5.000

5000

الريـاضيـات

توجيهي الفرع العلمي - الفصل الدراسي الثاني

MATHEMATICS

مكتبة الوسام
ALWESAM
Tawjihi center & service store
النسخة الأصلية

الوحدة الرابعة:

التكامل وتطبيقاته

الجزء الأول

2024
جيل 2007

إعداد المعلم :

ناجح الجمزاوي

0795656881

مكتبة الوسام
ALWESAM
Tawjihi center & service store

مكان تثق به

الرياضيات

الصف الثاني عشر- الفرع العلمي

الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الرابعة

التكامل وتطبيقاته

الجزء الاول

ت		المـــــادة
		استعد لدراسة الوحدة
1	الدرس الأول	تكامل اقترانات خاصة
2	الدرس الثاني	التكامل بالتعويض
3	الدرس الثالث	التكامل بالكسور الجزئية
		حلول تمارين ومسائل كتاب الطالب وكتاب التمارين

ناجح الجمزاوي

0795656881 0779192534

أستعد لدراسة الوحدة

الاقتران الأصلي

مفهوم أساسي

الاقتران الأصلي للاقتـــران المتصل $f(x)$ هو مجموعـــة الاقترانات: $F(x) + C$ التي تُحقِّق المعادلة الآتية، علمًا بأنَّ C ثابت:

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x)+C]$$

مثال 1

أجد الاقتران الأصلي لكلٍّ من الاقترانين الآتيين:

1 $f(x) = 5x^4$

عند البحث عن اقتران مشتقته $5x^4$، أتذكَّر أنَّ أُسَّ x في مشتقة اقتران القوَّة أقل بواحد من أُسِّ x في الاقتران الأصلي. وبذلك، فإنَّ أُسَّ المُتغيِّر x في الاقتران الأصلي هو 5 وبما أنَّ مشتقة x^5 تساوي $5x^4$:

فإنَّ الاقتران الأصلي للاقتران $f(x)$ هو:

$$F(x) = x^5 + C$$

2 $f(x) = -8x^{-9}$

عند البحث عن اقتران مشتقته $-8x^{-9}$، أتذكَّر أنَّ أُسَّ x في مشتقة اقتران القوَّة أقل بواحد من أُسِّ x في الاقتران الأصلي. وبذلك فإنَّ أُسَّ المُتغيِّر x في الاقتران الأصلي هو -8 وبما أنَّ مشتقة x^{-8} تساوي $-8x^{-9}$، فإنَّ الاقتران الأصلي للاقتران $f(x)$ هو:

$$F(x) = x^{-8} + C$$

أتذكَّر

إذا كان: $y = x^n$، حيـــث n عـــدد حقيقـــي، فإنَّ: $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

التكامل غير المحدود

المقدمة

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

تُسمّى المعادلة السابقة **التكامل غير المحدود** للاقتران $f(x)$، ويُسمّى $\int$ رمز التكامل، ويُسمّى الاقتران $f(x)$ **المُكامَل** ويُسمّى C **ثابت التكامل** أمّا dx فرمز يشير إلى أنّ التكامل يتمُّ بالنسبة إلى المُتغيِّر x الذي يُسمّى **مُتغيِّر التكامل**

يُبيِّن المُخطَّط الآتي عناصر التكامل غير المحدود للاقتران: $f(x) = 3x^2$:

المُكامَل — ثابت التكامل

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

مُتغيِّر التكامل — رمز التكامل

ملاحظة:

التكامل والاشتقاق عمليتان عكسيتان. وقد سُمّي التكامل غير المحدود بهذا الاسم؛ لأنّه يتضمّن الثابت C الذي يُمكِن تمثيله بأيِّ قيمة.

القواعد الأساسية للتكامل غير المحدود

مفهوم أساسي

إذا كان k عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

تكامل الثابت

1. $\int k\,dx = kx + C$

تكامل اقتران القوّة

2. $\int x^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ n \neq -1$

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 7\,dx$

$\int 7\,dx = 7x + C$ قاعدة تكامل الثابت

2) $\int x^{18}\,dx$

قاعدة تكامل اقتران القوّة

$\int x^{18}\,dx = \frac{1}{18+1}x^{18+1} + C$

$= \frac{1}{19}x^{19} + C$ بالتبسيط

3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

بكتابة المُكامَل في صورة أُسِّية

$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$

$= \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$ تعريف الأُسِّ السالب

$= \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}$ قاعدة تكامل اقتران القوّة

$= 2x^{\frac{1}{2}} + C$ بالتبسيط

$= 2\sqrt{x} + C$ الصورة الجذرية

مثال (2)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 9\,dx$

$\int 9\,dx = 9x + C$ تكامل الثابت

2) $\int x^{10}\,dx$

تكامل اقتران القوَّة

$\int x^{10}\,dx = \frac{1}{10+1}x^{10+1} + C$

$= \frac{1}{11}x^{11} + C$ بالتبسيط

3) $\int \sqrt{x}\,dx$

بكتابة المُكامَل في صورة أُسِّية

$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C$ تكامل اقتران القوَّة

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$ بالتبسيط

$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$ الصورة الجذرية

4) $\int \frac{1}{x^3}\, dx$

تعريف الأُسِّ السالب $\int \frac{1}{x^3}\, dx = \int x^{-3}\, dx$

تكامل اقتران القوَّة $= \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C$

تعريف الأُسِّ السالب $= -\frac{1}{2x^2} + C$

ملاحظة :

قبل البَدْء بعملية التكامل، أُعيد أوَّلًا كتابة المُكامَل في صورة $x^{m/n}$، مُستذكِرًا العلاقة:

$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$.

خصائص التكامل غير المحدود

مفهوم أساسي

إذا كان k ثابتًا، فإنَّ:

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

1) $\int kf(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$

تكامل المجموع أو الفرق

2) $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1) $\int (6x^2 + 2x)\, dx$

تكامل المجموع، واقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$\int (6x^2 + 2x)\, dx = 6\int x^2\, dx + 2\int x\, dx$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= 6\left(\tfrac{1}{3}x^3\right) + 2\left(\tfrac{1}{2}x^2\right) + C$$

بالتبسيط

$$= 2x^3 + x^2 + C$$

2) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^5}\right) dx$

تكامل الفرق، وتكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^5}\right) dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx - 3\int \frac{1}{x^5}\, dx$$

تعريف الأُسِّ السالب، والصورة الأُسِّية

$$= \int x^{-1/2}\, dx - 3\int x^{-5}\, dx$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= 2x^{1/2} - 3\left(-\frac{1}{4}x^{-4}\right) + C$$

بالتبسيط، والصورة الجذرية

$$= 2\sqrt{x} + \frac{3}{4x^4} + C$$

مثال (2)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (8x^3 - 3x + 1)\, dx$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$\int (8x^3 - 3x + 1)\, dx =$$

$$\frac{8}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x + C$$

بالتبسيط

$$= 2x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x + C$$

b) $\int \frac{x^7 - 4x^3 + 8x}{2x}\, dx$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$\int \frac{x^7 - 4x^3 + 8x}{2x}\, dx =$$

$$\int \left(\frac{x^7}{2x} - \frac{4x^3}{2x} + \frac{8x}{2x}\right) dx$$

بالتبسيط

$$= \int \left(\frac{1}{2}x^6 - 2x^2 + 4\right) dx$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= \frac{1}{14}x^7 - \frac{2}{3}x^3 + 4x + C$$

c) $\int (\sqrt{x} + 1)\, dx$

بكتابة المُكامَل في صورة أُسِّية

$$\int (\sqrt{x} + 1)\, dx = (x^{1/2} + 1)\, dx$$

تكامل اقتران القوَّة، وتكامل الثابت

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} + x + C$$

الصورة الجذرية

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + x + C$$

ملاحظة :

تتطلَّب بعض التكاملات تبسيط المُكامَل إلى حدود جبرية، كلٌّ منها في صورة اقتران قوَّة، قبل البَدْء بعملية التكامل.

لا توجد قاعدة لتكامل الضرب؛ لذا أُبسِّط المُكامَل إلى حدود جبرية منفصلة، كلٌّ منها في صورة اقتران قوَّة، قبل البَدْء بعملية التكامل. وفي هذه الحالة، أَضرِب المقدارين الجبريين أوَّلًا، ثم أُجري عملية التكامل.

لا توجد قاعدة لتكامل القسمة؛ لذا أُبسِّط المُكامَل إلى حدود جبرية منفصلة، كلٌّ منها في صورة اقتران قوَّة، قبل البَدْء بعملية التكامل. وفي هذه الحالة، أَقسِم كل حدٍّ في البسط على المقام أوَّلًا، ثم أُجري عملية التكامل.

مثال 1)

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int (x+2)(x-2)\ dx$

بضرب المقدارين الجبريين

$$\int (x+2)(x-2)\ dx = \int (x^2-4)\ dx$$

تكامل اقتران القوّة، وتكامل الثابت

$$= \frac{1}{3}x^3 - 4x + C$$

2 $\int \frac{8x^3+5x}{x}\ dx$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$\int \frac{8x^3+5x}{x}\ dx = \int \left(\frac{8x^3}{x} + \frac{5x}{x}\right)\ dx$$

$$= \int (8x^2+5)\ dx$$ بالتبسيط

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$= \frac{8}{3}x^3 + 5x + C$$

3 $\int x\left(x^2+\frac{2}{x}\right)\ dx$

بتوزيع الضرب على الجمع

$$\int x\left(x^2+\frac{2}{x}\right)\ dx = \int (x^3+2)\ dx$$

تكامل اقتران القوَّة، وقاعدة تكامل الثابت

$$= \frac{1}{4}x^4 + 2x + C$$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \frac{3x+2x^4}{x} dx$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$\int \frac{3x+2x^4}{x} dx = \int \left(\frac{3x}{x} + \frac{2x^4}{x}\right) dx$$

$$= \int (3+2x^3)\ dx$$ بالتبسيط

قاعدتا تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$= 3x + \frac{1}{2}x^4 + C$$

2 $\int \frac{(x+2)(x-2)}{\sqrt{x}}\, dx$

بالضرب

$$\int \frac{(x+2)(x-2)}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{x^2-4}{\sqrt{x}}\, dx$$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$= \int \left(x^{\frac{3}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$$

قاعدة تكامل اقتران القوّة المضروب في ثابت

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 8x^{\frac{1}{2}} + C$$

تدريب

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int 3x^2\, dx$
2. $\int (2 + x^3 + 5x^{-2})\, dx$
3. $\int \left(2x^7 - \frac{4}{x^4}\right) dx$
4. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$
5. $\int x(4x^3 - 4x + 1)\, dx$
6. $\int \left(\frac{x^3 + 7x - 2x^2}{x}\right) dx$
7. $\int (x-1)(x+3)\, dx$
8. $\int (2x+5)^5\, dx$
9. $\int \frac{x^2-1}{x+1}\, dx$

تكامل $(ax+b)^n$

مفهوم أساسي

إذا كان a و b عددين حقيقيين، و $a \neq 0$، فإنَّ:

$$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C$$

$$n \neq -1$$

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1 $\int (x+7)^5\, dx$

تكامل $(ax+b)^n$

$$\int (x+7)^5\, dx = \frac{1}{5+1}(x+7)^{5+1} + C$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{6}(x+7)^6 + C$$

2 $\int \frac{1}{\sqrt{4x-2}}\, dx$

بكتابة المُكامَل في صورة أُسِّية

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x-2}}\, dx = \int (4x-2)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

تكامل $(ax+b)^n$

$$= \frac{1}{4\times\frac{1}{2}}(4x-2)^{\frac{1}{2}} + C$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}(4x-2)^{\frac{1}{2}} + C$$

الصورة الجذرية

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4x-2} + C$$

مثال (2)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int (x-4)^6 \, dx$ b) $\int \sqrt{x+1} \, dx$

الحل

a $\int (x-4)^6 dx = \frac{1}{7}(x-4)^7 + C$

b $\int \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3\sqrt{(x+1)^3}} + C$

الشرط الأولي

من المهم في بعض التطبيقات إيجاد قيمة ثابت التكامل C، مثل إيجاد قاعدة اقتران عُلِمت مشتقته، لكنَّ ذلك يتطلّب إيجاد نقطة تُحقِّق الاقتران الأصلي، ويُمكِن بتعويضها إيجاد قيمة C، وتُسمّى هذه النقطة **الشرط الأولي**

مثال (1)

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = 2x + 3$، ومرَّ منحناه بالنقطة $(1, -2)$.

الحل

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران $f'(x)$.

$f(x) = \int (2x + 3) \, dx$ $f(x) = \int f'(x) \, dx$

$f(x) = x^2 + 3x + C$ تكامل اقتران القوّة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل C.

لإيجاد قيمة ثابت التكامل C، أستعمل الشرط الأولي المعطى في المسألة، وهو النقطة $(1, -2)$ التي يمرُّ منحنى الاقتران بها، وتُحقِّق قاعدة الاقتران.

ولهذا أُعوِّض $x = 1$ في قاعدة $f(x)$، ثم أحُلّ المعادلة الناتجة لإيجاد قيمة C:

$f(x) = x^2 + 3x + C$ قاعدة الاقتران

بتعويض $x = 1, f(1) = -2$

$-2 = (1)^2 + 3(1) + C$

بحلّ المعادلة

$C = -6$

إذن، قاعدة الاقتران هي:

$f(x) = x^2 + 3x - 6$.

مثال (2)

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان: $f'(x) = x-3$، ومَرَّ منحناه بالنقطة $(2, 9)$.

الحل

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران $f'(x)$.

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

$$f(x) = \int (x-3)\,dx$$

تكامل اقتران القوَّة، وتكامل الثابت

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$$

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل C.

قاعدة الاقتران

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$$

بتعويض $x = 2, f(2) = 9$

$$9 = \frac{1}{2}(2)^2 - 3(2) + C$$

بحلِّ المعادلة لـ C

$$C = 13$$

إذن، قاعدة الاقتران هي: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 13$.

التكامل المحدود

يُســمّى $\int_a^b f(x)\,dx$ التكامل المحدود للاقتران $f(x)$، حيث a الحدُّ السفلي للتكامل، و b الحدُّ العلوي للتكامل ويُمكِن إيجاد قيمة $\int_a^b f(x)\,dx$ على النحو الآتي:

قيمة الاقتران الأصلي عند الحدِّ العلوي

حدود التكامل من a إلى b

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

قيمة الاقتران الأصلي عند الحدِّ السفلي

مفهوم أساسي

إذا كان الاقتران $f(x)$ متصلًا على الفترة $[a, b]$، و $F(x)$ يُمثِّل أيَّ اقتران أصلي للاقتران $f(x)$، فإنَّ التكامل المحدود للاقتران $f(x)$ من a إلى b هو

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ويُمكِن التعبير عن الفرق $F(b)-F(a)$ باستعمال الرمز: $F(x)\Big|_a^b$.

مثال (1)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1) $\int_0^1 x^2\,dx$

تكامل اقتران القوَّة، والتكامل المحدود

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1$$

$a = 0, b = 1$

$$= \left(\frac{1}{3}(1)^3\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3\right)$$

بالتبسيط $= \frac{1}{3}$

2) $\int_1^3 (x+2)\,dx$

تكامل اقتران القوَّة، والتكامل المحدود

$$\int_1^3 (x+2)\,dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_1^3$$

$a = 1, b = 3$

$$= \left(\frac{1}{2}(3)^2 + 2(3)\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2 + 2(1)\right)$$

بالتبسيط $= 8$

مثال (2)

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int_{-1}^1 x^4\,dx$

b) $\int_{-2}^3 (3x^2 - 4x + 1)\,dx$

الحل

a

$$\int_{-1}^1 x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^1$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right) - \left(\frac{-1}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

b

$$\int_{-2}^3 (3x^2 - 4x + 1)dx$$

$$= x^3 - 2x^2 + x\Big|_{-2}^3$$

$$= (27 - 18 + 3) - (-8 - 8 - 2) = 30$$

مثال (3)

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

1) $\int_0^1 (2x-5)\, dx$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت وتكامل الثابت

$$\int_0^1 (2x-5)\, dx = (x^2-5x)\Big|_0^1$$

بالتعويض

$$= ((1)^2-5(1)) - ((0)^2-5(0))$$

بالتبسيط

$$= -4$$

2) $\int_{-4}^3 x(4-3x)\, dx$

بتوزيع الضرب على الجمع

$$\int_{-4}^3 x(4-3x)\, dx = \int_{-4}^3 (4x-3x^2)\, dx$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= (2x^2-x^3)\Big|_{-4}^3$$

بالتعويض

$$= (2(3)^2-(3)^3) - (2(-4)^2-(-4)^3)$$

بالتبسيط

$$= -105$$

مثال (4)

إذا كان:

$\int_1^k \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 3$، فأجد قيمة الثابت k.

التكامل المعطى

$$\int_1^k \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 3$$

الصورة الأُسِّية

$$\int_1^k x^{-1/2}\, dx = 3$$

تكامل اقتران القوَّة

$$2x^{1/2}\Big|_1^k = 3$$

الصورة الجذرية

$$2\sqrt{x}\Big|_1^k = 3$$

بالتعويض

$$2\sqrt{k} - 2\sqrt{1} = 3$$

بالتبسيط

$$2\sqrt{k} - 2 = 3$$

بجمع 2 لطرفي المعادلة

$$2\sqrt{k} = 5$$

بقسمة طرفي المعادلة على 2

$$\sqrt{k} = \frac{5}{2}$$

بتربيع طرفي المعادلة

$$k = \frac{25}{4}$$

قواعد التكامل المحدود

مفهوم أساسي

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين متصلين على الفترة $[a, b]$،

وكان k ثابتًا، فإنَّ:

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

1) $\int_a^b k f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$

تكامل المجموع أو الفرق

2) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$

التكامل عند نقطة

3) $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

التبديل بين حدَّي التكامل

4) $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$

تجزئة التكامل

5) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

مثال (1)

إذا كان: $\int_5^7 f(x)\, dx = 3, \int_0^5 g(x)\, dx = -4,$

$\int_0^5 f(x)\, dx = 10$

فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\int_0^5 (4f(x) + g(x))\ dx$

تكامل المجموع

$$\int_0^5 (4f(x) + g(x))\ dx$$

$$= \int_0^5 4f(x)\, dx + \int_0^5 g(x)\, dx$$

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

$$= 4\int_0^5 f(x)\ dx + \int_0^5 g(x)\, dx$$

$= 4(10) + (-4)$ بالتعويض

$= 36$ بالتبسيط

2 $\int_5^0 5g(x)\ dx$

بالتبديل بين حدَّي التكامل

$$\int_5^0 5g(x)\ dx = -\int_0^5 5g(x)\ dx$$

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

$$= -5\int_0^5 g(x)\, dx$$

$= -5 \times -4$ بالتعويض

$= 20$ بالتبسيط

3 $\int_0^7 f(x)\ dx$

بتجزئة التكامل

$$\int_0^7 f(x)\ dx = \int_0^5 f(x)\ dx + \int_5^7 f(x)\ dx$$

$= 10 + 3$ بالتعويض

$= 13$ بالتبسيط

مثال (2)

إذا كان:

$$\int_{-2}^5 f(x)\,dx = 3,\ \int_{-2}^5 g(x)\,dx = -4$$

$$\int_3^5 f(x)\,dx = 7$$

فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 $\int_{-2}^5 (2f(x) - 3g(x))\,dx$

قاعدة تكامل الفرق

$$\int_{-2}^5 (2f(x) - 3g(x))\ dx = \int_{-2}^5 2f(x)dx - \int_{-2}^5 3g(x)dx$$

قاعدة تكامل الاقتران المضروب في ثابت

$$= 2\int_{-2}^5 f(x)dx - 3\int_{-2}^5 g(x)dx$$

$= 2(3) - 3(-4)$ بالتعويض

$= 18$ بالتبسيط

2 $\int_{-2}^3 f(x)\,dx$

قاعدة تجزئة التكامل

$$\int_{-2}^3 f(x)\ dx = \int_{-2}^5 f(x)\ dx + \int_5^3 f(x)\ dx$$

قاعدة عكس حدود التكامل

$$= \int_{-2}^5 f(x)\ dx - \int_3^5 f(x)\ dx$$

$= 3 - 7$ بالتعويض

$= -4$ بالتبسيط

مثال (3)

إذا كان:

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 5,\ \int_4^1 f(x)\,dx = 2$$

$$\int_{-1}^1 h(x)\,dx = 7$$

فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) $\int_{-1}^1 (f(x) + 3h(x))\ dx$

b) $\int_{-1}^4 f(x)\ dx$

الحل

a

$$\int_{-1}^{1}(f(x)+3h(x))dx =$$

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx + 3\int_{-1}^{1}h(x)dx$$

$$= 5 + 3(7) = 26$$

---

b

$$\int_{-1}^{4}f(x)dx = \int_{-1}^{1}f(x)dx +$$

$$\int_{1}^{4}f(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1}f(x)dx - \int_{1}^{4}f(x)dx$$

$$= 5 - 2 = 3$$

تكاملات الاقترانات المُتشعِّبة

تستعمل قواعد التكامل المحدود إيجاد التكامل المحدود للاقترانات المُتشعِّبة إذا احتوت فترة التكامل على قواعد مُختلِفة للاقتران؛ إذ أُجزِّئ التكامل عند نقاط التشعُّب، ثم أجد تكامل كل قاعدة على فترتها الجزئية.

مثال (1)

إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 12 & , x < 2 \\ 3x^2 & , x \geq 2 \end{cases}$،

فأجد قيمة: $\int_{1}^{4} f(x)\ dx$

قاعدة تجزئة التكامل

$$\int_{1}^{4} f(x)\ dx = \int_{1}^{2} 12\ dx + \int_{2}^{4} 3x^2\ dx$$

تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوّة

$$= 12x \Big|_{1}^{2} + x^3 \Big|_{2}^{4}$$

بالتعويض

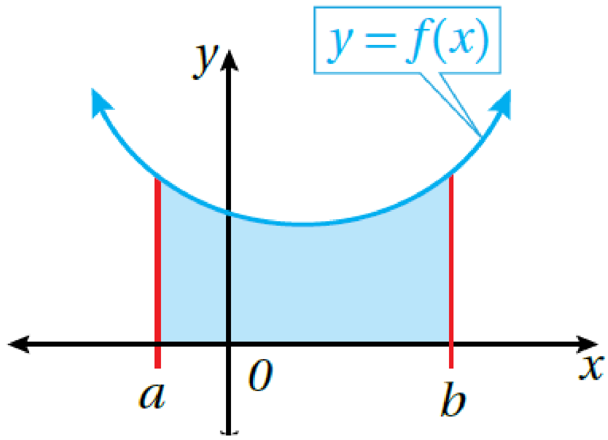
$$= 12(2) - 12(1) + ((4)^3 - (2)^3)$$

$$= 68$$

بالتبسيط

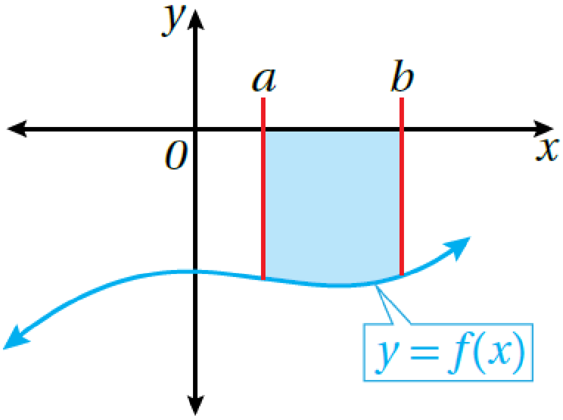
تطبيقات التكامل: المساحة

يُمكِن إيجاد المساحة فوق المحور x المحصورة بيــن منحنــى الاقتــران $f(x)$، والمحــور x، والمستقيمين: $x = a$ و $x = b$ عن طريق التكامل الآتي:



$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

يُمكِــن إيجــاد المســاحة أســفل المحــور x المحصــورة بين منحنــى الاقتــران $f(x)$، والمحور x، والمستقيمين: $x = a$ و $x = b$ عن طريق التكامل الآتي:



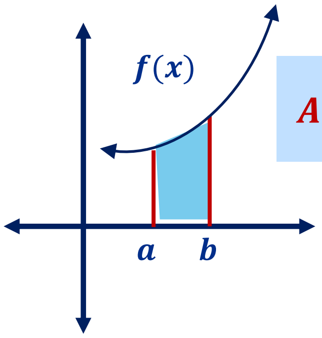
$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

تطبيقات التكامل

مفهوم أساسي

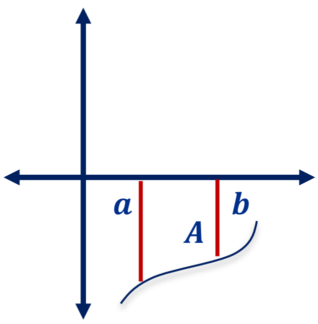
المساحة تحت منحنى اقتران

إذا كان $f(x)$ اقتران قابل للتكامل في $[a, b]$ ومنحناه يقع فوق المحور x في هذه الفترة فإن مساحة المنطقة لمحصورة بين منحنى $f(x)$ والمحور x والمستقيمين $x = b$, $x = a$



$$A = \int_a^b f(x)dx$$

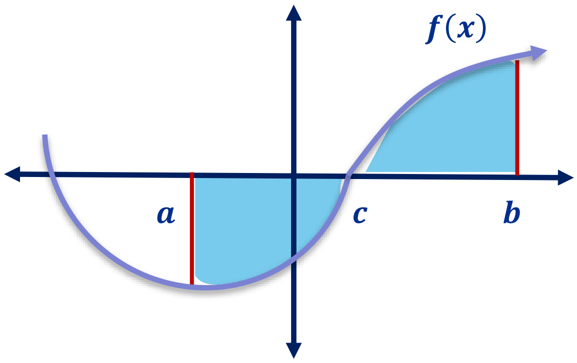
إذا كان $f(x)$ اقتران قابل للتكامل في $[a, b]$ ومنحناه يقع تحت محور السينات.



$$A = \int -f(x)dx = -\int f(x)dx$$

$$= \left| \int_a^b f(x)dx \right|$$

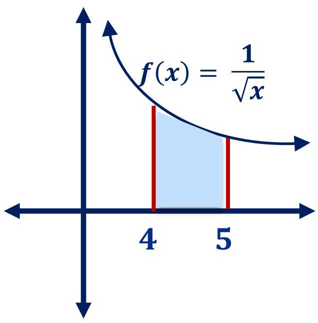
إذا كان $f(x)$ قابل للتكامل في $[a, b]$ ومنحناه يقطع المحور x عند $x = c$ حيث $C \in [a, b]$ أي أن جزء من منحنى f يقع فوق المحور x والجزء الآخر تحته في هذه الفترة .



$$A = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

مثال1

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ والمحور x والمستقيمين $x = 9$, $x = 4$



الحل:

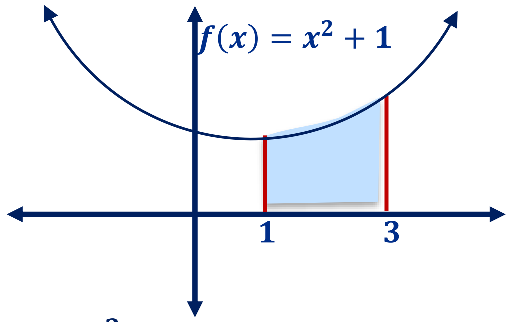
$$A = \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_4^9 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_4^9 = 2\sqrt{x}\Big|_4^9$$

$$= 2\sqrt{9} - 2\sqrt{4} = 6 - 4 = 2$$

مثال2

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 + 1$ والمحور x والمستقيمين $x = 1 , x = 3$



الحل:

$$A = \int_1^3 (x^2 + 1)\, dx$$

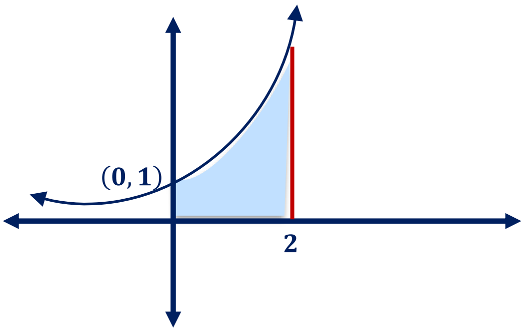
$$= \frac{x^3}{3} + x \Big|_1^3 = (9 + 3) - \left(\frac{1}{3} + 1\right)$$

$$= 12 - \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$$

مثال3

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى

$f(x) = e^{2x}$ ومحوري السينات والصدات والمستقيم $x = 2$



الحل:

$$A = \int_0^2 e^{2x}\, dx = \frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^2$$

$$= \frac{e^4}{2} - \frac{e^0}{2} = \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2}$$

ملاحظة

لإيجاد المساحة تحت منحنى اقتران والمحور x والمستقيمين $x = a \, , x = b$

1. نجد نقط التقاطع مع المحور x $f(x) = 0$
2. نعين اشارة $f(x)$
3. نحدد $x = a \, , x = b$
4. إذا كانت نقط التقاطع لا تنتمي للفترة $[a , b]$ نجري التكامل على الفترة
5. إذا كانت نقط التقاطع تنتمي للفترة بجزأ التكامل

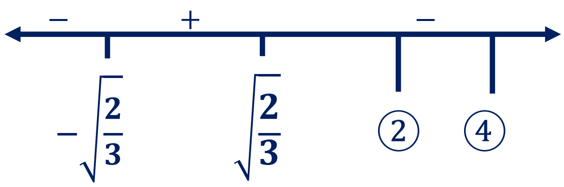
مثال4

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = \frac{2}{x^2} - 3$ والمحور x والمستقيمين $x = 4 \, , x = 2$

الحل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{x^2} - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$



خارج الفترة وفي المنطقة السالبة

$$A = -\int_2^4 \left(\frac{2}{x^2} - 3\right)\, dx$$

$$= -\int_2^4 (2x^{-2}-3)\,dx$$

$$= -(-2x^{-1}-3x)\Big|_2^4$$

$$= -\left(\frac{-2}{x}-3x\right)\Big|_2^4$$

$$= -\left(\left(\frac{-2}{4}-3x(4)\right)-\left(\frac{-2}{2}-6\right)\right)$$

$$= -\left(\frac{-1}{2}-12\right)-(-7)$$

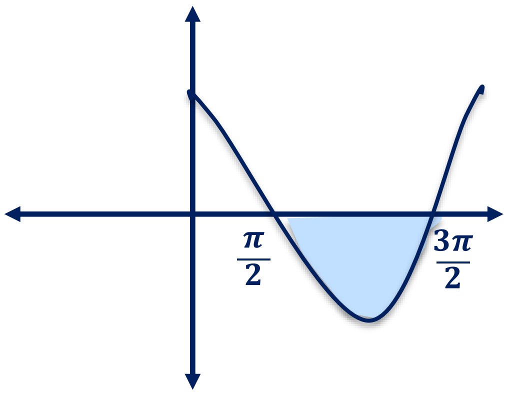
$$= -\left(\frac{-25}{2}+7\right)$$

$$= -\left(\frac{-25+14}{2}\right) \qquad = +\frac{11}{2}$$

مثال5

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران
$f(x)=\cos x$ والمحور x في الفترة $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$

الحل:



$\cos x = 0$

$\rightarrow x = \frac{\pi}{2} \qquad , \qquad x = \frac{3\pi}{2}$

$\cos x$ سالبة في الربع الثاني والثالث

$$A = -\int \cos x\,dx$$

$$= -(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= -\left(\sin 3\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right)$$

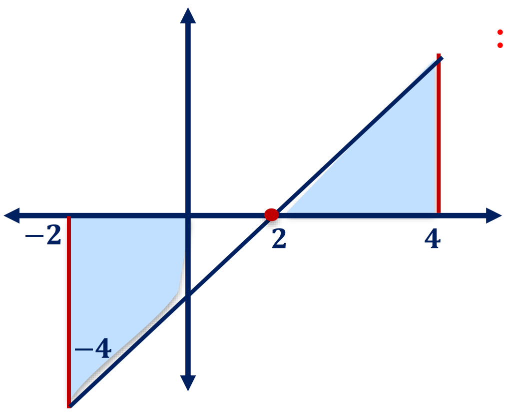
$$= -(-1-1)$$

$$= 2$$

مثال6

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران
$f(x)=2x-4$ والمستقيمين $x=-2\,, x=4$

الحل:



$f(x)=2x-4=0$

$2x=4 \Rightarrow x=2$

	−		+	
-2		2		4

يجزأ التكامل

$$A = -\int_{-2}^{2} -(2x-4)\,dx + \int_2^4 (2x-4)\,dx$$

$$= -\int_{-2}^{2} 4-2x\,dx + \int_{2}^{4} (2x-4)\,dx$$

$$= 4x - x^2\Big|_{-2}^{2} + x^2 - 4x\Big|_{2}^{4}$$

$$(4(2)-4)-(-8-4)$$

$$+(16-16-(4-8)$$

$$= 4+12+4 = 20$$

مثال7

جد المساحة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^3$ والمحور x والمستقيمان $x = 2 , x = -2$

الحل:

$$x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$\begin{array}{ccc} ----- & & ++++++ \\ -2 & 0 & 2 \end{array}$$

$$A = \int_{-2}^{0} -x^3\,dx + \int_{0}^{2} x^3\,dx$$

$$= \frac{-x^4}{4}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2}$$

$$= \frac{-(0)^4}{4} - \left(\frac{-16}{4}\right) + \frac{16}{4} - 0$$

$$= \frac{16}{4} + \frac{16}{4}$$

$$= 4+4 = 8$$

ملاحظة

لإيجاد المساحة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x ، نجد نقط التقاطع مع المحور x وتكون هي حدود التكامل.

