات بعد بَدْء الدراسة:

30 أجد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أيِّ زمن t، علمًا بأنَّ عدد الأسماك عند بَدْء الدراسة هو 1000 سمكة.

$$P(t) = \int 0.51e^{-0.03t} dt$$

$$= -\frac{0.51}{0.03} e^{-0.03t} + C$$

$$= -17e^{-0.03t} + C$$

ما أن عدد الأسماك عند بدء الدراسة هو 1000 سمكة

$$P(0) = 1000$$

$$P(0) = -17e^{-0.03(0)} + C$$

$$1000 = -17 + C$$

$$C = 1017$$

$$P(t) = -17e^{-0.03t} + 1017$$

31 أجد عدد الأسماك بعد 10 سنوات من بَدْء الدراسة.

$$P(10) = -17e^{-0.03(10)} + 1017 \approx 1004$$

عدد الأسماك بعد 10 سنوات من بدء الدراسة هو 1004 سمكة تقريباً.

طــب: يلتئم جرح جلدي بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $A'(t) = -0.9e^{-0.1t}$، حيث t عدد الأيام بعد الإصابة بالجرح و $A(t)$ مساحة سطح الجرح بالسنتيمتر المربع:

32 أجد قاعدة الاقتران $A(t)$ عند أيِّ زمن t، علمًا بأنَّ مساحة سطح الجرح عند الإصابة هي 9 cm^2.

$$A(t)=\int -0.9e^{-0.1t}dt$$

$$=\frac{0.9}{0.1}e^{-0.1t}+C$$

$$=9e^{-0.1t}+C$$

بما أن مساحة سطح الجرح عند الإصابة هي $9cm^2$

$$A(0)=9$$

$$A(0)=9e^{-0.1(0)}+C$$

$$9=9+C$$

$$C=0$$

$$A(t)=9e^{-0.1t}$$

33 أجد مساحة سطح الجرح بعد 5 أيام من الإصابة.

$$A(5)=9e^{-0.1(5)}\approx 5.5\text{cm}^2$$

مساحة سطح الجرح بعد 5 أيام من الإصابة هي 5.5 cm^2

مهارات التفكير العليا

34 أكتشف الخطأ: أوجد أحمد ناتج التكامل $\int \frac{1}{2x}dx$، وكان حَلُّه على النحو

$$\int \frac{1}{2x}dx=\int\frac{2\times 1}{2x}dx$$

$$=\int\frac{2}{2x}dx$$

$$=\ln|2x|+C$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ أحمد، ثم أُصحِّحه.

$$\int\frac{1}{2x}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2)}{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2}{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|2x|+C$$

تحدٍّ: أجد كل تكامل ممّا يأتي:

35 $\int \sqrt{e^x}\, dx$

$$\int \sqrt{e^x}\, dx = \int (e^x)^{\frac{1}{2}} dx$$
$$= \int e^{\frac{1}{2}x} dx$$
$$= 2e^{\frac{1}{2}x} + C$$

36 $\int \frac{\cos x}{3 + 2\sin x}\, dx$

$$\int \frac{\cos x}{3+2\sin x} dx$$
$$= \int \frac{-\frac{1}{2}(-2\cos x)}{3+2\sin x} dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2\cos x}{3+2\sin x} dx$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|3+2\sin x| + C$$

37 $\int (x^2 + 2x + 1)^5\, dx$

$$\int (x^2+2x+1)^5 dx = \int ((x+1)^2)^5 dx$$
$$= \int (x+1)^{10} dx$$
$$= \frac{1}{11}(x+1)^{11} + C$$

38 **أكتشف المُختلِف**: أيُّ التكاملات الآتية مُختلِف، مُبرِّرًا إجابتي؟

$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx$	$\int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx$
$\int (x-1)^3\, dx$	$\int \frac{1}{x+1}\, dx$

$$\int \frac{1}{x+1} dx$$

هذا التكامل هو المختلف كونه الوحيد الذي يُحل باللوغاريتم الطبيعي.

تمارين ومسائل كتاب التمارين صفحة 13

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{1-x^2}{5x}\,dx$

$$\int \frac{1-x^2}{5x}dx = \int\left(\frac{1}{5x}-\frac{x^2}{5x}\right)dx$$
$$= \int\left(\frac{1}{5x}-\frac{1}{5}x\right)dx$$
$$= \frac{1}{5}\ln|x| - \frac{1}{10}x^2 + C$$

2) $\int (5e^x + 4)\,dx$

$$\int (5e^x+4)dx = 5e^x + 4x + C$$

3) $\int \left(1-e^{2x-3}\right)dx$

$$\int (1-e^{2x-3})dx = x - \frac{1}{2}e^{2x-3} + C$$

4) $\int (\sin 2x - \cos 2x)\,dx$

$$\int (\sin 2x - \cos 2x)dx$$
$$= -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

5) $\int \frac{3}{2x-1}\,dx$

$$\int \frac{3}{2x-1}dx = \frac{3}{2}\ln|2x-1| + C$$

6) $\int \left(5-\sin(5-5x)\right)dx$

$$\int (5-\sin(5-5x))dx$$
$$= 5x - \frac{1}{5}\cos(5-5x) + C$$

7 $\int \frac{1}{\frac{1}{3}x-2}\,dx$

$$\int \frac{1}{\frac{1}{3}x-2}dx = 3\ln\left|\frac{1}{3}x-2\right| + C$$

8 $\int \left(2x-1+\frac{8}{5x+4}\right) dx$

$$\int \left(2x-1+\frac{8}{5x+4}\right)dx$$

$$= x^2 - x + \frac{8}{5}\ln|5x+4| + C$$

9 $\int \left(3\cos x + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}\right) dx$

$$\int \left(3\cos x + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}\right)dx$$

$$= 3\sin x + 5\ln|x| - \frac{4}{x} + C$$

10 $\int (3x+2)^5\,dx$

$$\int (3x+2)^5 dx = \frac{1}{18}(3x+2)^6 + C$$

11 $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx$

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + C$$

12 $\int \left(e^{2x} - \frac{1}{2}\sin(2x-1)\right)dx$

$$\int \left(e^{2x} - \frac{1}{2}\sin(2x-1)\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}\cos(2x-1) + C$$

13 $\int \left(\sin(2x+3) + \cos(3x+2)\right) dx$

$$\int \left(\sin(2x+3) + \cos(3x+2)\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2x+3)$$

$$+ \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C$$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

14 $\int \left(\frac{1}{8}x^{3/2} - \frac{4}{x}\right) dx$

$$\int\left(\frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{x}\right)dx = \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - 4\ln|x| + C$$

15 $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \int (x-1)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{x-1} + C$$

16 $\int_0^1 \sqrt{1+7x}\, dx$

$$= \int_0^1 (1+7x)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{2}{21}(1+7x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{21}(1+7(1))^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{21}(1+7(0))^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{21}\sqrt{512} - \frac{2}{21}$$

17 $\int_0^1 e^x(4 - e^x)\, dx$

$$\int_0^1 e^x(4-e^x)dx = \int_0^1 (4e^x - e^{2x})dx$$

$$= (4e^x - \frac{1}{2}e^{2x})\Big|_0^1$$

$$= 4e - \frac{1}{2}e^2 - \frac{7}{2}$$

18 $\int_1^3 \left(1+\frac{1}{x}\right) dx$

$$\int_1^3 (1+\frac{1}{x})dx = (x+\ln|x|)|_1^3$$
$$= 2+\ln 3$$

19 إذا كان ميـل المماس لمنحنى العلاقة y هو $\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} + 2e^{-x}$ ، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 2)$.

$$y = f(x) = \int (6e^{2x} + 2e^{-x})dx$$
$$= 3e^{2x} - 2e^{-x} + C$$
$$y = f(x) = 3e^{2x} - 2e^{-x} + C$$
$$f(0) = 2 \Rightarrow 3 - 2 + C = 2$$
$$\Rightarrow C = 1$$
$$\Rightarrow y = 3e^{2x} - 2e^{-x} + 1$$

في كلٍّ ممّا يأتي المشـــتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

20 $f'(x) = e^{-x}\ ;\ (0, 3)$

$$f(x) = \int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$$
$$f(0) = 3 \Rightarrow -1 + C = 3$$
$$\Rightarrow C = 4$$
$$\Rightarrow f(x) = -e^{-x} + 4$$

21 $f'(x) = \frac{3}{x} - 4\ ;\ (1,0)$

$$f(x) = \int (\frac{3}{x} - 4)dx$$
$$= 3\ln|x| - 4x + C$$
$$f(1) = 0 \Rightarrow -4 + C = 0$$
$$\Rightarrow C = 4$$
$$\Rightarrow f(x) = 3\ln|x| - 4x + 4$$

22 $f'(x) = 4e^x - 2\,;\ (0, 1)$

$$f(x) = \int (4e^x - 2)\,dx$$
$$= 4e^x - 2x + C$$
$$f(0) = 1 \Rightarrow 4 + C = 1$$
$$\Rightarrow C = -3$$
$$\Rightarrow f(x) = 4e^x - 2x - 3$$

---

23 **تلوُّث:** يُعالَج التلوُّث في بحيرة باستعمال مضاد للبكتيريا. إذا كان عدد الخلايا البكتيرية الضارّة لكل ملّيلتر من الماء في البحيرة يتغيَّر بمُعدَّل: $N'(t) = -\dfrac{2000t}{1+t^2}$، حيث $N(t)$ عدد الخلايا البكتيرية لكل ملّيلتر من الماء بعد t يومًا من استعمال المضاد، فأجد $N(t)$ علمًا بأنَّ العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خلية لكل ملّيلتر.

الحل

$$N(t) = \int -\frac{2000t}{1+t^2}\,dt$$
$$= \int -\frac{1000(2t)}{1+t^2}\,dt$$
$$= -1000\ln|1+t^2| + C$$

$N(0) = 5000 \Rightarrow$

$$-1000\ln|1+0| + C = 5000$$
$$\Rightarrow C = 5000$$

$\Rightarrow N(t) =$
$$-1000\ln|1+t^2| + 5000$$

24 أُحدِّد أوجه الاختلاف بين التكاملين الآتيين من دون إيجاد التكامل

$$\int (3\sin 3x + 1)\,dx$$

$$\int \big(3\sin(3x+1)\big)\,dx$$

التكامل الأعلى هو مجموع تكاملين لاقترانين، أحدهما مثلثي هو $f(x) = 3\sin 3x$ والاخر ثابت . $g(x) = 1$

بينما التكامل الأيمن هو اقتران مثلثي واحد فقط هو

$$h(x) = 3\sin(3x+1)$$

الدرس 6

التكامل بالتعويض

التكامل بالتعويض

يستخدم لايجاد تكامل حاصل ضرب اوقسمة اقترانين احدهما مشتقة الاخر

طريقة **التكامل بالتعويض** تتضمَّن استعمال مُتغيِّر جديد بدلًا من مُتغيِّر التكامل.

يُمكِن إيجاد: $\int 2x\sqrt{x^2+6}\,dx$ باستعمال مُتغيِّر جديد، وليكن u، بدلًا من المُتغيِّر x، باتِّباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أفترض أنَّ u هو المقدار أسفل الجذر التربيعي؛ أيْ إنَّ: $u = x^2 + 6$.

الخطوة 2: أجد مشتقة u، وهي: $\frac{du}{dx} = 2x$.

الخطوة 3: أحُلُّ المعادلة لـ dx: $dx = \frac{du}{2x}$.

الخطوة 4: أستعمل المُتغيِّر u بدلًا من المُتغيِّر x في التكامل.