مثال8

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^3 - x$ والمحور x

الحل:

$$f(x) = 0 \quad \to x^3 - x = 0$$

$$x(x^2-1) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = 1 \qquad x = -1$$

$$\begin{array}{cccc} - & + & - & + \\ & -1 \quad 0 & \quad 1 & \end{array}$$

$$A = \int_{-1}^{0} (x - x^3)\,dx + \int_{0}^{1} x^3 - x$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

مثال9

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = -x^3 - x^2 + 6x$ والمحور x

الحل:

$$f(x) = 0$$

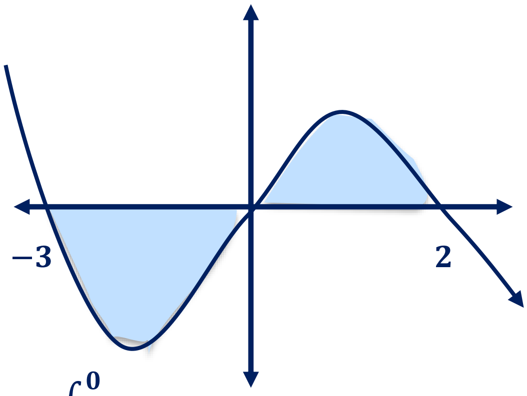
$$-x^3 - x^2 + 6x = 0$$

$$-x(x^2 + x - 6) = 0$$

$$x(x+3)(x-2) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = -3 \qquad x = 2$$

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ & -3 \quad 0 & \quad 2 & \end{array}$$



$$A = \int_{-3}^{0} -(-x^3 - x^2 + 6x)$$
$$+ \int_{0}^{2} (-x^3 - x^2 + 6x)dx$$
$$= -\left(\frac{-1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^2 + 3x^2\right)\Big|_{-3}^{0}$$
$$\left(-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2\right)\Big|_{0}^{2}$$
$$= 21.08$$

مثال 10

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$ والمحور x

الحل:

$$(x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$$

$x = \pm 2$ $\qquad$ $x = \pm 1$

+ − + − +
−2 $\quad$ −1 $\quad$ 1 $\quad$ 2

فك الأقواس

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

$$A = \int_{-2}^{-1} -(x^4 - 5x^2 + 4) + \int_{-1}^{1} x^4 - 5x^2 + 4$$
$$+ \int_{1}^{2} -(x^4 - 5x^2 + 4$$
$$= -\left(\frac{x^5}{5} - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right)\Big|_{-2}^{-1}$$
$$+ \frac{x^5}{5} - \frac{5}{3}x^3 + 4x\Big|_{-1}^{1}$$
$$+ -\left(\frac{x^5}{5} - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right)\Big|_{1}^{2}$$
$$= 8$$

الدرس الأول

تكامل اقترانات خاصة

تكامل الاقترانات الأسية

مفهوم أساسي

صيغ تكاملات اقترانات أسية

إذا كانت a , b , k أعداداً حقيقية

$a \neq 0$, $k > 0$, $k \neq 1$, e العدد النيبري فإن

1) $\int e^x \, dx = e^x + C$

2) $\int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$

3) $\int k^x \, dx = \frac{k^x}{\ln k} + C$

4) $\int k^{ax+b} \, dx = \frac{k^{ax+b}}{a \ln k} + C$

تذكر

1) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

2) $\frac{d}{dx}\left(e^{ax+b}\right) = a\, e^{ax+b}$

3) $\frac{d}{dx}(k^x) = k^x \ln k$

4) $d\left(k^{ax+b}\right) = k^{ax+b} \ \ln k \ (a)$

حيث $k > 0$, $k \neq 1$

مثال 1

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int 2e^{4x+3} \ dx$

الحل:

$= 2 \times \frac{1}{4} e^{4x+3} + C$

$= \frac{1}{2} \ e^{4x+3} + C$

2) $\int_0^2 (6e^{-3x} + x^3 \ dx$

الحل:

$= \frac{6}{-3} \ e^{-3x} + \frac{x^4}{4}\Big|_0^4$

$= \left(-2e^{-3(2)} + \frac{2^4}{4}\right) - \left(-2e^{-3(0)} + \frac{0^4}{4}\right)$

$= -2e^{-6} + 4 - (-2 + 0)$

$= \ -2 \ e^{-6} + 6$

3) $\int \sqrt{e^{x+1}} \ dx$

الحل:

$= \int (e^{x+1})^{\frac{1}{2}} \, dx$

$= \int e^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}} \, dx$

$= \frac{e^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$

$= \ 2 \ e^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}} + C$

4) $\int (5^x + 7)\ dx$

الحل:

$$= \frac{5^x}{\ln 5} + 7x + C$$

مثال2

أتحقَّق من فهمي صفحة 10

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int (5x^2 - 3e^{7x})\ dx$

الحل:

$$= \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{7}e^{7x} + C$$

---

b) $\int_0^{\ln 3} 8\ e^{4x}\ dx$

الحل:

$$= \frac{8\ e^{4x}}{4}\Big|_0^{\ln 3}$$

$$= 2\ e^{4x}\Big|_0^{\ln 3}$$

$$= 2\ e^{4\ln 3} - 2\ e^{4(0)}$$

$$= 2\ e^{\ln 81} - 2e^0$$

$$= 2(81) - 2 =$$

$$162 - 2 = 160$$

c) $\int \sqrt{e^{1-x}}\ dx$

الحل:

$$= \int (e^{1-x})^{\frac{1}{2}}\ dx$$

$$= \int e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x}\ dx$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x}}{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= -2\ e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x} + C$$

---

d) $\int (3^x + 2\sqrt{x})\ dx$

الحل:

$$= \int \left(3^x + 2x^{\frac{1}{2}}\right)\ dx$$

$$= \frac{3^x}{\ln 3} + 2 \times \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{3^x}{\ln x} + \frac{4}{3}\ x^{\frac{3}{2}} + C$$

مثال3

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int (11)^{\frac{x}{2}}\ dx = \dfrac{11^{\frac{x}{2}}}{\ln 11 \left(\frac{1}{2}\right)} + C$

$$= \frac{2}{\ln 11}\ \ 11^{\frac{x}{2}} + C$$

2) $\int_0^1 (1+e^x)^2\, e^x\, dx$

الحل:

$\int_0^1 (1+2e^x+e^{2x})\, e^x\, dx$

$= \int_0^1 (e^x+2e^{2x}+e^{3x})\, dx$

$= e^x + \dfrac{2\, e^{2x}}{2} + \dfrac{e^{3x}}{3}\Big]_0^1$

$= \left(e+e^2+\dfrac{e^3}{3}\right) - \left(1+1+\dfrac{1}{3}\right)$

$e+e^2+\dfrac{e^3}{3}-\dfrac{7}{3}$

3) $\int \dfrac{5}{\sqrt[3]{e^{6x-3}}}\, dx$

الحل:

$= \int 5\,(e^{6x-3})^{-\frac{1}{3}}\, dx$

$= \int 5\, e^{-2x+1}\, dx$

$= \dfrac{-5}{2} e^{-2x+1} + C$

4) $\int \dfrac{e^{3x}-e^{5x}-e^x+7}{e^x}\, dx$

الحل: توزيع البسط على المقام

$= \int \left(\dfrac{e^{3x}}{e^x}-\dfrac{e^{5x}}{e^x}-\dfrac{e^x}{e^x}+\dfrac{7}{e^x}\right) dx$

$= \int (e^{2x}-e^{4x}-1+7\, e^{-x})\, dx$

$= \dfrac{e^{2x}}{2}-\dfrac{e^{4x}}{4}-x+\dfrac{7\, e^{-x}}{-1}+C$

5) $\int \dfrac{e^{2x}-4}{e^x-2}\, dx$

الحل:

$= \int \dfrac{(e^x)^2-4}{e^x-2}\, dx$

$= \int \dfrac{\cancel{(e^x-2)}(e^x+2)}{\cancel{e^x-2}}\, dx$

$= \int (e^x+2)\, dx$

$= e^x+2x+C$

6) $\int e^{3x}\,(1+e^{2x})\, dx$

الحل:

$= \int (e^{3x}+e^{5x})\, dx$

$= \dfrac{e^{3x}}{3}+\dfrac{e^{5x}}{5}+C$

مثال 4

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int (2e+3^{2x})\, dx$

الحل:

$= 2\, ex + \dfrac{3^{2x}}{\ln 3\,(2)} + C$

2) $\int 3x\, e^{2+\ln x^2}\, dx$

الحل:

$= \int 3x\,(e^2 \times e^{\ln x^2})\, dx$

$= \int 3x\,(e^2 \times x^2)\, dx$

$$= \int 3e^2\, x^3\, dx$$

$$= \frac{3e^2\, x^4}{4} + C$$

---

3) $\displaystyle\int_1^{e^\wedge} \frac{1}{e-1}\, dx$

:الحل

$$= \frac{1}{e-1}\, x \Big]_1^{e^2}$$

$$= (e^2 - 1)$$

$$= \cancel{\frac{1}{e-1}}\, \cancel{(e-1)}\, (e+1)$$

$$= e + 1$$

---

4) $\displaystyle\int e^{2x} \sqrt{e^{2x} + 4\, e^x + 4}\;\, dx$

:الحل

$$= \int e^{2x} \sqrt{(e^x + 2)^2}\, dx$$

$$= \int e^{2x}\, \underbrace{|e^x + 2|}_{\text{دائماً موجبة}}\, dx$$

$$= \int e^{2x}\, (e^x + 2)\;\, dx$$

$$= \int (e^{3x} + 2e^{2x})\;\;\, dx$$

$$= \frac{e^{3x}}{3} + \frac{2\, e^{2x}}{2} + C$$

تكامل الاقترانات المثلثيـــة

مفهوم أساسي

صيغ تكاملات اقترانات مثلثية (1)

1) $\displaystyle\int \sin x\, dx = \cos x + C$

2) $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + C$

3) $\displaystyle\int \sec^2 x\, dx = \tan x\; + C$

4) $\displaystyle\int \sec x \tan x\, dx = \sec x\; + C$

5) $\displaystyle\int \csc^2 x\, dx = \; -\cot x\; + C$

6) $\displaystyle\int \csc x \cot x\, dx = \; -\csc x\; + C$

صيغ تكاملات اقترانات مثلثية (2)

1) $\displaystyle\int \sin\,(ax+b) dx = \frac{-1}{a} \cos\,(ax+b) + C$

2) $\displaystyle\int \cos\,(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin\,(ax+b) + C$

3) $\displaystyle\int \sec^2 (ax+b) dx = \frac{1}{a} \tan\,(ax+b) + C$

4) $\displaystyle\int \sec\,(ax+b) \tan\,(ax+b) dx$

$$= \frac{1}{a} \sec\,(ax+b) + C$$

5) $\displaystyle\int \csc^2 (ax+b) d = -\frac{1}{a} \cot\,(ax+b) + C$

6) $\displaystyle\int \csc\,(ax+b)\, \cot\,(ax+b) dx$

$$= -\frac{1}{a} \csc\,(ax+b)\; + C$$

مثال1

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int 2\sin(4x+3)dx$

الحل:

$= -2 \times \frac{1}{4}\cos(4x+3) + C$

$= -\frac{1}{2}\cos(4x+3) + C$

2) $\int (3\cos + \sqrt[3]{x})\, dx$

الحل:

$= \int \left(3\cos x + x^{\frac{1}{3}}\right) dx$

$= 3\sin x + \frac{3}{4}\; x^{\frac{4}{3}} + C$

$= 3\sin x + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sec^2(3x)dx$

الحل:

$= \frac{1}{3}\tan(3x)\Big]_0^{\frac{\pi}{12}}$

$\frac{1}{3}\tan\left(3\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) - \frac{1}{3}\tan 3(0)$

$= \frac{1}{3}$

مثال2

أتحقَّق من فهمي صفحة 12

أجد كلاً من التكاملات الآتية :

a) $\int \cos(3x-\pi)dx$

الحل:

$= \frac{1}{3}\sin(3x-\pi) + C$

b) $\int (\csc^2(5x) + e^{2x})\, dx$

الحل:

$= -\frac{1}{5}\cot(5x) + \frac{e^{2x}}{2} + C$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \cos 4x)dx$

الحل:

$= -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$

$\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$-\left(-\frac{1}{2}\cos 0 - \frac{1}{4}\sin 0\right)$

$= \left(+\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}$

مثال3

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \sin\frac{3}{4}x\,dx$

الحل:

$$= -\frac{\cos\frac{3}{4}x}{\frac{3}{4}} + C$$

$$= -\frac{4}{3}\cos\frac{3}{4}x + C$$

2) $\int \sec^2(3x-1)\,dx$

الحل:

$$= \frac{1}{3}\tan(3x-1) + C$$

3) $\int \csc^2\left(\frac{4x+2}{3}\right)dx$

الحل:

$$= -\frac{3}{4}\cot\left(\frac{4x+2}{3}\right) + C$$

4) $\int \sec 4x \tan 4x\,dx$

الحل:

$$= \frac{1}{4}\sec 4x + C$$

المتطابقات المثلثية و التكامل

متطابقات هامة للتكامل

1) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

2) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

3) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

4) $\tan^2 = \sec^2 x - 1$

5) $\cot^2 = \csc^2 x - 1$

6) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

7) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$= 1 - 2\sin^2 x$
$= 2\cos^2 x - 1$

8) $\cos x \cos y =$
$\frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$

9) $\sin x \sin y =$
$\frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

10) $\sin x \cos y =$
$\frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$

ملاحظات هامة

1) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$\csc x = \frac{1}{\sin x}$

$\cot x = \frac{1}{\tan x}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

2) إذا كانت الزوايا في البسط تختلف عن المقام نعمل اولاً على أن نجعلها متساوية باستخدام المتطابقات

3) أين ما تجد الصورة
$1 \pm \sin x$, $x \pm \cos x$

ملاحظات هامة

1) التكامل لـ
$\sin^2 x, \cos^2 x, \tan^2 x, \cot^2 x$
غير مباشر حيث نستخدم المتطابقات

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$\cos^2 x - \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

2) من الممكن استخدام المتطابقات

$$(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x$$
$$(\sin x-\cos x)^2=1-\sin 2x$$

3) إذا كانت الزوايا مختلفة في عملية الضرب نستخدم المتطابقات

1) $\sin x\cos y$
$$=\frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))$$

2) $\cos x\cos y$
$$\frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))$$

3) $\sin x\sin y$
$$\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$$

مثال 1

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \tan^2 2x\,dx$

الحل:

متطابقة

$$\tan^2 2x=sec^2 2x-1$$
$$\int(\sec^2 2x-1)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\tan 2x-x+C$$

2) $\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$

الحل:

متطابقة

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos x)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{1}{2}\sin(2\pi)\right)\right)-(\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{2}\sin 0\right)$$
$$=\frac{1}{2}\pi$$

3) $\int \sin 4x\cos 5x\;dx$

الحل:

متطابقة

$$\sin x\cos y=$$
$$\frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))$$
$$=\int\frac{1}{2}(\sin(4x+5x)+\sin(4x-5x))$$
$$=\int\frac{1}{2}(\sin 9x-\sin x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{9}\cos 9x+\cos x\right)+C$$

4) $\int \frac{dx}{1-\cos} dx$

الحل:

الضرب بالمرافق $1+\cos x$

$$= \int \frac{dx}{1-\cos x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= \int \csc^2 x + \csc x \cot x \; dx$$

$$= -\cot x + \csc x + C$$

مثال 2

صفحة 14

أتحقَّق من فهمي

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$a)$ $\int \cos^4 x \, dx$

الحل:

$$\int (\cos^2 x)^2 \, dx$$

متطابقة

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2 \; dx$$

$$= \int \frac{1}{4}(1+\cos 2x+\cos^2 2x) \; dx$$

$$= \int \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right) \; dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(x + \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\right)$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$$

$b)$ $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \sin x \; dx$

الحل:

متطابقة

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}(\cos(3x-x) - \cos(3x+x))$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}(\cos(2x) - \cos(4x))$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 0 - \frac{1}{4}\sin 0\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 0$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

c) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

الحل:
الضرب بالمرافق والقسمة $1-\cos x$

$\int \frac{dx}{1+\cos x} \times \frac{1-\cos x}{1-\cos x}$

$= \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}\, dx$

$= \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

$= \int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

$= \int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x}$

$= \int \csc^2 x - \csc x \cot x$

$= -\cot x + \csc x + C$

مثال3

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \left(3 - 6\sin^2 \frac{x}{2}\right) dx$

الحل:

$= \int (3 - 6\left(\frac{1}{2}(1-\cos x)\right)\, dx$

$= \int (3 - 3 + 3\cos x)\, dx$

$= \int 3\cos x\, dx = 3\sin x + C$

2) $\int (\sec^2 x - \tan^2 x)\ dx$

الحل:
متطابقة

$= \int 1\, dx = x + C$

3) $\int \frac{1 + 2\sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\ dx$

الحل:
توزيع البسط على المقام

$= \int \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$

$= \int \sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x\ dx$

$= \int \sec^2 x + 2\sec x \tan x + \sec^2 x - 1$

$= \int 2\sec^2 x + 2\sec x \tan x - 1$

$= 2\tan x + 2\sec x - x + C$

مثال4

$\int \frac{5}{\sin^2 x}\, dx =$

$a)\ \cot x + C$ $\qquad b) -5\cot x + C$

$c) -\cot x + C$ $\qquad d)\ 5\cot x + C$

الحل:

$= \int 5\csc^2 x\ dx$

$= -5\cot x + C$ $\qquad \boxed{b}$

مثال5

$$\int (2\sin^2 x + 2\cos^2 x)\, dx$$

a) $\cos x + C$ b) $\sin x + C$

c) $2x + C$ d) $-2x + C$

الحل:

$$= \int 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = \int 2\, dx = 2x + C$$

$\boxed{c}$

مثال6

$$\int \frac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\sqrt{x}}\, dx$$

a) $2x^{\frac{3}{2}} + C$ b) $2\sqrt{x} + C$

c) $-2\sqrt{x} + C$ d) $-2x^{\frac{3}{2}} + C$

الحل:

متطابقة

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

$\boxed{b}$

مثال7

$$\int \sin 5x \cos 5x\, dx$$

a) $\frac{1}{2}\cos 5x + C$ b) $\frac{-1}{20}\cos 10x + C$

c) $\frac{1}{20}\cos 5x + C$ d) $\frac{-1}{20}\sin 10x + C$

الحل:

متطابقة

$$\sin 5x \cos 5x = \frac{1}{2}\sin 10x$$

$$\int \frac{1}{2}\sin 10x\, dx = \frac{-1}{20}\cos 10x + C$$

$\boxed{b}$

مثال8

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{2}{1+\cos 2x}\, dx$

الحل:

$$= \int \frac{2}{1 + 2\cos^2 x - 1}\, dx$$

$$= \int \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \frac{2}{\cos^2 x}\, dx = \int \sec^2 x\, dx$$

$$= \tan x + C$$

2) $\int \frac{1+\cos^3 x}{1+\cos 2x}\,dx$

الحل:

متطابقة

$$\int \frac{1+\cos^3 x}{1+2\cos^2 x-1}$$

$$= \int \frac{1}{2\cos^2 x}+\frac{\cos^3 x}{2\cos^2 x}$$

$$= \int \frac{1}{2}\sec^2 x+\frac{1}{2}\cos x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\tan x+\frac{1}{2}\sin x + C$$

---

3) $\int \frac{1}{\cos 2x+\sin^2 x}\,dx$

الحل:

متطابقة

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x - \cancel{\sin^2 x} + \cancel{\sin^2 x}}$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\,dx$$

$$= \tan x + C$$

---

4) $\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$

الحل:

الضرب والقسمة بالمرافق

$$= \int \frac{1}{1+\sin x}\times\frac{1-\sin x}{1-\sin x}$$

$$= \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$$

$$= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \sec^2 x - \sec x\tan x\,dx$$

$$= \tan x - \sec x + C$$

---

5) $\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\;dx$

الحل:

$$= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$= \int \cos 2x \times 1\,dx$$

$$= \int \cos 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

---

6) $\int \sqrt{1+\sin x}\;dx$

الحل:

$$= \int \sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

$$= \int \left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|$$

موجب

$$= -2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}+C$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

مثال 9

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \sin 3x \cos 5x \, dx$

الحل:

متطابقة

$$= \int \frac{1}{2} (\sin(8x) + \sin(-2x))$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{8}\cos 8x + \frac{1}{2}\cos -2x\right) + C$$

2) $\int \cos 2x \sin 5x \, dx$

الحل:

متطابقة

$$= \int \frac{1}{2} (\sin 7x + \sin 3x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{7}\cos 7x - \frac{1}{3}\cos 3x\right) + C$$

3) $\int \cos 8x \cos 3x \ \ dx$

الحل:

متطابقة

$$\int \frac{1}{2} (\cos 11x + \cos 5x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 11x}{11} + \frac{\sin 5x}{5}\right) + C$$

مثال 10

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{\cos 3x}{\cos x} \, dx$

الحل:

$$= \int \frac{\cos(x + 2x)}{\cos x} dx$$

$$= \int \frac{\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x}{\cos x}$$

$$= \int \frac{\cos x \cos 2x}{\cos x} - \frac{\sin x \sin 2x}{\cos x}$$

$$= \int \cos 2x - \frac{\sin x \, (2)\sin x \cos x}{\cos x}$$

$$= \int \cos 2x - 2\sin^2 x$$

$$= \int \cos 2x - 2\left(\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right) \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x - \left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$$

تكاملات ينتج منها اقتران لوغاريتمي طبيعي

مفهوم أساسي

إذا كانت $b\,,a$ عددين حقيقياً و $a \neq 0$ وكان $f(x)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق فإن

$$1)\ \int \frac{1}{x}dx = |x| + C \qquad x \neq 0$$

$$2)\ \int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

$$x \neq -\frac{b}{a}$$

$$3)\ \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

$$f(x) \neq 0$$

تعني أن

$$\int \frac{\text{مشتقة الاقتران}}{\text{الاقتران}} = \ln|\text{الاقتران}| + C$$

البسط = مشتقة المقام

مثال1

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$1)\ \int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right)\,dx$$

الحل:

$$= 2e^x + 3\ln|x| + C$$

$$2)\ \int \frac{1}{4x-1}\,dx$$

الحل:

$$= \frac{1}{4}\ln|4x-1| + C$$

$$3)\ \int \frac{2x^5-4}{x}\,dx$$

الحل:

$$= \int \left(\frac{2x^5}{x} - \frac{4}{x}\right)\,dx$$

$$= \int \left(2x^4 - \frac{4}{x}\right)\,dx$$

$$= \frac{2}{5}x^5 - 4\ln|x| + C$$

$$4)\ \int \frac{2x}{x^2-1}dx$$

الحل:

نلاحظ أن البسط = مشتقة المقام

$$= \ln|x^2-1| + C$$

$$5)\ \int \frac{6x}{x^2+9}dx$$

الحل:

مشتقة المقام $= 2x$

$$= \frac{\text{معامل البسط}}{\text{معامل الاشتقاق}}\ ln|\text{المقام}|$$

$$= \frac{6}{2}\ln|x^2+9|$$

$$= 3\ln|x^2+9| + C$$

6) $\int \frac{\cos x}{3+2\sin x} dx$

الحل:

مشتقة المقام $= 2\cos x$

$= \frac{1}{2}\ln|3+2\sin x| + C$

7) $\int \tan x \; dx$

الحل:

$= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

البسط = مشتقة المقام

$= -\ln|\cos x| + C$

8) $\int \sec x \; dx$

الحل:

نضرب البسط والمقام بـ $\sec x + \tan x$

$= \int \sec x \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$

$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}$

البسط = مشتقة المقام

$= \ln|\sec x + \tan x| + C$

مثال 2

أتحقَّق من فهمي صفحة 16

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$a)$ $\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right) dx$

الحل:

$= -\cos x - 5\ln|x| + C$

$b)$ $\int \frac{5}{3x+2} dx$

الحل:

$= \frac{5}{3}\ln|3x+2| + C$

$c)$ $\int \frac{x^2-7x+2}{x^2} dx$

الحل:

$= \int \frac{x^x}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{2}{x^2} dx$

$= \int 1 - \frac{7}{x} + 2x^{-2} \; dx$

$= x - 7\ln|x| - 2\,x^{-1} + C$

$= x - 7\ln|x| - \frac{2}{x} + C$

$d)$ $\int \frac{2x+3}{x^2+3x} dx$

الحل:

البسط = مشتقة المقام

$= \ln\left|x^2+3x\right| + C$

$e)$ $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} dx$

الحل:

مشتقة المقام $= -2\sin 2x$

$= -\frac{1}{2}\ln|1+\cos 2x| + C$

$f)\ \int \cot x\, dx$

$= \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$

الحل:

مشتقة المقام $= \cos x$

$= \ln|\sin x| + C$

$g)\ \int \frac{e^x}{e^x + 7}\, dx$

الحل:

مشتقة المقام $= e^x =$ البسط

$= \ln|e^x + 7| + C$

$h)\ \int \csc x\, dx$

الحل:

نضرب البسط والمقام بـ

$\csc x + \cot x$

$= \int \csc x \times \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x}$

$= \int \frac{\csc^2 x + \csc x \cot x}{\csc x + \cot x}$

مشتقة المقام $= -\csc x \cot x - \csc^2 x$

$-\ln|\csc x + \cot x|$

مثال3

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$1)\ \int \frac{5}{x + e}\, dx$

الحل:

$= 5\ln|x + e| + C$

$2)\ \int \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + 1}\, dx$

الحل:

مشتقة المقام

$x\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{x}$

$= \frac{3}{2}\sqrt{x}$

$= \frac{1}{\frac{3}{2}} \ln\left|x\sqrt{x} + 1\right| + C$

$= \frac{2}{3} \ln\left|x\sqrt{x} + 1\right| + C$

$3)\ \int \frac{\sqrt[3]{x}}{5 - 3\sqrt[3]{x}}\, dx$

الحل:

$= \int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{5 - x^{\frac{4}{3}}}$

مشتقة المقام $= \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} =$

$\frac{-3}{4} \ln\left|5 - x^{\frac{4}{3}}\right| + C$

4) $\int \frac{1}{x^{10}+x}\,dx$

الحل:

$= \int \frac{1}{x^{10}(x+x^{-9})}\,dx$

$= \int \frac{x^{-10}}{1+x^{-9}}\,dx$

مشتقة المقام $= -9x^{-10}$

$= \frac{-1}{9}\ln\left|1+x^{-9}\right| + C$

---

5) $\int \frac{1+\ln x}{3+x\ln x}\,dx$

الحل:

مشتقة المقام =

$x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x = 1+\ln x$

البسط

$= \ln\left|3+x\ln x\right| + C$

---

6) $\int \frac{5+5\cot^2 x}{\cot x}\,dx$

الحل:

$5\int \frac{1+\cot^2 x}{\cot x}\,dx$

$= \int \frac{\csc^2 x}{\cot x}\,dx$

مشتقة المقام $= -\csc^2 x$

$= -5\ln\left|\cot x\right| + C$

7) $\int_3^5 \frac{x-2}{x^2-4}$

الحل:

$= \int_3^5 \frac{x-2}{(x-2)(x+2)}\,dx$

$= \int_3^5 \frac{1}{x+2}\,dx$

$= \ln|x+2|\Big|_3^5$

$= \ln 7 - \ln 5$

$= \ln\left(\frac{7}{5}\right)$

مثال4

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{\cos^3 x - 4}{\cos x}\,dx$

الحل:

$= \int \frac{\cos^3 x}{\cos x} - \frac{4}{\cos x}\,dx$

$= \int (\cos^2 x - 4\sec x)\,dx$

$= \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x) - 4\sec x \times \frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}$

$= \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right) - 4\ln\left|\sec x+\tan x\right| + C$

$$2)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}-x}\,dx$$

الحل:

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}\,dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\left(1-\sqrt{x}\right)}\,dx$$

مشتقة المقام $-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$= -2\ln\left|1-\sqrt{x}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}\right| + C$$

$$3)\ \int \frac{x^5+6x^3+9x}{(x^2+3)^3}\,dx$$

الحل:

$$\int \frac{x(x^4+6x^2+9)}{(x^2+3)^3}$$

$$= \int \frac{x(x^2+3)^2}{(x^2+3)^3} = \int \frac{x}{x^2+3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+3\right| + C$$

$$= \ln\left|\sqrt{x^2+3}\right| + C$$

$$4)\ \int \frac{\sec^2 x}{2+\tan x}\,dx$$

الحل:

مشتقة المقام $= sec^2x$

$$= \ln\left|2+\tan x\right| + C$$

تكامل الاقترانات النسبية

درجة البسط أكبر من أو تساوى درجة المقام

لايجاد تكامل الاقترانات النسبية التي يكون فيها درجة البسط أكبر من أو يساوي درجة المقام نتبع الخطوات التالية:

1) نجد ناتج وباقي قسمة البسط على المقام إما بطريقة القسمة الطويلة أو الجدول

2) نكتب الناتج والباقي باستخدام خوارزمية القسمة

$$\frac{\text{المقسوم}}{\text{المقسوم عليه}} = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

3) اجراء التكامل

مثال 1

أجد $\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$

الحل:

تستخدم القسمة الطويلة أو الجدول لأن درجة البسط أكبر من درجة المقام

$$\begin{array}{r|l} & x^2+x+2 \\ \hline x-1 & x^3+x \\ & \underline{-x^3 \pm x^2} \\ & x^2+x \\ & \underline{x^2 \pm x} \\ & 2x \\ & \underline{-2x \pm 2} \\ & 2 \end{array}$$

أو الجدول

$\times$	x^2	x	2	
x	x^3	x^2	$2x$	2
-1	$-x^2$	$-x$	2	

نكتب نتيجة القسمة

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx = \int \underbrace{x^2+x+2}_{\text{الناتج}} + \frac{\overset{\text{الباقي}}{2}}{\underbrace{x-1}_{\text{المقسوم عليه}}}$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-1| + C$$

مثال2

صفحة 17

أتحقَّق من فهمي

أجد $\int \frac{x^2+x+1}{x+1}\,dx$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x+1 & x^2+x+1 \\ & \underline{-x^2+x} \\ & 1 \end{array}$$

$$\int \frac{x^2+x+1}{x-1}\,dx = \int x + \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| + C$$

مثال3

أجد $\int \frac{6x}{3x+2}\,dx$

الحل:

درجة البسط = درجة المقام

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 3x+2 & 6x \\ & \underline{6x+4} \\ & -4 \end{array}$$

$$\int 2 \frac{-4}{3x+2}\,dx$$

$$= 2x - \frac{4}{3}\ln|3x+2| + C$$

مثال4

أجد $\int \frac{12\,x^2}{2x+1}\,dx$

الحل:

درجة البسط أكبر من درجة المقام

$$\begin{array}{r|l} & 6x-3 \\ \hline 2x+1 & 12x^2 \\ & \underline{-12x^2 \mp 6x} \\ & -\cancel{6x} \\ & \underline{\pm\cancel{6x} \pm 3} \\ & +3 \end{array}$$

$$\int \frac{12x^2}{2x+1} = \int 6x - 3 + \frac{3}{2x+1}$$

$$= \frac{6x^2}{2} - 3x + \frac{3}{2}\ln|2x+1|$$

$$= 3x^2 - 3x + \frac{3}{2}|2x+1| + C$$

تكامل الاقترانات المتشعبة

لإيجاد تكامل الاقترانات المتشعبة نستخدم قاعدة تجزئة التكامل فإذا كان $f(x)$ اقتراناً متصلاً على الفترة $[a,b]$ فإن :

$$\int_a^b f(x)d = \int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

ويجب اعادة تعريف القيمة المطلقة ثم إيجاد تكامل كل قاعدة فترتها الجزئية.

مثال1

إذا كان $f(x) = \begin{cases} 12, & x < 2 \\ 3x^2, & x \geq 2 \end{cases}$ فأجد قيمة

$$\int_1^4 f(x)\, dx$$

الحل:

$$\int_1^4 f(x)\, dx = \int_1^2 12\, dx + \int_2^4 3x^2\, dx$$

$$= 12x\Big|_1^2 + x^3\Big|_2^4$$

$$= 12\,(2-1) + (4^3 - 2^3)$$

$$= 68$$

مثال2

إذا كان $f(x) = |x|$ فأجد قيمة $\int_{-2}^{6} f(x)\, dx$

الحل:

نعيد تعريف القيمة المطلقة

$x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\, dx = \int_{-2}^{0} -x\, dx + \int_0^6 3X^2\, dx$$

$$= \frac{-x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^6$$

$$= \frac{-1}{2}(0^2 - (-2)^2) + \frac{1}{2}(6^2 - 0^2)$$

$$= 20$$

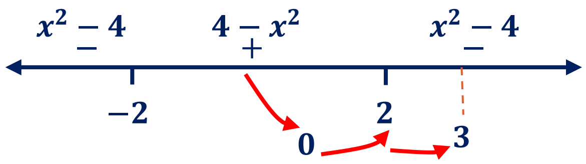
مثال3

إذا كان $f(x) = |4 - x^2|$ فأجد قيمة $\int_0^3 f(x)\, dx$

الحل:

نعيد تعريف القيمة المطلقة

$$4 - x^2 = 0 \longrightarrow x = \pm 2$$



$$\int_0^3 f(x)\, dx = \int_0^4 (4 - x^2)\, dx + \int_2^3 (x^2 - 4)\, dx$$

$$= \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big|_2^3$$

$$= \left(4(2) - \frac{1}{3}(2)^3\right) - \left(4(0)\frac{1}{3}(0)^3\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{3}(3)^3 - 4(3)\right) - \left(\frac{1}{3}(2)^3 - 4(2)\right)$$

$$= \frac{23}{3}$$

مثال4

أتحقَّق من فهمي

صفحة 19

a) إذا كان $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<1\\ 2x\ \ , & x\geq 1\end{cases}$ فأجد قيمة

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx$$

الحل:

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(1+x)\,dx+\int_{1}^{3}2x\,dx$$

$$=x+\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}+\ x^2\Big|_{1}^{3}$$

$$=\left(1+\frac{(1)^2}{2}\right)-\left(-1+\frac{(-1)^2}{2}\right)$$

$$+(3)^2-(1)^2$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(-1+\frac{1}{2}\right)+8$$

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+8=10$$

b) إذا كان $f(x)=|1-x|$ فأجد قيمة

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx$$

الحل:

نعيد تعريف القيمة المطلقة

$$1-x=0\quad\longrightarrow\quad x=0$$

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<1\\ x-1, & x\geq 1\end{cases}$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{1}(1-x)\,dx+\int_{1}^{2}(x-1)\,dx$$

$$=x-\frac{x^2}{2}\Big|_{2}^{1}+\frac{x^2}{2}-x\Big|_{1}^{2}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(-2-\frac{(-2)^2}{2}\right)+(2-2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}-(-4)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+4+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}+4+\frac{1}{2}=5$$

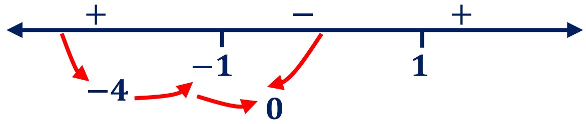
c) إذا كان $f(x)=\left|x^2-1\right|$ فأجد قيمة

$$\int_{-4}^{0} f(x)dx$$

الحل:

نعيد تعريف القيمة المطلقة

$$x^2-1=0\quad\longrightarrow\quad x=\pm 1$$



$$f(x)\begin{cases}x^2-1 & ,\ x\leq -1\\ 1-x^2 & ,\ -1<x<1\\ x^2-1\ , & x\geq 1\end{cases}$$

$$\int_{-4}^{0} f(x)\,dx=\int_{-4}^{-1}(x^2-1)\,dx+\int_{-1}^{0}1-x^2$$

$$=\frac{x^3}{3}-x\Big|_{-4}^{-1}+\ x\frac{-x^3}{3}\Big|_{-1}^{0}$$

$$=\left(\frac{-1}{3}+1\right)-\left(\frac{-64}{3}+4\right)$$

$$+\left(0-\frac{0^3}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{52}{3}+1-\frac{1}{3}$$
$$\frac{53}{3}+1=\frac{56}{3}$$

مثال5

قيمة التكامل $\int_3^1 |2x-4|\,dx$

$a)\ -2$ $\quad$ $b)\ 2$

$c)1\,4$ $\quad$ $d)7$

الحل:

$4-2x$ $\quad$ $2x-4$

2

$$\int_3^1 |2x-4|dx = +\int |2x-4|$$
$$=-\int_1^2 (4-2x)dx+\int_2^3 (2x-4)\,dx$$
$$=-(4x-x^2)\Big|_1^2+(x^2-4x)\Big|_1^2$$
$$=\big((4-3)+(-3+4)\big)$$
$$=-(1+1)=-2$$

$\boxed{a}$

مثال6

جد $\int_1^2 \sqrt{x^2-2x+1}\ dx$

الحل:

$$\int_1^2 \sqrt{(x-1)^2}=\int_1^2 |x-1|dx$$

$1-x$ $\quad$ $x-1$

1

$$\int_1^2 (x-)dx=\frac{x^2}{2}-x\Big|_1^2$$
$$=\frac{1}{2}$$

مثال7

جد $\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x|\,dx$

الحل:

$\sin x=0$

$\longrightarrow x=0\ ,\pi\ ,2\pi$

$\sin x$ $\quad$ $-\sin x$

0 $\quad$ 2π

$$=\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} -\sin x\,dx=\cos x\Big|_\pi^{\frac{3\pi}{2}}$$
$$=0-(-1)=1$$

مثال8

أوجد $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1-\cos^2 x}\ dx$

الحل:

متطابقة

$$=\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\sin^2 x}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,dx$$

$-\sin x$ $\quad$ $\sin x$

$-\pi$ $\quad$ 0 $\quad$ π

$$= \int_{-\pi}^{0} -\sin x \, dx + \int_{0}^{\pi} \sin dx$$

$$= \cos x \Big|_{-\pi}^{0} - \cos x \Big|_{0}^{\pi}$$

$$= 1 + (-1) - (-1 - 0)$$
$$= 1$$

مثال 9

أوجد $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos 2x} \, dx$

الحل:

متطابقة

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 2\cos^2 x - 1} \, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2 x} \, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \, |\cos x| \, dx$$

$\cos x$

$+ + + + + + + +$

$0 \qquad \pi$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \cos x$$

$$= \sqrt{2} \sin x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right)$$

$$= \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$$

مثال 10

جد $\int_{-1}^{1} x|x| \, dx$

الحل:

$-x^2 \qquad x^2$

$- \qquad +$

0

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \int_{-1}^{0} -x^2 \, dx + \int_{0}^{1} x^2 \, dx$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1}$$

$$= 0 - \left(+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} = \frac{-1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$= 0$$

مثال 11

أوجد $\int_{2}^{4} \frac{|x^2 - 4x + 3|}{x - 1} \, dx$

الحل:

نعيد تعريف القيمة المطلقة

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x - 3)(x - 1) = 0$$
$$\rightarrow x = 3 \qquad x = 1$$

$x^2 - 4x + 3 \qquad -x^2 + 4x - 3 \qquad x^2 - 4x + 3$

$+ \qquad - \qquad +$

$1 \qquad 3$

$$= \int_{1}^{3} \frac{-(x-3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} dx +$$

$$\int_{3}^{4} \frac{-(x-3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} dx$$

$$= \int_2^3 -x+3 + \int_3^4 x-3\,dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}+3x\Big|_2^3 + \frac{x^2}{2}-3x\Big|_3^4$$

$$= \left(\frac{-9}{2}+9\right)-\left(\frac{-4}{2}+6\right)$$

$$+\left(\frac{16}{2}-12\right)-\left(\frac{9}{2}-9\right)$$

$$= -1$$

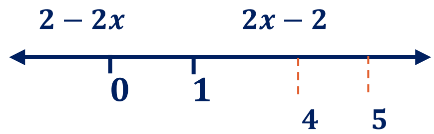
مثال 12

إذا كان $f(x) = \begin{cases} |2x-2|\,, & 0 \le x \le 4 \\ 2a & , \; 4 < x < 5 \end{cases}$ وكان

$\int_0^5 f(x)dx = 2$ جد قيمة a

الحل:

$$2x-2=0 \quad \longrightarrow \quad x=1$$



$$= \int_0^1 (2-2x)\,dx + \int_1^4 (2x-2)\,dx + \int_4^5 2a\,dx$$

$$= 2x-x^2\Big|_0^1 + x^2-2x\Big|_1^4 \; 2a\,(5-4)$$

$$(2-1)+(16-8)-(1-2)+2a=2$$

$$1+8+1+2a=2$$

$$8+2a=0$$

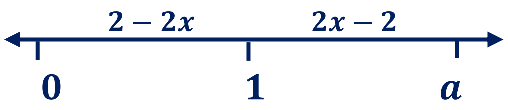
$$2a=-8 \quad \longrightarrow a=-4$$

مثال 13

$\int_0^a |2x-2|\,dx = 5$ جد قيمة a ؟

الحل:

$$2x-2=0$$
$$\longrightarrow x=1$$



$$\int_0^1 (2-2x)dx + \int_1^a (2x-2)dx = 5$$

$$2x-x^2\Big|_0^1 + x^2-2x\Big|_1^a = 5$$

$$(2-1)+(a^2-2a)-(1-2)=5$$
$$1+a^2-2a+1=5$$

$$a^2-2a+2=5$$

$$a^2-2a-3=0$$

$$(a-3)(a+1)$$

$$a=3$$

$$a=-1$$

ملاحظة

عند إيجاد التكامل المحدود لأقتران متشعب فأنه لا يشترط أن يكون الاقتران متصلاً عند نقطة التشعب والمهم هو أن تكون قاعدة الاقتران متصلة على كل فترة جزئية من التكامل

تطبيقات التكامل

الشرط الأولي

الشرط الأولي هو نقطة تحقق الأقتران الاصلي ، ويمكن بتعويضها إيجاد قيمة ثابت التكامل C وانه يمكن بها إيجاد الاقتران الأصلي الوحيد الذي يحقق شرط المسألة.

مثال1 من الحياة

تلوث : يعالج التلوث في بحيرة باستعمال مضاد للبتكيريا إذا كان عدد الخلايا البكتيرية الضارة في البحيرة يتغير بمعدل $N'(t) = \frac{-2000\,t}{1+t^2}$ حيث $N(t)$ عدد الخلايا البكتيرية لكل مليلتر من الماء بعد t من استعمال المضاد ، فأجد $N(t)$ علماً بأن العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خليه لكل مليلتر

الحل:

$$N(t) = \int N'(t)\,dt$$

$$= \int -\frac{2000\,t}{1+t^2}\,dt$$

$$= -1000 \ln\left|1+t^2\right| + C$$

نجد قيمة الثابت C

العدد الابتدائي $N(0) = 5000$

$$5000 = -1000 \ln(1+0^2) + C$$

$$= -1000 \ln(0) + C$$

$$5000 = 0 + C$$

$$N(t) = -1000 \ln(1+t^2) + 5000$$

مثال2

أتحقَّق من فهمي صفحة 20

تلوث: تسرب نفط من ناقلة بحرية مكوناً بقعة دائرية الشكل على سطح الماء نصف قطرها $R(t)$، قدماً بعد t دقيقة من بدء التسرب إذا كان نصف قطرها الدائرة يزداد بمعدل $R'(t) = \frac{21}{0.07\,t+5}$ فأجد $R(t)$ علماً بأن $R=0$ عندما $t=0$.

الحل:

$$R(t) = \int \frac{21}{0.07\,t+5}\,dt$$

$$R(t) = \frac{21}{0.07} \ln|0.07\,t+5| + C$$

$$= 300 \ln|0.07\,t+5| + C$$

$$R(0) = 0$$

$$0 = 300 \ln|5| + C$$

$$C = -300 \ln 5$$

$$R(t) = 300 \ln|0.07t+5| - 300 \ln 5$$

مثال3 مسألة اليوم

يمثل الاقتران $P(t)$ عدد الخلايا البكترية بعد t يوماً من بدء دراستها في مجتمع بكتيري إذا كان عدد هذه الخلايا عند بدء الدراسة 200000 خليه فأجد عددها في المجتمع البكتيري بعد 12 يوماً من بدء الدراسة علماً بأنها تتغير بمعدل

$$P'(t) = 200e^{0.1\,t} + 150\,e^{-0.03\,t}$$

الحل:

$$P(t) = \int 200\,e^{0.1\,t} + 150\,e^{-0.03\,t}\,dt$$

$$= \frac{200\,e^{0.1\,t}}{0.1} - \frac{150}{0.03}\,e^{-0.03\,t} + C$$

$= 2000\, e^{0.1\,t} - 5000\, e^{-0.03t} + C$

$P(0) = 2000 - 5000 + C$

$200000 = -3000 + C$

$C = 203000$

$P(t) = 2000\, e^{0.1\,t} - 5000\, e^{-0.03\,t}$

≈ 206152

مثال4

إذا كان $f'(x) = 3x^2 - 2$ وكان $f(1) = 1$
فأوجد قاعدة $f(x)$.

الحل:

$f(x) = \int f'(x)\, dx$

$= \int (3x^2 - 2)\, dx$

$= x^3 - 2x + C$

$f(1) = 1 - 2 + C = 0$

$C = 2$

قاعدة الاقتران

$f(x) = x^3 - 2x + 2$

مثال5

جد معادلة المنحنى الذي ميل المماس له عند أي نقطة (x, y) تعطى بالعلاقة $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4}$
والذي يقطع محور (x) عند $x = 3$.

الحل:

$\dfrac{dy}{dx} = f'(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4}$

$f(x) = \int \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4}\, dx$

$= \int \dfrac{(x+2)\cancel{(x^2 - 2x + 4)}}{\cancel{x^2 - 2x + 4}}\, dx$

$= \int (x + 2)\, dx$

$= \dfrac{x^2}{2} + 2x + C$

لكن $(3, 0)$ نقطة التقاطع مع المحور x

$\rightarrow f(3) = \dfrac{9}{2} + 6 + C = 0$

$\rightarrow C = \dfrac{-21}{2}$

$\Rightarrow C = -\dfrac{21}{2}$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{21}{2}$

مثال6

إذا كانت $f'(x) = 2x - \sin x$ وكان $f(\pi) = 3$
جد قاعدة $f(x)$.

الحل:

$f(x) = \int f'(x)\, dx$

$= \int (2x - \sin x)\, dx$

$= x^2 + \cos x + C$

$f(\pi) = \pi^2 + \cos \pi + C = 3$

$\pi^2 - 1 + C = 3$

$C = 4 - \pi^2$

$f(x) = x^2 + \cos x + 4 - \pi^2$

مثال 7

إذا كان f كثير حدود من الدرجة الثالثة بحيث أن $f'(x) = 3x^2 - 2$ وكانت النقطة $(0, 1)$ تقع على منحناه جد قاعدة الاقتران f.

الحل:

$f'(x) = 3x^2 - 2$

$f(x) = \int (3x^2 - 2)\, dx$

$= x^3 - 2x + C$

$f(0) = 1$

$0 - 0 + C = 1$

$\rightarrow C = 1$

$f(x) = x^3 - 2x + 1$

تطبيقات التكامل

الحركة في مسار مستقيم

- الازاحة: هو التغير في موقع الجسم عند الزمن t

الازاحة على الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي $s(t_1) - s(t_2)$ وقد تكون قيمتها موجبة أو سالبة أو صفر.

مفهوم أساسي

إذا تحرك جسم في مسار مستقيم وفق اقتران الموقع $s(t)$ ، فإن سرعته المتجهة هي

$$v(t) = s'(t)$$

وإزاحته في الفترة الزمنية $[t_1, t_2\,]$ هي

$$s(t_2) - s(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

المسافة الكلية المقطوعة

هي المسافة التي يقطعها الجسم في الفترة الزمنية $[t_1\,, t_2]$

مفهوم أساسي

إذا تحرك جسم في مسار مستقيم وفق اقتران الموقع $s(t)$ ، فإن سرعته المتجهة هي

$$v(t) = s'(t)$$

والمسافة الكلية التي قطعها الجسم في الفترة الزمنية $[t_1, t_2\,]$ هي

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt$$

ملاحظة

الإزاحة في الفترة $[t_1, t_2]$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt =$$

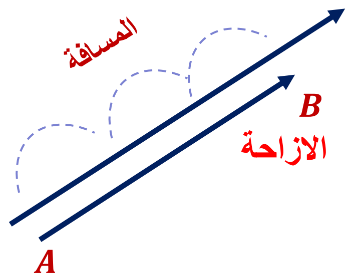
$$s(t) = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt =$$

المسافة = تكامل السرعة

ملاحظة هامة

المسافة هي طول المسار الذي يقطعه الجسم بغض النظر عن الاتجاه وقيمتها أكبر (أو تساوي) الصفر

الازاحة : هي التغير في الموقع



مثال1

يتحرك جسيم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران $v(t) = \sin t$ حيث t الزمن بالثواني ، v سرعته امتجهة بالمتر لكل ثانية.

1) إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل ، فأجد موفع الجسيم بعد $\frac{\pi}{3}$ ثانية من بدء الحركة.

الحل:

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$

$$= \int \sin t\,dt$$

$$= -\cos t + C$$

الجسم بدأ الحركة من نقطة الأصل

$$s(0) = 0$$

$$0 = -\cos 0 + C$$

$$0 = -1 + C \longrightarrow C = 1$$

$$s(t) = -\text{cods}\, t + 1$$

$$s\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} + 1 = \frac{1}{2}$$

2) أجد إزاحة الجسيم في الفترة $[0, 3\pi]$

الحل:

الازاحة

$$s(t) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

$$s(3\pi) - s(0) = \int_0^{3\pi} \sin t$$

$$= -\cos t\Big|_0^{3\pi} =$$

$$= -(\cos(3\pi) - \cos 0)$$

$$= 2$$

3) أجد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة $[0, 3\pi]$

الحل:

$$v(t) = 0$$

$$\sin t = 0 \implies$$

$t = 0 \qquad t = \pi \qquad t = 3\pi$

$$\int_0^{3\pi} |v(t)|\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} v(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} v(t)dt + \int_{2\pi}^{3\pi} v(t)dt$$

$$= \int_0^{\pi} \sin t\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin t\, dt + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin t dt$$

$$= (-\cos t)\Big|_0^{\pi} + \cos t\Big|_{\pi}^{2\pi} + (-\cos)\, t\Big|_{2\pi}^{3\pi}$$

$$= 2 + 2 + 2 = 6$$

ملاحظة هامة

لإيجاد المسافة الكلية.

1. نجد اصفار اقتران السرعة
2. ندرس اشارة اقتران السرعة على خط الاعداد
3. نجري التكامل على الفترات الجزئية

مثال2

أتحقَّق من فهمي صفحة 23

يتحرك جسيم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران $v(t) = 3\cos t$ ، حيث t الزمن بالثواني ، v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية.

a) إذا بدأ الجسيم حركته من نقطى الأصل فأجد موقع الجسيم بعد $\frac{\pi}{6}$ ثانية من بدء الحركة.

b) أجد إزاحة الجسيم بالفترة $[0, 2\pi]$

c) أجد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة $[0, 2\pi]$

الحل:

$$a)\ s(t) = \int v(t)\, dt$$

$$= \int 3\cos t\, dt$$

$$= 3 \sin t\ \ dt$$

$$= 3 \sin\ t + C$$

الجسيم بدأ الحركة من نقطة الأصل $s(0) = 0$

$$0 = 3\, sin\, 0 + C$$

$$\longrightarrow C = 0$$

$$s(t) = 3 \sin t$$

$$s\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$$

الحل:

$$b)\ \ s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$$

$$s(2\pi) - s(0) = \int_0^{2\pi} 3\cos dt$$

$$= 3\sin t\Big|_0^{2\pi} = 3 \sin 2\pi - 3 \sin 0$$

$$= 0$$

الحل:

$$c)\ v(t) = 0 \ \Longrightarrow 3\cos t = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad t = \frac{3\pi}{2}$$

0 to $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ to $\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$ to 2π
$3\cos t$	$-3\cos t$	$3\cos t$
+	−	+

$$\int_0^{2\pi} v(t)\, dt = \int_0^{2\pi} v(t)dt$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} v(t)dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} v(t)dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t\, dt = + - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 3\cos t\, dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos t\, dt$$

$$= 3\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3\sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} + 3\sin t\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= 3(1) - 0 + (-3\sin\frac{3\pi}{2} - \left(-3\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ 3\sin 2\pi - 3\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$= 3 + (3 + 3) + 0 + 3$$

$$= 12$$

مثال3

يتحرك جسيم بسرعة $v(t) = 2t^2 - 12t + 16$ كيلو متر /ساعة أوجد كلاً مما يلي:

1) الازاحة التي يقطعها الجسيم خلال الفترة الزمنية من $t = 0$ إلى $t = 4$

الحل:

$$s(4) - s(0) = \int_0^4 v(t)\, dt$$

$$= \int_0^4 2t^2 - 12t + 16$$

$$\frac{2t^3}{3} - \frac{12^2}{2} + 16t\Big|_0^4$$

$$= \left(\frac{128}{3} - 96 + 64\right) - (0)$$

$$= \frac{32}{3}$$

أي أن الازاحة التي قطعها الجسيم خلال الفترة $[0, 4]$ يساوي $\frac{32}{3}$ km

2) المسافة الكلية المقطوعة خلال الفترة $[0, 4]$

الحل:

$v(t) = 0 \ \rightarrow$

$2t^2 - 12t + 16 = 0$

بالقسمة على 2

$t^2 - 6t + 8 = 0$

$(t - 4)(t - 2) = 0$

$$\int_0^4 |v(t)dt|$$

$$= \int_0^2 2t^2 - 12t + 16\, dt - \int_2^4 2t62 - 12t + 16\, dt$$

$$= \frac{2t^3}{3} - 6t^2 + 16t\Big|_0^2 = \left(\frac{2t^3}{3} - 6t^2 + 16t\right)\Big|_2^4$$

$$= \frac{40}{3} + \frac{8}{3} = 16$$

مثال4

يتحرك جسيم في خط مستقيم إذا كانت سرعته بعد مرور t ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة $v(t) = 4t + 8$ بالامتار / ثانية فقطع مسافة 12 m بعد ثانية واحدة من حركته ، فأوجد موقع الجسيم بعد مرور 4 ثوانٍ من بدء حركته.

الحل:

$$s(t) = \int v(t)\, dt$$

$$= \int 4t + 8\, dt$$

$$= 2t^2 + 8t + C$$

لكن

$s(1) = 12$

$2 + 8 + C = 12$

$C = 2$

$\Rightarrow s(t) = 2t^2 + 8t + 2$

$s(4) = 2(4)^2 + 8(4) + 2$

$= 32 + 32 + 2$

$= 66$

مثال5

يتحرك جسيم في خط مستقيم إذا كانت سرعته بعد مرور t ثانية من بدء الحركة تعطى بالعلاقة $v(t) = e^{t+1} + \frac{8}{t}\ t > 0$ وعلمت أن ازاحة $e^2 m$ عندما $t = 1$ فأوجد موقع الجسيم بعد مرور 5 ثوانٍ من بدء الحركة.

الحل:

$s(t) = e^{t+1} + 8\ln t + C$

$s(1) = e^2$

$e^2 + 8\ln(1) + C = e^2$

$C = 0$

$s(t) = e^{t+1} + 8\ln t$

$s(5) = e^6 + 8\ln 5$

مثال6

يتحرك جسيم بسرعة $v(t) = 2t^2 - 6t + 4$ بالأقدام / ثانية، أوجد المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم خلال الفترة الزمنية $[0, 2]$

a) $\frac{4}{3}$ ft b) 2 ft

c) $\frac{5}{3}$ ft d) $\frac{1}{3}$ ft

الحل:

$2t^2 - 6t + 4 = 0$

$2(t^2 - 3t + 2) = 0$

$2(t-1)(t-2) = 0$

$t = 1 \quad t = 2$

$$\int_0^2 |v(t)|\,dt = \int_0^1 2t^2 - 6t + 4 - \int_1^2 2t^2 - 6t + 4$$

$$= \frac{2t^3}{2} - 3t^2 + 4t\Big|_0^1 - \left(\frac{2t^3}{3} - 3t^2 + 4t\right)\Big|_0^1$$

$$\frac{5}{3} - \left(\left(\frac{16}{3} - 12 + 8\right) - \left(\frac{2}{3} - 3 + 4\right)\right)$$

$$= \frac{5}{3} - \left(\left(\frac{16}{3} - 4\right) - \left(\frac{5}{3}\right)\right)$$

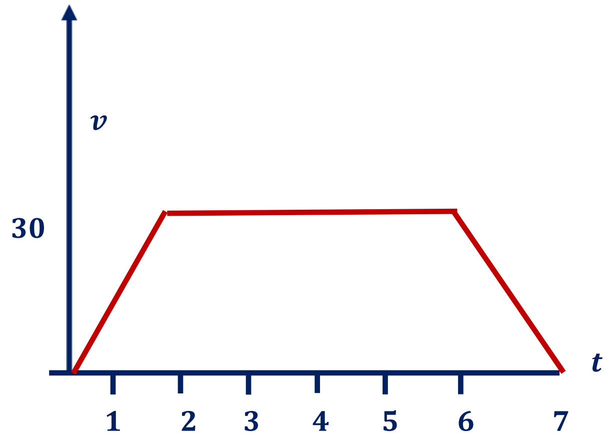
$$= \frac{5}{3} - \frac{4}{3} + \frac{5}{3}$$

$$= \frac{6}{3} = 2$$

$\boxed{b}$

مثال7

يمثل الشكل المجاور العلاقة بين السرعة والزمن لجسم يتحرك على خط مستقيم فجد المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية $[0,7]$.



نجد العلاقة $v(t)$ من الرسمة

الحل:

$$v(t)\begin{cases} 15t & , \ 0 \le t \le 2 \\ 30 & , \ 2 \le t \le 6 \\ -30t+210 & , \ 6 \le t \le 7 \end{cases}$$

معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(7,0)$،$(6,30)$

$$\int_0^7 |v(t)|dt = \int_0^2 15\,t\,dt + \int_2^6 30 + \int_6^7 (-30t+210)dt$$

$$= \left.\frac{15t^2}{2}\right|_0^2 + 30(6-2) + \left.-15t^2+210t\right|_6^7$$

$$= 30+120+15 = 165$$

يمكن حل السؤال عن طريق المساحة

مساحة شبه المنحرف

$$= \frac{1}{2}(7+4)\times 30 = 165$$

$$\int_0^7 v(t)\,dt = 165$$

تكامل اقترانات خاصة

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int (e^{2x-3} - \sqrt{x})\, dx$

الحل:

$$\int (e^{2x-3} - x^{1/2})\, dx = \frac{1}{2}e^{2x-3} - \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

2) $\int \left(e^{0.5x} - \frac{3}{e^{0.5x}}\right) dx$

الحل:

$$\int \left(e^{0.5x} - \frac{3}{e^{0.5x}}\right) dx$$

$$= \int \left(e^{0.5x} - 3e^{-0.5x}\right) dx$$

$$= 2e^{0.5x} + 6e^{-0.5x} + C$$

3) $\int (4\sin 5x - 5\cos 4x)\, dx$

الحل:

$$\int (4\sin 5x - 5\cos 4x)\, dx$$

$$= -\frac{4}{5}\cos 5x - \frac{5}{4}\sin 4x + C$$

4) $\int \left(3\sec x \tan x - \frac{2}{5x}\right) dx$

الحل:

$$\int \left(3\sec x \tan x - \frac{2}{5x}\right) dx$$

$$= 3\sec x - \frac{2}{5}\ln|x| + C$$

5) $\int \left(\sqrt{e^x} - \frac{1}{\sqrt{e^x}}\right)^2 dx$

الحل:

$$\int \left(\sqrt{e^x} - \frac{1}{\sqrt{e^x}}\right)^2 dx = \int \left(e^x - 2 + \frac{1}{e^x}\right) dx$$

$$= \int \left(e^x - 2 + e^{-x}\right) dx$$

$$= e^x - 2x - e^{-x} + C$$

6) $\int (\sin(5-3x) + 2 + 4x^2)\, dx$

الحل:

$$\int (\sin(5-3x) + 2 + 4x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\cos(5-3x) + 2x + \frac{4}{3}x^3 + C$$

7 $\int (e^x + 1)^2 \, dx$

الحل:

$$\int (e^x+1)^2 \, dx = \int (e^{2x} + 2e^x + 1) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} + 2e^x + x + C$$

---

8 $\int (e^{4-x} + \sin(4-x) + \cos(4-x)) dx$

الحل:

$$\int (e^{4-x} + \sin(4-x) + \cos(4-x)) dx$$

$$= -e^{4-x} + \cos(4-x) - \sin(4-x) + C$$

---

9 $\int \frac{x^4 - 6}{2x} dx$

الحل:

$$= \int (\frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{x}) \, dx$$

$$= \frac{1}{4} x^4 - 3 \ln|x| + C$$

---

10 $\int \left(3 \csc^2(3x+2) + \frac{5}{x}\right) dx$

الحل:

$$\int (3\csc^2(3x+2) + \frac{5}{x}) \, dx$$

$$= -\cot(3x+2) + 5\ln|x| + C$$

---

11 $\int \frac{e^x + 1}{e^x} dx$

الحل:

$$\int \frac{e^x+1}{e^x} \, dx = \int (1 + e^{-x}) \, dx = x - e^{-x} + C$$

---

12 $\int \frac{e^x}{e^x + 4} dx$

الحل:

$$\int \frac{e^x}{e^x+4} \, dx = \ln|e^x+4| + C = \ln(e^x+4) + C$$

---

13 $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x + 4} dx$

الحل:

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x + 4} \, dx = \int \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x + 4} \, dx$$

$$= \ln|\frac{1}{2}\sin 2x + 4| + C = \ln(\frac{1}{2}\sin 2x + 4) + C$$

---

14 $\int \frac{dx}{5 - \frac{x}{3}}$

الحل:

$$\int \frac{dx}{5 - \frac{x}{3}} = -3 \int \frac{-\frac{1}{3}}{5 - \frac{x}{3}} \, dx$$

$$= -3 \ln|5 - \frac{x}{3}| + C$$

15 $\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$

الحل:

$$\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{1-\sin x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x}\,dx$$

$$= \int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \tan x \sec x)\,dx$$

$$= \tan x + \sec x + C$$

---

16 $\int \sec^2 x\,(1 + e^x \cos^2 x)\,dx$

الحل:

$$\int \sec^2 x(1+e^x\cos^2 x)\,dx$$

$$= \int (\sec^2 x + e^x)\,dx$$

$$= \tan x + e^x + C$$

17 $\int \left(\frac{2}{x} - 2^x\right) dx$

الحل:

$$\int \left(\frac{2}{x} - 2^x\right) dx = 2\ln|x| - \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

18 $\int \sin 3x \cos 2x\,dx$

الحل:

$$\int \sin 3x \cos 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin 5x + \sin x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C$$

---

19 $\int \frac{2x+3}{3x^2+9x-1}\,dx$

الحل:

$$\int \frac{2x+3}{3x^2+9x-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{6x+9}{3x^2+9x-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x^2+9x-1| + C$$

20 $\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx$

الحل:

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}dx$$

$$= \int\left(\frac{x^2+1}{x^2+1}+\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

$$= x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

21 $\int\left(\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}+(\sin^2 x\csc x)\right)dx$

الحل:

$$\int\left(\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}+\sin^2 x\csc x\right)dx$$

$$= \int(\csc^2 x+\cot x\csc x+\sin x)\,dx$$

$$= -\cot x-\csc x-\cos x+C$$

22 $\int (\sec x+\tan x)^2\,dx$

$$\int(\sec x+\tan x)^2dx$$

$$= \int(\sec^2 x+2\sec x\tan x+\tan^2 x)\,dx$$

$$= \int(\sec^2 x+2\sec x\tan x+\sec^2 x-1)\,dx$$

$$= \int(2\sec^2 x+2\sec x\tan x-1)\,dx$$

$$= 2\tan x+2\sec x-x+C$$

23 $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$

الحل:

$$\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx = \ln(e^x+e^{-x})+C$$

24 $\int \frac{x^2}{x^3-3}\,dx$

الحل:

$$\int\frac{x^2}{x^3-3}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{3x^2}{x^3-3}dx = \frac{1}{3}\ln|x^3-3|+C$$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

25 $\int (9\cos^2 x - \sin^2 x - 6\sin x\cos x)\,dx$

الحل:

$\int (9\cos^2 x - \sin^2 x - 6\sin x\cos x)\,dx$

$= \int (9\cos^2 x - (1-\cos^2 x) - 6\sin x\cos x)\,dx$

$= \int (10\cos^2 x - 1 - 6\sin x\cos x)\,dx$

$= \int (10(\frac{1+\cos 2x}{2}) - 1 - 3\sin 2x)\,dx$

$= \int (5 + 5\cos 2x - 1 - 3\sin 2x)\,dx$

$= \int (4 + 5\cos 2x - 3\sin 2x)\,dx$

$= 4x + \frac{5}{2}\sin 2x + \frac{3}{2}\cos 2x + C$

26 $\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\,dx$

$\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\,dx$

$= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx$

$= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx$

$= \int \cos 2x\,dx \quad = \frac{1}{2}\sin 2x + C$

27 $\int_0^{\pi} 2\cos\frac{1}{2}x\;dx$

الحل:

$\int_0^{\pi} 2\cos\frac{1}{2}x\,dx = 4\sin\frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi}$

$= 4(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = 4$

---

28 $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$

الحل:

$|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & 0 \le x \le \pi \\ -\sin x, & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

$\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx =$

$\int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x\,dx$

$= -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}$

$= -(\cos\pi - \cos 0) + \cos 2\pi - \cos\pi$

$= -(-2) + 1 - (-1) = 4$

29 $\int_{\pi/6}^{\pi/3} 3\tan^2 x\, dx$

الحل:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 3\tan^2 x dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 3(\sec^2 x - 1) dx$$

$$= 3(\tan x - x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 3(\tan\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) - 3(\tan\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6})$$

$$= 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$$

---

30 $\int_{1}^{e} \frac{8x}{x^2+1} dx$

الحل:

$$\int_1^e \frac{8x}{x^2+1} dx = 4\int_1^e \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$= 4\ln|x^2+1| \Big|_1^e$$

$$= 4\ln(e^2+1) - 4\ln 2$$

$$= 4\ln(\frac{e^2+1}{2})$$

31 $\int_{0}^{\pi/6} \sin 3x \cos x\, dx$

الحل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \cos x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 4x + \sin 2x) dx$$

$$= (-\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= -\frac{1}{8}\cos\frac{4\pi}{6} - \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{6}$$

$$-(-\frac{1}{8}\cos 0 - \frac{1}{4}\cos 0)$$

$$= \frac{5}{16}$$

32 $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cot^2 x}{1+\cot^2 x}\,dx$

الحل:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot^2 x}{1+\cot^2 x}\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot^2 x}{\csc^2 x}\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 \csc^2 x}\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)}\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{3}-\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{4}\right)$$

33 $\int_0^3 (x-5^x)\,dx$

الحل:

$$\int_0^3 (x-5^x)\,dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{5^x}{\ln 5}\right)\Big|_0^3$$

$$=\frac{9}{2}-\frac{125}{\ln 5}-\left(0-\frac{1}{\ln 5}\right)=\frac{9}{2}-\frac{124}{\ln 5}$$

---

34 $\int_0^4 |x^2-4x+3|\,dx$

الحل:

$$|x^2-4x+3|$$

$$=\begin{cases} x^2-4x+3 & ,x<1 \\ -x^2+4x-3 & ,1\le x\le 3 \\ x^2-4x+3 & ,x>3 \end{cases}$$

$$\int_0^4 |x^2-4x+3|\,dx$$

$$=\int_0^1 (x^2-4x+3)\,dx$$

$$+\int_1^3 (-x^2+4x-3)\,dx$$

$$+\int_3^4 (x^2-4x+3)\,dx$$

$$=(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x)\Big|_0^1$$

$$+(-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x)\Big|_1^3$$

$$+(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x)\Big|_3^4$$

$$=\frac{1}{3}-2+3-0+(-9+18-9)$$

$$-(-\frac{1}{3}+2-3)$$

$$+\frac{64}{3}-32+12$$

---

35 $\int_1^4 (3-|x-3|)\,dx$

الحل:

$$|x-3|=\begin{cases}3-x & ,x\le 3\\ x-3 & ,x>3\end{cases}$$

$$\int_1^4(3-|x-3|)dx=\int_1^3(3-(3-x))dx$$

$$+\int_3^4(3-(x-3))dx$$

$$=\int_1^3 x\,dx+\int_3^4(6-x)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_1^3+(6x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_3^4$$

$$=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}+24-8-(18-\frac{9}{2})$$

$$=\frac{13}{2}$$

---

36 إذا كان: $f(x)=\begin{cases}x^2+4 & ,x<0\\ 4-x & ,x\ge 0\end{cases}$،

فأجد قيمة: $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

الحل:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^2+4)dx+\int_0^1(4-x)dx$$

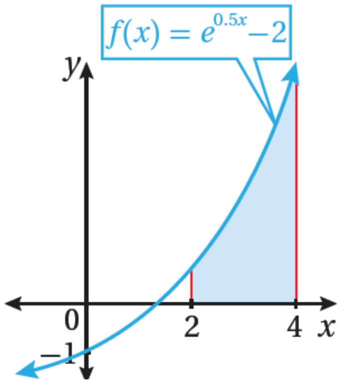
$$=(\frac{1}{3}x^3+4x)\Big|_{-1}^{0}+(4x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1$$

$$=0-(-\frac{1}{3}-4)+4-\frac{1}{2}-0$$

$$=\frac{47}{6}$$

---

37 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة بين المحور x ومنحنى الاقتران: $f(x) = e^{0.5x} - 2$ المُمثَّل في الشكل المجاور.



الحل:

$$A = \int_{2}^{4} (e^{0.5x} - 2)\,dx$$

$$= (2e^{0.5x} - 2x)\Big|_{2}^{4}$$

$$= 2e^{2} - 8 - (2e - 4)$$

$$= 2e^{2} - 2e - 4$$

---

38 إذا كان: $\int_{a}^{3a} \frac{2x+1}{x}\,dx = \ln 12$، فأجد قيمة الثابت a، حيث: $a > 0$.

الحل:

$$\int_{a}^{3a} \frac{2x+1}{x}\,dx = \int_{a}^{3a} 2 + \frac{1}{x}\,dx$$

$$= (2x + \ln|x|)\Big|_{a}^{3a}$$

$$= 6a + \ln 3a - 2a - \ln a$$

$$= 4a + \ln 3$$

$$\Rightarrow 4a + \ln 3 = \ln 12$$

$$\Rightarrow 4a = \ln 12 - \ln 3$$

$$4a = \ln \frac{12}{3}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{4} \ln 4$$

---

39 أُثبِت أنَّ: $\int_{0}^{a} \frac{x}{x^2 + a^2}\,dx = \ln\sqrt{2}$، حيث: $a \neq 0$.

الحل:

$$\int_{0}^{a} \frac{x}{x^2 + a^2}\,dx$$

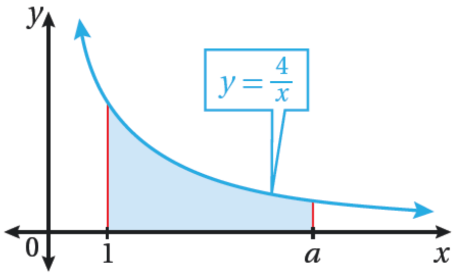
$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{a} \frac{2x}{x^2 + a^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2)\Big|_{0}^{a}$$

$$= \frac{1}{2} (\ln(2a^2) - \ln(a^2))$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 = \ln\sqrt{2}$$

40 يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{4}{x}$. إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و $x = a$، هي 10 وحدات مربعة، فأجد قيمة الثابت a.



الحل:

$$A = \int_1^a \frac{4}{x} dx = 4\ln|x| \Big|_1^a$$

$$= 4\ln a - 4\ln 1 = 4\ln a$$

$$\Rightarrow 4\ln a = 10 \Rightarrow \ln a = \frac{5}{3} \Rightarrow a = e^{\frac{5}{2}}$$

---

41 إذا كان: $f(x) = \int \cos\left(\frac{1}{2}x + \pi\right) dx$، وكان: $f(\pi) = 3$، فأجد $f(0)$.

الحل:

$$f(x) = \int \cos\left(\frac{1}{2}x + \pi\right) dx$$

$$= 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \pi\right) + C$$

$$f(\pi) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\pi + \pi\right) + C$$

$$3 = 2\sin\frac{3\pi}{2} + C$$

$$3 = -2 + C \Rightarrow C = 5$$

$$\Rightarrow f(x$$

42 إذا كان: $y = \int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) dx$، وكان: $y = 1$ عندما $x = \frac{\pi}{4}$، فأُثبِت أنَّه يُمكِن كتابة y في صورة: $y = \frac{1 + \sin 2x}{2}$.

الحل:

$$y = \int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) dx$$

$$= \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{-2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + C$$

$$y\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + C$$

$$1 = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1 + \sin 2x}{2}$$

43 يُمثِّل الاقتران: $\frac{dy}{dx} = e^{2x} - 2e^{-x}$ ميل المماس لمنحنى الاقتران y. أجد قاعدة الاقتران y إذا علمْتُ أنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(0, 1)$.

الحل:

$$y = \int (e^{2x} - 2e^{-x})\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^{-x} + C$$

$$y|_{x=0} = \frac{1}{2} + 2 + C$$

$$1 = \frac{5}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^{-x} - \frac{3}{2}$$

---

44 إذا كان: $\int_{\pi/9}^{\pi} (9 + \sin 3x)\,dx = a\pi + b$، فأجد قيمة الثابتين النسبيين: a، و b.

الحل:

$$\int_{\frac{\pi}{9}}^{\pi} (9 + \sin 3x)\,dx = \left(9x - \frac{1}{3}\cos 3x\right)\Big|_{\frac{\pi}{9}}^{\pi}$$

$$= 9\pi - \frac{1}{3}\cos 3\pi - \pi + \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= 8\pi + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

ونظراً لأن a و b نسبيان، فلا يوجد حل لهذه المعادلة سوى أن يكون:

$$a = 8, b = \frac{1}{2}$$

---

45 يُمثِّل الاقتران: $f'(x) = \cos^2 x$ ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$. أجد قاعدة الاقتران f إذا علمْتُ أنَّ منحناه يمرُّ بنقطة الأصل.

الحل:

$$f(x) = \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$$

$$f(0) = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\sin 0\right) + C$$

$$0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = e^{-2t}$، حيث t الزمن بالثواني و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 3 m، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

46 موقع الجُسَيْم بعد t ثانية.

47 موقع الجُسَيْم بعد 100 ثانية.

الحل:

46 موقع الجُسَيْم بعد t ثانية.

$$s(t) = \int e^{-2t} dt = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$$

$$s(0) = -\frac{1}{2} + C = 3 \Rightarrow C = \frac{7}{2}$$

$$3 = -\frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{7}{2}$$

$$s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{7}{2}$$

47 موقع الجُسَيْم بعد 100 ثانية.

$$s(100) = -\frac{1}{2}e^{-200} + \frac{7}{2} \approx 3.5m$$

بيئة: في دراسة تناولت أحد أنواع الحيوانات المُهدَّدة بالانقراض في غابة، تبيَّن أنَّ عدد حيوانات هذا النوع $P(t)$ يتغيَّر بمُعدَّل: $P'(t) = -0.51e^{-0.03t}$ حيث t الزمن بالسنوات بعد بَدْء الدراسة:

48 أجد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أيِّ زمن t علمًا بأنَّ عدد حيوانات هذا النوع عند بَدْء الدراسة هو 500 حيوان.

الحل:

$$P(t) = \int -0.51e^{-0.03t} dt$$

$$= \frac{-0.51}{-0.03}e^{-0.03t} + C = 17e^{-0.03t} + C$$

$$P(0) = 17 + C$$

$$500 = 17 + C \Rightarrow C = 483$$

$$P(t) = 17e^{-0.03t} + 483$$

49 أجد عدد الحيوانات بعد 10 سنوات من بَدْء الدراسة، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

الحل:

$$P(10) = 17e^{-0.3} + 483 \approx 496$$

طب: في تجربة لدواء جديد أُعطِي لمريض لديه ورم حميد، حجمه $30\ cm^3$، تَبيَّن أنَّ حجم الورم بعد t يومًا من بَدْء التجربة يتغيَّر بمُعدَّل $P'(t) = 0.15 - 0.9e^{0.006t}$ مَقيسًا بوحدة (cm^3/day):

50 أجد قاعدة حجم الورم بعد t يومًا من بَدْء التجربة.

الحل:

$$P(t) = \int (0.15 - 0.9e^{0.006t})\,dt$$

$$= 0.15t - \frac{0.9}{0.006}e^{0.006t} + C$$

$$= 0.15t - 150e^{0.006t} + C$$

$$P(0) = -150 + C$$

$$30 = -150 + C \Rightarrow C = 180$$

$$P(t) = 0.15t - 150e^{0.006t} + 180$$

51 أجد حجم الورم بعد 10 أيام من بَدْء التجربة.