بتعويض $u = x^2 + 6,\ dx = \frac{du}{2x}$

$$\int 2x\sqrt{x^2+6}\,dx = \int 2x\sqrt{u} \times \frac{du}{2x}$$

بالتبسيط $= \int \sqrt{u}\,du$

الصورة الأُسِّية $= \int u^{1/2}\,du$

تكامل اقترانات القوَّة $= \frac{2}{3}u^{3/2} + C$

بتعويض $u = x^2 + 6$

$$= \frac{2}{3}(x^2+6)^{3/2} + C$$

التكامل بالتعويض للتكاملات غير المحدودة

مفهوم أساسي

إذا كان: $u = g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، ومداه الفترة I

وكان f اقترانًا متصلًا على I، فإنَّ:

$$\int f(g(x))\, g'(x)dx = \int f(u)\, du$$

خطوات حلّ التكامل بالتعويض

مفهوم أساسي

الخطوة 1: أُحدِّد التعويض u الذي يُمكِن به تبسيط المُكامَل.

الخطوة 2: أُعبِّر عن المُكامَل بدلالة u و du، وأحذف مُتغيِّر التكامل الأصلي ومشتقته حذفًا كاملًا، ثم أكتب المُكامَل الجديد في أبسط صورة.

الخطوة 3: أجد التكامل الجديد.

الخطوة 4: أُعبِّر عن الاقتران الأصلي الذي أوجدته في الخطوة السابقة باستعمال المُتغيِّر الأصلي، عن طريق التعويض.

ملاحظة :

بوجه عام، إذا احتوى المُكامَل على اقتران مضروب في مشتقته، فيُمكِن حَلّ التكامل بتعويض الاقتران.

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int 3x^2 (x^3 + 1)^7 \; dx$

أفترض أنَّ: $u = x^3 + 1$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

بتعويض $u = x^3 + 1,\ dx = \frac{du}{3x^2}$

$$\int 3x^2 (x^3 + 1)^7 \; dx = \int 3x^2 (u)^7 \times \frac{du}{3x^2}$$

$$= \int u^7 \; du$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{8} u^8 + C$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{8}(x^3 + 1)^8 + C$$ بتعويض $u = x^3 + 1$

2 $\int 2x\sqrt{x^2+6}\ dx$

أفترض أنَّ: $u = x^2 + 6$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

بتعويض $u = x^2 + 6,\ dx = \frac{du}{2x}$

$$\int 2x\sqrt{x^2+6}\ dx = \int 2x\sqrt{u} \times \frac{du}{2x}$$

$$= \int \sqrt{u}\ du$$ بالتبسيط

$$= \int u^{1/2}\ du$$ الصورة الأُسِّية

$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$ تكامل اقتران القوَّة

بتعويض $u = x^2 + 6$

$$= \frac{2}{3}(x^2+6)^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+6)^3} + C$$ الصورة الجذرية

3 $\int \cos x\, e^{\sin x}\ dx$

أفترض أنَّ: $u = \sin x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

بتعويض $u = \sin x,\ dx = \frac{du}{\cos x}$

$$\int \cos x\, e^{\sin x}\ dx = \int \cos x\, e^{u} \times \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int e^u\ du$$ بالتبسيط

$$= e^u + C$$ تكامل الاقتران الأُسِّي الطبيعي

$$= e^{\sin x} + C$$ بتعويض $u = \sin x$

4 $\int \frac{\ln x}{x}\ dx$

أفترض أنَّ: $u = \ln x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\, du$$

بإعادة كتابة المُكامَل

$$\int \frac{\ln x}{x}\ dx = \int \frac{1}{x} \times \ln x\, dx$$

بتعويض $u = \ln x,\ dx = x\, du$

$$= \int \frac{1}{x} \times u \times x\, du$$

بالتبسيط $= \int u \, du$

تكامل اقتران القوَّة $= \frac{1}{2} u^2 + C$

بتعويض $u = \ln x$ $= \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$

---

5 $\int x^4 \sin (x^5 - 8) \, dx$

أفترض أنَّ: $u = x^5 - 8$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 5x^4 \Rightarrow dx = \frac{du}{5x^4}$$

بتعويض $u = x^5 - 8, \; dx = \frac{du}{5x^4}$

$$\int x^4 \sin (x^5 - 8) \, dx$$

$$= \int x^4 \sin (u) \times \frac{du}{5x^4}$$

بالتبسيط $= \int \frac{1}{5} \sin u \, du$

تكامل $\sin u$ المضروب في ثابت

$$= -\frac{1}{5} \cos u + C$$

بتعويض $u = x^5 - 8$

$$= -\frac{1}{5} \cos (x^5 - 8) + C$$

6 $\int \sin^3 x \cos x \, dx$

أفترض أنَّ: $u = \sin x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

بتعويض $u = \sin x, \; dx = \frac{du}{\cos x}$

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx$$

$$= \int u^3 \times \cos x \times \frac{du}{\cos x}$$

بالتبسيط $= \int u^3 \, du$

تكامل اقتران القوَّة $= \frac{1}{4} u^4 + C$

بتعويض $u = \sin x$ $= \frac{1}{4} \sin^4 x + C$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 58

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int 6x^2(2x^3-3)^4\, dx$

الحل

$$\int 6x^2(2x^3-3)^4 dx$$

$$u = 2x^3 - 3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x^2$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{6x^2}$$

$$\int 6x^2(2x^3-3)^4 dx = \int 6x^2 u^4 \times \frac{du}{6x^2}$$

$$= \int u^4 du$$

$$= \frac{1}{5}u^5 + C$$

$$= \frac{1}{5}(2x^3-3)^5 + C$$

b) $\int x\, e^{x^2+1}\, dx$

الحل

$$\int x e^{x^2+1} dx$$

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int x e^{x^2+1} dx = \int x e^u \times \frac{du}{2x}$$

$$= \int \frac{1}{2} e^u du \quad = \frac{1}{2} e^u + C$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2+1} + C$$

c) $\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}}\, dx$

$$\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}} dx$$

$$u = 2x^2 + 8x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x + 8$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{4x+8}$$

$$\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}} dx$$

$$= \int \frac{4x+8}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{4x+8}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{u}} du \qquad = \int u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= 2u^{\frac{1}{2}} + C \quad = 2\sqrt{2x^2+8x} + C$$

d) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} \, dx$

$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow dx = x du$

$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int \frac{u^2}{x} \times x du$

$= \int u^2 du \quad = \frac{1}{3} u^3 + C$

$= \frac{1}{3} (\ln x)^3 + C$

e) $\int x^3 \cos (x^4 - 5) \, dx$

$\int x^3 \cos(x^4 - 5) dx$

$u = x^4 - 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x^3$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{4x^3}$

$\int x^3 \cos(x^4 - 5) dx = \int x^3 \cos u \times \frac{du}{4x^3}$

$= \int \frac{1}{4} \cos u du \quad = \frac{1}{4} \sin u + C$

$= \frac{1}{4} \sin(x^4 - 5) + C$

f) $\int \cos^4 x \sin x \, dx$

$\int \cos^4 x \sin x dx$

$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$

$\int \cos^4 x \sin x dx = \int u^4 \sin x \times \frac{du}{-\sin x}$

$= \int -u^4 du \quad = -\frac{1}{5} u^5 + C$

$= -\frac{1}{5} \cos^5 x + C$

مثال (3)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int 6x^2 (2x^3 - 3)^4 \, dx$

أفترض أنَّ: $u = 2x^3 - 3$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 6x^2 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{6x^2}$$

بتعويض $u = 2x^2 - 3, \; dx = \frac{du}{6x^2}$

$$\int 6x^2 (2x^3 - 3)^4 \, dx$$

$$= \int 6x^2 (u)^4 \times \frac{du}{6x^2}$$

بالتبسيط

$$= \int u^4 \, du$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{5} u^5 + C$$

بتعويض $u = 2x^2 - 3$

$$= \frac{1}{5} (2x^3 - 3)^5 + C$$

2 $\int \sin x \, e^{\cos x} \, dx$

أفترض أنَّ: $u = \cos x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = -\sin x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{-\sin x}$$

بتعويض $u = \cos x, \; dx = \frac{du}{-\sin x}$

$$\int \sin x \, e^{\cos x} \, dx$$

$$= \int \sin x \, e^{u} \times \frac{du}{-\sin x}$$

بالتبسيط

$$= \int -e^{u} \, du$$

تكامل الاقتران الأُسِّي الطبيعي المضروب في ثابت

$$= -e^{u} + C$$

$$= -e^{\cos x} + C$$

بتعويض $u = \cos x$

3 $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$

أفترض أنَّ: $u = \ln x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad dx = x \, du$$

بإعادة كتابة المُكامَل

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int \frac{1}{x} \times \ln x \, dx$$

بتعويض $u = \ln x,\ dx = x\,du$

$$= \int \frac{1}{x} \times u \times x\,du$$

بالتبسيط

$$= \int u\,du$$

تكامل اقتران القوّة

$$= \frac{1}{2}u^2 + C$$

بتعويض $u = \ln x$

$$= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

4 $\int 4x^2\sqrt{x^3-5}\ dx$

الحل

$$u = x^3 - 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$\int 4x^2\sqrt{x^3-5}\,dx = \int 4x^2\sqrt{u} \times \frac{du}{3x^2}$$

$$= \int \frac{4}{3}u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{8}{9}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{8}{9}\sqrt{(x^3-5)^3} + C$$

5 $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}}\ dx$

الحل

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\,du$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{u} \times 2\sqrt{x}\,du$$

$$= \int e^u du = e^u + C \quad = e^{\sqrt{x}} + C$$

6 $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\, dx$

الحل

$$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du$$

$$\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx = \int \frac{u^3}{x} \times x\,du$$

$$= \int u^3 du$$

$$= \frac{1}{4}u^4 + C$$

$$= \frac{1}{4}(\ln x)^4 + C$$

مثال (4)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

الحل

$u=\ln x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du$

$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx = \int \frac{\cos u}{x}\times x\,du$

$=\int \cos u\,du$

$=\sin u + C$

$=\sin(\ln x)+C$

b) $\int x\,e^{x^2+1}\,dx$

الحل

$u=x^2+1 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x$

$\Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$

$\int xe^{x^2+1}dx=\int xe^{u}\times\frac{du}{2x}$

$=\int \frac{1}{2}e^{u}du \quad =\frac{1}{2}e^{u}+C$

$=\frac{1}{2}e^{x^2+1}+C$

c) $\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}}\,dx$

$u=2x^2+8x \Rightarrow \frac{du}{dx}=4x+8$

$\Rightarrow dx=\frac{du}{4x+8}$

$\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}}dx$

$=\int \frac{4x+8}{\sqrt{u}}\times\frac{du}{4x+8}$

$=\int \frac{1}{\sqrt{u}}du$

$=\int u^{-\frac{1}{2}}du \quad =2u^{\frac{1}{2}}+C$

$=2\sqrt{2x^2+8x}+C$

الشرط الأوَّلي

مثال (1)

من الحياة

أسعار: يُمثِّل الاقتران $p(x)$ سعر حذاء رياضي بالدينار، حيث x عدد الأحذية المَبيعة بالمئات إذا كان: $p'(x) = \frac{-136\,x}{\sqrt{9+x^2}}$ هو مُعدَّل التغيُّر في سعر الحذاء، فأجد $p(x)$، علمًا بأنَّ سعر الحذاء الواحد JD 30 عندما يكون عدد الأحذية المَبيعة 400 حذاء.

الحل

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران: $p'(x)$.

$p(x) = \int p'(x)\, dx$

$$p(x) = \int \frac{-136\,x}{\sqrt{9+x^2}}$$

أفترض أنَّ: $u = 9 + x^2$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

بتعويض $u = 9 + x^2,\ dx = \frac{du}{2x}$

$$p(x) = \int \frac{-136\,x}{\sqrt{9+x^2}}\, dx = \int \frac{-136\,x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x}$$

بالتبسيط، والصورة الأُسِّية

$$= -68 \int u^{-1/2}\, du$$

تكامل اقتــران القــوَّة المضروب في ثابت

$$= -136\, u^{1/2} + C$$

$$= -136\sqrt{u} + C$$ الصورة الجذرية

بتعويض $9 + x^2 = u$

$$= -136\sqrt{9+x^2} + C$$

الخطوة 2: أجد ثابت التكامل C.