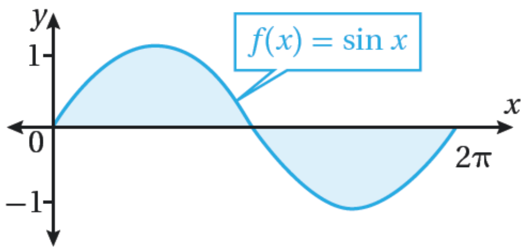
الحل:

$$P(10) = 1.5 - 150e^{0.06} + 180 \approx 22.2cm^3$$

مهارات التفكير العليا

تبرير: أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين، مُبرِّرًا إجابتي:

52



الحل:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$

$$A = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \left(-\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx\right)$$

$$= (-\cos x)\Big|_0^{\pi} + (\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

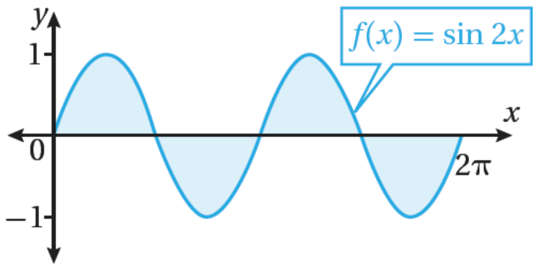
$$= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi = 4$$

ملحوظة: يمكن الاستفادة من التماثل وإيجاد المساحة المطلوبة كما يأتي:

$$A = 2\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2(-\cos x)\Big|_0^{\pi}$$

$$= 2(-\cos\pi + \cos 0) = 2(2) = 4$$

53



الحل:

$$\sin 2x = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx + \left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x\,dx\right) + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin 2x\,dx + \left(-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin 2x\,dx\right)$$

والأسهل هو الاستفادة من التماثل وإيجاد المساحة المطلوبة كما يأتي

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = -2\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -2(-1-1) = 4$$

تحدٍّ: أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

54 $\displaystyle\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x}\,dx$

الحل:

$$\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x}\,dx = \int \frac{\frac{\sec x}{\cos x}}{\left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1\right)}\,dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{(\tan x - 1)}\,dx$$

$$= \ln|\tan x - 1| + C$$

---

55 $\displaystyle\int \frac{\cot x}{2 + \sin x}\,dx$

الحل:

$$\int \frac{\cot x}{2 + \sin x}\,dx = \int \frac{\cot x \csc x}{2\csc x + 1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2\cot x \csc x}{2\csc x + 1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|2\csc x + 1| + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|2\csc x + 1| + C$$

56 $\int \frac{1}{x \ln x^3}\, dx$

الحل:

$$\int \frac{1}{x\ln x^3}dx = \int \frac{1}{3x\ln x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|\ln x| + C$$

---

57 تبرير:

إذا كان: $\int_1^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+3}\right) dx = 0.5 \ln 5$

فأجد قيمة الثابت a، حيث: $a > 0$.

الحل:

$$\int_1^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+3}\right)dx$$

$$= \left(ln|x| - \frac{1}{2}ln|2x+3|\right)\Big|_1^a$$

$$= \left(lna - \frac{1}{2}ln(2a+3)\right) - \left(-\frac{1}{2}ln5\right)$$

$$= lna - \frac{1}{2}ln(2a+3) + \frac{1}{2}ln5$$

$$= ln\frac{a}{\sqrt{2a+3}} + \frac{1}{2}ln5$$

$$\Rightarrow ln\frac{a}{\sqrt{2a+3}} + \frac{1}{2}ln5 = 0.5ln5$$

$$\Rightarrow ln\frac{a}{\sqrt{2a+3}} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2a+3}} = 1$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{2a+3} \qquad \Rightarrow a^2 = 2a+3$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \qquad \Rightarrow (a-3)(a+1) = 0$$

$\Rightarrow a = 3, a = -1$ (مرفوضة لأن $a > 0$)

---

58 تبرير أُثبِت بطريقتين مختلفتين أنَّ:

$$\int_0^{\pi/4} \cos x \cos 3x\, dx - \int_0^{\pi/4} \sin x \sin 3x\, dx = 0$$

الحل:

طريقة أولى :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\cos 3x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 4x + \cos 2x)dx$$

$$= \left(\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{1}{8}\sin\pi + \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}\right) - (0+0) = \frac{1}{4} \text{..........}(1)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\sin 3x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2x - \cos 4x)dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{8}\sin\pi\right) - (0-0) = \frac{1}{4} \text{..........}(2)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\cos 3x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\sin 3x dx$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

طريقة ثانية:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cos 3x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 3x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x+3x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x dx = \frac{1}{4}\sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}(\sin \pi - \sin 0) = 0$$

---

59 تبرير: إذا كان:

$$\int_{\pi/4k}^{\pi/3k} (1 - \pi \sin kx)\, dx = \pi(7 - 6\sqrt{2})$$

فأجد قيمة الثابت k، مُبرِّرًا إجابتي.

الحل:

$$\int_{\frac{\pi}{4k}}^{\frac{\pi}{3k}} (1 - \pi \sin kx) dx = (x + \frac{\pi}{k}\cos kx) \Big|_{\frac{\pi}{4k}}^{\frac{\pi}{3k}}$$

$$= \frac{\pi}{3k} + \frac{\pi}{k}\cos\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4k} - \frac{\pi}{k}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{k}(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{12k}(7 - 6\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{12k}(7 - 6\sqrt{2}) = \pi(7 - 6\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{12}$$

تحدٍّ: يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$$v(t) = \begin{cases} 2t + 4 & , 0 \le t \le 6 \\ 20 - (t-8)^2 & , 6 < t \le 10 \end{cases}$$

حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

60 موقع الجُسَيْم بعد 5 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

الحل:

$$v(t) = \begin{cases} 2t + 4, & 0 \le t \le 6 \\ 16t - t^2 - 44, & 6 < t \le 10 \end{cases}$$

$$s(t) = \int v(t) dt$$

$$s(t) = \int (2t+4) dt = t^2 + 4t + C_1$$

(عندما $0 \le t \le 6$)

$$s(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = t^2 + 4t, 0 \le t \le 6$$

$$s(5) = 25 + 20 = 45\text{m}$$

61 موقع الجُسَيْم بعد 9 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

الحل:

$$s(t)=\int(16t-t^2-44)\,dt$$

$$=8t^2-\frac{1}{3}t^3-44t+C_2$$

(عندما $6<t\le 10$)

لإيجاد قيمة c_2 نستعمل موقع الجسم عند $t=6$ موقعاً ابتدائياً بالنسبة للفترة $[6,10]$:

$$s(6)=8(6)^2-\frac{1}{3}(6)^3-44(6)+C_2$$

ونحسب $S(6)$

من اقتران الموقع الذي وجدناه في السؤال السابق بالنسبة للفترة $[6,10]$:

$$s(t)=t^2+4t,0\le t\le 6$$

$$s(6)=6^2+4(6)=60$$

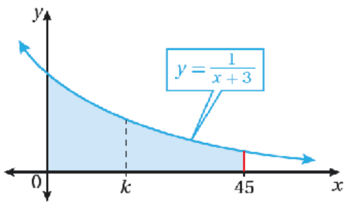
$$60=8(6)^2-\frac{1}{3}(6)^3-44(6)+C_2$$

$$60=-48+C_2\Rightarrow C_2=108$$

$$\Rightarrow s(t)=8t^2-\frac{1}{3}t^3-44t+108,\quad 6<t\le 10$$

$$s(9)=117\text{m}$$

62 **تحدٍّ:** يُبيِّن الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $y=\frac{1}{x+3}$، والمحــور x، والمســتقيمين: $x=0$، و$x=45$ أجد قيمة k التي تقسم المنطقة المُظلّلة إلى منطقتين متساويتين في المساحة.



الحل:

$$A=\int_0^{45}\frac{1}{x+3}dx=ln|x+3||_0^{45}$$

$$=ln48-ln3=ln16$$

$$\frac{1}{2}A=\int_0^{k}\frac{1}{x+3}dx=ln|x+3||_0^{k}$$

$$=ln(k+3)-ln3$$

$$=ln\frac{k+3}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}ln16=ln\frac{k+3}{3}$$

$$ln16^{1/2}=ln\frac{k+3}{3}$$

$$\Rightarrow 4=\frac{k+3}{3}\Rightarrow k=9$$

تمارين ومسائل كتاب التمارين

الدرس الأول

تكامل اقترانات خاصة

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int 4e^{-5x}\, dx$

الحل:

$$\int 4e^{-5x}\, dx = -\frac{4}{5}e^{-5x} + C$$

2 $\int (\sin 2x - \cos 2x)\, dx$

الحل:

$$\int (\sin 2x - \cos 2x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

3 $\int \cos^2 2x\, dx$

الحل:

$$\int \cos^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$$

4 $\int \frac{e^x + 4}{e^{2x}}\, dx$

الحل:

$$\int \frac{e^x + 4}{e^{2x}}\, dx = \int (e^{-x} + 4e^{-2x})\, dx$$

$$= -e^{-x} - 2e^{-2x} + C$$

5 $\int \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2e^x\right) dx$

الحل:

$$\int (\cot x \csc x - 2e^x)\, dx$$

$$= -\csc x - 2e^x + C$$

6 $\int (3\cos 3x - \tan^2 x)\, dx$

الحل:

$$\int (3\cos 3x - \tan^2 x)\, dx$$

$$= \int (3\cos 3x - (\sec^2 x - 1))\, dx$$

$$= \sin 3x - \tan x + x + C$$

7 $\int \cos x\,(1+\csc^2 x)\,dx$

الحل:

$$\int \cos 3x(1+\csc^2 x)dx$$

$$= \int \cos x(1+\frac{1}{\sin^2 x})\,dx$$

$$= \int \cos x + \cot x \csc x\ dx$$

$$= \sin x - \csc x + C$$

---

8 $\int \frac{x^2+x-4}{x+2}\,dx$

الحل:

$$\int \frac{x^2+x-4}{x+2}\,dx = \int (x-1-\frac{2}{x+2})\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - x - 2\ln|x+2| + C$$

---

9 $\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx$

الحل:

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx = \int e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = -2e^{-\frac{1}{2}x} + C$$

---

10 $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2}\right)dx$

الحل:

$$\int (\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2})\,dx = \int (\sec^2 x + x^{-2})\,dx$$

$$= \tan x - \frac{1}{x} + C$$

---

11 $\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2}\,dx$

الحل:

$$\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2-6x}{x^3-3x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x^3-3x^2| + C$$

---

12 $\int \ln e^{\cos x}\,dx$

الحل:

$$\int \ln e^{\cos x}\,dx = \int \cos x\ dx = \sin x + C$$

13 $\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$

الحل:

$$\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (1 - \cos x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}(x - \sin x) + C$$

14 $\int \frac{3}{2x - 1}\, dx$

الحل:

$$\int \frac{3}{2x-1}\, dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x-1}\, dx$$

$$= \frac{3}{2}\ln|2x-1| + C$$

15 $\int \frac{3 - 2\cos \frac{1}{2}x}{\sin^2 \frac{1}{2}x}\, dx$

الحل:

$$\int \frac{3 - 2\cos \frac{1}{2}x}{\sin^2 \frac{1}{2}x}\, dx$$

$$= \int \left(3\csc^2 \frac{1}{2}x - 2\cot \frac{1}{2}x \csc \frac{1}{2}x\right) dx$$

$$= -6\cot \frac{1}{2}x + 4\csc \frac{1}{2}x + C$$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

16 $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 4}\, dx$

الحل:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 4}\, dx = \ln|e^x + 4|\,\Big|_0^1$$

$$= \ln(e + 4) - \ln 5 = \ln\frac{e + 4}{5}$$

17 $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$

الحل:

$$\int_1^2 \frac{1}{3x-2}dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{3}{3x-2}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x-2|\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{3}\ln 4 - 0 = \frac{1}{3}\ln 4$$

18 $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin x \cos x \, dx$

الحل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \, dx$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

19 $\displaystyle\int_{-1}^{1} |3x-2| \, dx$

الحل:

$$\int_{-1}^{1} |3x-2| dx$$

$$= \int_{-1}^{\frac{2}{3}} (2-3x)dx + \int_{\frac{2}{3}}^{1} (3x-2)dx$$

$$= \left(2x - \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_{\frac{2}{3}}^{1}$$

$$= \frac{13}{3}$$

20 $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\cos x + 3\sin x)^2 \, dx$

الحل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + 3\sin x)^2 dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + 6\sin x\cos x + 9\sin^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin^2 x + 6\sin x\cos x + 9\sin^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 8\sin^2 x + 3\sin 2x)dx$$

23 $\int_0^{\pi/4} \frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}\,dx$

الحل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+2\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{2\sin x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x+2\tan x\sec x+\tan^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x+2\tan x\sec x+\sec^2 x-1)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sec^2 x+2\tan x\sec x-1)dx$$

$$= (2\tan x+2\sec x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2+2\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}-2 = 2\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}$$

24 $\int_0^{1} \frac{6x}{3x+2}\,dx$

الحل:

$$\int_0^1 \frac{6x}{3x+2}dx = \int_0^1 \left(2-\frac{4}{3x+2}\right)dx$$

$$= \left(2x-\frac{4}{3}\ln|3x+2|\right)\Big|_0^1$$

$$= 2-\frac{4}{3}\ln 5+\frac{4}{3}\ln 2 = 2+\frac{4}{3}\ln\frac{2}{5}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+4(1-\cos 2x)+3\sin 2x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (5-4\cos 2x+3\sin 2x)dx$$

$$= \left(5x-2\sin 2x-\frac{3}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5\pi-2}{4}$$

21 $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$

الحل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x}dx$$

$$= -\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{1}{\sqrt{2}}-0 = \frac{1}{2}\ln 2$$

22 $\int_0^{\pi/16} (\cos^2 2x - 4\sin^2 x\cos^2 x)\,dx$

الحل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x-4\sin^2 x\cos^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x-(2\sin x\cos x)^2)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x-\sin^2 2x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{16}} \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{16}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

25 إذا كان: $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & , x\le 3 \\ 10-x & , x>3 \end{cases}$،

فأجد قيمة: $\int_1^5 f(x)\,dx$.

الحل:

$$\int_1^5 f(x)dx$$

$$= \int_1^3 (2x+1)dx + \int_3^5 (10-x)dx$$

$$= (x^2+x)\Big|_1^3 + \left(10x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_3^5$$

$$= 12 - 2 + 50 - \frac{25}{2} - 30 + \frac{9}{2} = 22$$

---

26 إذا كان: $\int_1^k \frac{4}{2x-1}\,dx = 1$،

فأجد قيمة الثابت k، حيث: $k > \frac{1}{2}$.

الحل:

$$\int_1^k \frac{4}{2x-1}dx = 1$$

$$\Rightarrow 2\ln|2x-1|\,\Big|_1^k = 1$$

$$\Rightarrow 2\ln|2k-1| = 1$$

$$\Rightarrow 2\ln(2k-1) = 1$$

$$\Rightarrow \ln(2k-1) = \frac{1}{2} \qquad , k > \frac{1}{2} \text{ لأن}$$

$$\Rightarrow 2k-1 = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow k = \frac{e^{\frac{1}{2}}+1}{2}$$

---

27 إذا كان: $\int_0^{\ln a} (e^x + e^{-x})\,dx = \frac{48}{7}$،

فأجد قيمة الثابت a، حيث: $a > 0$.

الحل:

$$\int_0^{\ln a} (e^x + e^{-x})dx = \frac{48}{7}$$

$$\Rightarrow (e^x - e^{-x})\Big|_0^{\ln a} = \frac{48}{7}$$

$$\Rightarrow \left(a - \frac{1}{a}\right) - (1-1) = \frac{48}{7}$$

$$\Rightarrow a - \frac{1}{a} - \frac{48}{7} = 0$$

$$\Rightarrow 7a^2 - 48a - 7 = 0$$

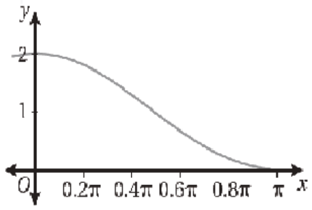
$$\Rightarrow (7a+1)(a-7) = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{7} \text{ (تُرفض)} \quad , \quad a = 7$$

28 يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران:

$f(x) = 2\cos^2 0.5x$.

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحورين الإحداثيين الموجبين.



الحل:

$$A = \int_0^{\pi} 2\cos^2 \frac{1}{2}x\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} (1 + \cos x)dx = (x + \sin x)|_0^{\pi} = \pi$$

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

29 $f'(x) = e^{-x} + x^2 ; (0, 4)$

الحل:

$$f(x) = \int (e^{-x} + x^2)dx = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$f(0) = -1 + C$$

$$4 = -1 + C \Rightarrow C = 5$$

$$\Rightarrow f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + 5$$

30 $f'(x) = \frac{3}{x} - 4 ; (1, 0)$

الحل:

$$f(x) = \int \left(\frac{3}{x} - 4\right)dx = 3\ln|x| - 4x + C$$

$$f(x) = 3\ln|x| - 4x + C$$

$$f(1) = -4 + C$$

$$0 = -4 + C \Rightarrow C = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = 3\ln|x| - 4x + 4$$

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \frac{-t}{1+t^2}$، حيث t الزمن بالثواني ، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

31 أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $[0, 3]$.

الحل:

$$s(3) - s(0) = \int_0^3 v(t)\,dt$$

$$= \int_0^3 \frac{-t}{1+t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^3$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 10 \text{ m}$$

---

32 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[0, 3]$.

الحل:

$$d = \int_0^3 |v(t)|\,dt = \int_0^3 \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^3 = \frac{1}{2}\ln 10 \text{ m}$$

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 6\sin 3t$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

33 أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

الحل:

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) - s(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\sin 3t\,dt = -2\cos 3t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2 \text{ m}$$

---

34 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

الحل:

$$6\sin 3t = 0 \Rightarrow 3t = 0, \pi \Rightarrow t = 0, \frac{\pi}{3}$$

$$d = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |v(t)|\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |6\sin 3t|\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 6\sin 3t\,dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -6\sin 3t\,dt$$

$$= -2\cos 3t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + 2\cos 3t\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2 + 2 + 0 - 2(-1) = 6 \text{ m}$$

35 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$$v(t)=\begin{cases}8t-t^2 & ,0\le t\le 6\\ 15-\frac{1}{2}t & ,t>6\end{cases}$$

حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا انطلق الجُسَيْم من نقطة الأصل فأجد موقعه بعد 40 ثانية من بَدْء الحركة.

الحل:

عندما $0\le t\le 6$

$$s(t)=\int(8t-t^2)dt=4t^2-\frac{1}{3}t^3+C_1$$

$$s(0)=0-0+C_1$$

$$0=0+C_1\Rightarrow C_1=0$$

$$\Rightarrow s(t)=4t^2-\frac{1}{3}t^3 \quad ,0\le t\le 6$$

عندما $t>6$

$$s(t)=\int\left(15-\frac{1}{2}t\right)dt=15t-\frac{1}{4}t^2+C_2$$

الموقع الابتدائي للجسيم في هذه الفترة هو موقعه في نهاية الفترة الأولى أي $s(6)$

نحسب $s(6)$ من قاعدة الموقع السابقة

$$s(6)=144-\frac{216}{3}=72$$

$$s(6)=90-9+C_2$$

$$72=81+C_2\Rightarrow C_2=-9$$

$$\Rightarrow s(t)=15t-\frac{1}{4}t^2-9 \quad ,t>6$$

$$\Rightarrow s(40)=15(40)-\frac{1}{4}(1600)-9$$

$$=191\text{ m}$$

التكامل بالتعويض

الدرس الثاني

التكامل بالتعويض

يستخدم لإيجاد تكامل حاصل ضرب أو قسمة اقترانين أحدهما مشتقة الآخر أو على الأقل الجزء المتغير من المشتقة.

التكامل بالتعويض للتكاملات غير المحدودة

النوع الأول

يستخدم عندما يكون هناك علاقة بالاشتقاق بين الاقترانين.

مفهوم أساسي

إذا كان $u = g(x)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق، ومداه الفترة I وكان f اقتراناً متصلاً على I فإن

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

خطوات حل التكامل بالتعويض

- **الخطوة الأولى :** احدد التعويض u الذي يمكن به تبسيط المكامل.
- **الخطوة الثانية:** أعبر عن المكامل بدلالة u , du واحذف متغير التكامل الأصلي ومشتقته حذفاً كاملاً، ثم أكتب المكامل الجديد.
- **الخطوة الثالثة:** أجد التكامل الجديد.
- **الخطوة الرابعة:** اعبر عن الاقتران الاصلي الذي اوجدته في الخطوة السابقة باستعمال المتغير الاصلي عن طريق التعويض.

مثال 1

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int 6x^2(2x^3-3)^4\,dx$

الحل:

نفرض أن

$u = 2x^3 - 3$

$\frac{dy}{dx} = 6x^2 \longrightarrow dx = \frac{du}{6x^2}$

اختصار

$= \int \cancel{6x^2}\, u^4 \frac{du}{6x^2}\,dx$

$= \int u^4\,du = \frac{u^5}{5} + C\,dx$

تعويض

$u = 2x^3 - 3$

$= \frac{(2x^3-3)^5}{5} + C$

2) $\int \sin x\, e^{\cos x}\,dx$

الحل:

نفرض

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x \longrightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$

$\int \sin x\, e^u \frac{du}{-\sin x}$

$= \int -e^u\,du$

$= -e^u + C$

$= -e^{\cos x} + C$

ملاحظة

$\int e^{\text{ليس خطي}}\, dx$

يحل بالتعويض ونفرض الأس $u =$

3) $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$

الحل:

نفرض

$u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \longrightarrow dx = du\, x$

$\int \frac{u}{\cancel{x}} du\, \cancel{x} = \int u\, du$

$= \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$

4) $\int x^3 \cos(x^4 - 5)\, dx$

الحل:

$u = x^4 - 5$

$\frac{du}{dx} = 4x^3 \longrightarrow dx = \frac{du}{4x^3}$

$\Rightarrow \int \cancel{x^3} \cos u \frac{du}{4\cancel{x^3}}$

$= \frac{1}{4} \int \cos u\, du$

$= \frac{1}{4} \sin u + C$

$= \frac{1}{4} \sin(x^4 - 5) + C$

ملاحظة

إذا كانت الزاوية غير خطية يحل
بالتعويض ونفرض

$u =$ الزاوية

5) $\int \sin^3 2x \cos 2x\, dx$

الحل:

$\int (\sin 2x)^3 \cos 2x\, dx$

$u = \sin 2x$

$\frac{du}{dx} = 2\cos 2x \longrightarrow dx = \frac{du}{2\cos 2x}$

$\int u^3 \cancel{\cos 2x} \times \frac{du}{2\cancel{\cos 2x}}$

$= \frac{1}{2} \int u^3\, du$

$= \frac{1}{2} \frac{u^4}{u} + C$

$= \frac{1}{8} (\sin 2x)^4 + C$

ملاحظة

$\int (\text{ليس خطي})^n$ مشتقة ما داخل القوس

$u =$ نفرض ما داخل القوس

$$5)\ \int \frac{5^{\frac{1}{x}}}{x^2}\ dx$$

الحل:

$$u = \frac{1}{x} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\longrightarrow dx = -x^2\ du$$

$$\int \frac{5^u}{x^2} \times -x^2\ du$$

اختصار

$$= -\int 5^u\ du$$

$$= -\frac{5^u}{\ln 5} + C$$

$$= \frac{-5^{\frac{1}{x}}}{\ln 5} + C$$

مثال2

أتحقَّق من فهمي

صفحة 32

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$a)\ \int 4x^2\ \sqrt{x^3 - 5}\ dx$$

الحل:

هنا نستطيع ان نفرض الجذر $u =$ أو ما داخل الجذر $u =$

الأفضل $u = \sqrt{x^3 - 5}$

بالتربيع

$$u^2 = x^3 - 5$$

$$2u\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$dx = \frac{2u\ du}{3x^2}$$

$$\int 4x^2\ u\ (2u)\frac{du}{3x^2}$$

$$= \frac{4}{3}\int 2u^2\ du$$

$$= \frac{4}{3}\,\frac{2\ u^3}{3} + C$$

$$\frac{8}{9}\ \left(\sqrt{x^3 - 5}\right)^3 + C$$

$$b)\ \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\ e^{\sqrt{x}}\ dx$$

الحل:

$$u = \sqrt{x} \quad \longrightarrow \quad u^2 = x$$

$$2u\ \frac{du}{dx} = 1$$

$$\longrightarrow dx = 2\ u\ du$$

$$\int \frac{1}{\cancel{2u}}\ e^u\ (\cancel{2u})\ du$$

$$= \int e^u\ du = e^u + C$$

$$= e^{\sqrt{x}} + C$$

$$c)\ \int \frac{(\ln x)^3}{x}\ dx$$

الحل: قوس

$$u = \ln x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \longrightarrow dx = x\ du$$

$$\int \frac{u^3}{\cancel{x}}\ \cancel{x}\ du = \int u^3\ du$$

$$= \frac{u^4}{4} + C$$

$$= \frac{(\ln x)^4}{4} + C$$

$d)\ \int \frac{\cos(\ln x)}{x}\, dx$

الحل:

الزاوية غير خطية

$u = \ln x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \longrightarrow dx = x\, du$

$\int \frac{\cos u}{\cancel{x}} \cancel{x}\, du$

$= \int \cos u\, du$

$= \sin u + C$

$= \sin(\ln x) + C$

$e)\ \int \cos^4 5x\ \sin 5x\ dx$

الحل:

$\int (\cos 5x)^4 \sin 5x\, dx$

$u = \cos 5x$

$\frac{du}{dx} = -5 \sin 5x$

$dx = \frac{du}{-5 \sin 5x}$

$\int u^4\, \cancel{\sin 5x}\, \frac{du}{-5\, \cancel{\sin 5x}}$

$= -\frac{1}{5} \int u^4\, du$

$= \frac{1}{5} \frac{u^5}{5} + C$

$= \frac{-1}{25} (\cos 5x)^5 + C$

$f)\ \int x\, 2^{x^2}\, dx$

الحل:

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x \longrightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$\Rightarrow \int x\, 2^u \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2} \int 2^u\ du$

$= \frac{1}{2} \frac{2^u}{\ln 2} + C$

$= \frac{1}{2 \ln 2} 2^{x^2} = \frac{1}{\ln 2}\, 2^{x^2 - 1} + C$

مثال 3

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$1)\ \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 7}}\, dx$

الحل:

$u = \sqrt{x^2 + 2x + 7}$

$u^2 = x^2 + 2x + 7$

$2u \frac{du}{dx} = 2x + 2$

$dx = \frac{2u\ du}{2(x+1)}$

$\int \frac{x+1}{u} \times \frac{u\, du}{x+1}$

$\int du = u + C$

$= \sqrt{x^2 + 2x + 7} + C$

2) $\int \frac{2}{x^2}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}$

الحل:

$u = 1+\frac{1}{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{-1}{x^2} \longrightarrow dx = -x^2\, du$

$\int \frac{2}{x^2}\sqrt[3]{u}\ (-x^2)\, du$

$= -2\int u^{\frac{1}{3}}\, du$

$= -2 \times \frac{3}{4}\, u^{\frac{4}{3}} + C$

$= \frac{-3}{2}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4}$

3) $\int \frac{e^x+2x}{\sqrt{e^x+x^2}}$

الحل:

$u = \sqrt{e^x+x^2}$

$u^2 = e^x + x^2$

$2u\frac{du}{dx} = e^x + 2x$

$dx = \frac{2u\ du}{e^x+2x}$

$\int \frac{e^x+2x}{\sqrt{e^x+x^2}} \times \frac{2u\, du}{e^x+2x}$

$\int \frac{2u}{u}\ du$

$= \int 2\ du$

$= 2u + C$

$= 2\sqrt{e^x+x^2} + C$

4) $\int x\sin x^2 \tan^2(\cos x^2)$

الحل:
الزاوية غير خطية

$u = \cos x^2$

$\frac{du}{dx} = -2x\sin x^2 \longrightarrow dx = -x^2\, du$

$\int x\sin x^2 + \tan^2 u\ \frac{du}{-2x\sin x^2}$

$= -\frac{1}{2}\int \tan^2 u\, du$

$= -\frac{1}{2}\int \sec^2 u - 1\, du$

$= -\frac{1}{2}(\tan u - u) + C$

$= -\frac{1}{2}(\tan(\cos x^2) - \cos x^2) + C$

5) $\int \frac{\sin x\cos x}{(1-2\sin^2 x)^3}dx$

الحل:

$u = 1 - 2\sin^2 x$

$\frac{du}{dx} = -4\sin x\cos x$

$dx = \frac{du}{-4\sin x\cos x}$

$= \int \frac{\sin x\cos x}{(u)^3}\ \frac{du}{-4\sin x\cos x}$

$= \frac{-1}{4}\int \frac{1}{u^3}\, du = \frac{-1}{4}\int u^{-3}\, du$

$= \frac{-1}{4}\ \frac{u^{-2}}{-2} + C$

$= \frac{1}{8\, u^2} + C$

$\frac{1}{8(1-\sin^2 x)^2} + C$

النوع الثاني

في هذا النوع بعد الفرض يبقى بقايا من التغير الأول لذلك نرجع للفرض ونكتب المتغير القديم (x) بدلالة المتغير الجديد (u).

مثال 1

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int x\sqrt{2x+5}\,dx$

الحل:

$u = 2x+5$

$\frac{du}{dx} = 2 \longrightarrow dx = \frac{du}{2}$

$\int x\sqrt{u}\frac{2}{du}$

نلاحظ بقايا للمتغير x تكتب x بدلالة u من خلال الفرض

$u = 2x+5 \longrightarrow 2x = u-5$

$x = \frac{u-5}{2}$

$\int \frac{1}{2}(u-5)\sqrt{u}\,\frac{du}{2}$

$= \frac{1}{4}\int (u-5)\left(u^{\frac{1}{2}}\right) du$

$= \frac{1}{4}\int u^{\frac{3}{2}} - 5u^{\frac{1}{2}}\,du$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - 5\times\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + C$

$= \frac{1}{10}(2x+5)^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{6}(2x+5)^{\frac{3}{2}}$

2) $\int x^5(1+x^2)^3\,dx$

الحل:

$u = 1+x^2 \qquad \frac{du}{dx} = 2x$

$dx = \frac{du}{2x}$

$\int x^5 u^3 \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int x^4\ u^3\ du$

من الفرض

$x^2 = u-1$

$x^4 = (u-1)^2 = u^2 - 2x + 1$

$= \frac{1}{2}\int (u^2 - 2u + 1)\,u^3\,du$

$= \frac{1}{2}\int \frac{u^6}{6} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^4}{4}) + C$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{(1+x^2)^6}{6} - \frac{2(1+x^2)^5}{5} + \frac{(1+x^2)^4}{4}\right) + C$

---

3) $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$

الحل:

$u = e^x + 1 \qquad \frac{du}{dx} = e^x$

$dx = \frac{du}{e^x}$

$= \int \frac{e^{2x}}{u}\times\frac{du}{e^x}$

$= \int \frac{e^x}{u}\ du$

لكن

$u = e^x + 1$

$\longrightarrow e^x = u - 1$

b) $\int x^7 (x^4 - 8)^3 \, dx$

الحل:

$u = x^4 - 8$

$\frac{du}{dx} = 4x^3 \longrightarrow dx = \frac{du}{4x^3}$

$\int x^7 \, u^3 \, \frac{du}{4x^3}$

$\frac{1}{4}\int x^4 \, u^3 \, du$

$x^4 = u + 8$

$= \frac{1}{4}\int (u+8)\, u^3 \, du$

$= \frac{1}{4}\int (u^4 + 8u^3) \, du$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{u^5}{5} + \frac{8u^4}{4}\right) + C$

$= \frac{1}{4}\,(\frac{(x^4-8)^5}{5} + 2\,(x^4-8)^4 + C$

---

c) $\int \frac{e^{3x}}{(1-e^x)^2} \, dx$

الحل:

$u = 1 - e^x \qquad \frac{du}{dx} = -e^z$

$dx = \frac{du}{-e^x}$

$\int \frac{-e^{3x}}{u^2} \times \frac{du}{e^x}$

$\int \frac{-e^{2x}}{u^2} \, du$

$e^x = 1 - u$

$e^{2x} = (1-u) = 1 - 2u + u^2$

$\int \frac{u-1}{u} du$

$= \int 1 - \frac{1}{u} \, du$

$= u - \ln|u| + C$

$= (e^x + 1) - (e^x + 1) + C$

مثال2

أتحقَّق من فهمي صفحة 34

a) $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}} \, dx$

الحل:

$u = 1 + 2x$

$\frac{du}{dx} = 2 \longrightarrow dx = \frac{du}{2}$

$\int \frac{x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2}$

$2x = u - 1 \longrightarrow x = \frac{1}{2}\,(u-1)$

$\int \frac{1}{2}\, \frac{u-1}{\sqrt{u}}\, \frac{du}{2}$

$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{-1}{2}} \, du$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\, u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right) + C$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\, \sqrt{(1+2x)^3} - 2\sqrt{1+2x}\right) + C$

$$= \int \frac{-1 + 2u - u^2}{u^2}\, du$$

$$= \int \frac{-1}{u^2} + \frac{2}{u} - 1 = \int u^{-2} - \frac{2}{u} + 1$$

$$= \frac{u^{-1}}{-1} + 2\ln u - u = \frac{1}{1-e^x} + 2\ln\left(1 - e^x\right) - 1 + e^x$$

مثال 3

جد كلاً من التكاملات الآتية:

$$1)\ \int \frac{1}{1-x^2} \times \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ dx$$

الحل:

$$u = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(1-x)(1) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1 - x + 1 + x}{(1-x)^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$dx - \frac{(1-x)^2}{2}\, du$$

$$\int \frac{1}{(1-x)(1+x)} \sqrt{u} \times \frac{(1-x)^2}{2}\, du$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1-x}{1+x} \sqrt{u}\ du$$

لكن

$$u = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1-x}{1+x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\sqrt{u}\ \ du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\ du$$

$$= \frac{1}{2}\, u^{-\frac{1}{2}}\ du = \frac{1}{2} \times 2\, u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \sqrt{u} + C$$

$$= \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$$

$$2)\ \int \frac{\sqrt{\cot x}}{\sin 2x}\ dx$$

الحل:

$$u = \sqrt{\cot x}$$

$$u^2 = \cot x$$

$$2u\frac{du}{dx} = -\csc^2 x$$

$$dx = \frac{-2u}{\csc^2 x}\, du$$

$$\int \frac{u}{\sin 2x} \times \frac{2u}{-\csc^2 x}$$

$$= \int \frac{-2\,u^2}{\sin 2x} \times \sin^2 x$$

$$= \int \frac{-2\,u^2}{2\sin x \cos x} \times \sin^2 x$$

$$= \int \frac{-u^2}{\cos x} \times \sin x$$

$$= \int -u^2 \times \tan x$$

$$= \int -u^2 \times \frac{1}{\cot x}$$

$$= \int -u^2 \times \frac{1}{u^2}\, du$$

$$= -\int du = -u + C$$

$$= -\sqrt{\cot x} + C$$

---

3) $\int (x+1)^3\,(x^2+2x+5)^3 \; dx$

الحل:

$u = x^2 + 2x + 5$

$\frac{du}{dx} = 2x + 2$

$dx = \frac{du}{2(x+1)}$

$= \int (x+1)^3 \; u^3 \, \frac{du}{2(x+1)}$

$\int (x+1)^2 \, u^3 \frac{du}{2}$

$= \frac{1}{2}\int (x^2+2x+1)\, u^3 \, du$

لكن

$u = x^2 + 2x + 5$

$u - 5 = x^2 + 2x$

بالتعويض

$\frac{1}{2}\int (u - 5 + 1)\, u^3 \, du$

$\frac{1}{2}\int (u-4)\, u^3 \, du$

$\frac{1}{2}\int u^4 - 4u^3 \, du$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^5}{5} - \frac{4u^4}{4}\right) + C$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{(x^2+2x+5)^5}{5} - (x^2+2x+5)^4\right) + C$

التكامل بالتعويض لتكاملات تحوي المقدار الجبري $\sqrt[n]{ax+b}$

مثال 1

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$

الحل:

$u = \sqrt{x} \quad u^2 = x$

$2u\frac{du}{dx} = 1 \longrightarrow dx = 2u\,du$

$\int \frac{1}{u^2 - u} \times 2u\,du$

$\int \frac{2u}{u\,(u-1)}\,du$

$= \int \frac{2}{u-1}\,du = \ln|u-1|$

$= 2\ln\left|\sqrt{x} - 1\right| + C$

---

2) $\int x\,\sqrt[5]{(x+1)^2}\;dx$

الحل:

$u = \sqrt[5]{x+1} \longrightarrow u^5 = x + 1$

$5u^4\frac{du}{dx} = 1 \longrightarrow dx = 5u^4\,du$

$\int x\,u^2\,5u^4\,du$

لكن $x = u^5 - 1$

$5\int (u^5 - 1)\,u^6\,du$

$$5\int (u^{11} - u^{6})\ du$$

$$= 5\left(\frac{1}{12}u^{12} - \frac{1}{7}u^{7}\right) + C$$

$$= \frac{5}{12}\sqrt[5]{(x+1)^{12}} - \frac{5}{7}\sqrt[5]{(x+1)^{12}}$$

حل آخر من الممكن أن نفرض

$$u = \sqrt[5]{(x+1)^{2}}$$

مثال2

أتحقَّق من فهمي صفحة 35

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$a)\ \int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}}$$

الحل:

$$u = \sqrt[3]{x} \ \longrightarrow u^{3} = x$$

$$3u^{2}\frac{du}{dx} = 1$$

$$\longrightarrow dx = 3u^{2}\ du$$

$$\int \frac{3\,u^{2}\ du}{u^{3} + u}$$

$$= \int \frac{3\,u^{2}}{u\,(u^{2}+1)}\ du$$

$$= \int \frac{3\,u}{u^{2}+1}\ du$$

$$= \frac{3}{2}\ln|u^{2}+1|$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x^{2}} + 1\right| + C$$

$$b)\ \int x\,\sqrt[3]{(1-x)^{2}}\ dx$$

الحل:

$$u = \sqrt[3]{1-x}$$

$$u^{3} = 1 - x \ \longrightarrow 3u^{2}\frac{du}{dx} = -1$$

$$dx = -3u^{2}\ du$$

$$x = 1 - u^{3}$$

بالتعويض

$$\int (1-u^{3})\,u^{2}\,(-3\,u^{2}\ du)$$

$$= \int (1 - u^{3}(-3^{4})\ du$$

$$= \int (-3\,u^{4} + 3u^{7})\ du$$

$$= \frac{-3}{5}u^{5} + \frac{3}{8}u^{8} + C$$

$$= \frac{-3}{5}\left(\sqrt[3]{(1-x)^{5}}\right) + \frac{3}{8}\sqrt[3]{(1-x)^{8}} + C$$

مثال3 من الحياة

زراعة : يمثل الاقتران $v(t)$ سعر دونم أرض زراعية بالدينار بعد t سنة من الان

$v'(t) = \dfrac{0.4\,t^{3}}{\sqrt{0.2\,t^{4} + 8000}}$ هو معدل تغير سعر دونم الارض، الأن هو JD 5000

الحل:

$$v(t) = \frac{0.4\,t^{3}}{\sqrt{0.2\,t^{4} + 8000}}$$

$$u = 0.2\, t^4 + 8000$$

$$\frac{du}{dt} = 0.8\, t^3$$

$$dt = \frac{du}{0.8\, t^3}$$

$$= \int \frac{0.4\, t}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{0.8\, t^3}$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}}\, du$$

$$= u^{\frac{1}{2}} + C\sqrt{0.2t^4 + 8000} + C$$

$$v(0) = 5000$$

$$\sqrt{0.2(0^4) + 8000} + C = 5000$$

$$\sqrt{8000} + C = 5000$$

$$C = 5000 - 40\sqrt{5}$$

$$v(t) = \sqrt{0.2\, t^4 + 8000} + 5000 - 40\sqrt{5}$$

مثال4 مسألة اليوم

يمثل الاقتران $G(t)$ الكتلة الحيوية لمجتمع اسماك في بحيرة بعد t سنة من بدء دراستها حيث G مقيسه بالكيلو غرام إذا كان معدل تغير الكتلة الحيوية للاسماك هو $G'(t) = \frac{60000\, e^{-0.6\, t}}{(1 + 5\, e^{-0.6t})^2}$ مقيساً

بوحدة (kg/year) وكانت الكتلة الحيوية للأسماك 25000 kg فأجد الكتلة الحيوية المتوقعة للأسماك بعد 20 سنة من بدء الدراسة.

الحل:

$$G(t) = \int \frac{60000\, e^{-0.6\, t}}{(1 + 5\, e^{-0.6t})^2}\, dt$$

$$u = 1 + 5\, e^{-0.6\, t}$$

$$\frac{du}{dt} = -3\, e^{-0.6t}$$

$$dt = \frac{du}{-3\, e^{-0.6t}}$$

$$G(t) = \int \frac{60000\, e^{-0.6\, t}}{u^2} \frac{du}{-3\, e^{-0.6t}}$$

$$= -20000 \int \frac{1}{u^2}\, du$$

$$= -20000 \int u^{-2}\, du$$

$$= -20000 \times \frac{u^{-1}}{-1} + C$$

$$= \frac{+20000}{u} + C$$

$$G(t) = \frac{20000}{1 + 5\, e^{-0.6t}} + C$$

$$G(0) = 25000$$

$$\frac{20000}{1 + 5\, e^{-0.6(0)}} + C = 25000$$

$$\frac{20000}{6} + C = 25000$$

$$C \approx 21667$$

$$G(t) = \frac{20000}{1 + 5\, e^{-0.6t}} + 21667$$

$$G(20) = \frac{20000}{1 + 5\, e^{-12}} + 21667$$

$$\approx 41666\text{ kg}$$

مثال5

أتحقَّق من فهمي صفحة 37

أسعار : يمثل الاقتران $P(x)$ سعر قطعة (بالدينار) تُستعمل في أجهزة الحاسوب ، حيث x عدد القطع المبيعة منها بالمئات إذا كان $P'(x) = \frac{-135\,x}{\sqrt{9+x^2}}$ هو معدل تغير سعر هذه القطعة فأجد $P(x)$ علماً بأن سعر القطعة الواحدة هو 30 JD عندما يكون عدد الطع المبيعة منها 400 قطعة

الحل:

$$P(x) = \int \frac{-135\,x}{\sqrt{9+x^2}}$$

$$u = \sqrt{9+x^2} \qquad u^2 = 9 + x^2$$

$$2u\frac{du}{dx} = 2x$$

$$dx = \frac{u\ du}{x}$$

$$P(x) = \int \frac{-135\,x}{u} \times \frac{u\,du}{x}$$

$$P(x) = \int -135\,du$$

$$P(x) = -135\,u + C$$

$$P(x) = -135\sqrt{9+x^2} + C$$

$$P(4) = 30$$

$$-135\sqrt{25} + C = 30$$

$$-675 + C = 30$$

$$C = 705$$

$$P(x) = -135\sqrt{9+x^2} + 705$$

تكامل الاقترانات المثلثية بالتعويض

1) تكاملات تحوي sin , cos

1. إذا كانت قوة (أُس) sin , cos زوجية تستخدم المتطابقة

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

2. إذا كانت قوس (أس) sin , cos فردية
- نجعل أس إما sin أو cos يساوي (1) والباقي بدلالة الآخر

$\int \sin\ (\cos^{\text{الباقي}})$

مفرد

نفرض $u = \cos$

$\int \cos\ (\sin^{\text{الباقي}})$

نفرض $u = \sin$

وللتحويل نستخدم

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

مثال1

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

1) $\int \cos^3 x\, dx$

الحل:

$$\int \cos^2 x \cos x\, dx$$

مثال2

أتحقَّق من فهمي صفحة 39

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$a)\ \int \sin^3 x\, dx$

الحل:

$$\int \sin^2 x \sin x\, dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx$$

$$u = \cos x \qquad \frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$dx = -\frac{du}{\sin x}$$

$$= \int (1-u^2)\sin x \times \frac{-du}{\sin x}$$

$$= \int (-1+u^2)\, du$$

$$= -u + \frac{u^3}{3} + C$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$b)\ \int \cos^5 x \sin^2 x$

الحل:

$$= \int \cos x \cos^4 x \sin^2 x$$

$$= \int \cos x\,(1-\sin^2 x)^2 \sin^2 x$$

$$u = \sin x \qquad \frac{du}{dx} = \cos x$$

$$dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int (1-\sin^2 x)\cos x$$

$$u = \sin x \qquad \frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int (1-u^2)\cos x \times \frac{du}{\cos x}$$

$$= u - \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$2)\ \int \cos^4 x\ \sin^3 x\, dx$

الحل:

نسحب من الفردي $\sin x$

$$\int \cos^4 x \sin^2 x\ \sin x\ dx$$

$$\int \cos^4 x\,(1-\cos^2 x)\sin x\ dx$$

$$u = \cos x \qquad \frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$dx = \frac{du}{\sin x}$$

$$\int u^4(1-u^2)\sin x \times \frac{-du}{\sin x}$$

$$-\int u^4 - u^6\ du$$

$$= -\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + C$$

$$= -\frac{(\cos x)^5}{5} + \frac{(\cos x)^7}{7} + C$$

$$= \int \cos x\,(1-u^2)^2\, u^2 \times \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int (1-2u^2+u^4)\, du$$

$$= \frac{1}{3}u^3 - \frac{2}{5}\,u^5 + \frac{1}{7}u^7 + C$$

$$= \frac{1}{3}(\sin^3 x) - \frac{2}{5}\,\sin^5 x + \frac{1}{7}\,\sin^7 x + C$$

2) تكاملات تحوي $\tan\ ,\sec$

1) $\int \sec^2 x(\tan$ الباقي بدلالة $)$

نفرض $u = \tan$

2) $\int \sec x \tan x(\sec x$ الباقي بدلالة $)$

نفرض $u = \sec x$

متطابقات هامة

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

ملاحظة

1. قوة $\sec$ فردية نفرض $u = \sec x$
2. قوة $\sec$ زوجية نفرض $u = \tan$

ملاحظة

الاقترانات التي تحوي $\csc\ ,\cot$ نتعامل معها بنفس الطريقة

$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

مثال 1

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \tan^3 x\, dx$

الحل:

$$\int \tan^2 x \tan x\ \ dx$$

$$\int (\sec^2 x - 1)\tan x$$

$$= \int \sec^2 x \tan x - \int \tan x$$

التكامل الأول

$$u = \tan x \qquad \frac{du}{dx} = \sec^2 x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int \sec^2 x\, u \times \frac{du}{\sec^2 x} - \int \tan x\ \ dx$$

$$= \frac{u^2}{2} + \ln|\cos x| + C$$

$$= \frac{1}{2}\,(\tan^2 x) + \ln|\cos x| + C$$

---

2) $\int \cot^4 x\, dx$

الحل:

$$\int \cot^2 x \cot^2 x\, dx$$

$$\int \cot^2 x\,(\csc^2 x - 1)$$

$$= \int \cot^2 x \csc^2 x - \cos^2 x$$

التكامل الأول

مثال2

أتحقَّق من فهمي صفحة 41

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \tan^4 x\, dx$

الحل:

$\int \tan^2 x \tan^2 x\ dx$

$\int (-1+\sec^2 x)\tan^2 x\, dx$

$= \int \tan^2 x + \int \sec^2 x \tan^2 x\, dx$

التكامل الثاني

نفرض $u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \ \longrightarrow\ dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$= \int 1 - \sec^2 x\, dx + \int \sec^2 x \frac{u^2\, du}{\sec^2 x}$

$= x - \tan x + \frac{1}{3} u^3 + C$

$x - \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$

2) $\int \cot^5 x\, dx$

الحل:

$\int \cot x \cot^4 x\ dx$

$= \int \cot x\,(\csc^2 x - 1)^2$

$= \int \cot x\,(\csc^4 x - 2\csc^2 x + 1)$

$u = \cot x$

$\frac{du}{dx} = -\csc^2 x$

$= \int u^2 \times \csc^2 x \times \frac{-du}{\csc^2 x} - \int \cot^2 x$

$= \int -u^2\, du - \int (\csc^2 x - 1) dx$

$= \frac{u^3}{3} + \cot x + x + C$

$= -\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + C$

3) $\int \sec^4 x \tan^3 x\, dx$

الحل:

نفرض أن $u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \ \longrightarrow\ dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$\int \sec^4 x\, u^3 \frac{du}{\sec^2 x}$

$\int \sec^2 x\, u^3 \frac{du}{\sec^2 x}$

$\int \sec^2 x\, u^3\, du$

$\int (1+\tan^2 x)\, u^3\, du$

$\int (u^3 + u^5)\, du$

$= \frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{6} u^6 + C$

$= \frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{6}\tan^6 x + C$

$$= \int \cot x \csc^4 x - 2\cot x \csc^2 x + \cot x$$

الأول

$$u = \cot x \qquad dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$= \int u \csc^4 x \left(\frac{-du}{\csc^2 x}\right)$$

$$= -\int u \csc^2 x \; du$$

$$= -\int u\,(1 + \cot^2 x) \; du$$

$$= -\int u\,(1 + u^2) du$$

$$= -\int u + u^3 du$$

$$= \frac{-u^2}{2} - \frac{u^4}{4} + C$$

$$= \frac{-\cot^2 x}{2} - \frac{\cot^4 x}{4} + C$$

التكامل الثاني

$$\int 2 \cot x \csc^2 x \, dx$$

$$u = \cot x \qquad dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$= \int 2\, u \csc^2 x \times \frac{-du}{\csc^2 x}$$

$$= -2 \int u \, du$$

$$= -2 \frac{u^2}{2} = -u^2$$

$$= -\cot^2 x$$

الجواب

$$\frac{-\cot^2 x}{2} - \frac{\cot^4 x}{2} + \cot^2 x + \ln|\sin x| + C$$

من الممكن أن نفرض الحل الأول $u = \csc x$

---

3) $\int \sec^4 x \tan^6 x \; dx$

الحل:

$$u = \tan x \qquad dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\int \sec^4 x \; u^6 \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\int \sec^2 x \, u^6 \, du$$

$$\int (1 + \tan^2 x)\, u^6 \, du$$

$$\int (1 + u^2)\, u^6 \, du$$

$$\int u^6 + u^8 \, du$$

$$\frac{1}{7} u^7 + \frac{1}{9} u^9 + C$$

$$\frac{1}{7} \tan^7 x + \frac{1}{9} \tan^9 x + C$$

مثال3

جد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int \sec^3 x + \tan^3 x \; dx$

الحل:

نفرض أن $u = \sec x$

$$\frac{du}{dx} = \sec x \tan x$$

$$\int \sec^2 x \times \frac{1}{u} \times \frac{2u\,du}{\sec^2 x}$$

$$= \int 2\,du = 2u + C$$

$$= 2\sqrt{1+\tan x} + C$$

4) $\int \sec^4 x\ dx$

الحل:

$u = \tan x \qquad du = \sec^2 x\ dx$

$$\int \sec^4 x \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int \sec^2 x\,du$$

$$= \int (1+\tan^2 x)\,du$$

$$= \int (1+u^2)\,du$$

$$= u + \frac{1}{3}u^3 + C$$

$$= \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

5) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\ dx$

الحل:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\cos^2 x}\ dx$$

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x\,dx$$

$u = \tan x$

$du = \sec^2 x\,dx$

$$\int u^2 \sec^2 x \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C$$

$$\frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

$$= \int u^3 \tan^3 x \frac{du}{\sec x \tan x}$$

$$\int u^2 \tan^2 x \frac{du}{u}$$

$$\int u^2 (1+\sec^2 x)\,du$$

$$\int u^2 (1+u^2)\,du$$

$$= \int u^2 + u^4\,du$$

$$= \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C$$

$$= \frac{1}{3}\sec^3 x + \frac{1}{5}\sec^5 x + C$$

2) $\int \sec^n x \tan x\ dx$

الحل:

$$\int \sec x \tan x \sec^{n-1}\,dx$$

$u = \sec x \qquad du = \sec x \tan\ dx$

$$= \int \sec x \tan x\ u^{n-1} \times \frac{du}{\sec x \tan x}$$

$$= \int u^{n-1}\,du = \frac{u^n}{n} + C$$

$$= \frac{1}{n}\sec^n x + C$$

3) $\int \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}\ dx$

الحل:

$$\int \sec^2 x \frac{1}{\sqrt{1+\tan x}}$$

$u = \sqrt{1+\tan x}$

$u^2 = 1 + \tan x$

$2u\ du = \sec^2 x\,dx$

التكامل بالتعويض للتكاملات المحدودة

مفهوم أساسي

إذا كان g' متصلاً على $[a, b]$ وكان f متصلاً على مدى $u = g(x)$ فإن

$$\int_a^b f(g(x))dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

مثال 1

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1) $\int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \sin x}\, dx$

الحل:

$u = 1 + \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$

نغير حدود التكامل

$x = 0 \rightarrow u = 1 + \sin 0 = 1$

$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 1 + \sin \frac{\pi}{2} = 2$

بالتعويض

$\int_1^2 \cos x \sqrt{u}\, \frac{du}{\cos x}$

$= \int_1^2 u^{\frac{1}{2}}\, du$

$= \frac{2}{3}\, u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\, \sqrt{u^3}\Big|_1^2$

$= \frac{2}{3}(\sqrt{8} - \sqrt{1})$

$= \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1)$

2) $\int_1^{25} \frac{x}{\sqrt{2x - 1}} dx$

الحل:

$u = \sqrt{2x - 1} \rightarrow u^2 = 2x - 1$

$2u\, du = 2dx$

$x = 1 \rightarrow u = \sqrt{1} = 1$

$x = 25 \rightarrow u = \sqrt{50 - 1} = \sqrt{49} = 7$

$\int_1^7 \frac{x}{u} \times \frac{2u\, du}{2}$

$\int_1^7 x\, du$

لكن

$x = \frac{1}{2}(u^2 + 1)$

$\frac{1}{2}\int_1^7 u^2 + 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{u^3}{3} + u\right)\Big|_1^7$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(7)^3 + 7\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 + 1\right) = 60$

مثال 2

أتحقَّق من فهمي صفحة 43

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

1) $\int_0^2 x\,(x + 1)^3\, dx$

الحل:

$u = x + 1 \rightarrow du = dx$

$x = u - 1$

$x = 0 \rightarrow u = 1$

$x = 2 \rightarrow u = 3$

$\int_1^3 (u - 1)\,(u^3) dx$

$= \int_1^3 u^4 - u^3\, dx$

$\frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{4}u^4 \Big|_1^4$

$\left(\frac{1}{5}(3)^5 - \frac{1}{4}(3)^4\right) - \left(\frac{1}{5}(1)^5 - \frac{1}{4}(1)^4\right)$

$\left(\frac{243}{5} - \frac{81}{4}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right)$

$\frac{242}{5} - \frac{80}{4}$

$= \frac{242}{5} - 20 =$

$= \frac{242}{5} - \frac{100}{5} = \frac{142}{5} = 28.4$

---

2) $\int_0^{\pi/3} \sec x \tan x \sqrt{\sec x + 2}$

الحل:

$u = \sqrt{\sec x + 2}$

$u^2 = \sec x + 2$

$2u\, du = \sec x \tan x\, dx$

$x = 0 \longrightarrow u = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

$x = \frac{\pi}{3} \longrightarrow u = \sqrt{\sec\frac{\pi}{3} + 2}$

$\sqrt{4} = 2$

$\int_{\sqrt{3}}^{2} \sec x \tan x \times \frac{u \times 2u\, du}{\sec x \tan x}$

$\int_{\sqrt{3}}^{2} 2u^2 du = \frac{2}{3}u^3 \Big|_{\sqrt{3}}^{2}$

$\frac{2}{3}\left(2^3 - \left(\sqrt{3}\right)^3\right)$

$\frac{2}{3}\left(8 - \sqrt{27}\right) \approx 1.87$

مثال3

إذا كان $\int_1^4 f(x)dx = 8$ فأوجد $\int_2^1 x\, f(x^2)\, dx$

الحل:

$u = x^2 \;\longrightarrow du = 2x\, dx$

$u = 2 \;\longrightarrow u = 4$

$u = 1 \;\longrightarrow u = 1$

$\int_4^1 x\, f(u) \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int_4^1 f(u)\, du$

$= -\frac{1}{2}\int_1^4 f(u)\, du$

$= -\frac{1}{2} \times 8 = -4$

مثال4

إذا كان $\int_1^e x\, f(x)\, dx = 4$ فأوجد قيمة

$\int_0^2 e^x f\left(\sqrt{e^x}\right) dx$

الحل:

$u = \sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}$

$du = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}\, dx$

$dx = \frac{2}{e^{\frac{x}{2}}}\, du$

$x = 0 \;\longrightarrow u = \sqrt{e^0} = 1$

$x = 2 \longrightarrow u = e^{\frac{2}{3}} = e$

$\int_1^e e^x f(u) \frac{2}{e^{\frac{x}{2}}}\, du$

$= \int_1^e u\, f(u) du$

$= 2(4) = 8$

مثال5

إذ كان $\int_{8}^{c} f(x-5)dx = \int_{3}^{7} f(x)dx$

أوجد قيمة الثابت c

الحل:

$u = x - 5 \qquad du = dx$

$u = x - 5 \longrightarrow u = 3$

$x = c \longrightarrow u = c - 5$

$$\int_{8}^{c} f(x-5)\,dx = \int_{3}^{c-5} f(u)\,du$$

$$= \int_{3}^{7} f(x)\,dx$$

$\Longrightarrow 7 = c - 5$

$\Longrightarrow c = 12$

مثال6

إذا كان f قابل للتكامل على R وكان $f(1) = 0$,

$f(8) = 8$ فما قيمة

$$\int_{1}^{2} 3x^2 f'(x^3)dx$$

الحل:

$u = x^3 \longrightarrow du = 3x^2\,dx$

$u = 1 \qquad u = 1$

$x = 2 \qquad u = 8$

$$\int_{1}^{2} 3x^2 f'(x^3)\,dx = \int_{1}^{8} 3x^2 f'(u)\frac{du}{3x^2}$$

$$= \int_{1}^{8} f'(u)\,du = f(8) - f(1)$$

$= 8 - 0 = 8$

التكامل بالتعويض

الدرس الثاني

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int x^2 (2x^3 + 5)^4 \, dx$

الحل:

$$u = 2x^3 + 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{6x^2}$$

$$\int x^2(2x^3+5)^4 dx = \int x^2 u^4 \times \frac{du}{6x^2}$$

$$= \int \frac{1}{6} u^4 du$$

$$= \frac{1}{30} u^5 + C$$

$$= \frac{1}{30}(2x^3+5)^5 + C$$

---

2 $\int x^2 \sqrt{x+3} \, dx$

$$u = x + 3 \Rightarrow dx = du, x = u - 3$$

$$x^2\sqrt{x+3}\, dx = \int x^2 \sqrt{u}\, du$$

$$= \int (u-3)^2 \sqrt{u}\, du$$

$$= \int (u^{\frac{5}{2}} - 6u^{\frac{3}{2}} + 9u^{\frac{1}{2}}) du$$

$$= \frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} - \frac{12}{5} u^{\frac{5}{2}} + 6u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{7}(x+3)^{\frac{7}{2}} - \frac{12}{5}(x+3)^{\frac{5}{2}} + 6(x+3)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{7}\sqrt{(x+3)^7} - \frac{12}{5}\sqrt{(x+3)^5} + 6\sqrt{(x+3)^3} + C$$

3 $\int x(x+2)^3 \, dx$

الحل:

$$u = x + 2 \Rightarrow dx = du, x = u - 2$$

$$\int x(x+2)^3 dx = \int x u^3 du$$

$$= \int (u-2) u^3 du$$

$$= \int (u^4 - 2u^3) du$$

$$= \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{2} u^4 + C$$

$$= \frac{1}{5}(x+2)^5 - \frac{1}{2}(x+2)^4 + C$$

4 $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\, dx$

الحل:

$u = x + 4 \Rightarrow dx = du \quad , x = u - 4$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} du$$

$$= \int \frac{u-4}{\sqrt{u}} du$$

$$= \int (u^{\frac{1}{2}} - 4u^{-\frac{1}{2}}) du$$

$$= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 8u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} - 8(x+4)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3} - 8\sqrt{x+4} + C$$

---

5 $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$

الحل:

$$u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int e^{\sin x} \cos x\, dx$$

$$= \int e^u \cos x \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int e^u du \qquad = e^u + C$$

$$= e^{\sin x} + C$$

---

6 $\int \frac{e^{3x}}{e^x + 1}\, dx$

الحل:

$$u = e^x + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow$$

$$dx = \frac{du}{e^x} \quad , e^x = u - 1$$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x+1} dx = \int \frac{e^{3x}}{u} \times \frac{du}{e^x}$$

$$= \int \frac{e^{2x}}{u} du$$

$$= \int \frac{(u-1)^2}{u} du$$

$$= \int (u - 2 + \frac{1}{u}) du$$

$$= \frac{1}{2}u^2 - 2u + \ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{2}(e^x+1)^2 - 2(e^x+1) + \ln(e^x+1) + C$$

7 $\int \sec^4 x \, dx$

الحل:

$$\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x \times \sec^2 x dx$$
$$= \int \sec^2 x (1 + \tan^2 x) dx$$

$$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x (1 + u^2) \times \frac{du}{\sec^2 x}$$
$$= \int (1 + u^2) du$$
$$= u + \frac{1}{3} u^3 + C$$
$$= \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C$$

---

8 $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} \, dx$

الحل:

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \sec^2 x dx$$

$$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int u \sec^2 x \times \frac{du}{\sec^2 x}$$
$$= \int u du \quad = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} \tan^2 x + C$$

---

9 $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx$

الحل:

$$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x du$$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \frac{\sin u}{x} \times x du$$
$$= \int \sin u du$$
$$= -\cos u + C$$
$$= -\cos(\ln x) + C$$

10

$$\int \sin 2x \, (4 + \sin^2 x)^3 \, dx$$

الحل:

$$u = 4 + \sin^2 x \to dx = \frac{du}{a \sin x \cos x}$$
$$= \frac{du}{\sin 2x}$$

$$\int \sin 2x \, (u)^3 \frac{du}{\sin 2^x} = \int u^3 \, du$$
$$= \frac{u^4}{4} + C$$
$$= \frac{(4 + \sin^2 x)^4}{4} + C$$

---

11 $\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} \, dx$

الحل:

$$u = e^x + e^{-x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x - e^{-x}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{e^x - e^{-x}}$$

$$\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} dx$$

$$= \int \frac{2(e^x - e^{-x})}{u^2} \times \frac{du}{e^x - e^{-x}}$$

$$= \int 2u^{-2} du$$

$$= -2u^{-1} + C$$

$$= -\frac{2}{e^x + e^{-x}} + C$$

---

12 $\displaystyle \int \frac{-x}{(x+1)\sqrt{x+1}} \, dx$

$$u = x + 1 \Rightarrow dx = du, x = u - 1$$

$$\int \frac{-x}{(x+1)\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{1-u}{u\sqrt{u}} du$$

$$= \int \frac{1-u}{u^{\frac{3}{2}}} du$$

$$= \int (u^{-\frac{3}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}) du$$

$$= -2u^{-\frac{1}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -2(x+1)^{-\frac{1}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{x+1}} - 2\sqrt{x+1} + C$$

---

13 $\displaystyle \int x \sqrt[3]{x+10} \; dx$

الحل:

$$u = x + 10 \Rightarrow dx = du, x = u - 10$$

$$\int x\sqrt[3]{x+10}\, dx = \int (u-10) u^{\frac{1}{3}} du$$

$$= \int (u^{\frac{4}{3}} - 10u^{\frac{1}{3}}) du$$

$$= \frac{3}{7} u^{\frac{7}{3}} - \frac{15}{2} u^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{7}(x+10)^{\frac{7}{3}} - \frac{15}{2}(x+10)^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+10)^7} - \frac{15}{2}\sqrt[3]{(x+10)^4} + C$$

---

14 $\displaystyle \int \left(\sec^2 \frac{x}{2} \; \tan^7 \frac{x}{2}\right) dx$

الحل:

$$u=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow dx=\frac{2du}{\sec^2\frac{x}{2}}$$

$$\int\sec^2\frac{x}{2}\tan^7\frac{x}{2}dx=\int\sec^2\frac{x}{2}u^7\times\frac{2du}{\sec^2\frac{x}{2}}$$

$$=2\int u^7du\quad=\frac{1}{4}u^8+C\;=\frac{1}{4}\tan^8\frac{x}{2}+C$$

---

15 $$\int\frac{\sec^3x+e^{\sin x}}{\sec x}dx$$

الحل:

$$\int\frac{\sec^3x+e^{\sin x}}{\sec x}dx$$

$$=\int(\sec^2x+\cos x\,e^{\sin x})dx$$

$$=\int\sec^2x\,dx+\int\cos x\,e^{\sin x}dx$$

$$u=\sin x\Rightarrow\frac{du}{dx}=\cos x\Rightarrow dx=\frac{du}{\cos x}$$

$$\int\frac{\sec^3x+e^{\sin x}}{\sec x}dx$$

$$=\int\sec^2x\,dx+\int\cos x\,e^u\times\frac{du}{\cos x}$$

$$=\tan x+\int e^u du\quad=\tan x+e^u+C$$

$$=\tan x+e^{\sin x}+C$$

16 $$\int(1+\sqrt[3]{\sin x})\cos^3x\,dx$$

الحل:

$$u=\sin x\Rightarrow\frac{du}{dx}=\cos x\Rightarrow dx=\frac{du}{\cos x}$$

$$\int(1+\sqrt[3]{\sin x})\cos^3x\,dx$$

$$=\int(1+u^{\frac{1}{3}})\cos^3x\frac{du}{\cos x}$$

$$=\int(1+u^{\frac{1}{3}})\cos^2x\,du$$

$$=\int(1+u^{\frac{1}{3}})(1-\sin^2x)du$$

$$=\int(1+u^{\frac{1}{3}})(1-u^2)du$$

$$=\int(1+u^{\frac{1}{3}})(1-u^2)du$$

$$=\int(1-u^2+u^{\frac{1}{3}}-u^{\frac{7}{3}})du$$

$$=u-\frac{1}{3}u^3+\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{10}u^{\frac{10}{3}}+C$$

$$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x+\frac{3}{4}\sin^{\frac{4}{3}}x$$

$$-\frac{3}{10}\sin^{\frac{10}{3}}x+C$$

17 $\int \sin x \ \sec^5 x \ dx$

الحل:

$$\int \sin x \sec^5 x dx = \int \sin x \cos^{-5} x dx$$

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\int \sin x \sec^5 x dx = \int \sin x u^{-5} \times \frac{du}{-\sin x}$$

$$= -\int u^{-5} du \qquad = \frac{1}{4} u^{-4} + C$$

$$= \frac{1}{4} \cos^{-4} x + C \qquad = \frac{1}{4} \sec^4 x + C$$

18 $\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x} dx$

الحل:

$$\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x} dx$$

$$= \int (\tan x \sec^2 x + \tan x \sec^3 x) dx$$

$$= \int \tan x \sec x (\sec x + \sec^2 x) dx$$

$$u = \sec x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \tan x \sec x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{\tan x \sec x}$$

$$\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x} dx$$

$$= \int \tan x \sec x (u + u^2) \frac{du}{\tan x \sec x}$$

$$= \int (u + u^2) du$$

$$= \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{3} u^3 + C$$

$$= \frac{1}{2} \sec^2 x + \frac{1}{3} \sec^3 x + C$$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

19 $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sin(\pi \ln x)}{x} dx$

الحل:

$$u = \pi \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\pi}{x}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{x \, du}{\pi}$$

$$x = 1 \Rightarrow u = \pi \ln 1 = 0$$

$$x=\sqrt{e}\Rightarrow u=\pi\ln\sqrt{e}$$
$$=\pi\times\frac{1}{2}\ln e=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\sin(\pi\ln x)}{x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u}{x}\times\frac{x\,du}{\pi}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\,du$$
$$=\frac{-1}{\pi}\cos u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{-1}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)$$
$$=\frac{-1}{\pi}(0-1)=\frac{1}{\pi}$$

---

20 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}x\sin x^2\,dx$

الحل:

$$u=x^2\Rightarrow\frac{du}{dx}=2x$$
$$\Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$$

$$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=\frac{\pi^2}{4}$$
$$x=0\Rightarrow u=0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x^2\,dx=$$
$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}x\sin u\frac{du}{2x}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\sin u\,du$$
$$=-\frac{1}{2}\cos u\Big|_0^{\frac{\pi^2}{4}}$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi^2}{4}-1\right)\approx 0.891$$

---

21 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

الحل:

22 $\int_0^{\pi/3} \sec^2 x \tan^5 x \, dx$

:الحل

$u = tanx \Rightarrow \frac{du}{dx} = sec^2x \Rightarrow$

$dx = \frac{du}{sec^2x}$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \sqrt{3}$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} sec^2x tan^5x dx$

$= \int_0^{\sqrt{3}} sec^2x u^5 \frac{du}{sec^2x}$

$= \int_0^{\sqrt{3}} u^5 du \quad = \frac{1}{6}u^6\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{9}{2}$

---

23 $\int_0^2 (x-1)e^{(x-1)^2} \, dx$

:الحل

$u = 1 + x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x},$

$x^2 = u - 1$

$x = 0 \Rightarrow u = 1$

$x = 1 \Rightarrow u = 2$

$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$= \int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{u}} du$

$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{u-1}{\sqrt{u}} du$

$= \frac{1}{2}\int_1^2 (u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}) du$

$= \frac{1}{2}(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}})\Big|_1^2$

$= \frac{1}{2}(\frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - 2(2)^{\frac{1}{2}}$

$-(\frac{2}{3}(1) - 2(1)))$

$= \frac{2-\sqrt{2}}{3}$

$$u=(x-1)^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2(x-1)$$

$$\Rightarrow dx=\frac{du}{2(x-1)}$$

$x=0 \Rightarrow u=1$

$x=2 \Rightarrow u=1$

$$\int_0^2 (x-1)e^{(x-1)^2}dx$$

$$=\int_1^1 (x-1)e^{u}\frac{du}{2(x-1)}=0$$

---

24 $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

الحل:

$$u=2+\sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx=2\sqrt{x}\,du$$

$x=1 \Rightarrow u=3$

$x=4 \Rightarrow u=4$

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int_3^4 \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{x}}2\sqrt{x}\,du$$

$$=\int_3^4 2\sqrt{u}\,du=\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_3^4=\frac{4(8-3\sqrt{3})}{3}$$

---

25 $\displaystyle\int_0^1 \frac{10\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x^3})^2}\,dx$

الحل:

$$u=1+x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx=\frac{2}{3}\frac{du}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$x=0 \Rightarrow u=1$

$x=1 \Rightarrow u=2$

$$\int_0^1 \frac{10\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x^3})^2}dx=\int_1^2 \frac{10\sqrt{x}}{u^2}\,\frac{2}{3}\,\frac{du}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{20}{3}\int_1^2 u^{-2}du=-\frac{20}{3}u^{-1}\Big|_1^2=\frac{10}{3}$$

---

26 $\displaystyle\int_0^{\pi/6} 2^{\cos x}\sin x\,dx$

الحل:

$$u=\cos x \Rightarrow \frac{du}{dx}=-\sin x \Rightarrow dx=\frac{du}{-\sin x}$$

$x=0 \Rightarrow u=1$

$$x=\frac{\pi}{6} \Rightarrow u=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2^{\cos x}\sin x\,dx=\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2^u\sin x\frac{du}{-\sin x}$$

$$=-\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2^u du \quad =-\frac{2^u}{\ln 2}\Big|_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=-\frac{1}{\ln 2}\left(2^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-2\right)\approx 0.256$$

27 $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2 x \cot^5 x \; dx$

الحل:

$$u=\cot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc^2 x \Rightarrow$$

$$dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow u=0$$

$$x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow u=1$$

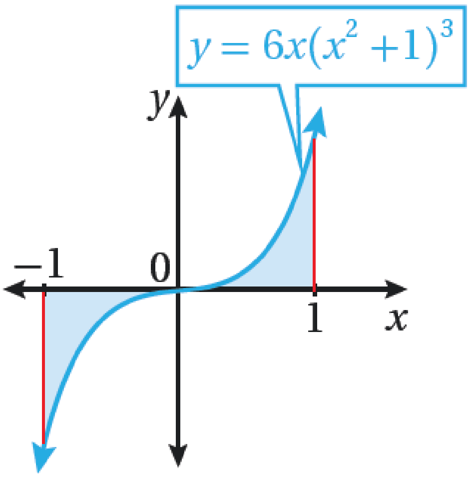
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \cot^5 x\, dx = \int_{1}^{0} \csc^2 x\, u^5 \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$= \int_{1}^{0} -u^5\, du \qquad = -\frac{1}{6} u^6 \Big|_{1}^{0}$$

$$= \frac{1}{6}$$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

28



الحل:

$$A = -\int_{-1}^{0} 6x(x^2+1)^3 dx + \int_{0}^{1} 6x(x^2+1)^3 dx$$

$$u = x^2+1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$x=-1 \Rightarrow u=2$$

$$x=0 \Rightarrow u=1$$

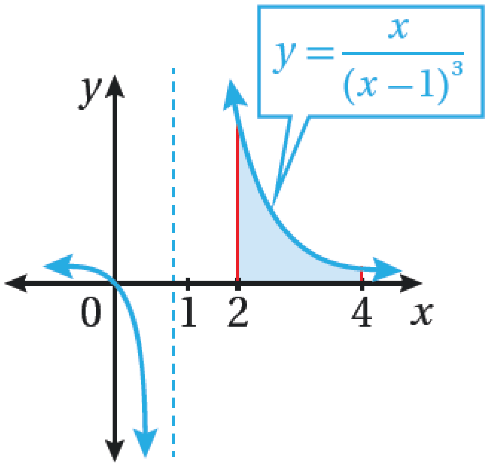
$$x=1 \Rightarrow u=2$$

$$A = -\int_{2}^{1} 6xu^3 \frac{du}{2x} + \int_{1}^{2} 6xu^3 \frac{du}{2x}$$

$$= \int_{1}^{2} 3u^3 du + \int_{1}^{2} 3u^3 du = \int_{1}^{2} 6u^3 du$$

$$= \frac{6}{4} u^4 \Big|_{1}^{2} \qquad = \frac{45}{2}$$

29



الحل:

$$A = \int_2^4 \frac{x}{(x-1)^3}\,dx$$

$u = x - 1 \Rightarrow dx = du \quad , \quad x = u + 1$

$x = 2 \Rightarrow u = 1$

$x = 4 \Rightarrow u = 3$

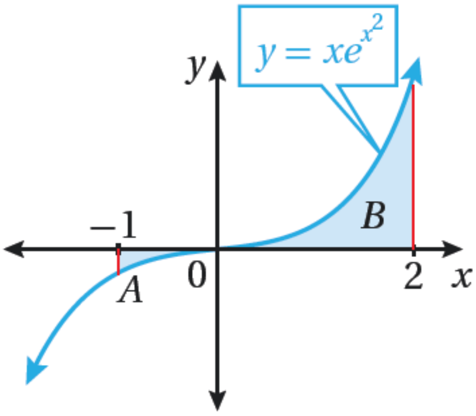
$$A = \int_2^4 \frac{x}{(x-1)^3}\,dx = \int_1^3 \frac{u+1}{u^3}\,du$$

$$= \int_1^3 (u^{-2} + u^{-3})\,du = \left(-u^{-1} - \frac{1}{2}u^{-2}\right)\Big|_1^3$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right) + 1 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{10}{9}$$

30



الحل:

$$u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$x = -1 \Rightarrow u = 1$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = 2 \Rightarrow u = 4$

$$A = -\int_{-1}^0 xe^{x^2}dx + \int_0^2 xe^{x^2}dx$$

$$= -\int_1^0 xe^u \frac{du}{2x} + \int_0^4 xe^u \frac{du}{2x}$$

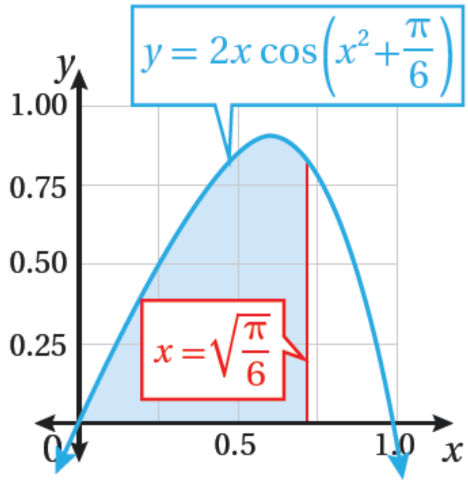
$$= -\int_1^0 \frac{1}{2}e^u du + \int_0^4 \frac{1}{2}e^u du$$

$$= -\frac{1}{2}e^u\Big|_1^0 + \frac{1}{2}e^u\Big|_0^4$$

$$= -\frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{2}e^1 + \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^0$$

$$= \frac{1}{2}(e^4 + e) - 1 \approx 27.658$$

31



الحل:

$$u = x^2 + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$x = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \Rightarrow \Rightarrow = \frac{\pi}{3} \qquad x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{6}$$

$$A = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}} 2x\cos\left(x^2 + \frac{\pi}{6}\right)dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2x\cos u \frac{du}{2x}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos u\, du \qquad = \sin u \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\approx 0.366$$

في كلٍّ ممّا يأتي المشــتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أســتعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

32 $f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2$; $(2, 10)$

الحل:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int 2x(4x^2-10)^2 dx$$

$$u = 4x^2 - 10 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 8x \Rightarrow dx = \frac{du}{8x}$$

$$f(x) = \int 2xu^2\frac{du}{8x} = \int u^2\frac{du}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\int u^2 du$$

$$= \frac{1}{12}u^3 + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{12}(4x^2-10)^3 + C$$

$$f(2) = \frac{1}{12}(216) + C = 10 \Rightarrow C = -8$$

$$10 = 18 + C \Rightarrow C = -8$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{12}(4x^2-10)^3 - 8$$

33 $f'(x) = x^2 e^{-0.2x^3}$; $(0, \frac{3}{2})$

الحل:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int x^2 e^{-0.2x^3} dx$$

$$u = -0.2x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -0.6x^2$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-0.6x^2}$$

$$f(x) = \int x^2 e^u \frac{du}{-0.6x^2}$$

$$= -\frac{10}{6} \int e^u du$$

$$= -\frac{5}{3} e^u + C$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{5}{3} e^{-0.2x^3} + C$$

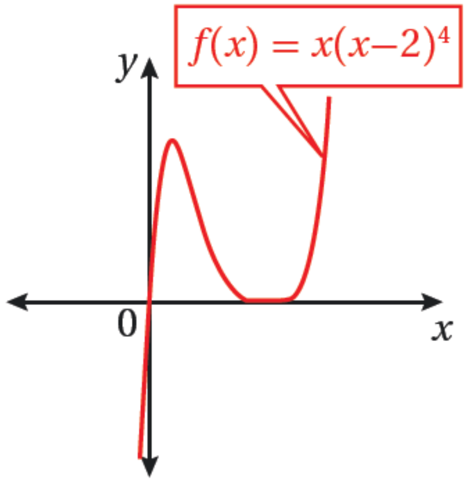
$$f(0) = -\frac{5}{3} + C$$

$$\frac{3}{2} = -\frac{5}{3} + C \Rightarrow C = \frac{19}{6}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{5}{3} e^{-0.2x^3} + \frac{19}{6}$$

يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى

الاقتران: $f(x) = x(x-2)^4$:



34 أجد إحداثيي نقطة تماس الاقتران مع المحور x.