قاعدة الاقتران

$$p(x) = -136\sqrt{9+x^2} + C$$

بتعويض $x = 4,\ p(4) = 30$

$$30 = -136\sqrt{9+(4)^2} + C$$

بالتبسيط

$$30 = -680 + C$$

بحَلِّ المعادلة

$$C = 710$$

إذن، الاقتران الذي يُمثِّل سعر الحذاء هو $p(x) = -136\sqrt{9+x^2} + 710$.

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 60

تجارة: يُمثِّل الاقتران $p(x)$ سعر القطعة الواحدة (بالدينار) من مُنتَج مُعيَّن، حيث x عدد القطع المَبيعة (بالمئات) من المُنتَج. إذا كان: $p'(x) = \frac{-300x}{\sqrt{(36+x^2)^3}}$ هو مُعدَّل التغيُّر في سعر القطعة الواحدة من المُنتَج فأجد $p(x)$، علمًا بأنَّ سعر القطعة الواحدة JD 75 عندما يكون عدد القطع المَبيعة 800 قطعة.

الحل

$$P(x) = \int \frac{-300x}{\sqrt{(36+x^2)^3}}\,dx$$

$$u = 36 + x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$P(x) = \int \frac{-300x}{\sqrt{(36+x^2)^3}}\,dx$$

$$= \int \frac{-300x}{u^{\frac{3}{2}}} \times \frac{du}{2x}$$

$$= -150 \int u^{-\frac{3}{2}}\,du$$

$$= 300u^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{300}{\sqrt{u}} + C$$

$$= \frac{300}{\sqrt{36+x^2}} + C$$

بما أن سعر القطعة الواحدة هو 75 ديناراً عندما يكون عدد القطع المبيعة 800 قطعة، إذن

$$P(8) = 75$$

$$P(x) = \frac{300}{\sqrt{36+x^2}} + C$$

$$P(8) = \frac{300}{\sqrt{36+4^2}} + C$$

$$75 = \frac{300}{\sqrt{52}} + C$$

$$C = 75 - \frac{300}{\sqrt{52}}$$

$$P(x) = \frac{300}{\sqrt{36+x^2}} + 75 - \frac{300}{\sqrt{52}}$$

مثال (3)

مسألة اليوم

يُمثِّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t ســاعة من حقنه في جســم مريض، حيث C مَقيسة بالملّيغرام لكل سنتيمتر مُكعَّب (mg/cm^3). إذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغيَّر بمُعــدَّل: $C'(t)=\frac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}$، فأجد مقدار التغيُّر في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثلاث الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

الحل

أولاً نجد تكامل الاقتران:

$$C(t)=\int\frac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}dt$$

$$u=t^2+16\Rightarrow\frac{du}{dt}=2t$$

$$\Rightarrow dt=\frac{du}{2t}$$

$$C(t)=\int\frac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}dt$$

$$=\int\frac{0.3t}{\sqrt{u}}\times\frac{du}{2t}$$

$$=0.15\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$=2u^{\frac{1}{2}}+K$$

$$=2\sqrt{u}+K$$

$$=2\sqrt{t^2+16}+K$$

بما أن مقدار تركيز الدواء في الدم في البداية هي **0**، إذن:

$$C(0)=0$$

$$C(t)=2\sqrt{t^2+16}+K$$

$$C(0)=2\sqrt{0^2+16}+K$$

$$0=8+K$$

$$K=-8$$

$$C(t)=2\sqrt{t^2+16}-8$$

$$C(3)=2\sqrt{(3)^2+16}-8=2$$

مقدار التغير في تركيز الدواء في الجسم خلال الساعات الثلاث الأولى من حقنه هو

$$2mg/cm^2$$

مثال (4)

من الحياة

زراعة: يُمثِّل الاقتران $V(t)$ سعر دونم أرض زراعية بالدينار بعد t سنة من الآن. إذا كان:

$$V'(t) = \frac{0.4t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 8000}}$$

هو مُعدَّل تغيُّر سعر دونم الأرض، فأجد $V(t)$ علمًا بأنَّ سعر دونم الأرض الآن هو JD 5000.

الحل

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران: $V'(t)$.

$$V(t) = \int V'(t)\, dt$$

$$V(t) = \int \frac{0.4t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 8000}}\, dt$$

أفترض أنَّ: $u = 0.2t^4 + 8000$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dt} = 0.8t^3 \Rightarrow dt = \frac{du}{0.8t^3}$$

بتعويض $u = 0.2t^4 + 8000,\ dt = \frac{du}{0.8t^3}$

$$V(t) = \int \frac{0.4t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 8000}}\, dt$$

$$= \int \frac{0.4t^3}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{0.8t^3}$$

بالتبسيط، والصورة الأُسِّية

$$= \frac{1}{2} \int u^{-1/2}\, du$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت $= u^{1/2} + C$

الصورة الجذرية $= \sqrt{u} + C$

بتعويض $u = 0.2t^4 + 8000$

$$= \sqrt{0.2t^4 + 8000} + C$$

الخطوة 2: أجد ثابت التكامل C.

قاعدة الاقتران $V(t) = \sqrt{0.2t^4 + 8000} + C$

بتعويض $t = 0,\ V(0) = 5000$

$$5000 = \sqrt{0.2(0)^4 + 8000} + C$$

بالتبسيط $5000 = 40\sqrt{5} + C$

بحلِّ المعادلة $C = 5000 - 40\sqrt{5}$

إذن، اقتران سعر دونم الأرض بعد t سنة من الآن هو:

$$V(t) = \sqrt{0.2t^4 + 8000} + 5000 - 40\sqrt{5}.$$

مثال (5)

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان سرعتة بعد t ثانية تعطى بالعلاقة $v(t) = 2t\sqrt{+t^2 + 4}$

جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد t ثانية علما بان موقعة الابتدائي $s(0) = 3$

الحل

$$s(t)=\int v(t)\,dt=\int 2t\sqrt{4t^2+4}\,dt$$

$$u=4t^2+4$$

$$\frac{du}{dt}=8t\rightarrow dt=\frac{du}{8t}$$

$$=\int 2t\sqrt{u}\times\frac{du}{8t}$$

$$\frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}du=\frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}}+c$$

$$S(0)=\frac{1}{6}(4)^{\frac{3}{2}}+c=3$$

$$c=\frac{5}{3}$$

$$s(t)=\frac{1}{6}(4t^2+4)^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{3}$$

مثال (6)

اذا كان ميل المماس لمنحنى $f(x)$ عند أي نقطة (x,y) يعطى بالعلاقة $4xe^{x^2}$ جد معادلة هذا المنحنى علما بن منحناه يمر بالنقطة $(0\ ,\ 3)$

الحل

$$f(x)=\int 4xe^{x^7}\,dx\rightarrow u=x^2\rightarrow\frac{du}{d^x}$$

$$=2x\rightarrow dx=\frac{du}{2x}$$

$$\int 4xe^u\times\frac{du}{2x}=\int 2e^u\,du=2e^u+c$$

$$f(0)=2e^0+c=1\rightarrow c=1$$

$$f(x)=2e^{x^2}+1$$

مثال (6)

يتحرك جسم بحيث ان سرعته تعطى بالعلاقه $v(t)=\frac{\ln t}{t}$ فاذا قطع مسافة 4m بعد ثانية من بدء الحركة جد موقع الجسم بعد مرور e^2 من الثواني

الحل

$$S(t)=\int\frac{\ln t}{t}dt$$

$$u=\ln t\rightarrow\frac{du}{dt}=\frac{1}{t}\rightarrow dt=t\,du$$

$$\int\frac{u}{t}\times t du=\int u\,du=\frac{u^2}{2}+c$$

$$=\frac{(\ln t)^2}{2}+c$$

$$s(0)=\tfrac{1}{2}(\ln(1))^2+c\ =4$$

$$c=4\rightarrow s(e^2)=\frac{1}{2}(\ln e^2)^2+4$$

$$=\frac{1}{2}(2)^2+4=6$$

التكامل بالتعويض للتكاملات المحدودة

توجد طريقتان لإيجاد قيمة تكامل محدود بالتعويض، هما: إيجاد التكامل أوّلًا ثم تعويض حدود التكامل أو تغيير حدود التكامل عند تغيير مُتغيِّر التكامل وهذه الطريقة هي أكثر تفضيلًا.

مفهوم أساسي

إذا كان g' متصلًا على $[a, b]$، وكان f متصلًا على مدى $u = g(x)$، فإنَّ:

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

مثال (1)

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1) $\int_1^2 4x(x^2+1)^3\, dx$

الحل

- أفترض أنَّ: $u = x^2 + 1$.

ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

- أُغيِّر حدود التكامل:

الحدُّ العلوي

$$x = 2 \Rightarrow u = (2)^2 + 1 = 5$$

الحدُّ السفلي

$$x = 1 \Rightarrow u = (1)^2 + 1 = 2$$

بتعويض $u = x^2 + 1,\ dx = \frac{du}{2x}$

$$\int_1^2 4x(x^2+1)^3\, dx = \int_2^5 4x\,(u)^3\, \frac{du}{2x}$$

$$= 2\int_2^5 u^3\, du$$ بالتبسيط

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= \frac{1}{2} u^4 \Big|_2^5$$

$$= \frac{1}{2}(5^4 - 2^4)$$ بالتعويض

$$= 304.5$$ بالتبسيط

2 $\int_{0}^{1} (x+1)\sqrt{x^2+2x}\, dx$

- أفترض أنَّ: $u = x^2 + 2x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2x + 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x+2}$$

- أُغيِّر حدود التكامل:

الحدُّ العلوي

$$x = 2 \Rightarrow u = (2)^2 + 1 = 5$$

الحدُّ السفلي

$$x = 1 \Rightarrow u = (1)^2 + 1 = 2$$

بتعويض $u = x^2 + 2x,\ dx = \frac{du}{2x+2}$

$$\int_{0}^{1} (x+1)\sqrt{x^2+2x}\, dx$$

$$= \int_{0}^{3} (x+1)\sqrt{u}\, \frac{du}{2x+2}$$

بإخراج 2 عاملًا مشتركًا من المقام

$$= \int_{0}^{3} (x+1)\sqrt{u}\, \frac{du}{2(x+1)}$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{3} \sqrt{u}\, du$$

الصورة الأُسِّية

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{3} u^{1/2}\, du$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{3} u^{3/2} \Big|_{0}^{3}$$

الصورة الجذرية

$$= \frac{1}{3}\sqrt{u^3} \Big|_{0}^{3}$$

بالتعويض

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{3^3} - \sqrt{0^3}\right)$$

بالتبسيط

$$= \sqrt{3}$$

---

3 $\int_{-1}^{3} 8x\, e^{x^2}\, dx$

- أفترض أنَّ: $u = x^2$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

- أُغيِّر حدود التكامل:

الحدُّ العلوي

$$x = 3 \Rightarrow u = (3)^2 = 9$$

الحدُّ السفلي

$$x = -1 \Rightarrow u = (-1)^2 = 1$$

بتعويض $u = x^2, dx = \dfrac{du}{2x}$

$$\int_{-1}^{3} 8x\, e^{x^2}\, dx = \int_{1}^{9} 8x\, e^{u}\, \frac{du}{2x}$$

بالتبسيط

$$= 4\int_{1}^{9} e^{u}\, du$$

تكامل الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي المضروب في ثابت

$$= 4\, e^{u}\Big|_{1}^{9}$$

بالتعويض

$$= 4(e^{9} - e^{1})$$

مثال (2) تحقق من فهمك صفحة 62

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2 (x^3 - 1)^4\, dx$

$$\int_{0}^{1} x^2(x^3-1)^4 dx$$

$$u = x^3 - 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$x = 0 \Rightarrow u = (0)^3 - 1 = -1$$

$$x = 1 \Rightarrow u = (1)^3 - 1 = 0$$

$$\int_{0}^{1} x^2(x^3-1)^4 dx = \int_{-1}^{0} x^2 u^4 \frac{du}{3x^2}$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{3} u^4 du$$

$$= \frac{1}{15} u^5\Big|_{-1}^{0}$$

$$= (\frac{1}{15}(0)^5) - (\frac{1}{15}(-1)^5)$$

$$= \frac{1}{15}$$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{(2 - x^4)^7}\, dx$

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{(2-x^4)^7} dx$$

$$u = 2 - x^4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -4x^3$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-4x^3}$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 2 - (0)^4 = 2$$

$$x = -1 \Rightarrow u = 2 - (-1)^4 = 1$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{x^3}{(2-x^4)^7}dx=\int_{1}^{2}\frac{x^3}{u^7}\times\frac{du}{-4x^3}$$

$$=\int_{1}^{2}-\frac{1}{4}u^{-7}du$$

$$=\frac{1}{24}u^{-6}\Big|_{1}^{2}$$

$$=\frac{1}{24u^6}\Big|_{1}^{2}$$

$$=\left(\frac{1}{24(2)^6}\right)-\left(\frac{1}{24(1)^6}\right)$$

$$=-\frac{21}{512}$$

---

c) $\displaystyle\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}\,dx$

$$\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}dx$$

$$u=\ln x\Rightarrow\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow dx=x\,du$$

$$x=e\Rightarrow u=\ln e=1$$

$$x=1\Rightarrow u=\ln 1=0$$

$$\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}dx=\int_{0}^{1}\frac{u}{x}x\,du$$

$$=\int_{0}^{1}u\,du$$

$$=\frac{1}{2}u^2\Big|_{0}^{1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}(1)^2\right)-\left(\frac{1}{2}(0)^2\right)$$

مثال (3)

جد قيمة التكامل التالي

$$\int_{1}^{25}\frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx$$

- أفترض أنَّ: $u=\sqrt{2x-1}$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

بتربيع طرفي المعادلة

$$u=\sqrt{2x-1}\Longrightarrow u^2=2x-1$$

$$\Longrightarrow x=\frac{1}{2}(u^2+1)$$

$$2u\frac{du}{dx}=2\Longrightarrow dx=u\,du$$

- أغيِّرُ حدود التكامل:

الحدُّ العلوي

$$x = 25 \Rightarrow u = \sqrt{2(25) - 1} = 7$$

الحدُّ السفلي

$$x = 1 \Rightarrow u = \sqrt{2(1) - 1} = 1$$

بتعويض $u = \sqrt{2x-1}$, $x = \frac{1}{2}(u^2+1), dx = u\,du$

$$\int_1^{25} \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\, dx = \int_1^7 \frac{1}{2} \times \frac{u^2+1}{u} \times u\, du$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}\int_1^7 (u^2+1)\, du$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}u^3 + u\right)\Big|_1^7$$

بالتعويض

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}(7)^3 + 7\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 + 1\right)\right)$$

بالتبسيط

$$= 60$$

مثال (4)

اذا علمت ان

$$f(4) = 12 \qquad f(1) = -8$$

فاحسب قيمة

$$\int_1^2 2x f'(x^2)\, dx$$

الحل

$$u = x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$u = -1 \rightarrow x = 1$$

$$u = 2 \rightarrow u = 4 \int_1^4 2x f'(u) \times \frac{du}{2x}$$

$$= \int_1^4 f'(u)\, du$$

مثال (4)

اذا علمت ان

$$f(1) = 1 \qquad f(2) = 4$$

فاحسب قيمة

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} f'(\sqrt{x})\, dx$$

الحل

$$u = \sqrt{x} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow dx = 2\sqrt{x}\, du$$

$$x = 1 \rightarrow u = \sqrt{1} = 1$$

$$x = 4 \rightarrow u = \sqrt{4} = 2$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} f'(u) \times 2\sqrt{x}\, du$$

$$2\int_1^2 f'(u)\, du = 2\big(f(2) - f(1)\big) = 6$$

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

الحل

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

$$u = x^2+4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x}$$

$$= \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du$$

$$= \int \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$= u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \sqrt{x^2+4} + C$$

2 $\int x^2 (2x^3+5)^4\,dx$

الحل

$$\int x^2(2x^3+5)^4 dx$$

$$u = 2x^3+5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x^2$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{6x^2}$$

$$\int x^2(2x^3+5)^4 dx = \int x^2 u^4 \times \frac{du}{6x^2}$$

$$= \int \frac{1}{6} u^4 du$$

$$= \frac{1}{30} u^5 + C$$

$$= \frac{1}{30}(2x^3+5)^5 + C$$

3 $\int 3x\sqrt{x^2+7}\,dx$

الحل

$$\int 3x\sqrt{x^2+7}\,dx$$

$$u = x^2+7 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

5 $\int \frac{x^4}{(x^5+9)^3}\,dx$

الحل

$$\int \frac{x^4}{(x^5+9)^3}dx$$

$$u = x^5+9 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 5x^4$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{5x^4}$$

$$\int \frac{x^4}{(x^5+9)^3}dx = \int \frac{x^4}{u^3} \times \frac{du}{5x^4}$$

$$= \int \frac{1}{5}u^{-3}du \qquad = -\frac{1}{10}u^{-2} + C$$

$$= -\frac{1}{10(x^5+9)^2} + C$$

6 $\int (3x^2-1)\,e^{x^3-x}\,dx$

الحل

$$\int (3x^2-1)e^{x^3-x}dx$$

$$u = x^3-x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2-1$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2-1}$$

$$\int 3x\sqrt{x^2+7}\,dx = \int 3x\sqrt{u} \times \frac{du}{2x}$$

$$= \int \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}du \qquad = u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \sqrt{(x^2+7)^3} + C$$

4 $\int x^6\,e^{1-x^7}\,dx$

الحل

$$\int x^6 e^{1-x^7}dx$$

$$u = 1-x^7 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -7x^6$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-7x^6}$$

$$\int x^6 e^{1-x^7}dx = \int x^6 e^u \times \frac{du}{-7x^6}$$

$$= \int -\frac{1}{7}e^u du$$

$$= -\frac{1}{7}e^u + C$$

$$= -\frac{1}{7}e^{1-x^7} + C$$

8 $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx$

الحل

$\int \frac{1}{x\ln x} dx$

$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow dx = x du$

$\int \frac{1}{x\ln x} dx = \int \frac{1}{xu} \times x du$

$= \int \frac{1}{u} du$

$= \ln|u| + C$

$= \ln|\ln x| + C$

9 $\int \sin x \, (1 + \cos x)^4 \, dx$

الحل

$\int \sin x (1 + \cos x)^4 dx$

$u = 1 + \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$

$\int (3x^2 - 1) e^{x^3 - x} dx$

$= \int (3x^2 - 1) e^u \frac{du}{3x^2 - 1}$

$= \int e^u du \qquad = e^u + C$

$= e^{x^3 - x} + C$

7 $\int \frac{3x - 3}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}} \, dx$

الحل

$\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}} dx$

$u = x^2 - 2x + 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x - 2$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x - 2}$

$= \int \frac{3}{2} u^{-\frac{1}{2}} du \quad = 3u^{\frac{1}{2}} + C$

$= 3\sqrt{x^2 - 2x + 4} + C$

$\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}} dx$

$= \int \frac{3x - 3}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x - 2}$

$= \int \frac{3(x-1)}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2(x-1)}$

$$\int \sin x(1+\cos x)^4 dx$$

$$= \int \sin x\, u^4 \times \frac{du}{-\sin x}$$

$$= \int -u^4 du$$

$$= -\frac{1}{5}u^5 + C$$

$$= -\frac{1}{5}(1+\cos x)^5 + C$$

---

10 $\int \sin^5 2x \cos 2x \; dx$

الحل

$$\int \sin^5 2x \cos 2x dx$$

$$u = \sin 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2\cos 2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2\cos 2x}$$

$$\int \sin^5 2x \cos 2x dx$$

$$= \int u^5 \cos 2x \times \frac{du}{2\cos 2x}$$

$$= \int \frac{1}{2} u^5 du$$

$$= \frac{1}{12}u^6 + C$$

$$= \frac{1}{12}(\sin 2x)^6 + C$$

---

11 $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} \; dx$

الحل

$$\int \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^2} dx$$

$$u = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow dx = -x^2 du$$

$$\int \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^2} dx = \int \frac{\sin(u)}{x^2} \times -x^2 du$$

$$= \int -\sin u du$$

$$= \cos u + C$$

$$= \cos(\frac{1}{x}) + C$$

12 $\displaystyle\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}}\,dx$

الحل

$$\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}}dx$$

$$u=\sin x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\cos x$$

$$\Rightarrow dx=\frac{du}{\cos x}$$

$$\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}}dx=\int \frac{\cos x}{e^{u}}\times\frac{du}{\cos x}$$

$$=\int \frac{1}{e^{u}}du$$

$$=\int e^{-u}du$$

$$=-e^{-u}+C$$

$$=-e^{-\sin x}+C$$

$$=-\frac{1}{e^{\sin x}}+C$$

---

13 $\displaystyle\int e^{x}(2+e^{x})^{5}\,dx$

الحل

$$\int e^{x}(2+e^{x})^{5}dx$$

$$u=2+e^{x}\Rightarrow\frac{du}{dx}=e^{x}$$

$$\Rightarrow dx=\frac{du}{e^{x}}$$

$$\int e^{x}(2+e^{x})^{5}dx$$

$$=\int e^{x}u^{5}\times\frac{du}{e^{x}}$$

$$=\int u^{5}du$$

$$=\frac{1}{6}u^{6}+C=\frac{1}{6}(2+e^{x})^{6}+C$$

---

14 $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

الحل

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$$

$$u=\ln x\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow dx=x\,du$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx=\int \frac{\cos(u)}{x}\times x\,du$$

$$=\int \cos u\,du$$

$$=\sin u+C$$

$$=\sin(\ln x)+C$$

15 $\int (3x^2-2x-1)(x^3-x^2-x)^4\, dx$

الحل

$$\int (3x^2-2x-1)(x^3-x^2-x)^4 dx$$

$$u = x^3 - x^2 - x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 - 2x - 1$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2-2x-1}$$

$$\int (3x^2-2x-1)(x^3-x^2-x)^4 dx$$

$$= \int (3x^2-2x-1) u^4 \times \frac{du}{3x^2-2x-1}$$

$$= \int u^4 du$$

$$= \frac{1}{5} u^5 + C$$

$$= \frac{1}{5}(x^3-x^2-x)^5 + C$$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

16 $\int_0^2 (2x-1)\, e^{x^2-x}\, dx$

الحل

$$\int_0^2 (2x-1) e^{x^2-x} dx$$

$$u = x^2 - x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x - 1$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x-1}$$

$$x = 2 \Rightarrow u = (2)^2 - 2 = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow u = (0)^2 - 0 = 0$$

$$\int_0^2 (2x-1) e^{x^2-x} dx$$

$$= \int_0^2 (2x-1) e^u \frac{du}{2x-1}$$

$$= \int_0^2 e^u du \quad = e^u \Big|_0^2$$

$$= e^2 - e^0 \quad = e^2 - 1$$

17 $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$

الحل

$$\int_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx$$

$$u = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow dx = -x^2 du$$

$$x = 2 \Rightarrow u = \frac{1}{2}$$

$$x^2 = \frac{1}{x^{\frac{1}{x}}} dx = \int_{1}^{\frac{1}{2}} \frac{e^u}{x^2} \times -x^2 du$$

$$= \int_{1}^{\frac{1}{2}} -e^u du$$

$$= -e^u \Big|_{1}^{\frac{1}{2}} \quad = -e^{\frac{1}{2}} + e$$

$$= -\sqrt{e} + e$$

18 $\displaystyle\int_{e}^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx$

$$\int_{e}^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow dx = x\,du$$

$$x = e^3 \Rightarrow u = \ln e^3 = 3$$

$$x = e \quad \Rightarrow u = \ln e = 1$$

$$\int_{e}^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int_{1}^{3} \frac{\sqrt{u}}{x} x\,du$$

$$= \int_{1}^{3} u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_{1}^{3} \qquad = \frac{2}{3}\sqrt{u^3}\Big|_{1}^{3}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3^3} - \frac{2}{3}\sqrt{1^3}$$

$$= 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$$

19 $\displaystyle\int_{0}^{1} (x^3 + x)\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}\; dx$