الحل:

نجد أصفار الاقتران بحل المعادلة $f(x) = 0$
نقطة التقاطع (0.0)، فتكون نقطة التماس $(2, 0)$

ويمكن التحقق بحساب $f'(0)$

$$f'(x) = (x-2)^4 + 4x(x-2)^3$$

$$f'(2) = (2-2)^4 + 4(2)(2-2)^3 = 0$$

35 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور x.

الحل:

$$A=\int_0^2 x(x-2)^4dx$$

$$u=x-2\Rightarrow dx=du, x=u+2$$

$$x=0\Rightarrow u=-2$$

$$x=2\Rightarrow u=0$$

$$A=\int_0^2 x(x-2)^4dx=\int_{-2}^0(u+2)u^4du$$

$$=\int_{-2}^0(u^5+2u^4)du$$

$$=\left(\frac{1}{6}u^6+\frac{2}{5}u^5\right)\Big|_{-2}^0$$

$$=0-\left(\frac{1}{6}(-2)^6+\frac{2}{5}(-2)^5\right)$$

$$=\frac{32}{15}$$

36 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t)=\sin\omega t\ \cos^2\omega t$ حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية، و ω ثابت. إذا انطلق الجُسَيْم من نقطة الأصل فأجد موقعه بعد t ثانية.

الحل:

$$s(t)=\int\sin\omega t\cos^2\omega t\,dt$$

$$u=\cos\omega t\Rightarrow\frac{du}{dx}=-\omega\sin\omega t$$

$$\Rightarrow dt=\frac{du}{-\omega\sin\omega t}$$

$$s(t)=\int\sin\omega t\,u^2\frac{du}{-\omega\sin\omega t}$$

$$=\frac{-1}{\omega}\int u^2du=\frac{-1}{3\omega}u^3+C$$

$$\Rightarrow s(t)=-\frac{1}{30}\cos^3\omega t+C$$

لكن $S(0)=0$ لأن الجسيم انطلق من نقطة الأصل.

$$s(0)=-\frac{1}{3\omega}+C$$

$$0=-\frac{1}{3\omega}+C\Rightarrow C=\frac{1}{3\omega}$$

$$\Rightarrow s(t)=-\frac{1}{3\omega}\cos^3\omega t+\frac{1}{3\omega}$$

37 طـب: يُمثِّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t دقيقة من حقنه في جسم مريض، حيث C مَقيسة بالملّيغرام لكل سنتيمتر مُكعَّب (mg/cm^3) إذا كان تركيز الدواء لحظة حقنه في جسم المريض $0.5\ mg/cm^3$، وأخذ يتغيَّر بمُعدَّل $C'(t)=\frac{-0.01e^{-0.01t}}{(1+e^{-0.01t})^2}$، فأجد $C(t)$.

الحل:

$$C(t)=\int C'(t)\,dt$$

$$=\int \frac{-0.01e^{-0.01t}}{(1+e^{-0.01t})^2}\,dt$$

$$u=1+e^{-0.01t}\Rightarrow \frac{du}{dt}$$

$$=-0.01e^{-0.01t}$$

$$\Rightarrow dt=\frac{du}{-0.01e^{-0.01t}}$$

$$C(t)=\int \frac{-0.01e^{-0.01t}}{u^2}\times\frac{du}{-0.01e^{-0.01t}}$$

$$=\int u^{-2}\,du \quad =-u^{-1}+K$$

استعمل الرمز k لثابت التكامل بدل c المعتاد لتمييز ثابت التكامل عن رمز الاقتران c

$$C(t)=-(1+e^{-0.01t})^{-1}+K$$

$$C(0)=-(2)^{-1}+K$$

$$\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow K=1$$

$$\Rightarrow C(t)=-(1+e^{-0.01t})^{-1}+1$$

$$C(t)=\frac{-1}{1+e^{-0.01t}}+1$$

---

38 أجد قيمة: $\int_{\ln 3}^{\ln 4}\frac{e^{4x}}{e^x-2}\,dx$، ثم أكتب الإجابة بالصيغة الآتية: $\frac{a}{b}+c\ln d$، حيث: a، وb، وc، وd ثوابت صحيحة.

الحل:

$$u=e^x-2\Rightarrow\frac{du}{dx}=e^x\Rightarrow dx=\frac{du}{e^x}$$

$$e^x=u+2$$

$$x=\ln 3\Rightarrow u=e^{\ln 3}-2=3-2=1$$

$$x=\ln 4\Rightarrow u=e^{\ln 4}-2=4-2=2$$

$$\int_{\ln 3}^{\ln 4}\frac{e^{4x}}{e^x-2}dx=\int_1^2\frac{e^{4x}}{u}\frac{du}{e^x}$$

$$=\int_1^2\frac{e^{3x}}{u}du$$

$$=\int_1^2\frac{(u+2)^3}{u}du$$

$$=\int_1^2\frac{u^3+6u^2+12u+8}{u}du$$

$$=\int_1^2(u^2+6u+12+\frac{8}{u})du$$

$$=(\frac{1}{3}u^3+3u^2+12u+8\ln|u|)\Big|_1^2$$

---

39 إذا كان: $f'(x)=\tan x$، وكان: $f(3)=5$، فأُثبِت أنَّ: $f(x)=\ln\left|\frac{\cos 3}{\cos x}\right|+5$.

الحل:

$$f(x)=\int \tan x\,dx=-\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx$$

$$=-\ln|\cos x|+C$$

$$f(3)=-\ln|\cos 3|+C$$

$$5=-\ln|\cos 3|+C\Rightarrow C$$

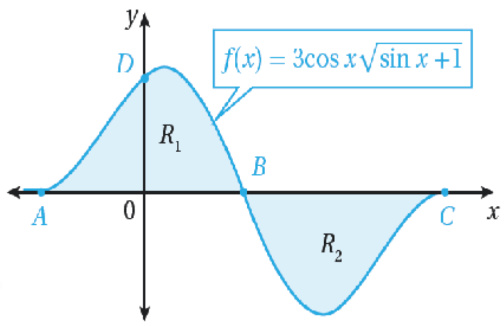
$$=5+\ln|\cos 3|$$

$$f(x)=-\ln|\cos x|+5+\ln|\cos 3|$$

$$=\ln|\frac{\cos 3}{\cos x}|+5$$

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان الشكل المجاور يُمثّل منحنى الاقتران: $f(x) = 3\cos x\sqrt{\sin x + 1}$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:



40 أجد إحداثيي كلٍّ من النقاط: A، وB، وC، وD.

الحل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3\cos x\sqrt{1+\sin x} = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهاتين المعادلتين، نريد أصغر حلين موجبين (الإحداثي x للنقطتين C, B) وأكبر حل سالب (الإحداثي x للنقطة B)

أصغر حلين موجبين هما :

$$x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$$

بوضع $n = 0$ ،

$$\Rightarrow B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), C\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$$

أكبر حل سالب هو :

$$x = \frac{-\pi}{2}$$

بوضع $n = -1$

$$\Rightarrow A\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

أما النقطة D فإحداثياها هما

$$D(0, f(0)) = (0, 3)$$

---

41 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

الحل:

$$A = A_1 + A_2 = A(R_1) + A(R_2)$$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x\sqrt{1+\sin x})dx$$

$$+ \left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (3\cos x\sqrt{1+\sin x})dx\right)$$

$$u = 1 + \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$x=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=2$$

$$x=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow u=0$$

$$A=3\int_0^2 \cos x\sqrt{u}\,\frac{du}{\cos x}+$$

$$\left(-3\int_2^0 \cos x\sqrt{u}\,\frac{du}{\cos x}\right)$$

$$=3\int_0^2\sqrt{u}\,du+3\int_0^2\sqrt{u}\,du$$

$$=6\int_0^2\sqrt{u}\,du=4u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=$$

$$4(2\sqrt{2}-0)=8\sqrt{2}$$

---

42 أُبيِّن أنَّ للمنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها.

الحل:

من حل السؤال السابق نجد أن:

$$A(R_1)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cos x\sqrt{1+\sin x}\right)dx$$

$$=\int_0^2 3\sqrt{u}\,du=4\sqrt{2}$$

$$A(R_2)$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(3\cos x\sqrt{1+\sin x}\right)dx$$

$$=-\int_2^0 3\sqrt{u}\,du=4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A(R_1)=A(R_2)$$

43 **تحدٍّ:** أجد قيمة: $\int_1^{16}\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx$.

الحل:

$$u=1+x^{\frac{3}{4}}\Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow dx=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{4}}du,\quad x^{\frac{3}{4}}=u-1$$

$$x=1\Rightarrow u=2\qquad x=16\Rightarrow u=9$$

$$\int_1^{16}\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx=\int_2^9\frac{x^{\frac{1}{2}}}{u}\,\frac{4}{3}x^{\frac{1}{4}}\,du$$

$$=\frac{4}{3}\int_2^9\frac{x^{\frac{3}{4}}}{u}\,du=\frac{4}{3}\int_2^9\frac{u-1}{u}\,du$$

$$=\frac{4}{3}\int_2^9\left(1-\frac{1}{u}\right)du$$

$$=\frac{4}{3}\left(u-\ln|u|\right)\Big|_2^9=\frac{4}{3}\left(7-\ln\frac{9}{2}\right)$$

44 تبرير: إذا كان f اقترانًا متصلًا، فأُثبِت أنَّ: $\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx$.

الحل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(\frac{\pi}{2}-x))dx$$

$$u = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -du$$

$$x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -f(\sin u)du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

45 تبرير: إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين، فأُثبِت أنَّ:

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b\, dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a\, dx.$$

الحل:

$$u = 1 - x \quad \Rightarrow dx = -du$$

$$, x = 1 - u$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow u = 1$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow u = 0$$

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\, dx = \int_1^0 -(1-u)^a u^b\, du$$

$$= \int_0^1 u^b(1-u)^a\, du$$

$$= \int_0^1 x^b(1-x)^a\, dx$$

تحدٍّ: أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

46 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x\,(\ln(\ln x))}$

الحل:

$$u = \ln(\ln x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$= \frac{1}{x\ln x} \Rightarrow dx = x\ln x\, du$$

$$\int \frac{dx}{x\ln x\,(\ln(\ln x))}$$

$$= \int \frac{x\ln x\, du}{u x \ln x} =$$

$$\ln|u| + C = \ln|\ln(\ln x)| + C$$

47 $\displaystyle\int \sin 2x\,(1+\sin x)^3\, dx$

الحل:

$$u = 1+\sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x} \quad , \quad \sin x = u - 1$$

$$\int \sin 2x\,(1+\sin x)^3 dx$$

$$= \int 2\sin x\cos x\, u^3 \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int 2(u-1)u^3 du$$

$$= \int (2u^4 - 2u^3)du$$

$$= \frac{2}{5}u^5 - \frac{1}{2}u^4 + C$$

$$= \frac{2}{5}(1+\sin x)^5$$

$$-\frac{1}{2}(1+\sin x)^4 + C$$

48 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\, dx$

إرشاد للسؤال 48: ما المضاعف المشترك الأصغر لدليلي الجذرين؟

الحل:

المضاعف الأصغر لدليلي الجذرين هو 6

ولذلك نوحد دليلي الجذرين الى 6

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt[6]{x^3}-\sqrt[6]{x^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{(\sqrt[6]{x})^3-(\sqrt[6]{x})^2}\,dx$$

$$\sqrt[6]{x} = u \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{1}{6}x^{\frac{-5}{6}} \Rightarrow$$

$$dx = 6x^{\frac{5}{6}}du = 6(\sqrt[6]{x})^5du = 6u^5du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{1}{(\sqrt[6]{x})^3-(\sqrt[6]{x})^2}\,dx$$

$$= \int \frac{6u^5}{u^3-u^2}\,du$$

$$= \int \frac{6u^5}{u^2(u-1)}\,du = \int \frac{6u^3}{u-1}\,du$$

$$= \int \left(6u^2+6u+6+\frac{6}{u-1}\right)du$$

$$= 2u^3+3u^2+6u+6\ln|u-1|+C$$

$$= 2(\sqrt[6]{x})^3+3(\sqrt[6]{x})^2+6\sqrt[6]{x}+$$

$$6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$$

$$= 2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+$$

$$6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$$

تمارين ومسائل كتاب التمارين

التكامل بالتعويض

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

الحل:

$$u = x^2+4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}}\frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+4} + C$$

---

2) $\int \left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^2 \sin\frac{x}{2}\,dx$

الحل:

$$u = 1-\cos\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2}{\sin\frac{x}{2}}du$$

$$\int \left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^2 \sin\frac{x}{2}dx$$

$$= \int u^2 \sin\frac{x}{2}\frac{2}{\sin\frac{x}{2}}du$$

$$= \int 2u^2 du = \frac{2}{3}u^3 + C$$

$$= \frac{2}{3}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^3 + C$$

3) $\int \csc^5 x \cos^3 x\ dx$

الحل:

$$\int \csc^5 x\cos^3 x\,dx = \int \frac{\cos^3}{\sin^5 x}x\,dx$$

$$= \int \cot^3 x \csc^2 x\,dx$$

$$u = \cot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc^2 x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$\int \csc^5 x \cos^3 x dx = \int \cot^3 x \csc^2 x dx$$

$$= \int u^3 \csc^2 \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$= \int -u^3 du = -\frac{1}{4}u^4 + C$$

$$= -\frac{1}{4}\cot^4 x + C$$

4 $\int x \sin x^2 \, dx$

الحل:

$$u = x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int x \sin x^2 \, dx = \int \frac{1}{2} \sin u \, du$$

$$= -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$$

5 $\int x^3 (x+2)^7 \, dx$

الحل:

$$u = x + 2 \Rightarrow dx = du \quad ,$$

$$x = u - 2$$

$$\int x^3 (x+2)^7 dx = \int (u-2)^3 u^7 du$$

$$= \int (u^{10} - 6u^9 + 12u^8 - 8u^7) du$$

$$= \frac{1}{11}u^{11} - \frac{3}{5}u^{10} + \frac{4}{3}u^9 - u^8 + C$$

$$= \frac{1}{11}(x+2)^{11} - \frac{3}{5}(x+2)^{10} + \frac{4}{3}(x+2)^9 - (x+2)^8 + C$$

6 $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x} \, dx$

الحل:

$$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{\frac{1}{2}\ln x}{x} dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x du$$

$$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{\frac{1}{2}\ln x}{x} dx$$

$$= \int \frac{1}{2} u du = \frac{1}{4}u^2 + C = \frac{1}{4}(\ln x)^2 + C$$

7 $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

الحل:

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow dx = 2\sqrt{x} du$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{e^u}{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x}\,du$$

$$= 2\int e^u\,du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

---

8 $$\int \frac{\sin\left(\ln 4x^2\right)}{x}\,dx$$

الحل:

$$\int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x}dx = \int \frac{\sin(2\ln 2x)}{x}dx$$

$$u = 2\ln 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2}{x} \Rightarrow dx = \frac{x}{2}du$$

$$\int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x}dx = \int \frac{\sin u}{x} \times \frac{x}{2}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin u\,du = -\frac{1}{2}\cos u + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2\ln 2x) + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(\ln 4x^2) + C$$

---

9 $$\int \sec^2 x \cos^3(\tan x)\,dx$$

الحل:

$$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x$$

$$\Rightarrow \sec^2 x\,dx = du$$

$$\int \sec^2 x \cos^3(\tan x)dx = \int \cos^3 u\,du$$

$$= \int \cos u \cos^2 u\,du$$

$$= \int \cos u\,(1 - \sin^2 u)\,du$$

$$v = \sin u \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \cos u$$

$$\Rightarrow \cos u\,dx = dv$$

$$\int \cos u\,(1 - \sin^2 u)du = \int (1 - v^2)dv$$

$$= v - \frac{1}{3}v^3 + C = \sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u + C$$

$$= \sin(\tan x) - \frac{1}{3}\sin^3(\tan x) + C$$

ملحوظة: يمكن إيجاد هذا التكامل بإعادة كتابته على الصورة:

$$\int \sec^2 x \cos(\tan x)\left(1 - \sin^2(\tan x)\right)dx$$

وبتعويض واحد فقط هو $u = \sin(\tan x)$.

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

10 $\int_{6}^{20} \frac{8x}{\sqrt{4x+1}}\, dx$

الحل:

$u = 4x+1 \Rightarrow 4dx = du$

$, \ 4x = u - 1$

$x = 20 \Rightarrow u = 81$

$x = 6 \Rightarrow u = 25$

$$\int_{6}^{20} \frac{8x}{\sqrt{4x+1}} dx = \int_{25}^{81} \frac{u-1}{2\sqrt{u}} du$$

$$= \int_{25}^{81} \left(\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \left(\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_{25}^{81}$$

$$= (243 - 9) - \left(\frac{125}{3} - 5\right) = \frac{592}{3}$$

11 $\int_{2}^{5} \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}\, dx$

الحل:

$u = \sqrt{x-1} \Rightarrow u^2 = x - 1$

$\Rightarrow 2udu = dx$

$x = 5 \Rightarrow u = 2$

$x = 2 \Rightarrow u = 1$

$$\int_{2}^{5} \frac{1}{1+\sqrt{x-1}} dx = \int_{1}^{2} \frac{2u}{1+u} du$$

$$= \int_{1}^{2} \left(2 - \frac{2}{u+1}\right) du$$

$$= (2u - 2\ln|u+1|)|_{1}^{2}$$

$$= (4 - 2\ln 3) - (2 - 2\ln 2)$$

$$= 2 - 2\ln\frac{2}{3}$$

12 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}\,dx$

الحل:

$u = 1 + \cos x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = -\sin x$

$\Rightarrow dx = \dfrac{du}{-\sin x}$

$x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$

$x = 0 \Rightarrow u = 2$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx$

$\displaystyle= \int_2^1 \frac{2\sin x\cos x}{u} \times \frac{du}{-\sin x}$

$\displaystyle= \int_2^1 -\frac{2(u-1)}{u}du$

$\displaystyle= \int_2^1 \frac{2-2u}{u}du = \int_1^2 \frac{2u-2}{u}du$

$\displaystyle= \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{u}\right)du$

$= (2u - 2\ln|u|)|_1^2$

$= (4 - 2\ln 2) - (2 - 0)$

$= 2 - 2\ln 2$

13 $\displaystyle\int_1^4 \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}}\,dx$

الحل:

$u = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow dx = 2\sqrt{x}du$

$x = 4 \Rightarrow u = 3$

$x = 1 \Rightarrow u = 2$

$\displaystyle\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}dx = \int_2^3 \frac{u^3}{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x}du$

$\displaystyle= \int_2^3 2u^3 du = \frac{1}{2}u^4\Big|_2^3 = \frac{81}{2} - \frac{16}{2}$

$= \dfrac{65}{2}$

---

14 $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$

الحل:

$x\sqrt{1+x} = 0 \Rightarrow x = 0\ , x = -1$

$\displaystyle A = -\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

$\displaystyle= \int_{-1}^{0} -x\sqrt{1+x}\,dx$

$u = 1 + x \Rightarrow dx = du$

$,\ x = u - 1$

$x = 0 \Rightarrow u = 1$

$x = -1 \Rightarrow u = 0$

$$A=\int_{-1}^{0}-x\sqrt{1+x}\,dx=\int_{0}^{1}-x\sqrt{u}\,du$$

$$=\int_{0}^{1}(1-u)\sqrt{u}\,du$$

$$=\int_{0}^{1}\left(u^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{3}{2}}\right)du=\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

---

15 $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3}\cos^{2}x\sin^{3}x\,dx$

الحل:

$$u=\cos x\Rightarrow\frac{du}{dx}=-\sin x$$

$$\Rightarrow dx=\frac{du}{-\sin x}$$

$$x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow u=\frac{1}{2}$$

$$x=0\Rightarrow u=1$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos^{2}x\sin^{3}x\,dx$$

$$=\int_{1}^{\frac{1}{2}}u^{2}\sin^{3}x\times\frac{du}{-\sin x}$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}u^{2}(1-u^{2})\,du$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(u^{2}-u^{4})\,du$$

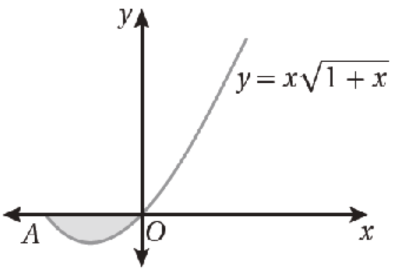
$$=\left(\frac{1}{3}u^{3}-\frac{1}{5}u^{5}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{160}\right)=\frac{47}{480}$$

---

16 يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران: $f(x)=x\sqrt{x+1}$.

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في هذا الشكل.



الحل:

$$x\sqrt{1+x}=0\Rightarrow x=0\ ,x=-1$$

$$A=-\int_{-1}^{0}f(x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}-x\sqrt{1+x}\,dx$$

$$u = 1 + x \Rightarrow dx = du$$

$$,\ x = u - 1$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow u = 0$$

$$A = \int_{-1}^{0} -x\sqrt{1+x}\,dx = \int_{0}^{1} -x\sqrt{u}\,du$$

$$= \int_{0}^{1} (1-u)\sqrt{u}\,du$$

$$= \int_{0}^{1} \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}\right) du$$

$$= \left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

في كلٍّ ممّا يأتي المشـــتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

17 $f'(x) = 16\sin x\ \cos^3 x$; $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

الحل:

$$f(x) = \int 16\sin x\ \cos^3 x\,dx$$

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$f(x) = \int 16\sin x\ u^3 \times \frac{du}{-\sin x}$$

$$= \int -16\,u^3\,du = -4u^4 + C$$

$$= -4\cos^4 x + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + C$$

$$0 = -1 + C \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = -4\cos^4 x + 1$$

18 $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$; (2, 1)

الحل:

$$f(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}dx$$

$$u = x^2 + 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$f(x) = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$= u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+5} + C$$

$$f(2) = 3 + C$$

$$1 = 3 + C \Rightarrow C = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2+5} - 2$$

19 يتحرَّك جُسَــيْم في مسار مستقيم، وتعطى سـرعته المتجهة بالاقتران:

$$v(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^{3/2}}$$

حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 4 m، فأجد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية.

الحل:

$$s(t) = \int \frac{-2t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$u = 1 + t^2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2t \Rightarrow dt = \frac{du}{2t}$$

$$s(t) = \int \frac{-2t}{u^{\frac{3}{2}}} \times \frac{du}{2t} = \int -u^{-\frac{3}{2}}\,du$$

$$= 2u^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + C$$

$$s(0) = 2 + C =$$

$$4 = 2 + C \Rightarrow C = 2$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + 2$$

التكامل بالكسور الجزيئية

الدرس الثالث

التكامل بالكسور الجزيئية

استعمال تجزئة المقادير النسبية لايجاد تكامل اقترانات نسبية

$$\frac{x+14}{(x-4)(x+2)}=\frac{3}{x-4}+\frac{-2}{x+2}$$

كسر جزئي كسر جزئي

حالات التكامل بالكسور الجزيئية

1. عوامل المقام كثيرات حدود خطية مختلفة .
2. عوامل المقام كثيرات حدود خطية احدها مكرر .
3. عوامل المقام كثيرات حدود احدها تربيعي غير قابل للتحليل (مميزة سالب) وغير مكرر

الحالة الأولى:
عوامل المقام كثيرات حدود خطية مختلفة

المقام يحلل الى عوامل خطية مختلفة وكانت درجة البسط أقل من درجة المقام

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}\ \ldots\ldots$$

مثال1

أجد $\int \frac{x-5}{x^2-x-2}dx$

الحل:

نجزء المقدار النسبي

$$\frac{x-5}{x^2-x-2}=\frac{x-5}{(x-2)(x+1)}$$

$$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$$

توحيد مقامات

$$A(x-2)+B(x+1)=x-5$$

بتعويض $x=-1$

$$-3A=-6\longrightarrow A=2$$

بتعويض $x=2$

$$3B=-3\longrightarrow B=-1$$

$$\int \frac{x-5}{x^2-x-2}dx=\int \frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-2}dx$$

$$= 2\ln|x+1| - \ln|x-2| + C$$

$$= 2\ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{(x+1)^2}{x-2}\right| + C$$

مثال2

أتحقَّق من فهمي صفحة 49

أجد كلاً من التكاملين الآتيين :

$a)\ \int \frac{x-7}{x^2-x-6}dx$

الحل:

$$\frac{x-7}{x^2-x-6} = \frac{x-7}{(x-3)(x+2)}$$

$$= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$A(x+2) + B(x-3) = x-7$$

نعوض $x = -2$

$-5B = -9 \qquad B = \frac{9}{5}$

$x = 3$

$5A = -4 \qquad A = \frac{-4}{5}$

$$\int \frac{\frac{-4}{5}}{x-3} + \frac{\frac{9}{5}}{x+2}$$

$$= \frac{-4}{5}\ln|x-3| + \frac{9}{5}\ln|x+2| + C$$

$b)\ \int \frac{3x-1}{x^2-1}dx$

الحل:

$$\frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$A(x+1) + B(x-1) = 3x-1$$

$x = 1$

$2A = 2 \qquad A = 1$

$x = -1$

$-2B = -4 \qquad B = 2$

$$\int \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$

$$= \ln|x-1| + 2\ln|x+1| + C$$

الحالة الثانية:

عوامل المقام كثيرات حدود خطية احدها مكرر

اذا كان التحليل الكامل لمقام مقدار نسبي يحوي عاملاً خطياً مكرر n من المرات فإن هذا العامل يقابل n من الكسور الجزئية

$$\frac{A_1}{(ax+b)^1} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} \cdots \frac{An}{(ax+b)^n}$$

مثال1

أجد $\int \frac{3x^2+2}{x^3-2x^2+x}dx$

الحل:

$$\frac{3x^2+2}{x(x^2-2x+1)} = \frac{3x^2+2}{x(x-1)^2}$$

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1} = \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx = 3x^2+2$$

$\Leftarrow x = 0$

$A = 2$

$x = 1$

$0 + 0 + C = 5$

$C = 5 \Leftarrow$

نعوض أي عدد حقيقي لايجاد قيمة B وليكن $x = -1$

$A = 2$

$C = 5$

$$2(-2)^2 + B(-1)(-2) + 5(-1) = 3 + 2$$

$$8 + 2B - 5 = 5$$

$$2B = 10 - 8 = 2 \longrightarrow B = 1$$

$$= \int \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}$$

$$= \int \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} + 5(x-1)^{-2}\,dx$$

$$= 2\ln|x| + \ln|x-1| - 5(x-1)^{-1} + C$$

$$= 2\ln|x| + \ln|x-1| - \frac{5}{(x-1)} + C$$

مثال2

أتحقَّق من فهمي صفحة 51

أجد كلاً من التكاملين الآتيين :

$$a)\ \int \frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2}dx$$

الحل:

$$= \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$A(x-1)^2 + B(x-1)(2x-1) + C(2x-1) = x + 4$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}A = \frac{1}{2} + 4$$

$$A = \frac{9}{\cancel{2}} \times \cancel{4} = 18$$

$$x = 1$$

$$\boxed{C = 5}$$

$C = 5 \qquad A = 18 \qquad x = 0$

$$18 + B \pm 5 = 4$$

$$B + 13 = 4$$

$$B = -9$$

$$= \int \frac{18}{2x-1} + \frac{-9}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{18}{2x-1} - \frac{9}{x-1} + 5(x-1)^{-2}\,dx$$

$$9\ln|2x-1| - 9\ln|x-1| - 5(x-1)^{-1}$$

$$= 9\ln|2x-1| - 9\ln|x-1| - \frac{5}{(x-1)}$$

مثال 3

أجد كلا من التكاملات الآتية :

1) $\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}dx$

الحل:

$= \frac{x^2+1}{x^2(x+4)}$

$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4}$

$= Ax(x+4) + B(x+4) + Cx^2$

$= x^2+1$

$x = 0 \longrightarrow 4B = 1 \qquad B = \frac{1}{4}$

$x = -4 \qquad 16C = 17 \qquad C = \frac{17}{16}$

$x = -1 \qquad B = \frac{1}{4} \qquad C = \frac{17}{16}$

$-3A + \frac{1}{4} \times 3 + \frac{17}{16}(-1)^2 = 2$

$-3A + \frac{3\times 4}{4 \times 4} + \frac{17}{16} = 2$

$-3A + \frac{29}{16} = 2$

$\frac{-3A}{-3} = \frac{\frac{3}{16}}{-3}$

$A = \frac{-3}{48} = -\frac{1}{16}$

$= \int \frac{-\frac{1}{16}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{17}{16}}{x+4}$

b) $\int \frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x}dx$

الحل:

$\frac{x^2-2x-4}{x(x^2-4x+4)} = \frac{x62-2x-4}{x(x-2)^2}$

$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$

$= A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$

$= x^2 - 2x - 4$

$x = 0 \longrightarrow$

$4A = -4 \qquad A = -1$

$x = 2$

$2C = 4 - 4 - 4 = -4$

$C = -2$

نعوض $x = -1$

$A = -1$ ، $C = -2$

$-9 + 3B + 2 = 1 + 2 - 4$

$3B - 7 = -1$

$3B = 6 \longrightarrow B = 2$

$= \int \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-2} + \frac{-2}{(x-2)^2}$

$= \int \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-2} - 2(x-2)^{-2}$

$-\ln|x| + 2\ln|x-2| + 2(x-2)^{-1}$

$= -\ln|x| + 2\ln|x-2| + \frac{2}{x-2} + C$

$$= \int \frac{-\frac{1}{16}}{x} + \frac{1}{4}x^{-2} + \frac{\frac{17}{16}}{x+4}$$

$$\frac{-1}{16}\ln|x| - \frac{1}{4}x^{-1} + \frac{17}{16}\ln|x+4|$$

$$\frac{-1}{16}\ln|x| - \frac{1}{4x} + \frac{17}{16}\ln|x+4| + C$$

---

2) $\displaystyle\int \frac{x^2 + x - 6}{x^3 + 5x^2 + 2x - 8}\,dx$

الحل:

نحلل المقام باستخدام القسمة التركيبية

نجرب

$x = 1$

$1 + 5 + 2 - 8 = 0$

	x^3	x^2	x	ثابت
$\boxed{1}$	1	5	2	-8
		1	6	8
	1	6	8	0

$(x-1)(x^2 + 6x + 8)$

$(x-1)(x+2)(x+4)$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+4}$$

$$= A(x+2)(x+4) + B(x-1)(x+4) + C(x-1)(x+2)$$

$$= x^2 + x - 6$$

$x = 1 \Longrightarrow 15A = -4$

$$A = \frac{-4}{15}$$

$x = -4$

$C(-5)(-2) = 16 - 4 - 6$

$$10C = 6 \longrightarrow C = \frac{6}{10} - \frac{-3}{5}$$

$x = -2$

$0 + B(-3)(2) + 0 = -4$

$-6B = -4$

$$B = \frac{-4}{-6} \longrightarrow B = \frac{2}{3}$$

$$\int \frac{\frac{-4}{15}}{x-1} + \frac{\frac{2}{3}}{x+2} - \frac{\frac{3}{5}}{x+4}$$

$$\frac{-4}{15}\ln|x-1| + \frac{2}{3}\ln|x+2| - \frac{3}{5}\ln|x+4| + C$$

---

3) $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}$

الحل:

نحلل المقام باستخدام القسمة التركيبية نجرب الاصفار النسبية

$x = 3$

$27 - 81 + 81 - 27 = 0$

أحد عوامله $x - 3$

	x^3	x^2	x	ثابت
$\boxed{3}$	1	-9	27	-27
		3	-18	27
	1	-6	9	0

$(x-3)(x^2 - 6x + 9)$

$(x-3)(x-3)^2$

$$= \int \frac{2x^2 + 1}{(x-3)(x-3)^2}$$

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{(x-3)^3}$$

$$A(x-3)^2 + B(x-3) + C = 2x^2 + 1$$

$$x = 3 \longrightarrow C = 19$$

$$x = 0 \longrightarrow 9A - 3B + 19 = 1$$

$$9A - 3B = -18 \cdots ①$$

$$x = 1 \longrightarrow 4A - 2B + 19 = 3$$

$$4A - 2B = -16 \cdots ②$$

بالحذف الأول $\times -2$

الثانية $\times 3$

$$-18A + 6B = +36$$

$$\underline{12A - 6B = -48}$$

$$-6A = -12 \longrightarrow A = 2$$

بالتعويض

$$9 \times 2 - 3B = -18$$

$$-3B = -18 - 18 = -36$$

$$B = \frac{-36}{-3} = 12$$

$$\int \frac{2}{x-3} + \frac{12}{(x-3)^2} + \frac{19}{(x-3)^3}$$

$$= \int \frac{2}{x-3} + 12(x-3)^{-2} + 19(x-3)^{-3}$$

$$2\ln|x-3| - \frac{12}{(x-3)} - \frac{19}{2}(x-3)^{-2} + C$$

الحالة الثالثة:

عوامل المقام كثيرات حدود احدها تربيعي غير قابل للتحليل وغير مكرر

اذا كان المقام يحوي عاملاً تربيعياً غير مكرر ولا يمكن تحليله (مميزه سالب) يكون العامل التربيعي كسر جزئي بسطه كثير حدود خطي في صورة $Ax + B$ ومقامه العامل التربيعي نفسه .