الحل

$$\int_{0}^{1} (x^3 + x)\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}\, dx$$

$$u = x^4 + 2x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x^3 + 4x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{4x^3 + 4x}$$

$$x = 1 \Rightarrow u = (1)^4 + 2(1)^2 + 1 = 4$$

$$x = 0 \Rightarrow u = (0)^4 + 2(0)^2 + 1 = 1$$

$$= \int_1^4 (x^3+x)\sqrt{u} \times \frac{du}{4x^3+4x}$$

$$= \int_1^4 (x^3+x)\sqrt{u} \times \frac{du}{4(x^3+x)}$$

$$= \int_1^4 \frac{1}{4} u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{6} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 \qquad = \frac{1}{6}\sqrt{u^3}\Big|_1^4$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{4^3} - \frac{1}{6}\sqrt{1^3} \quad = \frac{7}{6}$$

---

20 $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$

الحل

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$u = x^2+1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$x = 3 \Rightarrow u = 10$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_1^{10} \frac{x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x}$$

$$= \int_1^{10} \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= u^{\frac{1}{2}} \Big|_1^{10}$$

$$= \sqrt{u}\Big|_1^{10}$$

$$= \sqrt{10} - 1$$

---

21 $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+4)^3}\, dx$

الحل

$$\int_1^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+4)^3} dx$$

$$u = x^2+x+4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x+1$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x+1}$$

$$x = 2 \Rightarrow u = (2)^2+2+4 = 10$$

$$x = 1 \Rightarrow u = (1)^2+1+4 = 6$$

$$= \int_{6}^{10} \frac{2x+1}{u^3} \times \frac{du}{2x+1}$$

$$\int_{1}^{2} \frac{2x+1}{(x^2+x+4)^3} dx$$

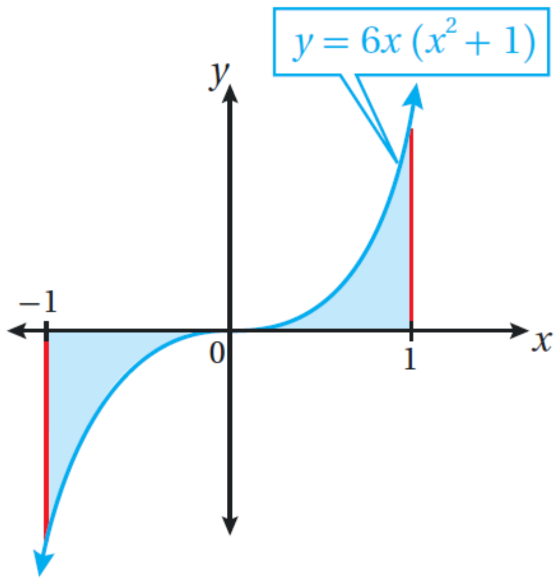
$$= \int_{6}^{10} u^{-3} du$$

$$= -\frac{1}{2} u^{-2} \Big|_{6}^{10}$$

$$= -\frac{1}{2u^2} \Big|_{6}^{10}$$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

22



$$A = -\int_{-1}^{0} 6x(x^2+1)\,dx + \int_{0}^{1} 6x(x^2+1)\,dx$$

هناك طريقتان للحل: إما التكامل بالتعويض، أو تكامل كثير حدود بعد توزيع الأقواس.

طريقة التكامل بالتعويض

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$x = 0 \Rightarrow u = (0)^2 + 1 = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow u = (-1)^2 + 1 = 2$$

$$x = 1 \Rightarrow u = (1)^2 + 1 = 2$$

$$A = -\int_{-1}^{0} 6x(x^2+1)\,dx$$

$$+ \int_{0}^{1} 6x(x^2+1)\,dx$$

$$= -\int_{2}^{1} 6xu \times \frac{du}{2x} + \int_{1}^{2} 6xu \times \frac{du}{2x}$$

$$= -\int_{2}^{1} 3u\,du + \int_{1}^{2} 3u\,du$$

$$= -\frac{3}{2}u^2\Big|_{2}^{1} + \frac{3}{2}u^2\Big|_{1}^{2}$$

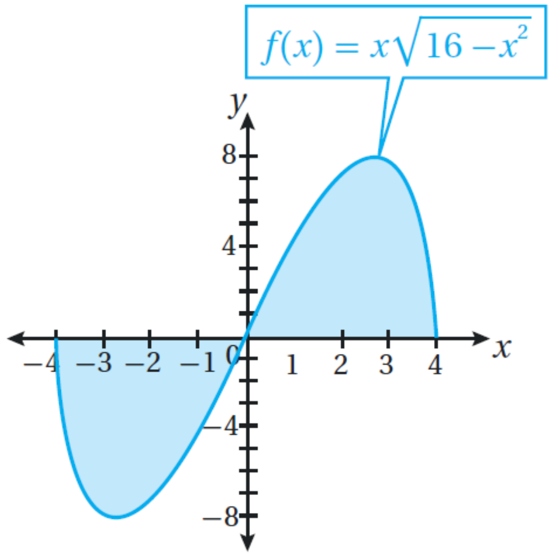
$$= -\frac{3}{2}(1)^2 + \frac{3}{2}(2)^2$$

$$+ \frac{3}{2}(2)^2 - \frac{3}{2}(1)^2$$

$$= 9$$

ومنه مساحة المنطقة المظللة هي 9 وحدات مربعة.

23



الحل

$$A = -\int_{-4}^{0} x\sqrt{16-x^2}\,dx + \int_{0}^{4} x\sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$u = 16 - x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 16 - (0)^2 = 16$$

$$x = -4 \Rightarrow u = 16 - (-4)^2 =$$

$$x = 4 \Rightarrow u = 16 - (4)^2 = 0$$

$$A = -\int_{-4}^{0} x\sqrt{16-x^2}\,dx + \int_{0}^{4} x\sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$= -\int_{0}^{16} x\sqrt{u} \times \frac{du}{-2x} + \int_{16}^{0} x\sqrt{u} \times \frac{du}{-2x}$$

$$= \int_{0}^{16} \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}}\,du + \int_{16}^{0} -\frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_{0}^{16} + -\frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_{16}^{0}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{u^3}\Big|_{0}^{16} + -\frac{1}{3}\sqrt{u^3}\Big|_{16}^{0}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(16)^3} - \frac{1}{3}\sqrt{(0)^3} - \frac{1}{3}\sqrt{(0)^3} + \frac{1}{3}\sqrt{(16)^3}$$

$$= \frac{128}{3}$$

ومنه مساحة المنطقة المظللة هي

$$\frac{128}{3}$$

في كلٍّ ممّا يأتي المشـــتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$

أســـتعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

24 $f'(x) = xe^{4-x^2}; (-2, 1)$

الحل

$$f(x) = \int xe^{4-x^2} dx$$

$$u = 4 - x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$$

$$f(x) = \int xe^{4-x^2} dx$$

$$= \int xe^{u} \frac{du}{-2x}$$

$$= \int -\frac{1}{2} e^{u} du$$

$$= -\frac{1}{2} e^{u} + C$$

$$= -\frac{1}{2} e^{4-x^2} + C$$

لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(-2 \ , \ 1)$

$$f(x) = -\frac{1}{2} e^{4-x^2} + C \Rightarrow f(-2)$$

$$= -\frac{1}{2} e^{4-(-2)^2} + C$$

$$\Rightarrow \quad 1 = -\frac{1}{2} + C \quad \Rightarrow C = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} e^{4-x^2} + \frac{3}{2}$$

25 $f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}; (0, -1)$

الحل

$$f(x) = \int \frac{2x}{(1-x^2)^2} dx$$

$$u = 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$$

$$f(x) = \int \frac{2x}{(1-x^2)^2} dx$$

$$= \int \frac{2x}{u^2} \times \frac{du}{-2x}$$

$$= \int -u^{-2} du$$

$$= u^{-1} + C$$

$$= \frac{1}{1-x^2} + C$$

لإيجاد ثابت التكامل، نعوض النقطة $(0, -1)$

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} + C \Rightarrow f(0) = \frac{1}{1-0^2} + C$$

$$\Rightarrow -1 = 1 + C$$

$$\Rightarrow C = -2$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2} - 2$$

26 يتحرَّك جُسَـيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \frac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}$ حيث t الزمن بالثواني و v سـرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَـيْم 4 m فأجد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

الحل

$$s(t) = \int \frac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}\, dt$$

$$u = 1 + t^2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2t$$

$$\Rightarrow dt = \frac{du}{2t}$$

$$\int \frac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}\, dt = \int \frac{-2t}{\sqrt{u^3}} \times \frac{du}{2t}$$

$$= \int -u^{-\frac{3}{2}}\, du$$

$$= 2u^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + C$$

بما أن الموقع الابتدائي للجسيم 4m اذن $s(0) = 4$

$$s(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + C$$

$$\Rightarrow f(0) = \frac{2}{\sqrt{1+0^2}} + C$$

$$\Rightarrow 4 = 2 + C$$

$$\Rightarrow C = 2$$

$$s(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + 2$$

27 زراعـة: يُمثِّل الاقتران $V(t)$ سـعر دونم أرض زراعية فـي الأغوار الأردنية (بالدينار) بعد t سـنة من الآن. إذا كان: $V'(t) = \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4 + 8000}}$ هو مُعدَّل التغيُّر في سعر دونم الأرض، فأجد $V(t)$ علمًا بأنَّ سعره الآن JD 5000.

الحل

$$V(t)=\int \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4+8000}}\,dt$$

$$u=0.2t^4+8000 \Rightarrow \frac{du}{dt}=0.8t^3$$

$$\Rightarrow dt=\frac{du}{0.8t^3}$$

$$V(t)=\int \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4+8000}}\,dx$$

$$=\int \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{u}} \times \frac{du}{0.8t^3}$$

$$=\int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{3}}\,du$$

$$=\frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}+C$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt[3]{u^2}+C$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2t^4+8000)^2}+C$$

بما أن سعر دونم الأرض الآن هو 5000 دينار اذن
$v(0)=5000$

$$V(t)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2t^4+8000)^2}+C$$

$$V(0)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2(0)^4+8000)^2}+C$$

$$5000=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(8000)^2}+C$$

$$5000=\frac{400}{3}+C$$

$$C=\frac{14600}{3}$$

$$V(t)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{(0.2t^4+8000)^2}+\frac{14600}{3}$$

---

28 سكّان: أشارت دراسة إلى أنَّ عدد السكّان في إحدى المدن يتغيَّر سنويًّا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t)=\dfrac{4e^{0.2t}}{\sqrt{4+e^{0.2t}}}$ حيث t عدد السنوات منذ عام 2015م، و $P(t)$ عدد السكّان بالآلاف. أجد مقدار الزيادة في عدد سكّان المدينة من عام 2015م إلى عام 2025م.

الحل

$$\Rightarrow dt=\frac{du}{0.2e^{0.2t}}$$

$$t=10 \Rightarrow u=4+e^{0.2(10)}=4+e^2$$

$$t=0 \Rightarrow u=4+e^{0.2(0)}=5$$

$$\int_0^{10} \frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{4+e^{0.2t}}}\,dt$$

$$=\int_5^{4+e^2} \frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{0.2e^{0.2t}}$$

$$=\int_5^{4+e^2} 20u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$= 40u^{\frac{1}{2}}\Big|_5^{4+e^2} \qquad = 40\sqrt{u}\Big|_5^{4+e^2}$$

$$= 40\sqrt{4+e^2} - 40\sqrt{5} \qquad \approx 46$$

مهارات التفكير العليا

29 أكتشف المُختلِف: أيُّ التكاملات الآتية مُختلِف مُبرِّرًا إجابتي؟

$\int 3x^2 e^{1+x^3}\ dx$	$\int \frac{2x+3}{(x^2+3x)^2}\ dx$
$\int x(x^3+1)\ dx$	$\int x\cos x^2\ dx$

المختلف هو $\int x(x^3+1)\,dx$ لأنه الوحيد الذي لا يحل بطريقة التكامل بالتعويض.

30 أكتشف الخطأ: أوجدت سعاد ناتج التكامل: $\int_0^1 8x(x^2+1)^3\,dx$ وكان حَلُّها على النحو الآتي:

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3\ dx = \int_0^1 8x \times u^3 \times \frac{du}{2x}$$

$$= \int_0^1 4u^3\,du$$

$$= u^4\Big|_0^1$$

$$= 1$$

أكتشف الخطأ في حَلِّ سعاد، ثم أُصحِّحه.

الخطأ الذي ارتكبته سعاد هو أنها لم تغير حدود التكامل.

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3 dx$$

$$u = x^2+1 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2x$$

$$\Rightarrow dt = \frac{du}{2x}$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 1^2+1 = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0^2+1 = 1$$

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3 dx = \int_1^2 8xu^3 \frac{du}{2x}$$

$$= \int_1^2 4u^3 du$$

$$= u^4\Big|_1^2$$

$$= (2)^4 - (1)^4$$

$$= 15$$

31 تحدٍّ: إذا كان:

$$\int_0^k kx^2 e^{x^3}\, dx = \frac{2}{3}(e^8 - 1)$$

فأجد قيمة الثابت k.

$$\int_0^k kx^2 e^{x^3} dx$$

$$u = x^3 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 3x^2$$

$$\Rightarrow dt = \frac{du}{3x^2}$$

$$x = k \Rightarrow u = k^3$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0^3 = 0$$

$$\int_0^k kx^2 e^{x^3} dx = \int_0^{k^3} kx^2 e^u \frac{du}{3x^2}$$

$$= \int_0^{k^3} \frac{k}{3} e^u du$$

$$= \frac{k}{3} e^u \Big|_0^{k^3} - \frac{k}{3} e^0$$

$$= \frac{k}{3} e^{k^3} - \frac{k}{3}$$

$$\int_0^k kx^2 e^{x^3} dx = \frac{2}{3}(e^8 - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{k}{3} e^{k^3} - \frac{k}{3} = \frac{2}{3}(e^8 - 1)$$

تمارين ومسائل كتاب التمارين صفحة 14

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int x\sqrt{x^2+3}\ dx$

$$\int x\sqrt{x^2+3}\,dx$$

$$u=x^2+3 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x \Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$$

$$\int x\sqrt{x^2+3}\,dx=\int xu^{\frac{1}{2}}\frac{du}{2x}=\int\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}du$$

$$=\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+3)^3}+C$$

2 $\int x^4 e^{x^5+2}\ dx$

$$\int x^4e^{x^5+2}dx$$

$$u=x^5+2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=5x^4 \Rightarrow dx=\frac{du}{5x^4}$$

$$\int x^4e^{x^5+2}dx=\int x^4e^u\frac{du}{5x^4}=\int_0\frac{1}{5}e^u du$$

$$=\frac{1}{5}e^u+C=\frac{1}{5}e^{x^5+2}+C$$

3 $\int (x+1)(x^2+2x+5)^4\ dx$

$$\int(x+1)(x^2+2x+5)^4dx$$

$$u=x^2+2x+5 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x+2 \Rightarrow$$

$$dx=\frac{du}{2x+2}$$

$$\int(x+1)(x^2+2x+5)^4dx=$$

$$\int(x+1)u^4\frac{du}{2x+2}=\int\frac{1}{2}u^4du$$

$$=\frac{1}{10}u^5+C=\frac{1}{10}(x^2+2x+5)^5+C$$

4 $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\ dx$

$$\int\frac{(\ln x)^3}{x}dx$$

$$u=\ln x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow dx=x\,du$$

$$\int\frac{(\ln x)^3}{x}dx=\int\frac{u^3}{x}x\,du=\int_0 u^3du$$

$$=\frac{1}{4}u^4+C=\frac{1}{4}(\ln x)^4+C$$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

5) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\, dx$

الحل

$$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$$

$$u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\cos x}{u^4} \frac{du}{\cos x} = \int u^{-4} du$$

$$= -\frac{1}{3}u^{-3} + C = -\frac{1}{3}(\sin x)^{-3} + C$$

6) $\int \sin x \sqrt{1 + 3\cos x}\, dx$

الحل

$$\int \sin x \sqrt{1 + 3\cos x}\, dx$$

$$u = 1 + 3\cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -3\sin x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-3\sin x}$$

$$\int \sin x \sqrt{1 + 3\cos x}\, dx$$

$$= \int \sin x\, u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{-3\sin x} = \int -\frac{1}{3} u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= -\frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9}\sqrt{(1 + 3\cos x)^3} + C$$

7) $\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^2}\, dx$

الحل

$$\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx$$

$$u = x^3 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$x = 2 \Rightarrow u = 9$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 2$$

$$\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx$$

$$= \int_2^9 \frac{x^2}{u^2} \frac{du}{3x^2} = \int_2^9 \frac{1}{3} u^{-2} du$$

$$= -\frac{1}{3u}\Big|_2^9 = -\frac{1}{27} + \frac{1}{6} = \frac{21}{162}$$

8) $\int_0^1 x\sqrt{3x^2 + 2}\, dx$

الحل

$$\int_0^1 x\sqrt{3x^2+2}\,dx$$

$$u = 3x^2+2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x \Rightarrow dx = \frac{du}{6x}$$

$x = 1 \Rightarrow u = 5$

$x = 0 \Rightarrow u = 2$

$$\int_0^1 x\sqrt{3x^2+2}\,dx = \int_2^5 x u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{6x}$$

$$= \int_2^5 \frac{1}{6} u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{9} u^{\frac{3}{2}} \Big|_2^5 = \frac{1}{9}\sqrt{125} - \frac{1}{9}\sqrt{8}$$

9 $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

$$\int_e^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du$$

$x = e \Rightarrow u = 1$

$x = e^2 \Rightarrow u = 2$

$$\int_e^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$$

$$= \int_1^2 \frac{u^2}{x} x\,du = \int_1^2 u^2 du$$

$$= \frac{1}{3}u^3\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

10 $\displaystyle\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^5\,dx$

الحل

$$\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^5 dx$$

$$u = x^2+2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x+2$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x+2}$$

$x = 1 \Rightarrow u = 3$

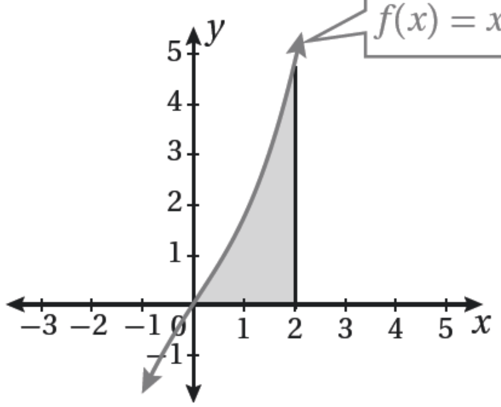
$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$$\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^5 dx =$$

$$\int_0^3 (x+1)u^5 \frac{du}{2x+2} = \int_0^3 \frac{1}{2}u^5 du$$

$$= \frac{1}{12}u^6\Big|_0^3 = \frac{729}{12}$$

11 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في التمثيل البياني المجاور.



الحل

$$A=\int_0^2 x\sqrt{x^2+2}\,dx$$

$$u=x^2+2\Rightarrow \frac{du}{dx}=2x\Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$$

$$x=2\Rightarrow u=6$$

$$x=0\Rightarrow u=2$$

$$\int_0^2 x\sqrt{x^2+2}\,dx$$

$$=\int_2^6 x u^{\frac{1}{2}}\frac{du}{2x}=\int_2^6 \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}du$$

$$=\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_2^6=\frac{1}{3}\sqrt{216}-\frac{1}{3}\sqrt{8}$$

---

12 **الإيراد الحدِّي:** يُمثِّل الاقتران: $R'(x)=50+3.5xe^{-0.1x^2}$ الإيراد الحدِّي (بالدينار) لكل قطعة تباع من إنتاج إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المَبيعة، و$R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار أجد اقتران الإيراد $R(x)$، علمًا بأنَّ $R(0)=0$.

الحل

$$R(x)=\int(50+3.5xe^{-0.1x^2})dx$$

$$=\int 50dx+\int 3.5xe^{-0.1x^2}dx$$

$$=50x+\int 3.5xe^{-0.1x^2}dx$$

$$u=-0.1x^2\Rightarrow \frac{du}{dx}=-0.2x$$

$$\Rightarrow dx=\frac{du}{-0.2x}$$

$$\int(50+3.5xe^{-0.1x^2})dx$$

$$=50x+\int 3.5xe^{u}\frac{du}{-0.2x}$$

$$=50x+\int -17.5e^{u}du$$

$$=50x-17.5e^{-0.1x^2}+C$$

$$R(0)=0\Rightarrow 0-17.5+C=0$$

$$\Rightarrow C=17.5$$

يُمثِّل الاقتران $f'(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ المارِّ بالنقطة المعطاة. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

13 $f'(x)=2x(4x^2-10)^2;\ (2,10)$

الحل

$$f(x)=\int 2x(4x^2-10)^2dx$$

$$u=4x^2-10 \Rightarrow \frac{du}{dx}=8x \Rightarrow dx=\frac{du}{8x}$$

$$\int 2x(4x^2-10)^2dx=\int 2xu^2\frac{du}{8x}$$

$$=\int \frac{1}{4}u^2du=\frac{1}{12}u^3+C$$

$$f(2)=10 \Rightarrow 18+C=10$$

$$\Rightarrow C=-8$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{12}(4x^2-10)^3-8$$

---

14 $f'(x)=x^2e^{-0.2x^3}\ ,\ (0,\frac{3}{2})$

$$f(x)=\int x^2e^{-0.2x^3}dx$$

$$u=-0.2x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx}=-0.6x^2$$

$$\Rightarrow dx=\frac{du}{-0.6x^2}$$

$$\int x^2e^{-0.2x^3}dx=\int x^2e^u\frac{du}{-0.6x^2}$$

$$=\int e^u\frac{du}{-0.6}$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{5}{3}e^{-0.2x^3}+C$$

$$f(0)=\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{5}{3}e^u du :$$

$$=-\frac{5}{3}e^{-0.2x^3}+C$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{5}{3}e^{-0.2x^3}+\frac{19}{6}$$

---

15 يتحرَّك جُسَــيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل فأجد موقعه بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

$$s(t)=\int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

$$u=t^2+1 \Rightarrow \frac{du}{dt}=2t \Rightarrow dt=\frac{du}{2t}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt=\int u^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{2t}$$

$$=\int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du=u^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{t^2+1}+C$$

$$s(t)=\sqrt{t^2+1}+C$$

$$s(0)=0 \Rightarrow 1+C=0 \Rightarrow C=-1$$

$$s(t)=\sqrt{t^2+1}-1$$

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 قيمة: $\int \frac{x^3-1}{x^2}$ هي:

a) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + C$ b) $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C$

c) $x^2 - \frac{1}{x} + C$ d) $x^2 + \frac{1}{x} + C$

$$\int \frac{x^3-1}{x^2}dx = \int (\frac{x^3}{x^2} - \frac{1}{x^2})dx$$

$$= \int (x - x^{-2})dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x^{-1} + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + C......(b)$$

2 إذا كان: $\int_0^2 kx \ dx = 6$،

فإنَّ قيمة الثابت k هي:

a) 1 b) 2

c) 3 d) 4

$$\int_0^2 kxdx = 6 \Rightarrow \frac{k}{2}x^2\Big|_0^2 = 6$$

$$\Rightarrow \frac{k}{2}(2)^2 - \frac{k}{2}(0)^2 = 6$$

$$\Rightarrow 2k = 6$$

$$\Rightarrow k = 3..................(c)$$

3 قيمة: $\int_0^3 (-x^2+3x) \ dx$ هي:

a) $3\frac{3}{4}$ b) $21\frac{1}{4}$

c) $4\frac{1}{2}$ d) $22\frac{1}{2}$

$$= (-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2)\Big|_0^3$$

$$= (-\frac{1}{3}(3)^3 + \frac{3}{2}(3)^2)$$

$$-(-\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{3}{2}(0)^2)$$

$$= \frac{9}{2}..................(c)$$

4 قيمة: $\int_0^2 e^{2x}\, dx$ هي:

a) $e^4 - 1$　　b) $e^4 - 2$

c) $2e^4 - 2$　　d) $\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}$

$$\int_0^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^2$$
$$= \frac{1}{2}e^{2(2)} - \frac{1}{2}e^{2(0)}$$
$$= \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}.................(d)$$