مثال 1

أجد $\displaystyle\int \frac{5x^2 - 4x + 2}{(x-1)(x^2+2)}$

الحل:

$$= \frac{5x^2 - 4x + 2}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2}$$

$$5x^2 - 4x + 2 = A(x^2 + 2) + (Bx + C)(x - 1)$$

$$x = 1 \longrightarrow 3 = 3A \Longrightarrow A = 1$$

$x = 0$ ، $A = 1$

$$\Longrightarrow 2 = 2 + -C$$

$$\Longrightarrow C = 0$$

بتعويض $x = 2$ ، $A = 1$ ، $C = 0$

$$20 - 8 + 2 = 6 + 2B$$

$$8 = 2B \longrightarrow B = 4$$

$$\int \frac{1}{x-1} + \frac{4x}{x^2+2} dx$$

$$= \ln|x-1| + 2\ln|x^2+2| + C$$

مثال2

أتحقَّق من فهمي صفحة 52

a) $\int \frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)}\,dx$

الحل:

$= \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$

$3x+4 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-3)$

$x = 3 \longrightarrow$

$13 = 13A \longrightarrow A = 1$

$A = 1 \qquad x = 0$

$4 = 4 + C(-3)$

$C = 0$

$A = 1 \qquad C = 0 \qquad x = 1$

$7 = 5 + B(-2)$

$2 = -2B \qquad B = -1$

$= \int \frac{1}{x-3} + \frac{-x}{x^2+4}\,dx$

$\ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C$

b) $\int \frac{7x^2 - x + 1}{x^3+1}\,dx$

الحل:

$= \frac{7x^2 - x + 1}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$

$7x^2 - x + 1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx+C)(x+1)$

$x = -1$

$7 + 1 + 1 = A(1+1+1)$

$9 = 3A \longrightarrow A = 3$

$A = 3 \qquad x = 0 \longrightarrow$

$1 = 3 + C \longrightarrow C = -2$

$A = 3 \qquad C = -2 \qquad x = 1$

$7 = 3 + (B-2)(2)$

$4 = 2B - 4 \longrightarrow B = 4$

$\int \frac{3}{x+1} + \frac{4x-2}{x^2-x+1}\,dx$

$= 3\ln|x+1| + 2\ln|x^2 - x + 1| + C$

مثال3

جد $\int \frac{x^2-3}{x^3+3x}$

الحل:

$= \frac{x^2-3}{x(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$

$x^2 - 3 = A(x^2+3) + x(Bx+C)$

$x = 0 \longrightarrow -3 = 3A \longrightarrow A = -1$

$A = -1 \qquad x = -1$

$-2 = (-1)(4) + (-1)(-B+C)$

$-2 = -4 + B - C$

$B - C = 2 \cdots ①$

$A = -1 \qquad x = 1$

$-2 = -4 + B + C$

$B + C = 2 \cdots ②$

$B - C = 2 \cdots ①$

$2B = 4 \longrightarrow B = 2$

$\longrightarrow 2 - C = 2 \qquad C = 0$

$$\int \frac{-1}{x} + \frac{2x}{x^2+3}$$

$-\ln|x| + \ln|x^2+3| + C$

الحالة الرابعة:

درجة كثيرات الحدود في البسط مساوية لدرجة كثيرات الحدود في المقام أو أكبر منها

نستخدم القسمة الطويلة أو القسمة التركيبية

اذا كان $\frac{f(x)}{g(x)}$ اقتراناً نسبياً فيه درجة $f(x)$ أكبر من أو تساوي درجة $g(x)$ وكان ناتج القسمة $q(x)$ وباقي القسمة $r(x)$ فإن

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

مثال1

أجد $\int \frac{3x^4-2}{x^2-1} dx$

الحل: قسمة طويلة

$3x^2 + 3$

$x^2 - 1 \,\overline{)\, 3x^4 - 1}$

$\underline{-3x^4 \pm 3x^2}$

$3x^2 - 1$

$\underline{-3x^2 \pm 3}$

2

$$\int \frac{3x^4-1}{x^2-1} dx = \int 3x^2 + 3 + \frac{2}{x^2-1}$$

كسور جزئية

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$2 = A(x+1) + B(x-1)$

$x = 12 = 2A \longrightarrow A = 1$

$x = -1 \longrightarrow 2 = -2B \longrightarrow B = -1$

$$= \int 3x^2 + 3 + \int \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}$$

$= x^3 + 3x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C$

مثال 2

أتحقّق من فهمي صفحة 53

أجد كلاً من التكاملين الآتيين :

$$a)\ \int \frac{4x^3-5}{2x^2-x-1}\,dx$$

الحل: قسمة طويلة

$$\begin{array}{r|l} & 2x+1 \\ \hline 2x^2-x-1 & 4x^3-5 \\ & \underline{-4x^3 \pm 2x^2 \pm 2x} \\ & 2x^2+2x-5 \\ & \underline{-2x^2 \pm x \pm 1} \\ & 3x-4 \end{array}$$

$$\int 2x+1+\frac{3x-4}{2x^2-x-1}$$

كسور جزئية

$$\frac{3x-4}{2x^2-x-1}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-1}$$

$$3x-4=A(x-1)+B(2x+1)$$

$$x=1 \longrightarrow -1=3B \longrightarrow B=\frac{-1}{3}$$

$$x=\frac{-1}{2}=\frac{-3}{2}-4=A\left(\frac{-1}{2}-1\right)$$

$$\frac{-11}{2}=\frac{-3}{2}A \longrightarrow A=\frac{\frac{-11}{\cancel{2}}}{\frac{-3}{\cancel{2}}}$$

$$A=\frac{11}{3}$$

$$=\int 2x+1+\frac{\frac{11}{3}}{2x+1}+\frac{\frac{-1}{3}}{x-1}$$

$$x^2+x+\frac{11}{6}\ln|2x+1|-\frac{1}{3}\ln|x-1|$$

$$b)\ \int \frac{x^2+x-1}{x^2-x}\,dx$$

الحل: درجة البسط = درجة المقام

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2-x & x^2+x-1 \\ & \underline{-2x^2 \pm x} \\ & 2x-1 \end{array}$$

$$\int 1+\frac{2x-1}{x^2-x}$$

كسور جزئية

$$=\frac{2x-1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}$$

$$2x-1=A(x-1)+Bx$$

$$x=1 \longrightarrow 1=B$$

$$x=0 \longrightarrow -1=-A$$

$$\longrightarrow A=1$$

$$\int 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$$

$$=x+\ln|x|+\ln|x-1|+C$$

مثال 3

جد $\int \frac{2x^4+6x^2+2}{x^3+x}$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} & 2x \\ \hline x^3+x & 2x^4+6x^2+2 \\ & \underline{-2x^4 \mp 2x^2} \\ & 4x^2+2 \end{array}$$

التكامل بالكسور الجزئية لتكاملات محدودة

مثال 1

أجد $\int_0^2 \frac{x-2}{x^2+5x+4}dx$

الحل:

$$\frac{x-2}{(x+1)(x+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4}$$

$x - 2 = A(x+4) + B(x+1)$

$x = -1$

$\rightarrow -3 = 3A \rightarrow A = -1$

$x = -4$

$\rightarrow -6 = -3B \rightarrow B = 2$

$$\int_0^2 \frac{x-2}{x^2+5x+4}dx = \int_0^2 \frac{-1}{x+4} + \frac{2}{x+4}dx$$

$$(-\ln|x+1| + 2\ln|x+4|)\Big|_0^2$$

$(-\ln 3 + 2\ln 6) - (-\ln 1 + 2\ln 4)$

$= \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

$$\int 2x + \frac{4x^2+2}{x^3+x}$$

كسور جزئية

$$\frac{4x^2+2}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2+1}$$

$4x^2 + 2 = A(x^2+1) + x(Bx+C)$

$x = 0 \rightarrow 2 = A$

$x = 1 \qquad A = 2$

$\rightarrow 6 = 4 + B + C$

$B + C = 2 \cdots ①$

$x = -1 \qquad A = 2$

$6 = 4 + B - C$

$B - C = 2 \cdots ②$

بحل المعادلتين

$B = 2$

$2 - C = 2 \rightarrow C = 0$

$$\int 2x + \frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2+1}$$

$x^2 + 2\ln|x| + \ln|x^2+1|$

مثال2

أتحقَّق من فهمي صفحة 54

أجد كلاً من التكاملين الآتيين :

$$a)\ \int_3^4 \frac{2x^3+x^2-2x-4}{x^2-4}\,dx$$

الحل: درجة البسط > درجة المقام

قسمة طويلة

$$\begin{array}{r|l} & 2x+1 \\ \hline x^2-4 & 2x^3+x^2-2x-4 \\ & \underline{-2x^3 \pm 8x} \\ & \cancel{x^2}+6x-\cancel{4} \\ & \underline{\cancel{x^2} \pm \cancel{4}} \\ & 6x \end{array}$$

$$= \int_3^4 2x+1+\int_3^4 \frac{6x}{x^2-4}\,dx$$

كسور جزئية

$$\frac{6x}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

$$6x = A(x+2)+B(x-2)$$

$$x = 2$$

$$12 = 4A \longrightarrow A = 3$$

$$x = -2$$

$$-12 = -4B \longrightarrow B = 3$$

$$= \int_3^4 2x+1+\frac{3}{x-2}+\frac{3}{x+2}$$

$$\left(x^2+x+3\ln|x-2|+3\ln|x+2|\right)\Big|_3^4$$

$$(20+3\ln 2+3\ln 6)$$

$$-(12+3\ln 1+3\ln 5)$$

$$= 8+3\ln 12-3\ln 5$$

$$= 8+3(\ln 12-\ln 5)$$

$$= 8+3\ln\left(\frac{12}{5}\right)$$

$$b)\ \int_5^6 \frac{3x-10}{x^2-7x+12}$$

الحل:

$$\frac{3x-10}{(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4}$$

$$3x-10 = A(x-4)+B(x-3)$$

$$x = 3 \longrightarrow -1 == A \longrightarrow A = 1$$

$$\int_5^6 \frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-4}$$

$$= \left(\ln|x-3|+2\ln|x-4|\right)\Big|_5^6$$

$$= (\ln 3+2\ln 2)-(\ln 2+2\ln 1)$$

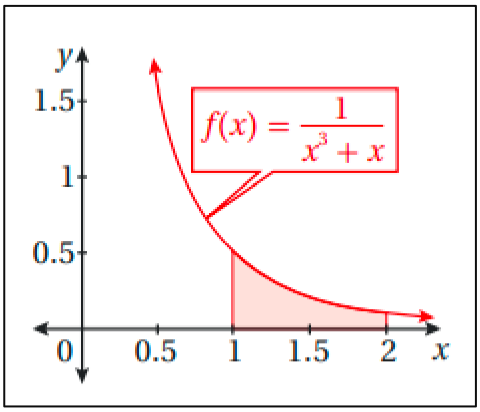
$$= \ln 3+2\ln 2-\ln 2+0$$

$$= \ln 3+\ln 2 = \ln 6$$

مثال3 مسألة اليوم

يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران

$f(x)=\dfrac{1}{x^3+x}$ ، أجد مساحة المنطقة المظللة :



الحل:

$$A=\int_1^2 \frac{1}{x^3+x}dx$$

$$=\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)}dx$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$1=A(x^2+1)+(Bx+C)x$$

$$x=1\longrightarrow 1=2A+B+C$$

$$x=0\longrightarrow A=1$$

بالتعويض

$$\boxed{B+C=-1}\cdots ①$$

$$x=-1\longrightarrow 2A+B-C=1$$

$$\longrightarrow 1=2+B-C\cdots ②$$

بحل المعادلتين

$$B=-1 \qquad\qquad C=0$$

$$=\int_1^2 \frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}$$

$$\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$$

التكامل بالكسور الجزئية والتكامل بالتعويض

مثال1

أجد كلاً من التكاملين الآتيين :

$$1)\int \frac{e^x}{e^{2x}-e^x}$$

الحل : التكامل بالتعويض

$$u=e^x \qquad\qquad du=e^x\,dx$$

$$=\int \frac{u}{u^2-u}\times\frac{du}{u}$$

$$=\int \frac{1}{u^2-u}du$$

تكامل كسور جزئية

$$\frac{1}{u(u-1)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u-1}$$

$$1=A(u-1)+Bu$$

$$u=1\longrightarrow B=1$$

$$u=0 \qquad A=-1$$

$$\int \frac{-1}{u}+\frac{1}{u-1}du$$

$$=-\ln|u|+\ln|u-1|$$

$$= -\ln|e^x| + \ln|e^x - 1| + C$$

$$= -x + \ln|e^x - 1| + C$$

---

2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x-16}\,dx$

الحل:

① التكامل بالتعويض

$u = \sqrt{x} \qquad u^2 = x$

$2u\,du = dx$

$$\int \frac{u}{u^2-16} \times 2u\,du$$

$$= \int \frac{2u^2}{u^2-16}\,du$$

② درجة البسط = درجة المقام

قسمة طويلة

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline u^2-16 & 2u^2 \\ & -2 \pm 32 \\ \hline & 32 \end{array}$$

$$= \int 2 + \frac{32}{u^2-16}$$

③ كسور جزئية

$$\frac{32}{u^2-16} = \frac{A}{u-4} + \frac{B}{u+4}$$

$32 = A(u+4) + B(u-4)$

$u = 4 \longrightarrow 32 = 8A$

$\longrightarrow A = 4$

$u = -4 \longrightarrow 32 = -8B$

$\longrightarrow B = -4$

$$= \int 2 + \frac{4}{u-4} - \frac{4}{u+4}$$

$$= 2u + 4\ln|u-4| + 4\ln|u+4|$$

$$= 2\sqrt{x} + 4\ln|\sqrt{x}-4| + 4\ln|\sqrt{x}+4| + C$$

مثال2 أتحقَّق من فهمي صفحة 57

أجد كلاً من التكاملين الآتيين :

a) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x - 1}$

الحل:

① التكامل بالتعويض

$u = \tan x \qquad du = \sec^2 2$

$$\int \frac{\cancel{\sec^2 x}}{u^2-1} \times \frac{du}{\cancel{\sec^2 x}}$$

$$\int \frac{1}{u^2-1}\,du$$

② كسور جزئية

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}$$

$1 = A(u+1) + B(u-1)$

$u = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{2}$

$u = -1 \longrightarrow B = \frac{-1}{2}$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{u-1} - \frac{\frac{1}{2}}{u+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u+1|$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\tan x - 1| - \frac{1}{2}\ln|\tan x + 1|$$

$$b)\ \int \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+4)}\,dx$$

الحل:

التكامل بالتعويض

$$u = e^x \qquad du = e^x\,dx$$

$$\int \frac{\cancel{u}}{(u-1)(u+4)} \times \frac{du}{\cancel{e^x}}$$

$$= \int \frac{1}{(u+4-1)}\,du$$

② كسور جزئية

$$\frac{1}{(u-1)(u+4)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+4}$$

$$1 = A(u+4) + B(u-1)$$

$$u = 1 \qquad A = \frac{1}{5}$$

$$u = -4 \qquad B = \frac{-1}{5}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{5}}{u-1} - \frac{\frac{1}{5}}{u+4}$$

$$= \frac{1}{5}\ln|u-1| - \frac{1}{5}\ln|u+4|$$

$$= \frac{1}{5}\ln|e^x-1| - \frac{1}{5}\ln|e^x+4|$$

مثال 3

جد $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}\,dx$

الحل:

① التكامل بالتعويض

$$u = \sqrt[3]{x} \longrightarrow u^3 = x$$

$$3u^2\,du = dx$$

$$\int \frac{u-1}{u^2-1} \times 3u^2\,du$$

$$= \int \frac{3u^3-3u^2}{u^2-1}$$

قسمة طويلة

$$3u-3$$
$$u^2-1 \;\big)\; 3u^3-3u^2$$
$$-3u^3 \pm 3u$$
$$-3u^2+3u$$
$$\pm 3u^2 \mp 3$$
$$3u-3$$

$$= \int 3u-3+\frac{3u-3}{u^2-1}$$

$$= \int 3u-3+\frac{3(\cancel{u-1})}{(\cancel{u-1})(u+1)}$$

$$= \frac{3u^2}{2} - 3u + 3\ln|u+1|$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x}\right) - 3\sqrt[3]{x} + 3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|$$

مثال4

جد $\displaystyle\int \frac{\tan x}{25-(\ln\cos x)^2}$

الحل:

$u=\ln\cos x$

$du=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x\,dx$

$\displaystyle\int \frac{\tan x}{25-u^2}\times\frac{du}{\cancel{-\tan x}}$

$=\displaystyle\int \frac{-1}{25-u^2}du$

كسور جزئية

$\dfrac{-1}{25-u^2}=\dfrac{A}{5-u}+\dfrac{B}{5+u}$

$-1=A(5+u)+B(5-u)$

$u=5\longrightarrow A=\dfrac{-1}{10}$

$u=-5\longrightarrow B=\dfrac{1}{10}$

$=\displaystyle\int \frac{\frac{-1}{10}}{5-u}-\frac{\frac{1}{10}}{5+u}$

$=\dfrac{1}{10}\ln|5-u|-\dfrac{1}{10}\ln|5+u|$

$=\dfrac{1}{10}\ln|5-\ln\cos x|=\dfrac{1}{10}\ln|5+\ln\cos x|$

مثال5

جد $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+3\sin x-\cos 2x}$

الحل:

$=\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+3\sin x-(1-2\sin^2 x)}$

$=\displaystyle\int \frac{\cos x}{\cancel{1}+3\sin x-\cancel{1}+2\sin^2 x}$

$=\displaystyle\int \frac{\cos x}{3\sin x+2\sin^2 x}$

$u=\sin x \qquad du=\cos x\ dx$

$=\displaystyle\int \frac{\cancel{\cos x}}{3u+2u^2}\times\frac{du}{\cancel{\cos x}}$

$=\displaystyle\int \frac{1}{3u+2u^2}$

كسور جزئية

$\dfrac{1}{u(3+2u)}=\dfrac{A}{u}+\dfrac{B}{3+2u}$

$1=A(3+2u)+Bu$

$u=0\longrightarrow A=\dfrac{1}{3}$

$u=\dfrac{-3}{2}\longrightarrow B=\dfrac{-2}{3}$

$=\displaystyle\int \frac{\frac{1}{3}}{u}-\frac{\frac{2}{3}}{3+2u}$

$=\dfrac{1}{3}\ln|u|-\dfrac{2}{6}\ln|3+2u|+C$

$=\dfrac{1}{3}\ln|\sin x|-\dfrac{1}{3}\ln|3+2\sin x|+C$

مثال6

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 3e^x - 4}$$

الحل:

$$u = e^x \longrightarrow du = e^x\,dx$$

$$\int \frac{u^3}{u^2 - 3u - 4} \times \frac{1}{e^x}$$

$$\int \frac{u^3}{u^2 - 3u - 4} \times \frac{1}{\cancel{u}}\,du$$

$$\int \frac{u^2}{u^2 - 3u - 4}$$

قسمة طويلة

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline u^2 - 3u - 4 & \cancel{u^2} \\ & \underline{-\cancel{u^2} \pm 3u \pm 4} \\ & 3u + 4 \end{array}$$

$$\int 1 + \frac{3u + 4}{u^2 - 3u - 4}$$

كسور جزئية

$$\frac{3u + 4}{(u - 4)(u + 1)} = \frac{A}{u - 4} + \frac{B}{u + 1}$$

$$3u + 4 = A(u + 1) + B(u - 4)$$

$$u = -1 \longrightarrow B = \frac{-1}{5}$$

$$u = 4 \longrightarrow A = \frac{16}{5}$$

$$\int 1 + \frac{\frac{16}{5}}{u - 4} \; \frac{-\frac{1}{5}}{u + 1}$$

$$= u + \frac{16}{5}\ln|u - 4| - \frac{1}{5}\ln|u + 1|$$

$$= e^x + \frac{16}{5}\ln|e^x - 4| - \frac{1}{5}\ln|e^x + 1| + C$$

الدرس الثالث

التكامل بالكسور الجزئية

أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{x-10}{x(x+5)}\,dx$

الحل:

$$\frac{x-10}{x(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5}$$
$$\Rightarrow x-10 = A(x+5) + Bx$$
$$x = 0 \Rightarrow A = -2$$
$$x = -5 \Rightarrow B = 3$$
$$\int \frac{x-10}{x(x+5)}dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{3}{x+5}\right)dx$$
$$= -2\ln|x| + 3\ln|x+5| + C$$

2) $\int \frac{2}{1-x^2}\,dx$

الحل:

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{2}{(1-x)(1+x)}$$
$$= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$$
$$\Rightarrow 2 = A(1+x) + B(1-x)$$
$$x = 1 \Rightarrow A = 1$$
$$x = -1 \Rightarrow B = 1$$
$$\int \frac{2}{1-x^2}dx = \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx$$
$$= -\ln|1-x| + \ln|1+x| + C$$
$$= \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

3) $\int \frac{4}{(x-2)(x-4)}\,dx$

الحل:

$$\frac{4}{(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4}$$
$$\Rightarrow 4 = A(x-4) + B(x-2)$$
$$x = 2 \Rightarrow A = -2$$
$$x = 4 \Rightarrow B = 2$$
$$\int \frac{4}{(x-2)(x-4)}dx = \int \left(\frac{-2}{x-2} + \frac{2}{x-4}\right)dx$$
$$= -2\ln|x-2| + 2\ln|x-4| + C$$
$$= 2\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right| + C$$

4 $\int \dfrac{3x+4}{x^2+x}\,dx$

الحل:

$$\frac{3x+4}{x^2+x}=\frac{3x+4}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$$

$$\Rightarrow 3x+4=A(x+1)+Bx$$

$$x=0\Rightarrow A=4$$

$$x=-1\Rightarrow B=-1$$

$$\int\frac{3x+4}{x^2+x}dx=\int\left(\frac{4}{x}+\frac{-1}{x+1}\right)dx$$

$$=4\ln|x|-\ln|x+1|+C$$

---

5 $\int \dfrac{x^2}{x^2-4}\,dx$

الحل:

$$\int\frac{x^2}{x^2-4}dx=\int\left(1+\frac{4}{x^2-4}\right)dx$$

$$\frac{4}{x^2-4}=\frac{4}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

$$\Rightarrow 4=A(x+2)+B(x-2)$$

$$x=2\Rightarrow A=1$$

$$x=-2\Rightarrow B=-1$$

$$\int\frac{x^2}{x^2-4}dx=\int\left(1+\frac{1}{x-2}+\frac{-1}{x+2}\right)dx$$

$$=x+ln|x-2|-ln|x+2|+C$$

$$=x+ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$$

6 $\int \dfrac{3x-6}{x^2+x-2}\,dx$

الحل:

$$\frac{3x-6}{x^2+x-2}=\frac{3x-6}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$$

$$\Rightarrow 3x-6=A(x-1)+B(x+2)$$

$$x=-2\Rightarrow A=4$$

$$x=1\Rightarrow B=-1$$

$$\int\frac{3x-6}{x^2+x-2}dx=\int\left(\frac{4}{x+2}+\frac{-1}{x-1}\right)dx$$

$$=4\ln|x+2|-\ln|x-1|+C$$

---

7 $\int \dfrac{4x+10}{4x^2-4x-3}\,dx$

الحل:

$$\frac{4x+10}{4x^2-4x-3}=\frac{4x+10}{(2x-3)(2x+1)}$$

$$=\frac{A}{2x-3}+\frac{B}{2x+1}$$

$$\Rightarrow 4x+10=A(2x+1)+B(2x-3)$$

$$x=\frac{3}{2}\Rightarrow A=4$$

$$x=-\frac{1}{2}\Rightarrow B=-2$$

$$\int\frac{4x+10}{4x^2-4x-3}dx=\int\left(\frac{4}{2x-3}+\frac{-2}{2x+1}\right)dx$$

$$=2\ln|2x-3|-\ln|2x+1|+C$$

8 $$\int \frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6}\,dx$$

الحل:

$$\frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6} = \frac{2x^2+9x-11}{(x-2)(x+1)(x+3)}$$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}$$

$$\Rightarrow 2x^2+9x-11$$

$$= A(x+1)(x+3) + B(x-2)(x+3) + C(x-2)(x+1)$$

$$x = 2 \Rightarrow A = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow B = 3$$

$$x = -3 \Rightarrow C = -2$$

$$\int \frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+1} + \frac{-2}{x+3}\right)dx$$

$$= \ln|x-2| + 3\ln|x+1| - 2\ln|x+3| + C$$

---

9 $$\int \frac{4x}{x^2-2x-3}\,dx$$

الحل:

$$\frac{4x}{x^2-2x-3} = \frac{4x}{(x-3)(x+1)}$$

$$= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

$$\Rightarrow 4x = A(x+1) + B(x-3)$$

$$x = 3 \Rightarrow A = 3$$

$$x = -1 \Rightarrow B = 1$$

$$\int \frac{4x}{x^2-2x-3}\,dx =$$

$$\int \left(\frac{3}{x-3} + \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= 3\ln|x-3| + \ln|x+1| + C$$

10 $$\int \frac{8x^2-19x+1}{(2x+1)(x-2)^2}\,dx$$

الحل:

$$\frac{8x^2-19x+1}{(2x+1)(x-2)^2}$$

$$= \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow 8x^2-19x+1$$

$$= A(x-2)^2 + B(2x+1)(x-2) + C(2x+1)$$

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow C = -1$$

$$x = 0 \Rightarrow 1 = 4A - 2B + C \Rightarrow B = 3$$

$$\int \frac{8x^2-19x+1}{(2x+1)(x-2)^2}dx$$
$$= \int \left(\frac{2}{2x+1} + \frac{3}{x-2} + \frac{-1}{(x-2)^2}\right)dx$$
$$= \ln|2x+1| + 3\ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + C$$

---

11 $$\int \frac{9x^2-3x+2}{9x^2-4}\,dx$$

الحل:

$$\int \frac{9x^2-3x+2}{9x^2-4}dx = \int \left(1 + \frac{6-3x}{9x^2-4}\right)dx$$
$$\frac{6-3x}{9x^2-4} = \frac{6-3x}{(3x-2)(3x+2)}$$
$$= \frac{A}{3x-2} + \frac{B}{3x+2}$$
$$\Rightarrow 6-3x = A(3x+2) + B(3x-2)$$
$$x = \frac{2}{3} \Rightarrow A = 1$$
$$x = -\frac{2}{3} \Rightarrow B = -2$$
$$\int \frac{9x^2-3x+2}{9x^2-4}dx$$
$$= \int \left(1 + \frac{1}{3x-2} + \frac{-2}{3x+2}\right)dx$$
$$= x + \frac{1}{3}\ln|3x-2| - \frac{2}{3}\ln|3x+2| + C$$

---

12 $$\int \frac{x^3+2x^2+2}{x^2+x}\,dx$$

الحل:

$$\int \frac{x^3+2x^2+2}{x^2+x}dx$$
$$= \int \left(x+1+\frac{2-x}{x^2+x}\right)dx$$
$$\frac{2-x}{x^2+x} = \frac{2-x}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$
$$\Rightarrow 2-x = A(x+1) + Bx$$
$$x = 0 \Rightarrow A = 2$$
$$x = -1 \Rightarrow B = -3$$
$$\int \frac{x^3+2x^2+2}{x^2+x}dx$$
$$= \int \left(x+1+\frac{2}{x} + \frac{-3}{x+1}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + x + 2\ln|x| - 3\ln|x+1| + C$$

13 $$\int \frac{x^2+x+2}{3-2x-x^2}\,dx$$

الحل:

$$\int \frac{x^2+x+2}{3-2x-x^2}dx$$

$$=\int(-1+\frac{5-x}{-x^2-2x+3})dx$$

$$\frac{5-x}{-x^2-2x+3}=\frac{x-5}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}$$

$$\Rightarrow x-5=A(x-1)+B(x+3)$$

$$x=-3\Rightarrow A=2$$

$$x=1\Rightarrow B=-1$$

$$\int \frac{x^2+x+2}{3-2x-x^2}dx=$$

$$=\int(-1+\frac{2}{x+3}+\frac{-1}{x-1})dx$$

$$=-x+2\ln|x+3|-\ln|x-1|+C$$

14 $$\int \frac{2x-4}{(x^2+4)(x+2)}\,dx$$

الحل:

$$\frac{2x-4}{(x^2+4)(x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow 2x-4=A(x^2+4)+(Bx+C)(x+2)$$

$$x=-2\Rightarrow A=-1$$

$$x=0\Rightarrow -4=4A+2C\Rightarrow C=0$$

$$x=1\Rightarrow -2=5A+3B+3C\Rightarrow B=1$$

$$\int\frac{2x-4}{(x^2+4)(x+2)}dx$$

$$=\int(\frac{-1}{x+2}+\frac{x}{x^2+4})dx$$

$$=-\ln|x+2|+\frac{1}{2}\ln|x^2+4|+C$$

15 $$\int \frac{x^3-4x^2-2}{x^3+x^2}\,dx$$

الحل:

$$\int\frac{x^3-4x^2-2}{x^3+x^2}dx=$$

$$\int(1+\frac{-5x^2-2}{x^3+x^2})dx$$

$$\frac{-5x^2-2}{x^3+x^2}=\frac{-5x^2-2}{x^2(x+1)}$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$$

$$\Rightarrow -5x^2-2$$

$$= Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2$$

$x=0 \Rightarrow B=-2$

$x=-1 \Rightarrow C=-7$

$x=1 \Rightarrow -7=2A+2B+C \Rightarrow A=2$

$$\int \frac{x^3-4x^2-2}{x^3+x^2}dx$$

$$= \int\left(1+\frac{2}{x}+\frac{-2}{x^2}+\frac{-7}{x+1}\right)dx$$

$$= x+2\ln|x|+\frac{2}{x}-7\ln|x+1|+C$$

16 $$\int \frac{3-x}{2-5x-12x^2}\,dx$$

$$\frac{3-x}{2-5x-12x^2}=\frac{x-3}{12x^2+5x-2}$$

$$=\frac{x-3}{(4x-1)(3x+2)}=\frac{A}{4x-1}+\frac{B}{3x+2}$$

$$\Rightarrow x-3=A(3x+2)+B(4x-1)$$

$x=\frac{1}{4} \Rightarrow A=-1$

$x=-\frac{2}{3} \Rightarrow B=1$

$$\int \frac{3-x}{2-5x-12x^2}dx$$

$$=\int\left(\frac{-1}{4x-1}+\frac{1}{3x+2}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|4x-1|+\frac{1}{3}\ln|3x+2|+C$$

17 $$\int \frac{3x^3+2x^2+12}{x^4+6x^2}\,dx$$

الحل:

$$\frac{3x^3+2x^2+12}{x^4+6x^2}$$

$$=\frac{3x^3+2x^2+12}{x^2(x^2+6)}$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+6}$$

$$\Rightarrow 3x^3+2x^2+12$$

$$= Ax(x^2+6)+B(x^2+6)+(Cx+D)(x^2)$$

$x=0 \Rightarrow 12=6B \Rightarrow B=2$

$x=1 \Rightarrow$

$17=7A+7B+C+D$ ......(1)

$x=-1 \Rightarrow$

$11=-7A+7B-C+D$..(2)

$x=2 \Rightarrow$

$44=20A+10B+8C+4D$...... (3)

بجمع(1) ، و (2) ينتج أنّ:

$14B + 2D = 28$ ، وبتعويض

$B = 2$، نجد أن $D = 0$

وبتعويض قيمتي B, D في المعادلتين

2، و3 نحصل على المعادلتين الآتيتين:

$$11 = -7A + 14 - C$$

$$\Rightarrow 7A + C = 3 \ldots (4)$$

$$44 = 20A + 20 + 8C$$

$$\Rightarrow 5A + 2C = 6 \ldots\ldots (5)$$

وبطرح المعادلة (5) من مثلي المعادلة (4)

نجد أنّ : $9A = 0 \Rightarrow A = 0$

وبتعويض قيمة A في المعادلة (4)

نجد أنّ: $C = 3$

$$\int \frac{3x^3 + 2x^2 + 12}{x^4 + 6x^2} dx$$

$$= \int \left(\frac{2}{x^2} + \frac{3x}{x^2 + 6}\right) dx$$

$$= -\frac{2}{x} + \frac{3}{2}\ln|x^2 + 6| + C$$

18 $$\int \frac{5x - 2}{(x-2)^2} dx$$

الحل:

$$\frac{5x-2}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow 5x - 2 = A(x-2) + B$$

$$x = 2 \Rightarrow B = 8$$

$$x = 0 \Rightarrow -2 = -2A + B \Rightarrow A = 5$$

$$\int \frac{5x-2}{(x-2)^2} dx$$

$$= \int \left(\frac{5}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2}\right) dx$$

$$= 5\ln|x-2| - \frac{8}{x-2} + C$$

ملاحظة: يمكن حل هذا التكامل بالتعويض

كما يمكن حله بالأجزاء

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

19 $$\int_2^4 \frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2}\,dx$$

الحل:

$$\frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2}=\frac{6+3x-x^2}{x^2(x+2)}$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+2}$$

$$\Rightarrow 6+3x-x^2=Ax(x+2)+B(x+2)+C(x^2)$$

$$x=0\Rightarrow B=3$$

$$x=-2\Rightarrow C=-1$$

$$x=1\Rightarrow 8=3A+3B+C\Rightarrow A=0$$

$$\int_2^4 \frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2}dx=\int_2^4\left(\frac{3}{x^2}+\frac{-1}{x+2}\right)dx$$

$$=\left(-\frac{3}{x}-\ln|x+2|\right)\Big|_2^4$$

$$=-\frac{3}{4}-\ln 6+\frac{3}{2}+\ln 4=\frac{3}{4}+\ln\frac{2}{3}$$

20 $$\int_{-1/3}^{1/3}\frac{9x^2+4}{9x^2-4}\,dx$$

الحل:

$$\frac{9x^2+4}{9x^2-4}=1+\frac{8}{9x^2-4}$$

$$\frac{8}{9x^2-4}=\frac{8}{(3x-2)(3x+2)}$$

$$=\frac{A}{3x-2}+\frac{B}{3x+2}$$

$$\Rightarrow 8=A(3x+2)+B(3x-2)$$

$$x=\frac{2}{3}\Rightarrow A=2$$

$$x=-\frac{2}{3}\Rightarrow B=-2$$

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\frac{9x^2+4}{9x^2-4}dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{2}{3x-2}+\frac{-2}{3x+2}\right)dx$$

$$=\left(x+\frac{2}{3}\ln|3x-2|-\frac{2}{3}\ln|3x+2|\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(x + \frac{2}{3}\ln\left|\frac{3x-2}{3x+2}\right|\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\ln\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\ln 3$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\ln 3$$

---

21 $$\int_0^1 \frac{17-5x}{(2x+3)(2-x)^2}\,dx$$

الحل:

$$\frac{17-5x}{(2x+3)(2-x)^2}$$

$$= \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{2-x} + \frac{C}{(2-x)^2}$$

$$\Rightarrow 17-5x = A(2-x)^2 + B(2-x)(2x+3) + C(2x+3)$$

$$x = -\frac{3}{2} \Rightarrow A = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow C = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow 17$$

$$= 4A + 6B + 3C \Rightarrow B = 1$$

$$\int_0^1 \frac{17-5x}{(2x+3)(2-x)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{2x+3} + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{(2-x)^2}\right)dx$$

$$= \left(\ln|2x+3| - \ln|2-x| + \frac{1}{2-x}\right)\Big|_0^1$$

$$= \ln 5 + 1 - \ln 3 + \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \ln\frac{10}{3}$$

---

22 $\int_1^4 \frac{4}{16x^2+8x-3}\,dx$

الحل:

$$\frac{4}{16x^2+8x-3}=\frac{4}{(4x-1)(4x+3)}$$

$$=\frac{A}{4x-1}+\frac{B}{4x+3}$$

$$\Rightarrow 4=A(4x+3)+B(4x-1)$$

$$x=\frac{1}{4}\Rightarrow A=1$$

$$x=-\frac{3}{4}\Rightarrow B=-1$$

$$\int_1^4 \frac{4}{16x^2+8x-3}dx$$

$$=\int_1^4 \left(\frac{1}{4x-1}+\frac{-1}{4x+3}\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{4}\ln|4x-1|-\frac{1}{4}\ln|4x+3|\right)\Big|_1^4$$

$$=\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{4x-1}{4x+3}\right|\right)\Big|_1^4$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{15}{19}-\ln\frac{3}{7}\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{35}{19}$$

23 $\int_3^4 \frac{5x+5}{x^2+x-6}\,dx$

الحل:

$$\frac{5x+5}{x^2+x-6}=\frac{5x+5}{(x-2)(x+3)}$$

$$=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$$

$$\Rightarrow 5x+5=A(x+3)+B(x-2)$$

$$x=2\Rightarrow A=3$$

$$x=-3\Rightarrow B=2$$

$$\int_3^4 \frac{5x+5}{x^2+x-6}dx$$

$$=\int_3^4\left(\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+3}\right)dx$$

$$=(3\ln|x-2|+2\ln|x+3|)\Big|_3^4$$

$$=3\ln 2+2\ln 7-2\ln 6=\ln\frac{98}{9}$$

24 $\int_3^4 \frac{4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

الحل:

$$\frac{4}{x^3-4x^2+4x}=\frac{4}{x(x-2)^2}$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow 4=A(x-2)^2+Bx(x-2)+Cx$$

$x=0\Rightarrow A=1$

$x=2\Rightarrow C=2$

$x=1\Rightarrow 4=A-B+C\Rightarrow B=-1$

$$A=\int_3^4 \frac{4}{x^3-4x^2+4x}dx$$

$$=\int_3^4\left(\frac{1}{x}+\frac{-1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}\right)dx$$

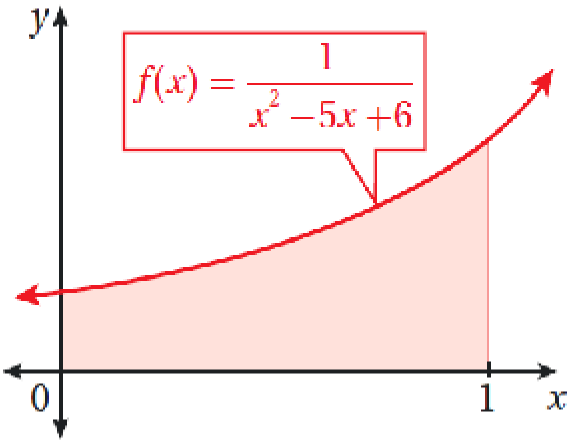
$$=\left(\ln|x|-\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}\right)\Big|_3^4$$

$$=\left(\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{2}{x-2}\right)\Big|_3^4$$

$$=\ln2-1-\ln3+2=1+\ln\frac{2}{3}$$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

25



$$A=\int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6}dx$$

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{(x-3)(x-2)}$$

$$=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$$

$$\Rightarrow 1=A(x-2)+B(x-3)$$

$x=3\Rightarrow A=1$

$x=2\Rightarrow B=-1$

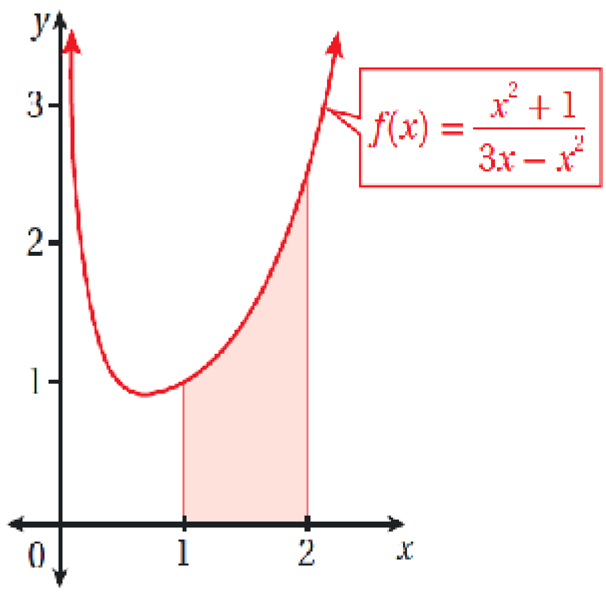
$$A=\int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$$

$$=\int_0^1 \left(\frac{1}{x-3}+\frac{-1}{x-2}\right)dx$$

$$=\left(\ln|x-3|-\ln|x-2|\right)\Big|_0^1$$

$$=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\Big|_0^1=\ln 2-\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{4}{3}$$

26



الحل:

$$A=\int_1^2 \frac{x^2+1}{3x-x^2}\,dx$$

$$\frac{x^2+1}{3x-x^2}=-1+\frac{3x+1}{3x-x^2}$$

$$\frac{3x+1}{3x-x^2}=\frac{3x+1}{x(3-x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{3-x}$$

$$\Rightarrow 3x+1=A(3-x)+Bx$$

$$x=0\Rightarrow A=\frac{1}{3}$$

$$=-2+\frac{1}{3}\ln 2+1+\frac{10}{3}\ln 2$$

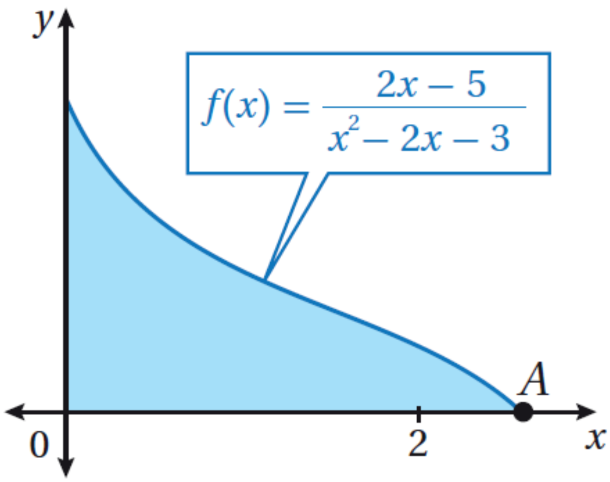
$$x=3\Rightarrow B=-\frac{11}{3}\ln 2$$

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{3x-x^2}\,dx$$

$$=\int_1^2 \left(-1+\frac{10}{3}+\frac{1}{3-x}\right)dx$$

يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى

الاقتران: $f(x)=\frac{2x-5}{x^2-2x-3}$:



27 أجد إحداثيي النقطة A.