5 قيمة: $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ هي:

a) -2　　b) $-\frac{7}{16}$

c) $\frac{1}{2}$　　d) 2

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} dx$$
$$= 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4$$
$$= 2\sqrt{x}\Big|_1^4$$
$$= 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1}$$
$$= 2...............(d)$$

6 التكامل المحدود الذي يُمكِن عن طريقه إيجاد المساحة بين منحنى الاقتران $f(x) = 4x - x^2$، والمحور x هو:

a) $\int_4^0 (4x - x^2)\ dx$　b) $\int_0^4 (4x - x^2)\ dx$

c) $\int_1^0 (4x - x^2)\ dx$　d) $\int_0^1 (4x - x^2)\ dx$

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الآتية:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 4x - x^2 = 0$$
$$\Rightarrow x(4 - x) = 0$$
$$\Rightarrow x = 0, x = 4$$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عدداً ضمن الفترة $[0,4]$، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(1) = 4(1) - (1)^2 = 3 > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة[0,4]

والتكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه إيجاد المساحة المطلوبة هو

$$\int_0^4 (4x - x^2)\,dx$$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

7 $\int 3x^{-1/2}\, dx$

$$\int 3x^{-\frac{1}{2}}\, dx = 6x^{\frac{1}{2}} + C$$

8 $\int (8x - 10x^2)\, dx$

$$\int (8x - 10x^2)\, dx = 4x^2 - \frac{10}{3}x^3 + C$$

9 $\int \frac{5}{x^3}\, dx$

$$\int \frac{5}{x^3}\, dx = \int 5x^{-3}\, dx$$
$$= -\frac{5}{2}x^{-2} + C$$
$$= -\frac{5}{2x^2} + C$$

10 $\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$

$$\int \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \int \frac{x^2-1}{x^{\frac{1}{3}}}\, dx$$
$$= \int \left(\frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right) dx$$
$$= \int \left(x^{\frac{5}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right) dx$$
$$= \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$$
$$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$$

11 $\int (5x^2 - 2e^{7x})\, dx$

$$\int (5x^2 - 2e^{7x})\, dx = \frac{5}{3}x^3 - \frac{2}{7}e^{7x} + C$$

12 $$\int (2x + 3e^{4x+5})\ dx$$

$$\int (2x + 3e^{4x+5})dx = x^2 + \frac{3}{4}e^{4x+5} + C$$

---

13 $$\int \frac{x^2 - 6}{2x}\ dx$$

$$\int \frac{x^2-6}{2x}dx = \int \left(\frac{x^2}{2x} - \frac{6}{2x}\right)dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - 3\ln|x| + C$$

---

14 $$\int \frac{1}{(x-1)^3}\ dx$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^3}dx = \int (x-1)^{-3}dx$$

$$= -\frac{1}{2}(x-1)^{-2} + C$$

$$= -\frac{1}{2(x-1)^2} + C$$

---

15 $$\int \frac{e^x}{e^x + 4}\ dx$$

$$\int \frac{e^x}{e^x+4}dx = \ln|e^x + 4| + C$$

---

16 $$\int 2x\, e^{x^2-1}\ dx$$

$$\int 2xe^{x^2-1}dx$$

$$u = x^2 - 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int 2xe^{x^2-1}dx = \int 2xe^u \times \frac{du}{2x}$$

$$= \int e^u du \quad = e^u + C = e^{x^2-1} + C$$

---

17 $$\int 4e^x(3 + e^{2x})\ dx$$

$$\int 4e^x(3+e^{2x})dx = \int (12e^x + 4e^{3x})dx$$

$$= 12e^x + \frac{4}{3}e^{3x} + C$$

---

18 $$\int \frac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}\ dx$$

$$\int \frac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}\,dx$$

$$u = 4+2x+x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2+2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2+2x}$$

$$\int \frac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}\,dx$$

$$= \int \frac{1+x}{u^8} \times \frac{du}{2+2x}$$

$$= \int \frac{1+x}{u^8} \times \frac{du}{2(1+x)}$$

$$= \int \frac{1}{2} u^{-8}\,du$$

$$= -\frac{1}{14} u^{-7} + C$$

$$= -\frac{1}{14}(4+2x+x^2)^{-7} + C$$

$$= -\frac{1}{14(4+2x+x^2)^7} + C$$

---

19 $\int x \sin(3+x^2)\ dx$

$$\int x\sin(3+x^2)\,dx$$

$$u = 3+x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int x\sin(3+x^2)\,dx = \int x\sin u \times \frac{du}{2x}$$

$$= \int \frac{1}{2}\sin u\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\cos u + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(3+x^2) + C$$

---

20 $\int (3\sin 3x - 4\cos x)\ dx$

$$\int (3\sin 3x - 4\cos x)\,dx$$

$$= -\cos 3x - 4\sin x + C$$

---

21 $\int \left(x - \sin(7x+2)\right)\ dx$

$$= \int_{1} x\,dx - \int \sin(7x+2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{7}\cos(7x+2) + C$$

22 $\int (e^{3x} - e^{-3x})\ dx$

$$\int (e^{3x} - e^{-3x})dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{3}e^{-3x} + C$$

---

23 $\int \frac{2}{1-5x}\ dx$

$$\int \frac{2}{1-5x}dx = \int \frac{\frac{2}{-5}(-5)}{1-5x}dx$$

$$= -\frac{2}{5}\int \frac{-5}{1-5x}dx$$

$$= -\frac{2}{5}\ln|1-5x| + C$$

---

24 إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 4x - 2$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا أنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 3)$.

$$y = \int (4x-2)dx$$

$$= 2x^2 - 2x + C$$

منحنى الاقتران يمر بالنقطة $(0,3)$ إذن:

$$3 = 2(0)^2 - 2(0) + C$$

$$C = 3$$

$$y = 2x^2 - 2x + 3$$

---

25 **الإيراد الحدِّي:** يُمثِّل الاقتران: $R'(x) = 4x - 1.2x^2$ الإيراد الحدِّي (بالدينار) لكل قطعة تباع في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المَبيعة، و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$، علمًا بأنَّ $R(20) = 30000$.

$$R(x) = \int (4x - 1.2x^2)dx$$

$$= 2x^2 - 0.4x^3 + C$$

بما أن $R(20)=30000$ إذن:

$$30000 = 2(20)^2 - 0.4(20)^3 + C$$

$$C = 54000$$

$$R(x) = 2x^2 - 0.4x^3 + 54000$$

---

26 يتحرَّك جُسَيْم من السكون، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = \cos(3t - \pi)$ حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. أجد سرعة الجُسَيْم بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

$$v(t) = \int \cos(3t - \pi)dx$$

$$= \frac{1}{3}\sin(3t - \pi) + C$$

إذا كان: $\int_{-5}^{5} f(x)\ dx = 10$, $\int_{-5}^{-1} f(x)\ dx = 4$

$\int_{-5}^{-1} g(x)\ dx = 11$ ، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

27 $\int_{-1}^{5} f(x)\ dx$

$$\int_{-1}^{5} f(x)dx = \int_{-1}^{-5} f(x)dx + \int_{-5}^{5} f(x)dx$$
$$= -4 + 10$$
$$= 6$$

---

28 $\int_{-5}^{-1} 7f(x)\ dx$

$$\int_{-5}^{-1} 7f(x)dx = 7\int_{-5}^{-1} f(x)dx$$
$$= 7 \times 4$$
$$= 28$$

---

29 $\int_{-1}^{-5} (3f(x) - g(x))\ dx$

$$= 3\int_{-1}^{-5} f(x)dx - \int_{-1}^{-5} g(x)dx$$
$$= 3(-4) - (-11)$$
$$= -1$$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

30 $\int_{-2}^{3} (3x^2 - 4x + 1)\ dx$

$$= (x^3 - 2x^2 + x)\Big|_{-2}^{3}$$
$$= ((3)^3 - 2(3)^2 + 3)$$
$$-((-2)^3 - 2(-2)^2 - 2)$$
$$= 30$$

---

31 $\int_{1}^{3} \dfrac{x^3 + 2x^2}{x}\ dx$

$$= \int_{1}^{3} (\frac{x^3}{x} + \frac{2x^2}{x})dx$$
$$= \int_{1}^{3} (x^2 + 2x)dx$$
$$= (\frac{1}{3}x^3 + x^2)\Big|_{1}^{3}$$
$$= (\frac{1}{3}(3)^3 + (3)^2) - (\frac{1}{3}(1)^3 + (1)^2)$$
$$= \frac{50}{3}$$

32 $\int_1^5 |3-x|\ dx$

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة:

$$|3-x| = \begin{cases} 3-x, & x<3 \\ x-3, & x\geq 3 \end{cases}$$

بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده:

$$\int_1^5 |3-x|dx$$

$$= \int_1^3 (3-x)dx + \int_3^5 (x-3)dx$$

$$= \left(3x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^3 + \left(\frac{1}{2}x^2-3x\right)\Big|_3^5$$

$$= \left(3(3)-\frac{1}{2}(3)^2\right) - \left(3(1)-\frac{1}{2}(1)^2\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{2}(5)^2-3(5)\right) - \left(\frac{1}{2}(3)^2-3(3)\right)$$

$$= 4$$

33 $\int_1^4 \frac{20}{\sqrt{x}}\ dx$

$$\int_1^4 \frac{20}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 20x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= 40x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4 \quad = 40\sqrt{x}\Big|_1^4$$

$$= 40\sqrt{4} - 40\sqrt{1} \quad = 40$$

34 $\int_2^5 3x(x+2)\ dx$

$$= \int_2^5 (3x^2+6x)dx$$

$$= (x^3+3x^2)\Big|_2^5$$

$$= ((5)^3+3(5)^2) - ((2)^3+3(2)^2)$$

$$= 180$$

35 $\int_2^3 2xe^{-x^2}\ dx$

$$\int_2^3 2xe^{-x^2}dx$$

$$u = -x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$$

$$x=3 \Rightarrow u=-9$$

$$x=2 \Rightarrow u=-4$$

$$\int_2^3 2xe^{-x^2}dx = \int_{-4}^{-9} 2xe^u \times \frac{du}{-2x}$$

$$= \int_{-4}^{-9} -e^u du$$

$$= -e^u\Big|_{-4}^{-9}$$

$$= -e^{-9}+e^{-4}$$

$$= -\frac{1}{e^9}+\frac{1}{e^4}$$

36 $\int_0^2 \frac{3x^2}{(x^3+1)^5}\, dx$

$$\int_0^2 \frac{3x^2}{(x^3+1)^5} dx$$

$$u = x^3+1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$x=2 \Rightarrow u=9$$

$$x=0 \Rightarrow u=1$$

$$\int_0^2 \frac{3x^2}{(x^3+1)^5} dx = \int_1^9 \frac{3x^2}{u^5} \times \frac{du}{3x^2}$$

$$= \int_1^9 u^{-5} du$$

$$= -\frac{1}{4} u^{-4} \Big|_1^9$$

$$= -\frac{1}{4u^4} \Big|_1^9$$

$$= -\frac{1}{4(9)^4} + \frac{1}{4(1)^4}$$

$$= \frac{1640}{6561}$$

---

37 $\int_0^1 \frac{6x}{x^2+1}\, dx$

$$\int_0^1 \frac{6x}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{3(2x)}{x^2+1} dx$$

$$= 3\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$= 3\ln|x^2+1| \Big|_0^1$$

$$= 3\ln|2| - 3\ln|1|$$

$$= 3\ln 2$$

---

38 إذا كان:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+4 & , x<0 \\ 4-x & , x \geq 0 \end{cases}$$

فأجد قيمة: $\int_{-2}^{1} f(x)\, dx$.

بما أن الاقتران تشعب عند 0، فإنني أجزئ التكامل عنده:

$$= \int_{-2}^{0} (x^2+4)dx + \int_0^1 (4-x)dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3+4x\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(4x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1$$

$$= (0) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + 4(-2)\right)$$

$$+ \left(4(1) - \frac{1}{2}(1)^2\right) - (0) \quad = \frac{85}{6}$$

39 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 5 + e^{t-2}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

$$v(t) = 5 + e^{t-2}$$

$$s(t) = \int (5 + e^{t-2})\,dt$$

$$= 5t + e^{t-2} + C$$

$$s(t) = 5t + e^{t-2} + C$$

بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، إذن
s(0)=0:

$$s(0) = 5(0) + e^{0-2} + C$$

$$0 = e^{-2} + C$$

$$C = -e^{-2}$$

$$C = -\frac{1}{e^2}$$

$$\Rightarrow s(t) = 5t + e^{t-2} - \frac{1}{e^2}$$

موقع الجسم بعد 3 ثوان من الحركة هو

$$s(3) = 5(3) + e^{3-2} - \frac{1}{e^2}$$

$$= 15 + e - \frac{1}{e^2}\, m$$

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$

40 $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2; (0, 6)$

$$f(x) = \int (3x^2 + 6x - 2)\,dx$$

$$= x^3 + 3x^2 - 2x + C$$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (0,6) إذن:

$$6 = (0)^3 + 3(0)^2 - 2(0) + C$$

$$C = 6$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 6$$

41 $f'(x) = \frac{\sqrt{20}}{x^2}; (1, 400)$

$$f(x) = \int \frac{\sqrt{20}}{x^2}\,dx$$

$$= \int \sqrt{20}\,x^{-2}\,dx$$

$$= -\sqrt{20}\,x^{-1} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{20}}{x} + C$$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (1,400) إذن:

$$400 = -\frac{\sqrt{20}}{1} + C$$

$$C = 400 + \sqrt{20}$$

$$f(x) = -\frac{\sqrt{20}}{x} + 400 + \sqrt{20}$$

---

42 $f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}; (1, 1)$

$$f(x) = \int (\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}) dx$$

$$= \int (\frac{2}{x} + x^{-2}) dx$$

$$= 2\ln|x| - x^{-1} + C$$

$$= 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C$$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (1,1) إذن:

$$1 = 2\ln|1| - \frac{1}{1} + C$$

$$C = 2$$

$$f(x) = 2\ln|x| - \frac{1}{x} + 2$$

43 $f'(x) = 5e^x - 4; (0, -1)$

$$f(x) = \int (5e^x - 4) dx$$

$$= 5e^x - 4x + C$$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (0,-1) إذن:

$$-1 = 5e^0 - 4(0) + C$$

$$C = -6$$

$$f(x) = 5e^x - 4x - 6$$

---

44 $f'(x) = x\sqrt{x^2 + 5}; (2, 10)$

$$f(x) = \int x\sqrt{x^2 + 5}\, dx$$

$$u = x^2 + 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int x\sqrt{x^2 + 5}\, dx = \int x u^{\frac{1}{2}} \times \frac{du}{2x}$$

$$= \int \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3} + C$$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (2,10) إذن:

$$10 = \frac{1}{3}\sqrt{((2)^2+5)^3} + C$$

$$C = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3} + 1$$

---

45 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - x - 2$، والمحور x، والمستقيمين $x = -2$، و $x = 1$.

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow (x+1)(x-2) = 0$$
$$\Rightarrow x = -1, x = 2$$

نختار عدداً ضمن الفترة [-2,1]، وليكن -1.5 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0) = (-1.5+1)(-1.5-2) = 1.75 > 0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع في الفترة [-2,-1] فوق المحور x

نختار عددا ضمن الفترة [-1,1]، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران

$$f(0) = (0+1)(0-2) = -2 < 0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع في الفترة [-1,1] تحت المحور x

العدد 2 خارج الفترة المطلوبة بالسؤال، إذن نهمله

$$A = \int_{-2}^{-1}(x^2 - x - 2)\,dx - \int_{-1}^{1}(x^2 - x - 2)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{-1}(x^2 - x - 2)\,dx + \int_{-1}^{1}(-x^2 + x + 2)\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_{-2}^{-1} + \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(-\frac{8}{3} - 2 + 4\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{31}{6}$$

46 طب: يُمثِّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من حقنه في جسم مريض ، حيث C مَقيسة بالملّيغرام لكل سنتيمتر مُكعَّب $(\mathrm{mg/cm^3})$. إذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغيَّر بمُعدَّل: $C'(t) = \frac{3t}{\sqrt{(t^2+36)^3}}$، فأجد مقدار التغيُّر في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثماني الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

ولاً نجد قاعدة الاقتران:

$$C(t) = \int \frac{3t}{\sqrt{(t^2+36)^3}}dt$$

$$u = t^2+36 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2t$$

$$\Rightarrow dt = \frac{du}{2t}$$

$$C(t) = \int \frac{3t}{\sqrt{(t^2+36)^3}}dt$$

$$= \int \frac{3t}{\sqrt{u^3}} \times \frac{du}{2t}$$

$$= \int \frac{3}{2}u^{-\frac{3}{2}}du \quad = -3u^{-\frac{1}{2}} + K$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{u}} + K \quad = -\frac{3}{\sqrt{t^2+36}} + K$$

بما أن مقدار تركيز الدواء في الدم في البداية هي 0 مليغرام، إذن C 0 (0)=0ومنه:

$$C(t) = -\frac{3}{\sqrt{t^2+36}} + K$$

$$C(0) = -\frac{3}{\sqrt{0+36}} + K$$

$$0 = \frac{1}{2} + K$$

$$K = -\frac{1}{2}$$

$$C(t) = -\frac{3}{\sqrt{t^2+36}} - \frac{1}{2}$$

$$C(8) = -\frac{3}{\sqrt{64+36}} - \frac{1}{2} = -\frac{8}{10}$$

47 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 3x$، والمحور x.

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow 3x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 1$$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عدداً ضمن الفترة [0,1]، وليكن $\frac{1}{2}$ ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0)=3\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}<0$$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع [0,1] في الفترة x تحت المحور

$$=\int_0^1(-3x^2+3x)\,dx$$

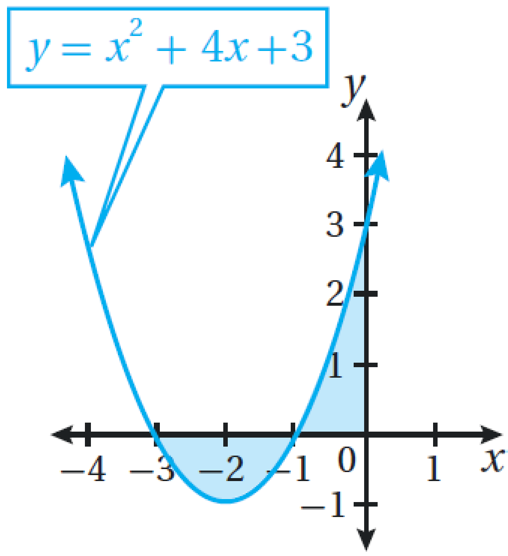
$$=\left(-x^3+\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^1$$

$$=\left(-(1)^3+\frac{3}{2}(1)^2\right)-\left(-(0)^3+\frac{3}{2}(0)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}$$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

48



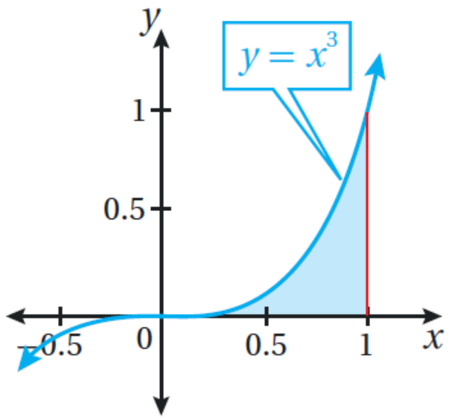
$$A=-\int_{-3}^{-1}(x^2+4x+3)\,dx+\int_{-1}^{0}(x^2+4x+3)\,dx$$

$$=\int_{-3}^{-1}(-x^2-4x-3)\,dx+\int_{-1}^{0}(x^2+4x+3)\,dx$$

$$=\left(-\frac{1}{3}x^3-2x^2-3x\right)\Big|_{-3}^{-1}+\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x\right)\Big|_{-1}^{0}$$

$$=\left(\frac{1}{3}-2+3\right)-(9-18+9)+(0)-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)\quad=\frac{8}{3}$$

49



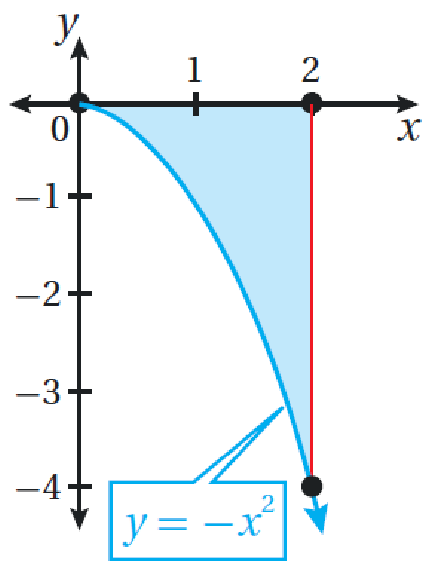
$$A = \int_0^1 x^3 dx$$

$$= (\frac{1}{4}x^4)\Big|_0^1$$

$$= (\frac{1}{4}(1)^4) - (\frac{1}{4}(0)^4)$$

$$= \frac{1}{4}$$

50



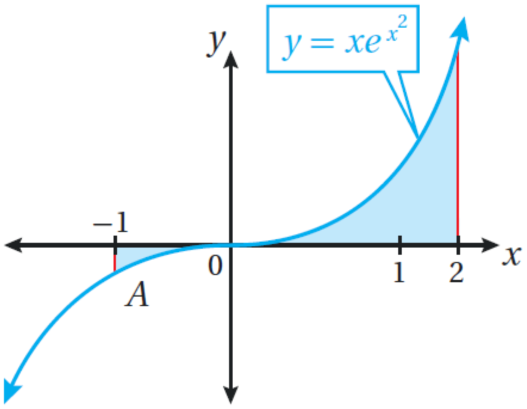
$$A = -\int_0^2 -x^2 dx$$

$$= \int_0^2 x^2 dx \quad = (\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^2$$

$$= (\frac{1}{3}(2)^3) - (\frac{1}{3}(0)^3)$$

$$= \frac{8}{3}$$

51



$$A = -\int_{-1}^0 xe^{x^2} dx + \int_0^2 xe^{x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^0 -xe^{x^2} dx + \int_0^2 xe^{x^2} dx$$

$$u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2x$$

$$\Rightarrow dt = \frac{du}{2x}$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow u = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow u = 4$$

$$A = \int_1^0 -xe^u \times \frac{du}{2x} + \int_0^4 xe^u \times \frac{du}{2x}$$

$$= \int_1^0 -\frac{1}{2}e^u du + \int_0^4 \frac{1}{2}e^u du$$

$$= (-\frac{1}{2}e^u)\Big|_1^0 + (\frac{1}{2}e^u)\Big|_0^4$$

$$= (-\frac{1}{2}e^0) - (-\frac{1}{2}e^1) +$$

$$(\frac{1}{2}e^4) - (\frac{1}{2}e^0)$$

$$= -1 + \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^4$$

تمت بحمد الله

امنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

ناجح الجمزاوي

0795656881 0779192534

دعواتكم لوالدي ووالدتي الرحمة والمغفرة