28 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

الحل:

27 أجد إحداثيي النقطة A.

الحل:

$$f(x)=0 \quad \Rightarrow 2x-5=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{5}{2} \quad \Rightarrow A(2.5,0)$$

28 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

الحل:

$$A=\int_0^{\frac{5}{2}}\frac{2x-5}{x^2-2x-3}\,dx$$

$$\frac{2x-5}{x^2-2x-3}=\frac{2x-5}{(x-3)(x+1)}$$

$$=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1}$$

$$\Rightarrow 2x-5=A(x+1)+B(x-3)$$

$$x=3\Rightarrow 1=4A\Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

$$x=-1\Rightarrow -7=-4B\Rightarrow B=\frac{7}{4}$$

$$A=\int_0^{\frac{5}{2}}\frac{2x-5}{x^2-2x-3}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{4(x-3)}+\frac{7}{4(x+1)}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x-3|+\frac{7}{4}\ln|x+1|\Big|_0^{\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln3\right)+\frac{7}{4}\left(\ln\frac{7}{2}-\ln1\right)$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{1}{6}+\frac{7}{4}\ln\frac{7}{2}\approx 1.74$$

إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي 1.74 وحدة مربعة تقريبًا.

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

29 $\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}\, dx$

الحل:

$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$

$\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}\, dx$

$= \int \frac{\sin x}{u + u^2} \times \frac{du}{-\sin x} = \int \frac{-1}{u + u^2}\, du$

$\frac{-1}{u + u^2} = \frac{-1}{u(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1+u}$

$\Rightarrow -1 = A(1+u) + Bu$

$u = 0 \Rightarrow A = -1$

$u = -1 \Rightarrow B = 1$

$\int \frac{-1}{u + u^2}\, du = \int \left(\frac{-1}{u} + \frac{1}{1+u}\right) du$

$= -\ln|u| + \ln|1+u| + C$

$\Rightarrow \int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}\, dx$

$= -\ln|\cos x| + \ln|1 + \cos x| + C$

$= \ln\left|\frac{1 + \cos x}{\cos x}\right| + C = \ln|1 + \sec x| + C$

30 $\int \frac{1}{x^2 + x\sqrt{x}}\, dx$

الحل:

$u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow dx = 2u\,du$

$\int \frac{1}{x^2 + x\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{1}{u^4 + u^3}\, 2u\,du$

$= \int \frac{2}{u^3 + u^2}\, du$

$\frac{2}{u^3 + u^2} = \frac{2}{u^2(u+1)}$

$= \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u+1}$

$\Rightarrow 2 = Au(u+1) + B(u+1) + Cu^2$

$u = 0 \Rightarrow B = 2$

$u = -1 \Rightarrow C = 2$

$u = 1 \Rightarrow 2 = 2A + 2B + C \Rightarrow A = -2$

$\int \frac{2}{u^3 + u^2}\, du = \int \left(\frac{-2}{u} + \frac{2}{u^2} + \frac{2}{u+1}\right) du$

$= -2\ln|u| - \frac{2}{u} + 2\ln|u+1| + C$

$= 2\ln\left|\frac{u+1}{u}\right| - \frac{2}{u} + C$

$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2 + x\sqrt{x}}\, dx$

$= 2\ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right) - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$

31 $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^{x}+2}\,dx$

الحل:

$$u = e^x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x = u$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{u^2}{u^2+3u+2} \times \frac{du}{u}$$

$$= \int \frac{u}{u^2+3u+2}\,du$$

$$\frac{u}{u^2+3u+2} = \frac{u}{(u+1)(u+2)}$$

$$= \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u+2}$$

$$\Rightarrow u = A(u+2) + B(u+1)$$

$$u = -1 \quad \Rightarrow A = -1$$

$$u = -2 \quad \Rightarrow B = 2$$

$$\int \frac{u}{u^2+3u+2}\,du$$

$$= \int \left(\frac{-1}{u+1} + \frac{2}{u+2}\right) du$$

$$= -\ln|u+1| + 2\ln|u+2| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$$

$$= -\ln(e^x+1) + 2\ln(e^x+2) + C$$

32 $\int \frac{\cos x}{\sin x(\sin^2 x - 4)}\,dx$

الحل:

$$u = \sin x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x\,(\sin^2 x - 4)}\,dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{u(u^2-4)} \times \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int \frac{1}{u(u^2-4)}\,du$$

$$\frac{1}{u(u^2-4)} = \frac{1}{u(u-2)(u+2)}$$

$$= \frac{A}{u} + \frac{B}{u-2} + \frac{C}{u+2}$$

$$\Rightarrow 1 = A(u-2)(u+2) +$$

$$Bu(u+2) \quad + Cu(u-2)$$

$$u = 0 \quad \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$$

$$u = 2 \quad \Rightarrow B = \frac{1}{8}$$

$$u = -2 \quad \Rightarrow C = \frac{1}{8}$$

$$\int \frac{1}{u(u^2-4)}\,du =$$

$$\int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{u}+\frac{\frac{1}{8}}{u-2}+\frac{\frac{1}{8}}{u+2}\right)du$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|u| + \frac{1}{8}\ln|u-2|$$

$$+\frac{1}{8}\ln|u+2| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos x}{\sin x\,(\sin^2 x-4)}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|\sin x| + \frac{1}{8}\ln|\sin x-2|$$

$$+\frac{1}{8}\ln|\sin x+2| + C$$

مهارات التفكير العليا

تبرير: أحُلُّ السؤالين الآتيين تباعًا:

33 أجد: $\int \frac{dx}{1+e^x}$ بطريقتين مختلفتين، إحداهما الكسور الجزئية، مُبرِّرًا إجابتي.

الحل:

الحل الأول بضرب كل من البسط والمقام بـ e^{-x}

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$$

$$= -\int \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = -\ln(e^{-x}+1)+C$$

الحل الثاني بالتعويض:

$$u = e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x = u \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1}{1+u}\times\frac{du}{u}$$

$$= \int \frac{1}{u(1+u)}du$$

$$\frac{1}{u(1+u)} = \frac{A}{u}+\frac{B}{u+1}$$

$$\Rightarrow 1 = A(1+u)+Bu$$

$$u = 0 \Rightarrow A = 1$$

$$u = -1 \Rightarrow B = -1$$

$$\int \frac{1}{u(1+u)}du = \int\left(\frac{1}{u}+\frac{-1}{u+1}\right)du$$

$$= ln|u| - ln|u+1| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+e^x}dx$$

$$= ln e^x - ln(e^x+1) + C$$

$$= ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)^{-1} + C$$

$$= -ln(e^{-x}+1) + C$$

---

34 أجد: $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

الحل:

$$\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x}dx$$

$$= \ln e^x - \ln(e^x+1)\Big|_0^{\ln 2}$$

$$= \ln e^{\ln 2} - \ln(e^{\ln 2}+1)$$

$$- (\ln e^0 - \ln(e^0+1))$$

$$= \ln 2 - \ln 3 - 0 + \ln 2 = \ln 4 - \ln 3$$

$$= \ln\frac{4}{3}$$

35 تبرير: أُثبِت أنَّ:

$$\int_4^9 \frac{5x^2-8x+1}{2x(x-1)^2}\,dx = \ln\left(\frac{32}{3}\right) - \frac{5}{24}.$$

الحل:

$$\frac{5x^2-8x+1}{2x(x-1)^2} = \frac{A}{2x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow 5x^2-8x+1$$

$$= A(x-1)^2 + B(2x)(x-1) + C(2x)$$

$$x = 0 \Rightarrow A = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow C = -1$$

$$x = -1 \Rightarrow 14 = 4A + 4B - 2C \Rightarrow B = 2$$

$$\int_4^9 \frac{5x^2-8x+1}{2x(x-1)^2}dx$$

$$= \int_4^9 \left(\frac{1}{2x} + \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}\ln|x| + 2\ln|x-1| + \frac{1}{x-1}\right)\Big|_4^9$$

$$= \frac{1}{2}\ln 9 + 2\ln 8 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\ln 4 - 2\ln 3 - \frac{1}{3}$$

$$= \ln 3 + \ln 64 + \frac{1}{8} - \ln 2 - \ln 9 - \frac{1}{3}$$

$$= \ln\frac{3(64)}{2(9)} - \frac{5}{24} = \ln\frac{32}{3} - \frac{5}{24}$$

36 تبرير: أُثبِت أنَّ:

$$\int_9^{16} \frac{2\sqrt{x}}{x-4}\,dx = 4\left(1+\ln\left(\frac{5}{3}\right)\right).$$

الحل:

$u=\sqrt{x} \Rightarrow u^2=x \Rightarrow dx=2udu$

$x=9 \Rightarrow u=3$

$x=16 \Rightarrow u=4$

$$\int_9^{16}\frac{2\sqrt{x}}{x-4}dx=\int_3^4\frac{2u}{u^2-4}2udu$$

$$=\int_3^4\frac{4u^2}{u^2-4}du$$

$$=\int_3^4\left(4+\frac{16}{u^2-4}\right)du$$

$$\frac{16}{u^2-4}=\frac{16}{(u-2)(u+2)}=\frac{A}{u-2}+\frac{B}{u+2}$$

$\Rightarrow 16=A(u+2)+B(u-2)$

$u=2 \Rightarrow A=4$

$u=-2 \Rightarrow B=-4$

$$\int_3^4\left(4+\frac{16}{u^2-4}\right)du$$

$$=\int_3^4\left(4+\frac{4}{u-2}+\frac{-4}{u+2}\right)du$$

$$=(4u+4\ln|u-2|-4\ln|u+2|)\Big|_3^4$$

$$=16+4\ln2-4\ln6-12-4\ln1+4\ln5$$

$$=4+4\ln\frac{5}{3}=4(1+\ln\frac{5}{3})$$

$$\Rightarrow \int_9^{16}\frac{2\sqrt{x}}{x-4}dx=4(1+\ln\frac{5}{3})$$

37 تبرير: أُثبِت أنَّ:

$$\int_0^1 \frac{4x^2+9x+4}{2x^2+5x+3}\,dx = 2+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{12}.$$

الحل:

$$\frac{4x^2+9x+4}{2x^2+5x+3}=2-\frac{x+2}{2x^2+5x+3}$$

$$\frac{x+2}{2x^2+5x+3}=\frac{x+2}{(x+1)(2x+3)}$$

$$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x+3}$$

$\Rightarrow x+2=A(2x+3)+B(x+1)$

$x=-1 \Rightarrow A=1$

$x=-\frac{3}{2} \Rightarrow B=-1$

$$\int_0^1\frac{4x^2+9x+4}{2x^2+5x+3}dx$$

$$=\int_0^1\left(2-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x+3}\right)dx$$

$$=\left(2x-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|2x+3|\right)\Big|_0^1$$

$$=2-\ln2+\frac{1}{2}\ln5-0+\ln1-\frac{1}{2}\ln3$$

$$=2-\frac{1}{2}\ln4+\frac{1}{2}\ln5-\frac{1}{2}\ln3$$

$$=2+\frac{1}{2}(\ln5-\ln4-\ln3)=2+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{12}$$

تحدٍّ: أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

38 $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$

الحل:

$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$

$u=\sqrt{1+\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{du}{dx}$

$=\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}, 1+\sqrt{x}=$

$\Rightarrow dx = 4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}\,du = 4u(u^2-1)\,du$

$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx = \int \frac{u}{(u^2-1)^2}4u(u^2-1)\,du =$

$\frac{4u^2}{u^2-1} = 4+\frac{4}{u^2-1}$

$\frac{4}{u^2-1} = \frac{4}{(u-1)(u+1)} = \frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}$

$\Rightarrow 4 = A(u+1)+B(u-1)$

$u=1 \Rightarrow A=2$

$u=-1 \Rightarrow B=-2$

$\int \frac{4u^2}{u^2-1}\,du = \int (4+\frac{2}{u-1}+\frac{-2}{u+1})\,du$

$=4u+2\ln|u-1|-2\ln|u+1|+C$

$=4u+2\ln|\frac{u-1}{u+1}|+C$

$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$

$=4\sqrt{1+\sqrt{x}}+2\ln|\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}+1}|+C$

39 $\int \frac{x}{16x^4-1}\,dx$

الحل:

$\frac{x}{16x^4-1} = \frac{x}{(4x^2+1)(2x-1)(2x+1)}$

$=\frac{Ax+B}{4x^2+1}+\frac{C}{2x-1}+\frac{D}{2x+1}$

$\Rightarrow x = (Ax+B)(2x-1)(2x+1) +$
$C(4x^2+1)(2x+1) + D(4x^2+1)(2x-1)$

$x=\frac{1}{2} \Rightarrow C=\frac{1}{8}$

$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow D=\frac{1}{8}$

$x=0 \Rightarrow 0=-B+C-D \Rightarrow B=0$

$x=1 \Rightarrow 1=3A+3B+15C+5D$

$\Rightarrow A=-\frac{1}{2}$

$\int \frac{x}{16x^4-1}\,dx$

$=\int (\frac{-\frac{1}{2}x}{4x^2+1}+\frac{\frac{1}{8}}{2x-1}+\frac{\frac{1}{8}}{2x+1})\,dx$

$=-\frac{1}{16}\ln(4x^2+1)+\frac{1}{16}\ln|2x-1|$
$+\frac{1}{16}\ln|2x+1|+C$

$=\frac{1}{16}\ln|\frac{4x^2-1}{4x^2+1}|+C$

تمارين ومسائل كتاب التمارين

التكامل بالكسور الجزئية

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \frac{4}{x^2+4x}\,dx$

الحل:

$$\frac{4}{x^2+4x}=\frac{4}{x(x+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+4}$$

$A(x+4)+B(x)=4$

$x=0 \Rightarrow A=1$

$x=-4 \Rightarrow B=-1$

$$\int \frac{4}{x^2+4x}\,dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right)dx$$

$$=\ln|x|-\ln|x+4|+C=\ln\left|\frac{x}{x+4}\right|+C$$

2 $\int \frac{6}{x^2-9}\,dx$

الحل:

$$\frac{6}{x^2-9}=\frac{6}{(x-3)(x+3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}$$

$A(x+3)+B(x-3)=6$

$x=3 \Rightarrow A=1$

$x=-3 \Rightarrow B=-1$

$$\int \frac{6}{x^2-9}\,dx=\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$=\ln|x-3|-\ln|x+3|+C=\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$$

3 $\int \frac{x^2-3x+8}{x^3-3x-2}\,dx$

الحل:

$$\frac{x^2-3x+8}{x^3-3x-2}=\frac{x^2-3x+8}{(x-2)(x+1)^2}$$

$$=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$A(x+1)^2+B(x-2)(x+1)$

$+C(x-2)=x^2-3x+8$

$x=2 \Rightarrow A=\frac{2}{3}$

$x=-1 \Rightarrow C=-4$

$x=0 \Rightarrow A-2B-2C=8$

$\Rightarrow \frac{2}{3}-2B+8=8 \Rightarrow B=\frac{1}{3}$

$$\int \frac{x^2-3x+8}{x^3-3x-2}\,dx=$$

$$\int\left(\frac{\frac{2}{3}}{x-2}+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}-\frac{4}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{4}{x+1}+C$$

❹ $\displaystyle\int \frac{x-10}{x^2-2x-8}\,dx$

الحل:

$$\frac{x-10}{x^2-2x-8}=\frac{x-10}{(x-4)(x+2)}$$

$$=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$$

$$A(x+2)+B(x-4)=x-10$$

$$x=4 \Rightarrow A=-1$$

$$x=-2 \Rightarrow B=2$$

$$\int \frac{x-10}{x^2-2x-8}\,dx$$

$$=\int\left(-\frac{1}{x-4}+\frac{2}{x+2}\right)dx$$

$$=-\ln|x-4|+2\ln|x+2|+C$$

---

❺ $\displaystyle\int \frac{2x^2+6x-2}{2x^2+x-1}\,dx$

الحل:

$$\frac{2x^2+6x-2}{2x^2+x-1}=1+\frac{5x-1}{2x^2+x-1}$$

$$=1+\frac{5x-1}{(x+1)(2x-1)}\quad =1+\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-1}$$

$$A(2x-1)+B(x+1)=5x-1$$

$$x=-1 \Rightarrow A=2$$

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow B=1$$

$$\int \frac{2x^2+6x-2}{2x^2+x-1}\,dx$$

$$=\int\left(1+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2x-1}\right)dx$$

$$=x+2\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$$

---

❻ $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+6}{(x^2+2)(x+1)}\,dx$

الحل:

$$\frac{2x^2-x+6}{(x^2+2)(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$A(x^2+2)+(Bx+C)(x+1)$$

$$=2x^2-x+6$$

$$x=-1 \Rightarrow A=3$$

$$x=0 \Rightarrow 2A+C=6 \Rightarrow$$

$$6+C=6 \Rightarrow C=0$$

$$x=1 \Rightarrow 3A+2B+2C=7$$

$$\Rightarrow 9+2B=7 \Rightarrow B=-1$$

$$\int \frac{2x^2-x+6}{(x^2+2)(x+1)}\,dx$$

$$=\int\left(\frac{3}{x+1}+\frac{-x}{x^2+2}\right)dx$$

$$=3\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+C$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}$$

$$A(x+1)(x-1) + B(x-1) + C(x+1)^2 = 8x$$

$x = -1 \Rightarrow B = 4$

$x = 1 \Rightarrow C = 2$

$x = 0 \Rightarrow -A - B + C = 0 \Rightarrow$

$-A - 4 + 2 = 0 \Rightarrow A = -2$

$$\int \frac{8x}{x^3 + x^2 - x - 1}\, dx$$

$$= \int \left(\frac{-2}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{2}{x-1} \right) dx$$

$$= -2\ln|x+1| - \frac{4}{x+1} + 2\ln|x-1| + C$$

$$= 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{4}{x+1} + C$$

---

9 $\displaystyle \int \frac{4}{x^3 - 2x^2}\, dx$

الحل:

$$\frac{4}{x^3 - 2x^2} = \frac{4}{x^2(x-2)}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$$

$$A(x)(x-2) + B(x-2) + C(x^2) = 4$$

$x = 0 \Rightarrow B = -2$

$x = 2 \Rightarrow C = 1$

7 $\displaystyle \int \frac{8x + 24}{(x+1)(x-3)^2}\, dx$

الحل:

$$\frac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2}$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

$$A(x-3)^2 + B(x+1)(x-3) + C(x+1) = 8x + 24$$

$x = -1 \Rightarrow A = 1$

$x = 3 \Rightarrow C = 12$

$x = 0 \Rightarrow 9A - 3B + C = 24 \Rightarrow$

$9 - 3B + 12 = 24 \Rightarrow B = -1$

$$\int \frac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2}\, dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x-3} + \frac{12}{(x-3)^2} \right) dx$$

$$= \ln|x+1| - \ln|x-3| - \frac{12}{x-3} + C$$

---

8 $\displaystyle \int \frac{8x}{x^3 + x^2 - x - 1}\, dx$

الحل:

$$\frac{8x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{8x}{x^2(x+1) - (x+1)}$$

$$= \frac{8x}{(x^2-1)(x+1)} = \frac{8x}{(x-1)(x+1)^2}$$

$x = 1 \Rightarrow -A - B + C = 4 \Rightarrow$

$-A + 2 + 1 = 4 \Rightarrow A = -1$

$$\int \frac{4}{x^3 - 2x^2}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x-2}\right) dx$$

$$= -\ln|x| + \frac{2}{x} + \ln|x-2| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x-2}{x}\right| + \frac{2}{x} + C$$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

10 $\displaystyle\int_1^5 \frac{x-1}{x^2(x+1)}\,dx$

الحل:

$$\frac{x-1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$A(x)(x+1) + B(x+1) + C(x^2) = x - 1$

$x = 0 \Rightarrow B = -1$

$x = -1 \Rightarrow C = -2$

$x = 1 \Rightarrow 2A + 2B + C = 0$

$\Rightarrow 2A - 2 - 2 = 0 \Rightarrow A = 2$

$$\int_1^5 \frac{x-1}{x^2(x+1)}\,dx = \int_1^5 \left(\frac{2}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{-2}{x+1}\right) dx$$

$$= \left(2\ln|x| + \frac{1}{x} - 2\ln|x-2|\right)\Big|_1^5$$

$$= \left(\frac{1}{x} + 2\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|\right)\Big|_1^5 = 2\ln\frac{5}{3} - \frac{4}{5}$$

11 $\displaystyle\int_7^{12} \frac{4-x}{(x-2)^2}\,dx$

الحل:

$$\frac{4-x}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

$A(x-2) + B = 4 - x$

$x = 2 \Rightarrow B = 2$

$x = 0 \Rightarrow -2A + B = 4$

$\Rightarrow -2A + 2 = 4 \Rightarrow A = -1$

$$\int_7^{12} \frac{4-x}{(x-2)^2}\,dx$$

$$= \int_7^{12} \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}\right) dx$$

$$= \left(-\ln|x-2| - \frac{2}{x-2}\right)\Big|_7^{12}$$

$$= -\ln 10 - \frac{1}{5} + \ln 5 + \frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \ln\frac{1}{2}$$

12 $\int_1^2 \frac{4}{x^2+8x+15}\,dx$

الحل:

$$\frac{4}{x^2+8x+15} = \frac{4}{(x+5)(x+3)}$$

$$= \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x+3}$$

$$A(x+3) + B(x+5) = 4$$

$$x = -5 \Rightarrow A = -2$$

$$x = -3 \Rightarrow B = 2$$

$$\int_1^2 \frac{4}{x^2+8x+15}\,dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{-2}{x+5} + \frac{2}{x+3}\right) dx$$

$$= (-2\ln|x+5| + 2\ln|x+3|)|_1^2$$

$$= \left(2\ln\left|\frac{x+3}{x+5}\right|\right)\Big|_1^2$$

$$= 2\ln\frac{5}{7} - 2\ln\frac{2}{3} = 2\ln\frac{15}{14}$$

---

13 $\int_1^2 \frac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x}\,dx$

الحل:

$$\frac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x} = 5 + \frac{-x+10}{2x^2-5x}$$

$$= 5 + \frac{10-x}{x(2x-5)} = 5 + \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-5}$$

$$A(2x-5) + B(x) = 10 - x$$

$$x = 0 \Rightarrow A = -2$$

$$x = \frac{5}{2} \Rightarrow B = 3$$

$$\int_1^2 \frac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x}\,dx$$

$$= \int_1^2 \left(5 + \frac{-2}{x} + \frac{3}{2x-5}\right) dx$$

$$= \left(5x - 2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|2x-5|\right)\Big|_1^2$$

$$= 10 - 2\ln 2 - 5 - \frac{3}{2}\ln 3$$

$$= 5 - \ln 12\sqrt{3}$$

14 $\displaystyle\int_2^5 \frac{25}{(x+1)(2x-3)^2}\,dx$

$$\frac{25}{(x+1)(2x-3)^2}$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-3} + \frac{C}{(2x-3)^2}$$

$$A(2x-3)^2 + B(x+1)(2x-3) + C(x+1) = 25$$

$$x = -1 \Rightarrow A = 1$$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow C = 10$$

$$x = 0 \Rightarrow 9A - 3B + C = 25$$

$$\Rightarrow 9 - 3B + 10 = 25 \Rightarrow B = -2$$

$$\int_2^5 \frac{25}{(x+1)(2x-3)^2}\,dx$$

$$= \int_2^5 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-2}{2x-3} + \frac{10}{(2x-3)^2}\right) dx$$

$$= \left(\ln|x+1| - \ln|2x-3| - \frac{5}{2x-3}\right)\Bigg|_2^5$$

$$= \left(\ln\left|\frac{x+1}{2x-3}\right| - \frac{5}{2x-3}\right)\Bigg|_2^5$$

$$= \left(\ln\frac{6}{7} - \frac{5}{7}\right) - (\ln 3 - 5) = \frac{30}{7} + \ln\frac{2}{7}$$

15 $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2 - 3x + 10}{x^2 - x - 6}\,dx$

الحل:

$$\frac{x^2 - 3x + 10}{x^2 - x - 6} = 1 + \frac{16 - 2x}{x^2 - x - 6}$$

$$= 1 + \frac{16 - 2x}{(x-3)(x+2)} = 1 + \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$A(x+2) + B(x-3) = 16 - 2x$$

$$x = 3 \Rightarrow A = 2$$

$$x = -2 \Rightarrow B = -4$$

$$\int_0^2 \frac{x^2 - 3x + 10}{x^2 - x - 6}\,dx$$

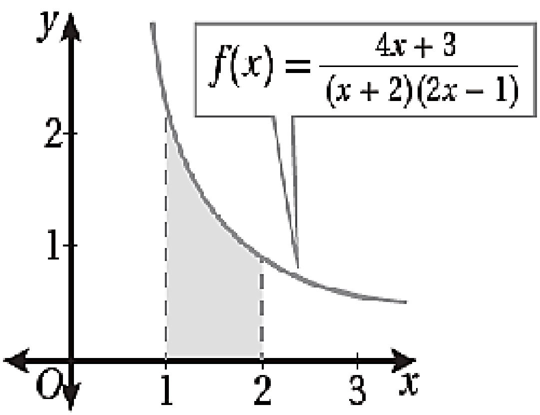
$$= \int_0^2 \left(1 + \frac{2}{x-3} + \frac{-4}{x+2}\right) dx$$

$$= (x + 2\ln|x-3| - 4\ln|x+2|)|_0^2$$

$$= 2 - 4\ln 4 - 2\ln 3 + 4\ln 2 = 2 - 2\ln 12$$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

16



الحل:

$$A=\int_1^2 \frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)}\,dx$$

$$\frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{2x-1}$$

$$A(2x-1)+B(x+2)=4x+3$$

$$x=-2 \Rightarrow A=1$$

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow B=2$$

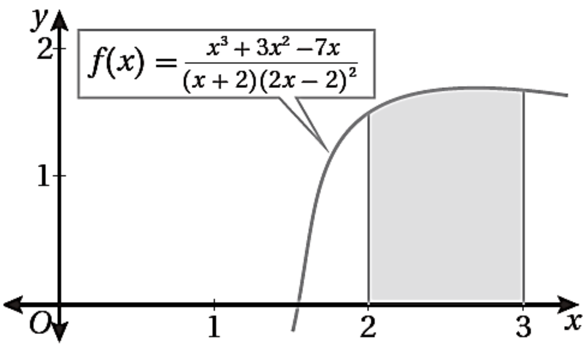
$$A=\int_1^2 \frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)}\,dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{x+2}+\frac{2}{2x-1}\right)dx$$

$$=\left(\ln|x+2|+\ln|2x-1|\right)\Big|_1^2$$

$$=(\ln 4+\ln 3)-(\ln 3+0)=\ln 4$$

17



الحل:

$$A=\int_2^3 \frac{x^3+3x^2-7x}{(x+2)(2x-2)^2}\,dx$$

$$\frac{x^3+3x^2-7x}{(x+2)(2x-2)^2}=\frac{x^3+3x^2-7x}{4x^3-12x+8}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3x^2-4x-2}{4x^3-12x+8}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3x^2-4x-2}{(x+2)(2x-2)^2}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{A}{x+2}+\frac{B}{2x-2}+\frac{C}{(2x-2)^2}$$

$$A(2x-2)^2+B(x+2)(2x-2)$$
$$+C(x+2)=3x^2-4x-2$$

$$x=-2 \Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

$$x=1 \Rightarrow C=-1$$

$$x=0 \Rightarrow 4A-4B+2C=-2 \Rightarrow$$

$$2-4B-2=-2 \Rightarrow B=\frac{1}{2}$$

$$A=\int_2^3 \frac{x^3+3x^2-7x}{(x+2)(2x-2)^2}\,dx$$

$$=\int_2^3\left(\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{2}}{x+2}+\frac{\frac{1}{2}}{2x-2}+\frac{-1}{(2x-2)^2}\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\ln|x+2|+\frac{1}{4}\ln|2x-2|\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2(2x-2)}\right)\Big|_2^3$$

$$=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 5+\frac{1}{4}\ln 4+\frac{1}{8}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{4}\ln 2+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\ln\frac{25}{8}$$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

18 $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+e^{x}}{(e^{2x}+1)(e^{x}-1)}\,dx$

الحل:

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$$

$$\int \frac{e^{2x}+e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}dx$$

$$= \int \frac{e^x(u+1)}{(u^2+1)(u-1)} \times \frac{du}{e^x}$$

$$= \int \frac{u+1}{(u^2+1)(u-1)}du$$

$$\frac{u+1}{(u^2+1)(u-1)} = \frac{Au+B}{u^2+1} + \frac{C}{u-1}$$

$$(Au+B)(u-1) + C(u^2+1)$$

$$u = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$u = 0 \Rightarrow -B + C = 1 \Rightarrow$$

$$-B + 1 = 1 \Rightarrow B = 0$$

$$u = -1 \Rightarrow 2A - 2B + 2C = 0$$

$$\Rightarrow 2A + 2 = 0 \Rightarrow A = -1$$

$$\int \frac{e^{2x}+e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}dx$$

$$= \int \left(\frac{-u}{u^2+1} + \frac{1}{u-1}\right)du$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \ln|u-1| + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + \ln|e^x-1| + C$$

19 $\displaystyle\int \frac{5\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x - 4}\,dx$

الحل:

$$u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \frac{5\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x - 4}dx$$

$$= \int \frac{5\cos x}{u^2+3u-4} \times \frac{du}{\cos x} = \int \frac{5}{u^2+3u-4}du$$

$$\frac{5}{u^2+3u-4} = \frac{5}{(u+4)(u-1)}$$

$$= \frac{A}{u+4} + \frac{B}{u-1}$$

$$A(u-1) + B(u+4) = 5$$

$$u = 1 \Rightarrow B = 1$$

$$u = -4 \Rightarrow A = -1$$

$$\int \frac{5}{u^2+3u-4}du = \int \left(\frac{-1}{u+4} + \frac{1}{u-1}\right)du$$

$$= -\ln|u+4| + \ln|u-1| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{5\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x - 4}dx$$

$$= -\ln(4+\sin x) + \ln|-1+\sin x| + C$$

$$= \ln\left|\frac{-1+\sin x}{4+\sin x}\right| + C$$

20 $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5\tan x + 6}\,dx$

الحل:

$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow du = \sec^2 x\,dx$

$\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5\tan x + 6}dx = \int \frac{1}{u^2 + 5u + 6}du$

$\frac{1}{u^2+5u+6} = \frac{1}{(u+3)(u+2)} = \frac{A}{u+3} + \frac{B}{u+2}$

$A(u+2) + B(u+3) = 1$

$u = -3 \Rightarrow A = -1$

$u = -2 \Rightarrow B = 1$

$\displaystyle\Rightarrow \int \frac{1}{u^2+5u+6}du$

$\displaystyle= \int \left(\frac{-1}{u+3} + \frac{1}{u+2}\right)du = \ln|u+2| - \ln|u+3| + C$

$\displaystyle\Rightarrow \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5\tan x + 6}dx = \ln\left|\frac{2+\tan x}{3+\tan x}\right| + C$

---

21 أُثبِت أنَّ: $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x}{x^2-2x-3}\,dx = \ln\left(\frac{16}{27}\right)$.

الحل:

$\frac{4x}{x^2-2x-3} = \frac{4x}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$

$A(x+1) + B(x-3) = 4x$

$x = 3 \Rightarrow A = 3$

$x = -1 \Rightarrow B = 1$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{4x}{x^2-2x-3}dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{x-3} + \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= (3\ln|x-3| + \ln|x+1|)\Big|_0^1$

$(3\ln 2 + \ln 2) - (3\ln 3) = \ln 8 + \ln 2 - \ln 27$

$= \ln\frac{16}{27}$

22 أُثبِت أنَّ:

$$\int_1^p \frac{1}{2x^2+x-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln\frac{4p-2}{p+1}$$

حيث: $p > 1$.

الحل:

$\frac{1}{2x^2+x-1} = \frac{1}{(2x-1)(x+1)}$

$= \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1}$

$A(x+1) + B(2x-1) = 1$

$x = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{2}{3}$

$\displaystyle\int_1^p \frac{1}{2x^2+x-1}dx = \int_1^p \left(\frac{\frac{2}{3}}{2x-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+1}\right)dx$

$= \left(\frac{1}{3}\ln|2x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+1|\right)\Big|_1^p$

$= \left(\frac{1}{3}\ln|2p-1| - \frac{1}{3}\ln|p+1|\right) - \left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)$

$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{2(2p-1)}{p+1}\right| = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{4p-2}{p+1}\right)$ ، $p > 1$

تمت بحمد الله

امنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

ناجح الجمزاوي

0795656881 0779192534

دعواتكم لوالدي ووالدتي بالرحمة والمغفرة